

# *GeoGebra*

## im Mathematikunterricht

Dr. Maike Abshagen  
23. September 2015

# Ergebnisse der E-Mail Umfrage

Folgende Schwerpunkte wurden gewünscht:

- Grundlagen
- Dreiecke/Vierecke Klasse 7/8
- Quadratische Funktionen
- Stochastik (Oberstufe)
- GeoGebra 3D
- Überblick

# Programm

- Allgemeines zu GeoGebra
- Vorstellung verschiedener Elemente von GeoGebra mit jeweils anschließender differenzierender Übungsphase
  - Leitidee Raum und Form: Geometrische Konstruktionen (koordinatenfreie Geometrie und Geometrie im Gitternetz)
  - Leitidee Funktionaler Zusammenhang: Funktionsplotter mit dynamischer Veränderung der Graphen, Tabellendarstellung von Funktions- und Messwerten, Differentialrechnung (Berechnungen und Animationen)
    - Leitidee Zahl: Äquivalenzumformungen, Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
    - Leitidee Messen: Messungen an geometrischen Objekten (**3D**)
    - Leitidee Daten und Zufall: **Stochastik** (Berechnungen und Animationen)

# Allgemeines Vorteile

- GeoGebra vereint die Systeme
  - DGS (Dynamisches Geometrie-System),
  - TKS (Tabellenkalkulationssystem) und
  - CAS (Computer-Algebra-System)  
(Ein „Excel-Führerschein“ ist dennoch sinnvoll!)
- GeoGebra ist kostenlos erhältlich
- GeoGebra läuft in vielen Konfigurationen  
(installiert, im Internet, Arbeitsbögen als HTML-Datei, auf Tablets)  
und in vielen Betriebssystemen (Windows, Mac, Linux)

# Allgemeines Ablauf einer PC-Stunde

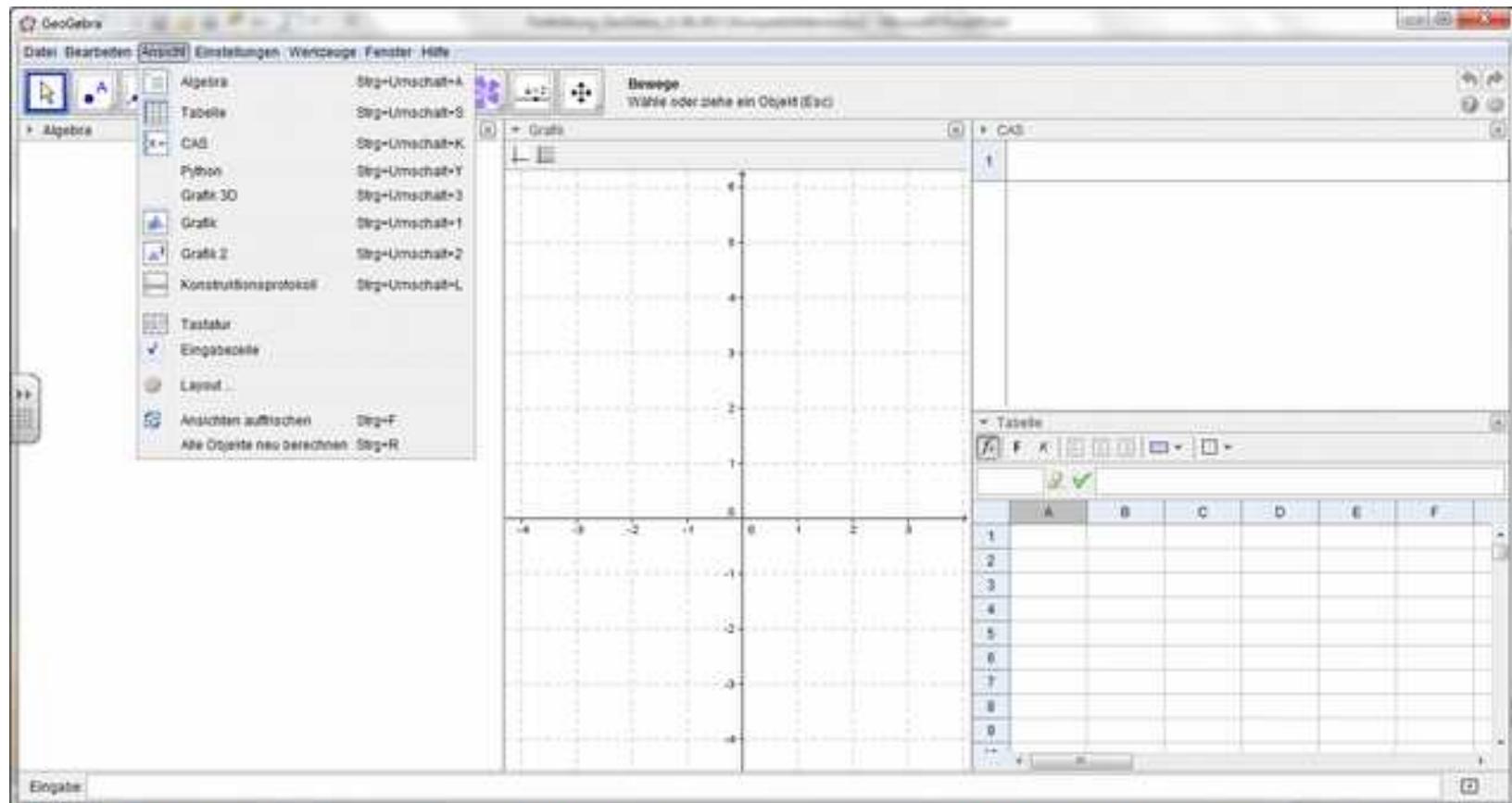
- Am Anfang der Stunde mindestens 5-minütige Plenumsphase, **Rechner ausgeschaltet** (oder mindestens: Monitor aus)
- UG nur bei ausgeschalteten Rechnern
- Keine erarbeitende Parallelarbeit LV (UG) ↔ Schülerarbeit am PC
- **Häufige Phasenwechsel im PC-Raum vermeiden!** Wenn Phasenwechsel, dann deutlich und durchsetzen!
- **Arbeitsaufträge schriftlich formulieren**
- Schriftliche Bedienungshilfen für das Programm bereitstellen
- Gruppenorganisation: zu zweit am Rechner: Wer bedient die Tastatur? Wie wird gewechselt?
- Konsequenzen bei Fehlverhalten vereinbaren: Regeln mit der Lerngruppe festlegen
- Sicherung der Ergebnisse überlegen
- Am Ende der Stunde mindestens 5-minütige Plenumsphase, **Rechner ausgeschaltet!**

# Allgemeines GeoGebra-Benutzeroberfläche

- Verschiedene Ansichten
  - Grafik-Ansicht (z. B. Geometrische Konstruktionen)
  - Algebra-Ansicht (z. B. Symbolische Darstellungen)
  - Tabellen-Ansicht (z. B. Tabellenkalkulationen)
  - CAS-Ansicht (z. B. Berechnungen)
- Benutzeroberfläche ist flexibel nach Bedürfnissen gestaltbar

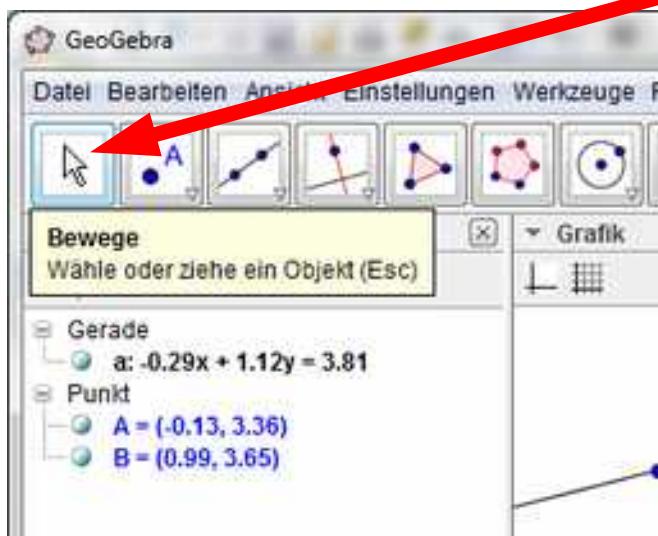
Start von GeoGebra.ggb

# Allgemeines GeoGebra-Benutzeroberfläche



# Allgemeines zu GeoGebra Hinweise

- Wichtigster Button „DER PFEIL“!



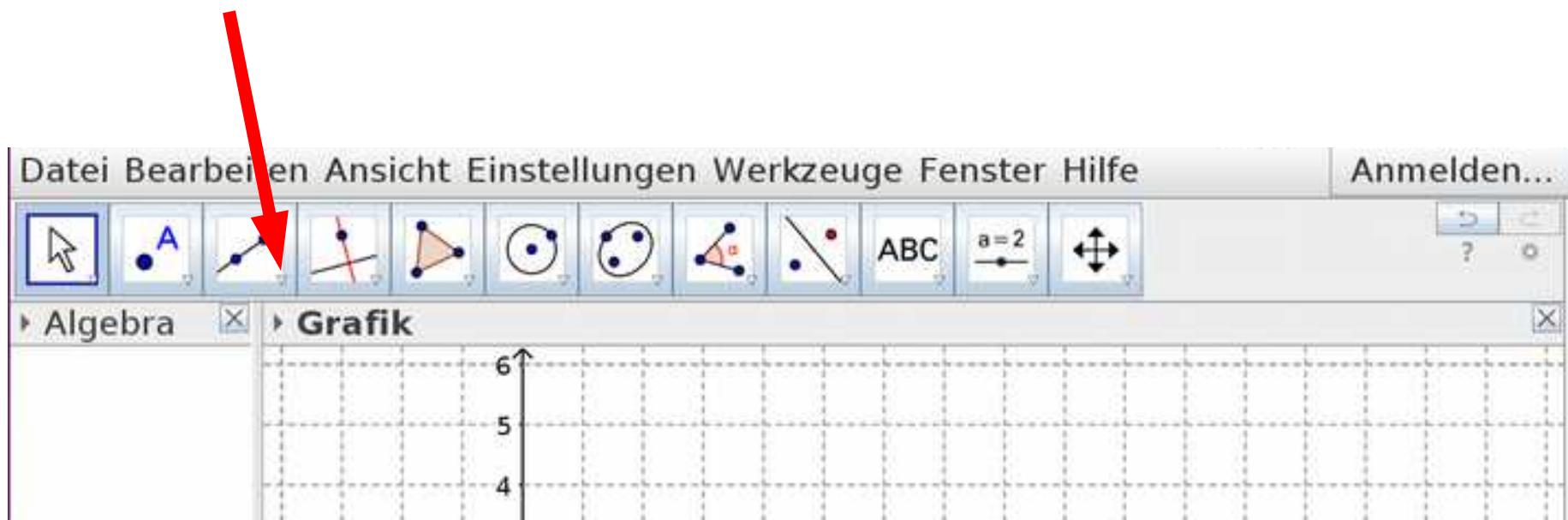
# Allgemeines zu GeoGebra Hinweise

- Anwählen → Erklärungen



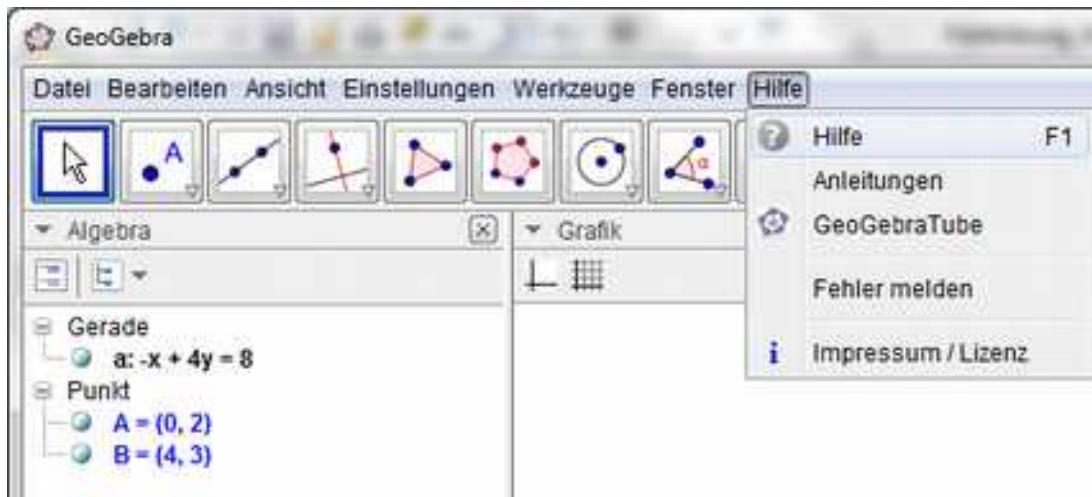
# Allgemeines zu GeoGebra Hinweise

- Anwählen des kleinen Dreiecks  
→ Liste ähnlicher Befehle



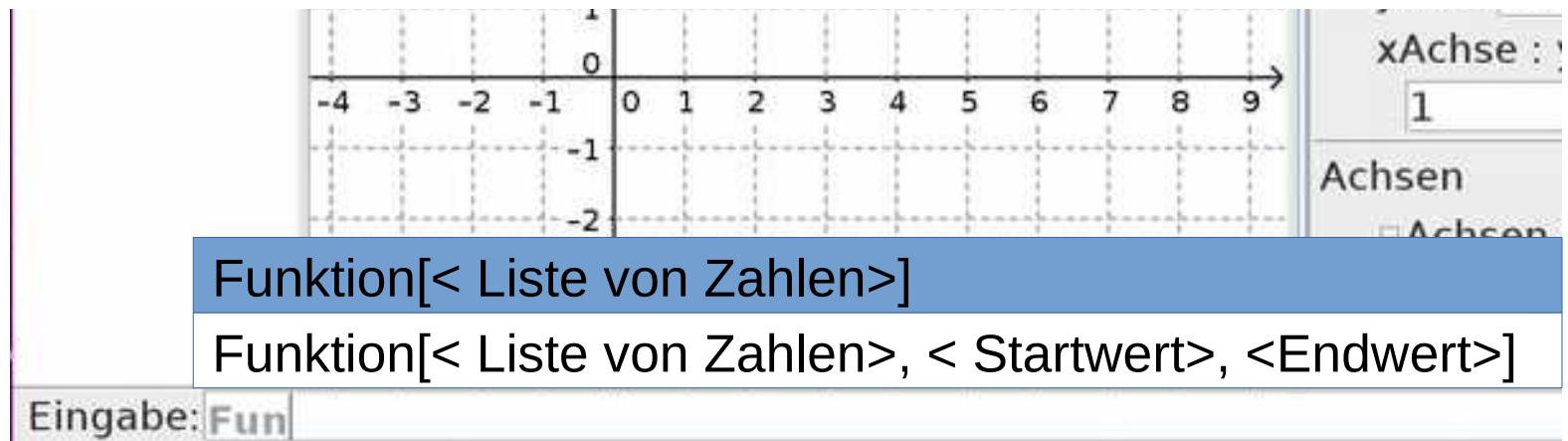
# Allgemeines zu GeoGebra Hinweise

- Online-Hilfe nutzen



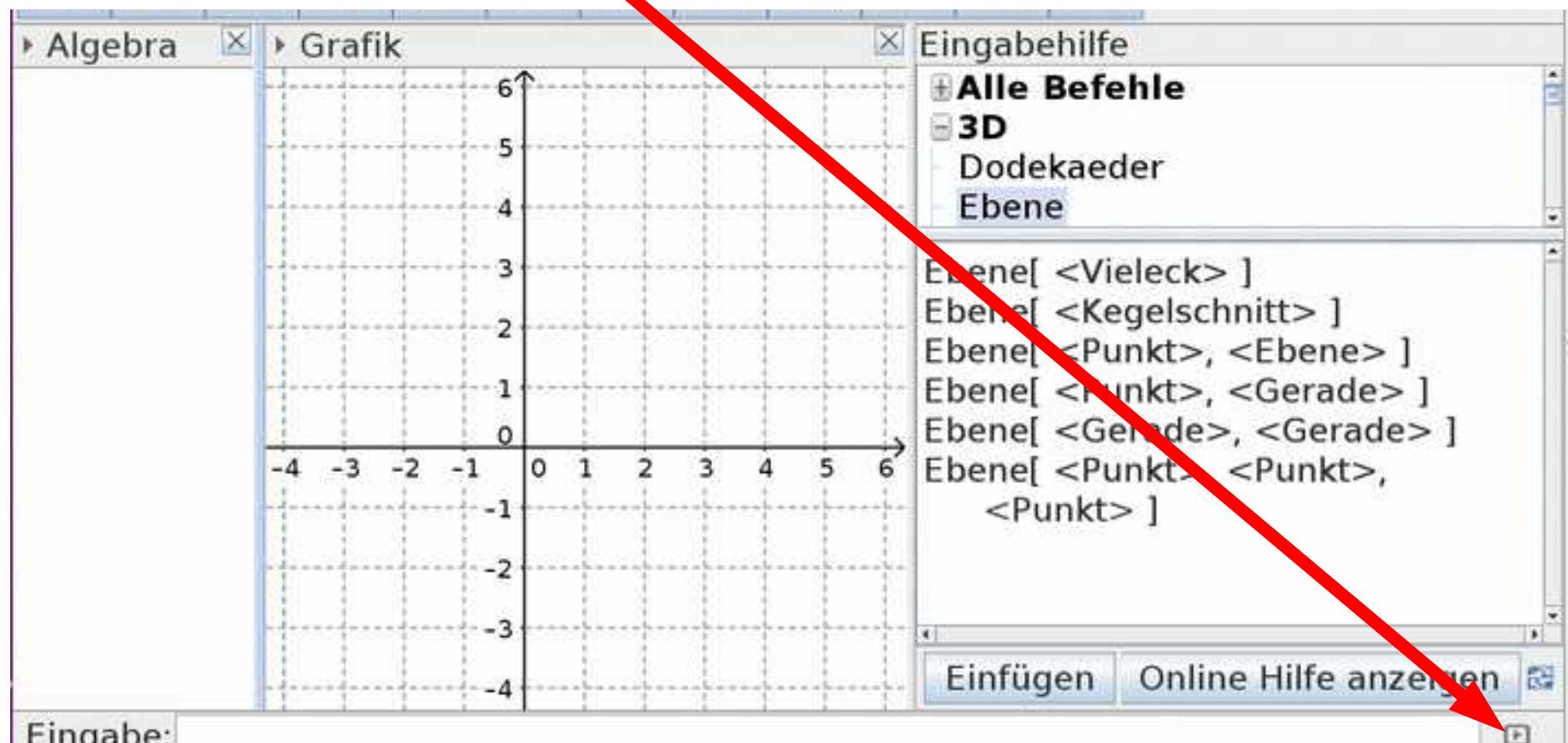
# Allgemeines zu GeoGebra Hinweise

- Eingabezeile nutzen



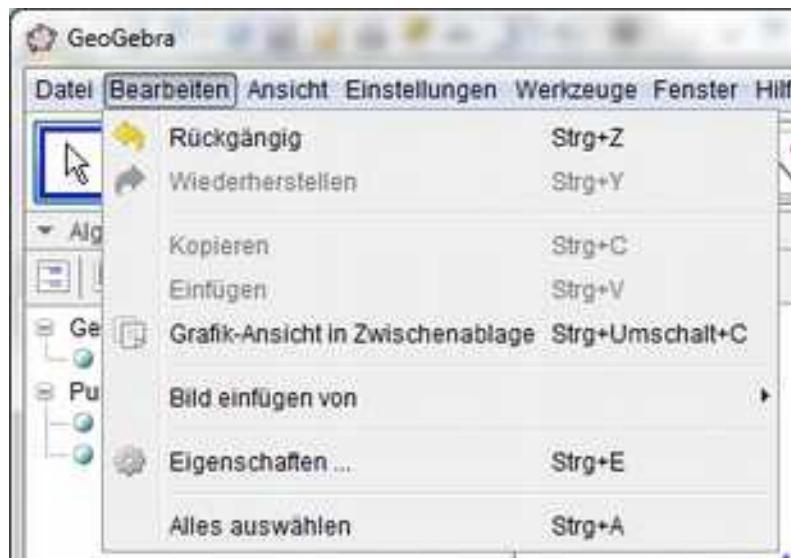
# Allgemeines zu GeoGebra Hinweise

- Befehlsliste nutzen



# Allgemeines zu GeoGebra Hinweise

- Schaltflächen „Rückgängig“ und „Wiederherstellen“ in der rechten oberen Ecke des GeoGebra-Fensters dazu verwenden, um etwaige Fehler auszubessern



# Arbeitsauftrag:



Finden Sie heraus, wie man  
ein Dreieck (\*) oder ein Bild (\*\*)  
an einer Geraden spiegelt.

# Arbeitsauftrag für eine sechste Klasse

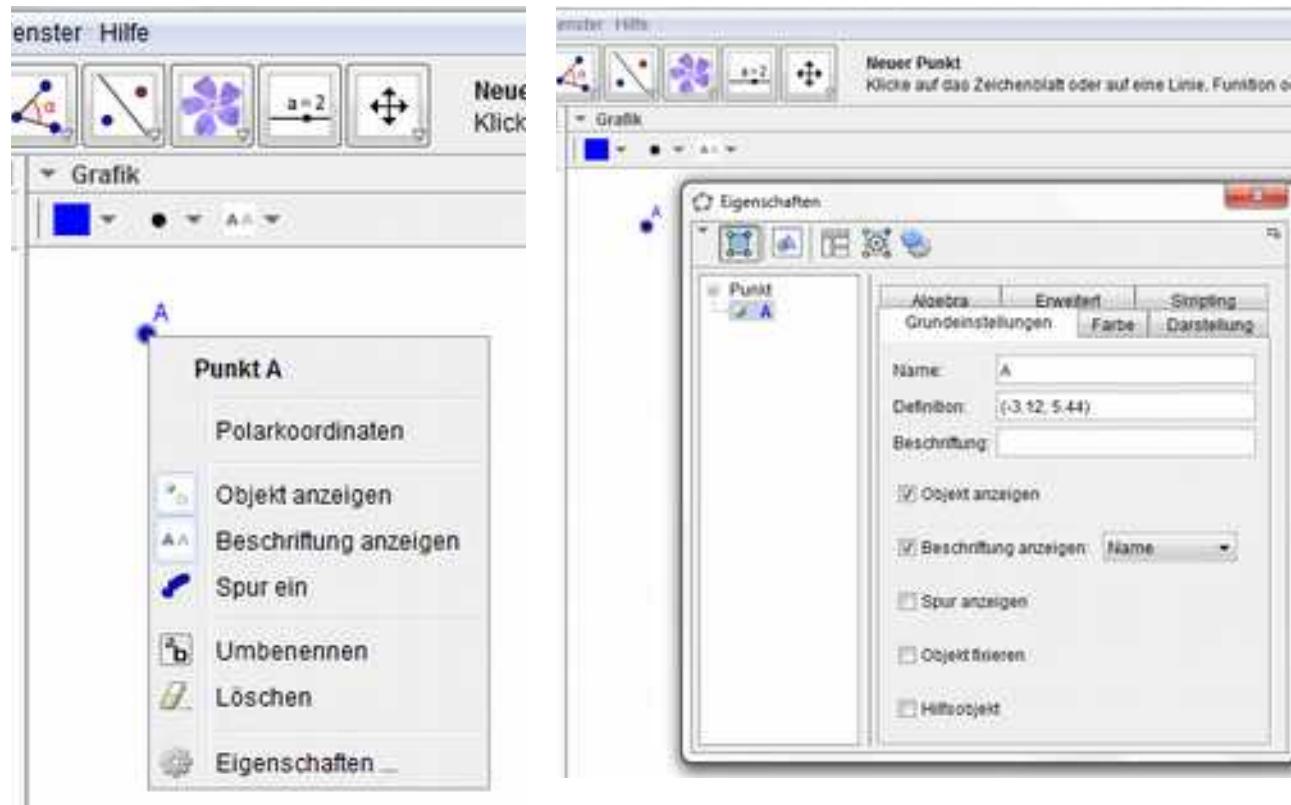
Bearbeite die folgende Aufgabe **ALLEINE**:

- Trage die folgenden Punkte in ein Koordinatensystem ein:  
A(3|1), B(4|3), C(3|4), D(2|2)
- Verbinde die vier Punkte zu einem Viereck.
- Spiegele die Figur an der y-Achse.
- Drehe die Figur. Nimm den Punkt (5|-1) als Drehzentrum und drehe um einen Winkel von  $45^\circ$ .
- Verschiebe um den Vektor  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Setzen Sie den Arbeitsauftrag mit GeoGebra um.

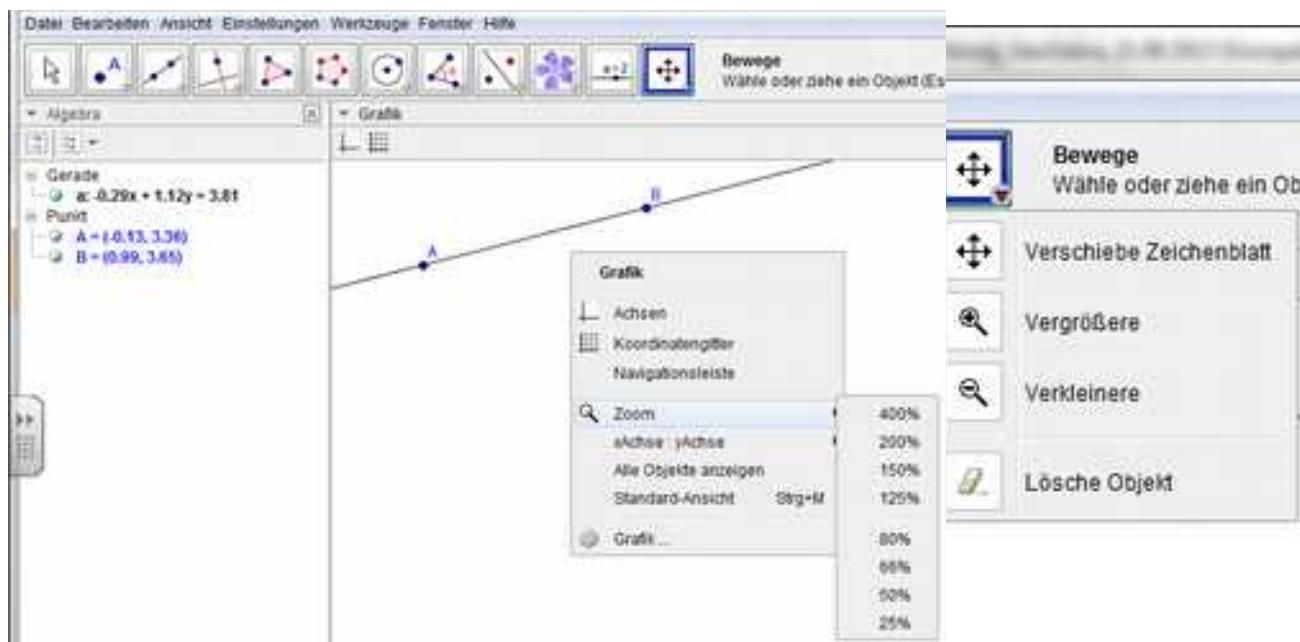
# Allgemeines zu GeoGebra Hinweise

- Objekte ein- und ausblenden, Eigenschaften ändern
  - Objekt anklicken, rechte Maustaste, Eigenschaften

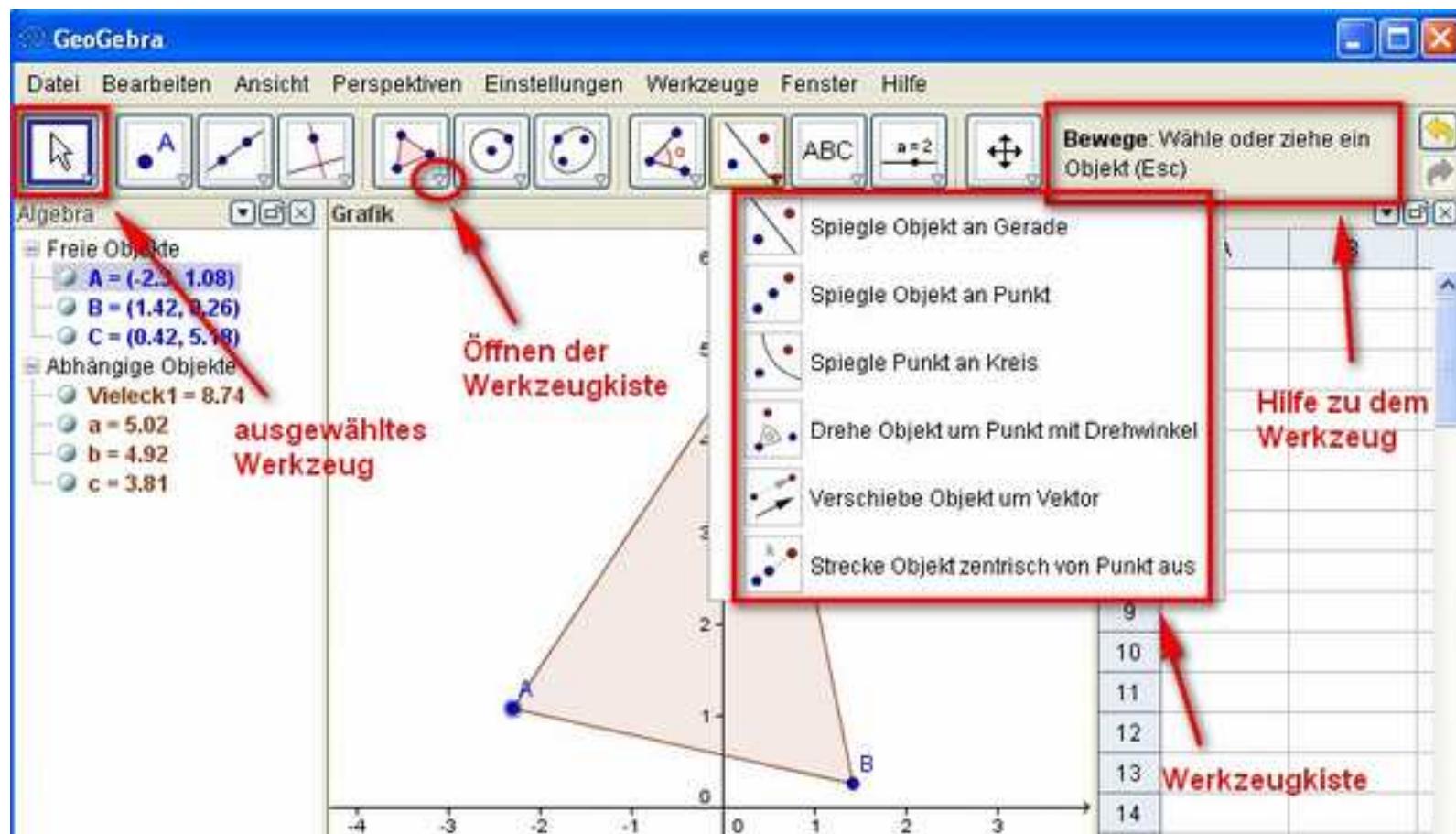


# Allgemeines zu GeoGebra Hinweise

- Vergrößern, Verkleinern und Verschieben des Bildausschnitts
  - Klicken Sie mit der rechten Maustaste auf eine freie Stelle des Zeichenblatts und wählen den Zoom-Faktor, oder ziehen Sie mit gedrückter rechter Maustaste ein Zoom-Fenster auf



# Konstruktionswerkzeuge



# Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal

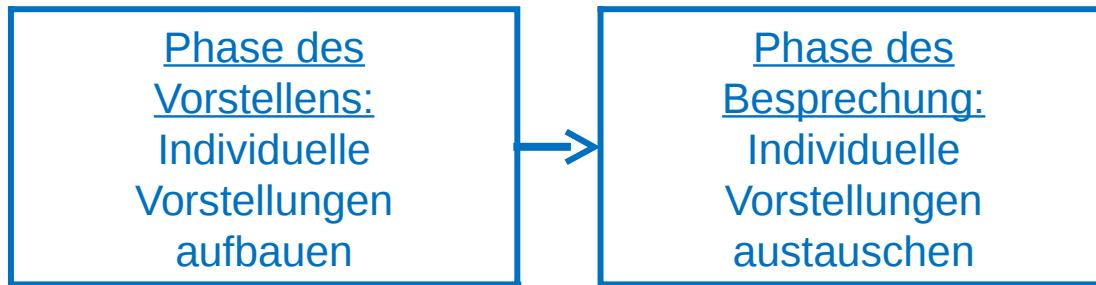
Grundkonstruktionen sind Konstruktionen, die man mit den zugelassenen Hilfsmittel in einem Schritt durchführen kann. Mit Zirkel und Lineal gibt es die folgenden Grundkonstruktionen:

Nr.	Beschreibung	Geogebra-Schaltfläche	Konstruktionstext in Geogebra
1	Zeichne einen Punkt A auf der Zeichenfläche.		-
2	Zeichne zu zwei Punkten A und B die Strecke $AB$ .		Strecke [A, C]
3	Zeichne zu zwei Punkten A und B die Gerade AB.		Gerade durch A, B
4	Wähle einen Punkt auf einer Linie a.		Punkt auf a
5	Schlage einen Kreis um den Mittelpunkt B, der durch A verläuft.		Kreis durch A mit Mittelpunkt B
6	Markiere den Schnittpunkt (die Schnittpunkte) zweier Linien.		Schnittpunkt von a, c

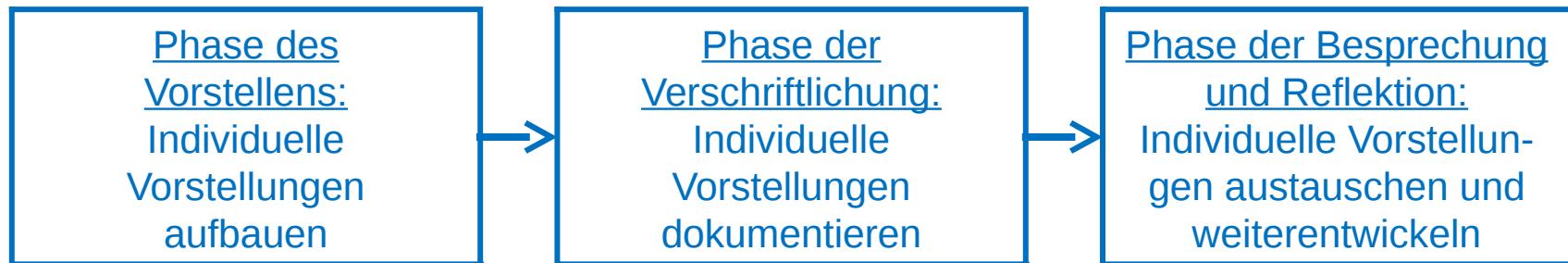
# Vorstellungsübung

Christoph Weber (2010)

- Ablauf von Vorstellungsübungen: Minimalvariante



- Ablauf von Vorstellungsübungen: Luxusvariante

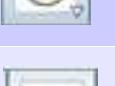
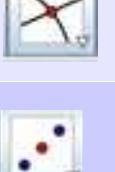


Christoph Weber (2010): Mathematische Vorstellungsübungen im Unterricht  
– Ein Handbuch für das Gymnasium. Klett – Kallmeyer (ISBN 978-3-7800-1047-6).

# Vorstellungsübung „Leiter rutschen“

- Durchführung der Vorstellungsübung
- Anschließende Fragen
  - Zum mathematischen Inhalt
  - Zum individuellen Vorstellungsaufbau

# Vorstellungsübung „Leiter rutschen“

	Beschreibung	Schaltfläche	Konstruktionstext in GeoGebra	Text in Eingabezeile
0	<b>Auswahlpfeil</b>		-	
1	Punkt A			$A=(1,2)$
2	Strecke von A nach B		Strecke [A,B]	Strecke [A,B]
3	Schieberegler von 0 bis 5 in 0,1er Schritten			Schieberegler[0,5,0.1]
4	Punkt auf der Gerade a		Punkt auf a	Punkt[a]
5	Kreis mit Mittelpunkt A durch B		Kreis mit Mittelpunkt A	Kreis[A,B]
6	Kreis mit Mittelpunkt A und Radius r		Kreis mit Mittelpunkt A	Kreis[A,r]
7	Schnittpunkt der Geraden (Strecken) a und b		Schnittpunkt von a,b	Schneide[a,b]
8	Mittelpunkt zwischen A und B		Mittelpunkt von A,B	Mittelpunkt[A,B]

# Feuerwehrleiter

- Eine Feuerwehrleiter wird an eine Wand gelehnt.
- Die Leiter wurde leider nicht festgemacht und rutscht nun an der Wand herunter.
- Stellen Sie die Situation mit GeoGebra dar.
- (\*) Markieren Sie den Mittelpunkt auf der Leiter. Nutzen Sie die Spur, um zu sehen, auf welcher Kurve sich der Mittelpunkt bewegt.
- (\*\*) Stellen Sie im zweiten Grafikfenster dar, wie sich die Höhe der Leiter in Abhängigkeit vom Anstellwinkel verändert.

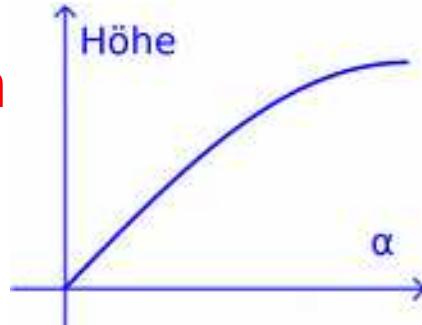
Feuerwehrleiter.ggb

# Darstellungsformen

## Text

Die über eine Drehleiter einer Feuerwehr erreichbare Höhe hängt vom Anstellwinkel ab.

## Graph



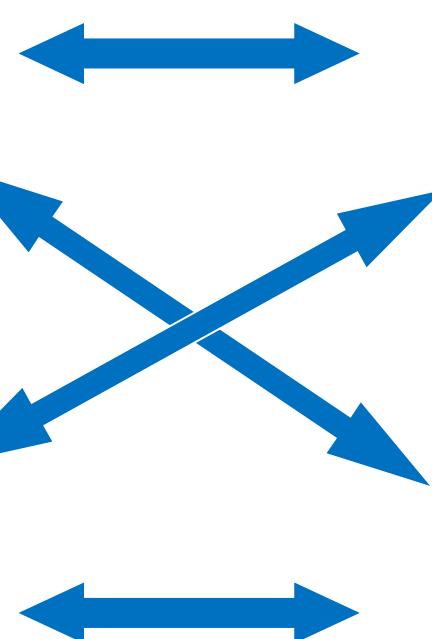
## Wertetabelle

Winkel	Höhe
50	7,7
60	8,7
70	9,4



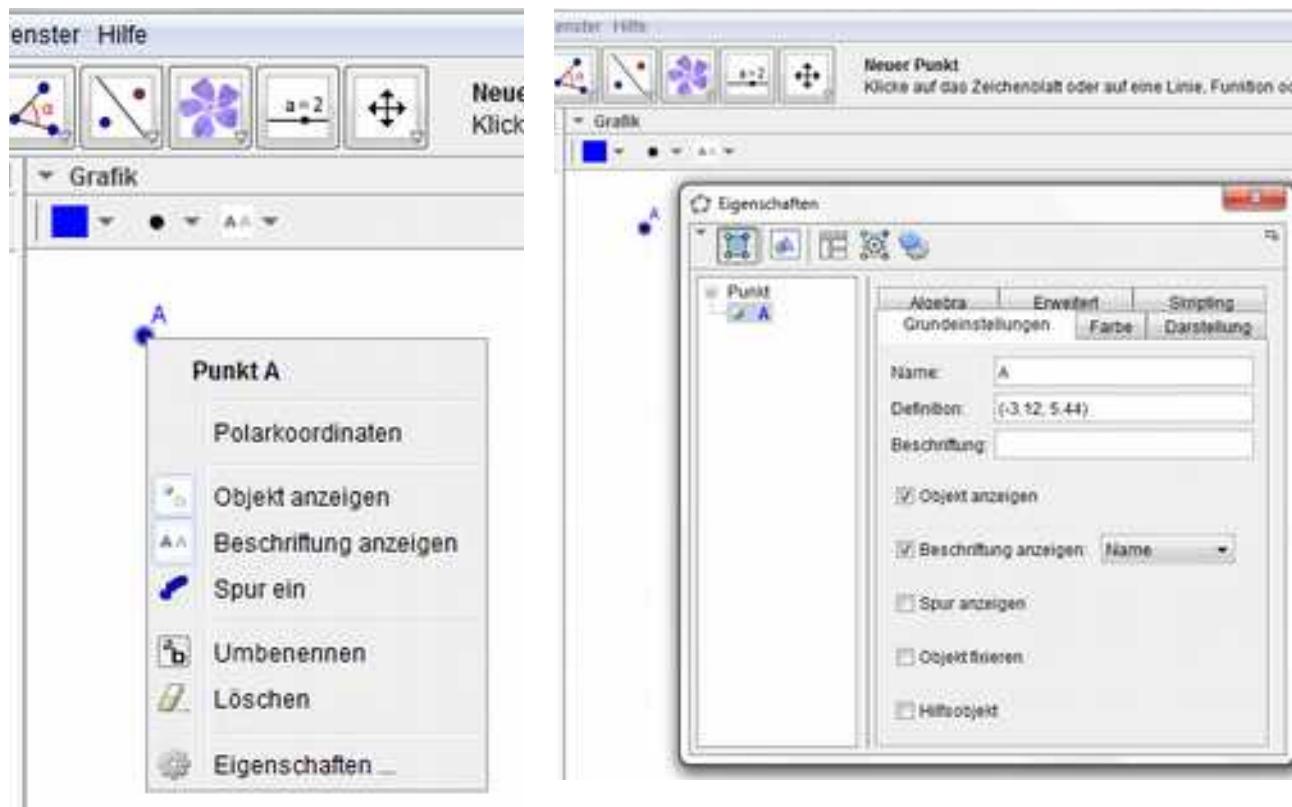
## Term

$$\alpha \rightarrow 10 \cdot \sin(\alpha)$$



# Allgemeines zu GeoGebra Hinweise

- Fremde Dateien untersuchen!
  - Objekt anklicken, rechte Maustaste, Eigenschaften



# Konstruktionsprotokoll

Nr.	Name	Definition	Haltepunkt
1	Punkt A		<input checked="" type="checkbox"/>
2	Kreis c <sub>2</sub>	Kreis mit Mittelpunkt A und Radius 5	<input checked="" type="checkbox"/>
3	Punkt B	Punkt auf c <sub>2</sub>	<input checked="" type="checkbox"/>
4	Kreis e	Kreis mit Mittelpunkt A und Radius 8	<input checked="" type="checkbox"/>
5	Kreis d	Kreis mit Mittelpunkt B und Radius 7	<input checked="" type="checkbox"/>
6	Strecke c <sub>3</sub>	Strecke [A, B]	<input checked="" type="checkbox"/>
7	Punkt C <sup>1</sup>	Schnittpunkt von e, d	<input checked="" type="checkbox"/>
8	DreieckVieleck1	Vieleck A, B, C	<input checked="" type="checkbox"/>
9	DreieckVieleck2	Vieleck A, B, C <sup>1</sup>	<input checked="" type="checkbox"/>



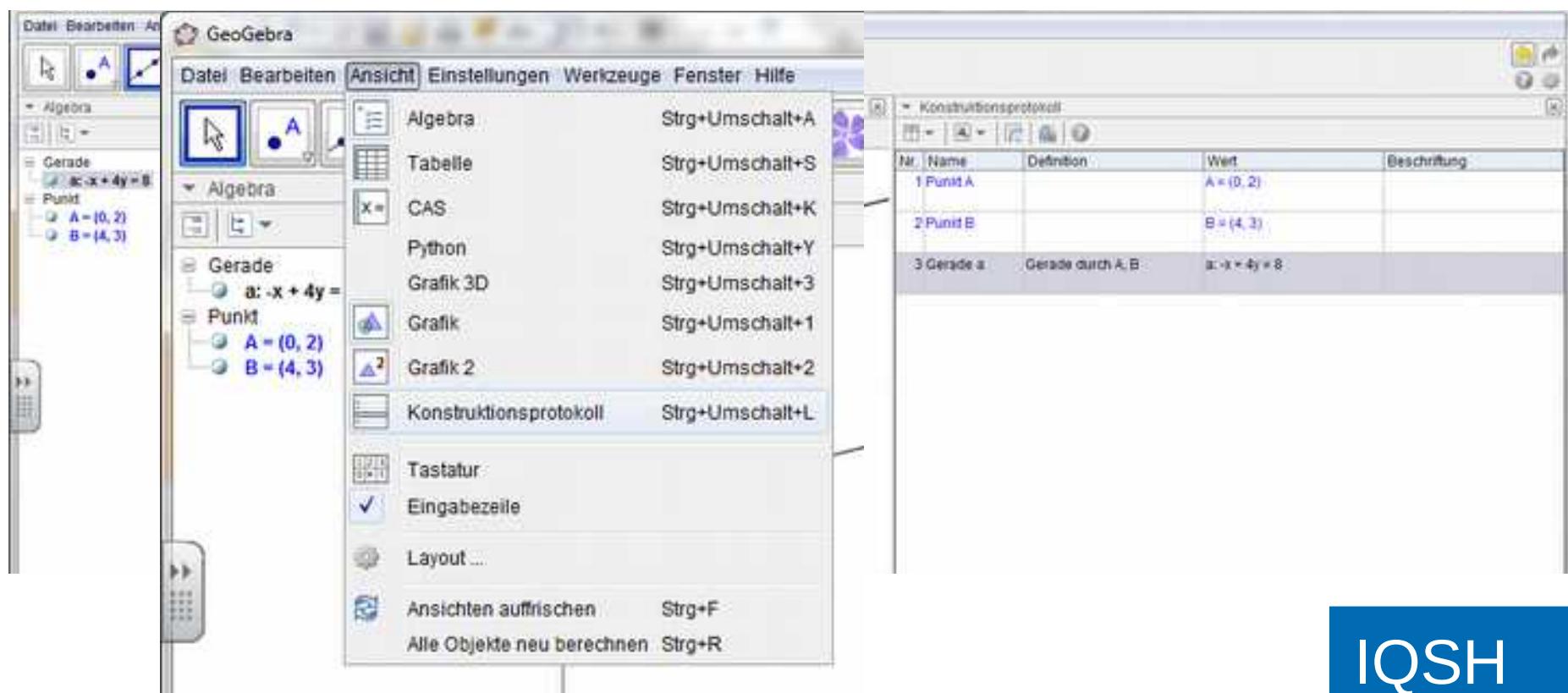
an	<input checked="" type="checkbox"/> Nur Haltepunkte anzeigen
in	<input checked="" type="checkbox"/> Konstruktionsprotokoll in Farbe
Kreis c <sub>2</sub>	Kreis mit Mittelpunkt A und Radius 5
Punkt B	Punkt auf c <sub>2</sub>

Feuerwehrleiter an der Wand.ggb

IQSH

# Allgemeines zu GeoGebra Hinweise

- Fremde Dateien untersuchen!
  - Ansicht Konstruktionsprotokoll: Konstruktion noch einmal abspielen

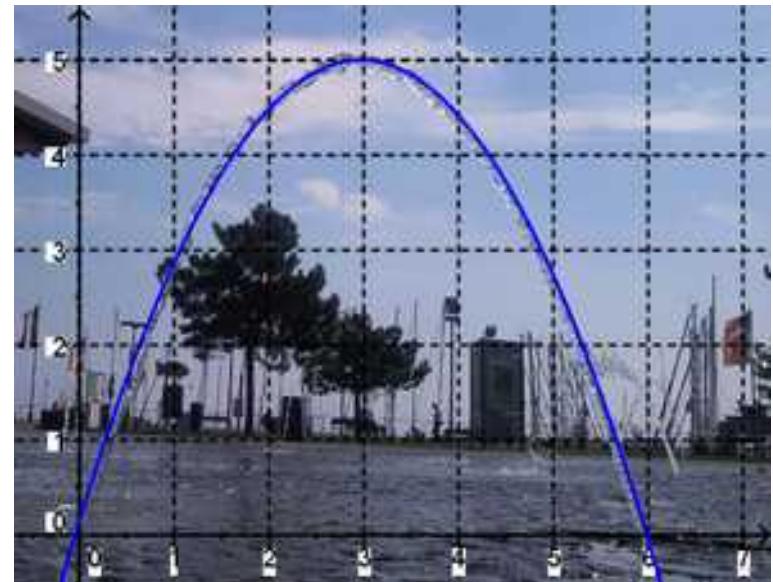


# Aufgabe für eine neunte Klasse: Schätze die Funktionsgleichung der Parabel

Erstellen Sie eine GeoGebra-Datei mit Hintergrundbild und fitten Sie etwas an. Verwenden Sie dazu Schieberegler.

(\*\*) Beschriften Sie Ihre Grafik. Verwenden Sie dazu LaTeX (siehe Tabelle).

(\*\*) Setzen Sie drei Punkte auf den Wasserstrahl. Lassen Sie die passende Parabel einzeichnen.  
Hilfe: Tragen Sie die Punkte in eine Tabelle ein. Markieren Sie die Punkte. Gehen Sie auf Analyse zweier Variablen.



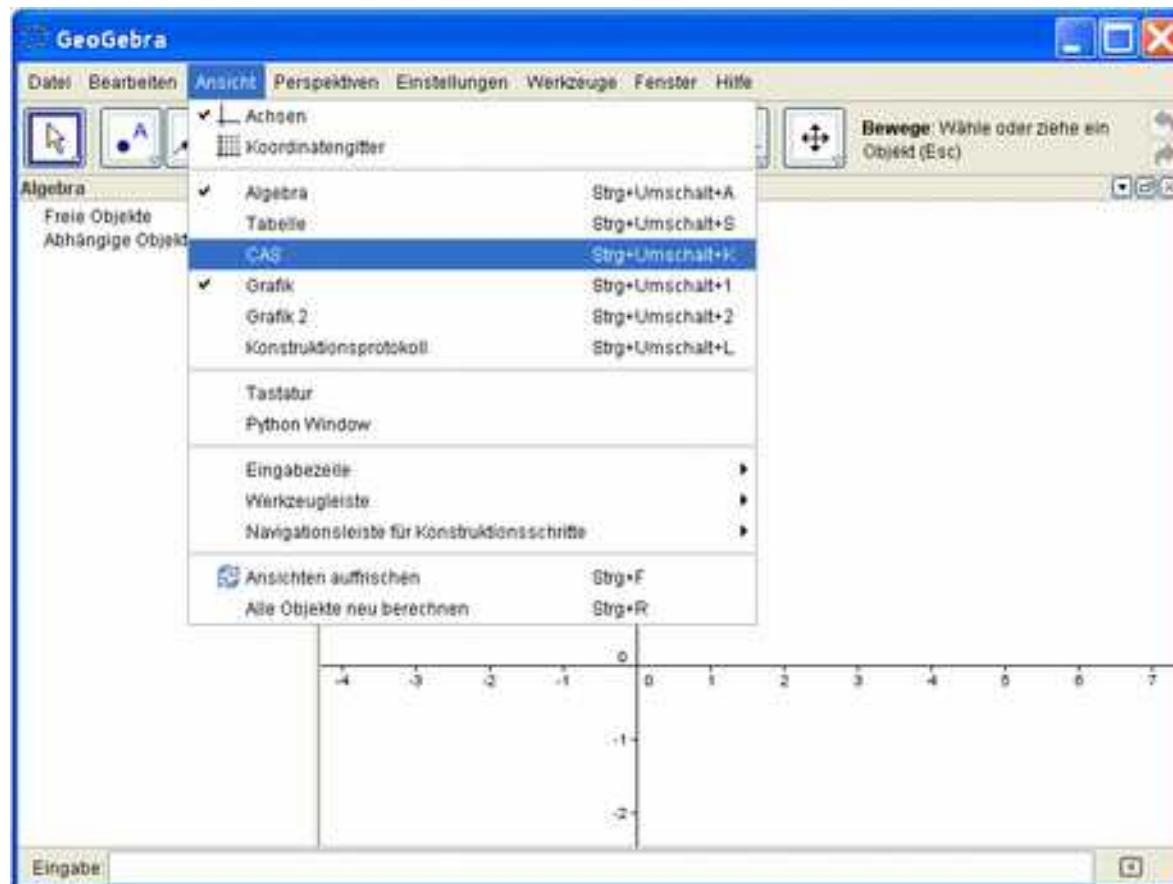
# Allgemeines zu GeoGebra Hinweise

- Grafikansicht als Bild exportieren
  - Datei – Export – Grafikansicht als Datei – Grafikansicht in Zwischenablage
  - Textdokument (z.B. Word oder OpenOffice) öffnen, einfügen z.B. über die rechte Maustaste
  - Falls man zwei Grafiken erzeugt hat: Es wird immer das Bild exportiert, das angeklickt ist.

# Äquivalenzumformungen mit GeoGebra

- Fast alle Computer-Algebra-Systeme erlauben das schrittweise Durchführen von Äquivalenzumformungen.
- Es ist an dieser Stelle nicht beabsichtigt, den Befehl „Solve“ anzuwenden. Vielmehr geht es darum, das Erkennen der jeweils notwendigen Äquivalenzumformungen zu üben.

# Äquivalenzumformungen mit GeoGebra



# Äquivalenzumformungen

The screenshot shows the GeoGebra Computer Algebra System (CAS) interface. The menu bar includes Datei, Bearbeiten, Ansicht, Perspektiven, Einstellungen, Werkzeuge, Fenster, and Hilfe. The toolbar contains various geometric and algebraic tools. The main workspace displays a sequence of steps for solving the equation  $3x + 2 = 4x + 3$ :

- 1  $3x + 2 = 4x + 3$   
→  $3x + 2 = 4x + 3$
- 2  $(3x + 2 = 4x + 3) - 2$   
→  $3x = 4x + 1$
- 3  $(3x = 4x + 1) - 4x$   
→  $-x = 1$
- 4  $(-x = 1) * (-1)$   
→  $x = -1$
- 5

The input field at the bottom left contains the command `Eingabe:`.

CAS-Fenster  
Befehl „subtrahiere 2“  
Eingabe „#-2“

# Lösen von Gleichungen

- Faktorisieren (**ALGEBRA-Fenster**)
  - Geben Sie die Funktionsgleichung „ $f(x)=x^2-3x+2$ “ ein
  - Verwenden Sie den Befehl Faktorisiere[f]
  - Verwenden Sie den Befehl VollständigesQuadrat[f]
- Gleichungen lösen (**CAS-Fenster**)
  - „Löse[ #1,x] return“ (#1 verwendet Zeile Nummer 1, löst nach x auf)
  - Kann quadratische Gleichungen lösen, ableiten (Ableitung[Funktion], Stammfunktionen bilden (Integral[Funktion]),...

# Lösen von Gleichungssystemen

The screenshot shows the GeoGebra software interface with a menu bar (Datei, Bearbeiten, Ansicht, Perspektiven, Einstellungen, Werkzeuge, Fenster, Hilfe) and a toolbar with various mathematical operators. The main window displays a sequence of steps to solve a system of equations:

- Step 1:  $2x+3y=5$  (Equation 1)
- Step 2:  $x-y=3$  (Equation 2)
- Step 3:  $(x-y=3)*3$  (Multiplication by 3)
- Step 4:  $-3x-3y=9$  (Equation 3)
- Step 5:  $(2x+3y=5)+(3x-3y=9)$  (Adding Equations 1 and 3)
- Step 6:  $-5x=14$  (Equation 4)
- Step 7:  $(5x=14)/5$  (Dividing by 5)
- Step 8:  $x=\frac{14}{5}$  (Equation 5)
- Step 9:  $(x=14/5)-(x-y=3)$  (Subtracting Equation 2 from Equation 5)
- Step 10:  $y=-\frac{1}{5}$  (Equation 6)

Red annotations are present in the right margin:

- "Eingabe der ersten Gleichung" next to Step 1
- "Eingabe der zweiten Gleichung" next to Step 2
- "#\*3" next to Step 3
- "#1+ #3" next to Step 5
- "#/5" next to Step 7
- "#5 - #2" next to Step 9

# Lösen von Gleichungssystemen

The screenshot shows a software interface for solving systems of equations. The menu bar includes Datei, Bearbeiten, Ansicht, Einstellungen, Werkzeuge, Fenster, and Hilfe. The toolbar contains various mathematical operators like =, ≈, √, ( ), x =, and ∂.

The main workspace displays the following steps:

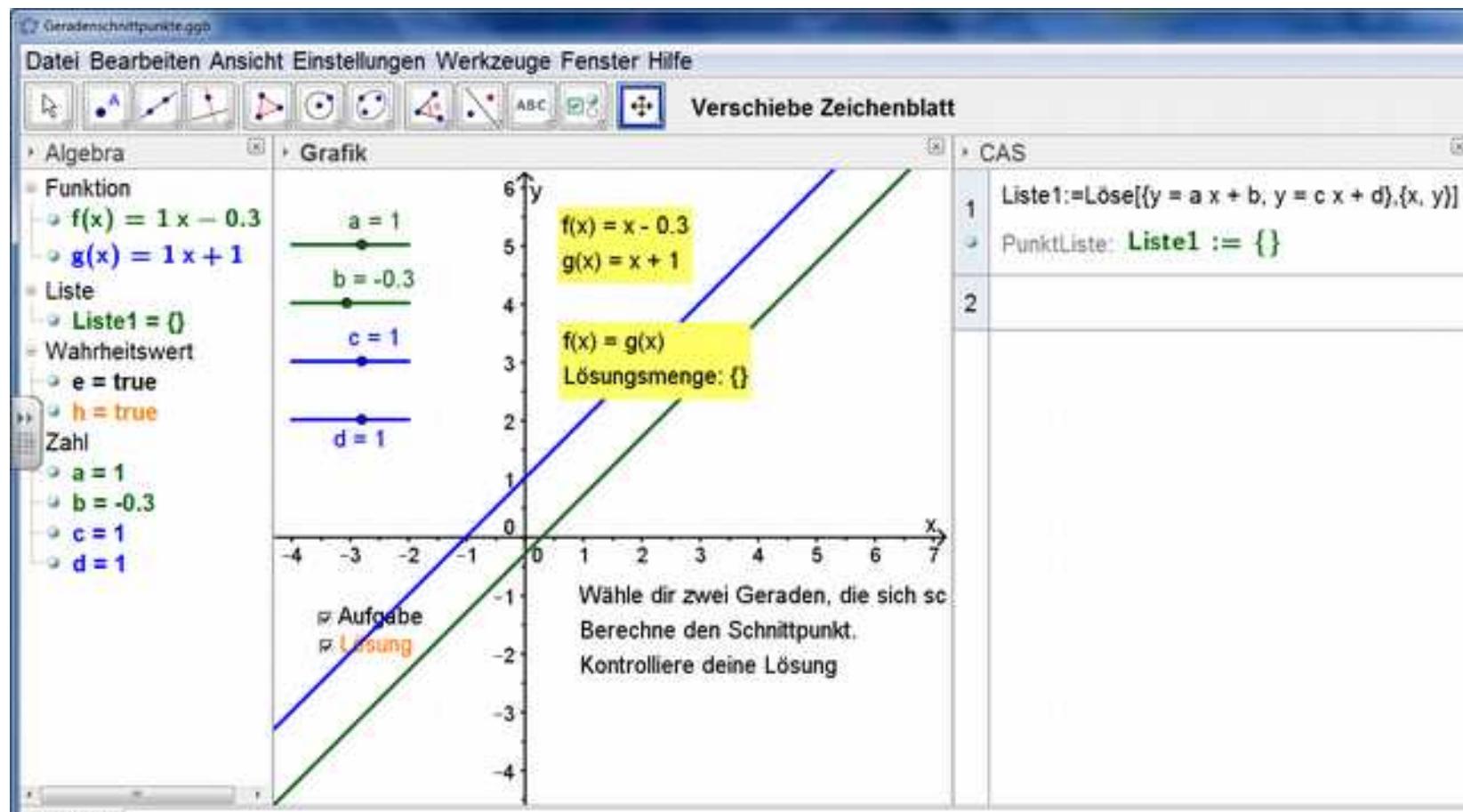
- 1  $4x+2y=5$   
→  $4x + 2y = 5$
- 2  $-2x+3=4$   
→  $-2x + 3 = 4$
- 3  $\text{Löse}[(4x + 2y = 5), (-2x + 3 = 4)], \{x, y\}$   
→  $\left( x = -\frac{1}{2}, y = \frac{7}{2} \right)$
- 4

A context menu is open on the right side of the third step, listing:

- Eingabehilfe
  - Komplexenstellene
  - Kovarianz
  - Kreuzprodukt
  - Länge
- CAS spezifische Befehle:
  - Löse[ <Gleichung in x> ]
  - Löse[ <Gleichung>, <Variable> ]
  - Löse[ <Liste von Gleichungen>, <Liste von Variablen> ]

Buttons at the bottom of the context menu include Einfügen and Online Hilfe anzeigen.

# Lösen von Gleichungssystemen



# Gleichungssystem lösen mittels Matrix

- Gleichungssystem in eine Tabelle eintragen
- Matrix aus **Tabelleneinträgen** erzeugen: Bereich markieren (z.B. 3 Zeilen, vier Spalten), rechte Maustaste, **Erzeuge - Matrix**
- Lösen des Gleichungssystems:  
**Treppennormalform[Matrix1]** in der Eingabezeile eingeben  
(ergibt Matrix2)
- Aus der Tabelle eine Liste erzeugen: **Erzeuge – Liste** (aus dem markierten Bereich), dann **Matrix2 \* Liste1** in der Eingabezeile eingeben

# Analytische Geometrie

**Eingabezeile (vieles funktioniert im CAS-Fenster nicht!)**

**A=(1,2,3)** legt den Punkt A fest

**Ebene[A,B,C]** legt eine Ebene durch die Punkte ABC fest

**Vektor[A,B]** erzeugt einen Vektor von A nach B

**Länge[u]** bestimmt die Länge des Vektors u

**Abstand[A,g]** bestimmt den Abstand von Punkt A zur Geraden g

**Schneide[g,h]** ergibt den Schnittpunkt der Geraden g und h

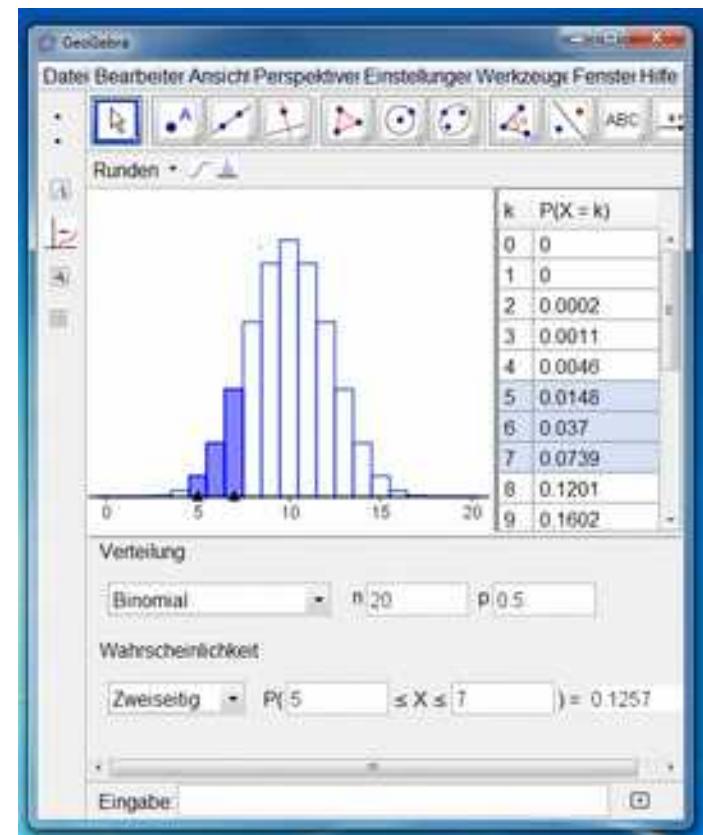
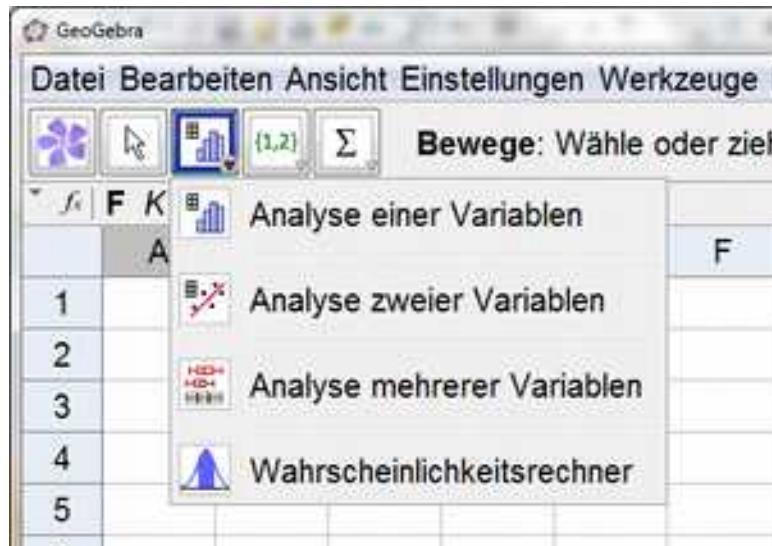
**Schneide[Ebene\_1,Ebene\_2]** ergibt die Schnittgerade

**Vieleck[ABCA]** erzeugt das Dreieck ABC

**Winkel[u,v]** gibt den Schnittwinkel zwischen den Vektoren u und v an

# Wahrscheinlichkeitsrechnung

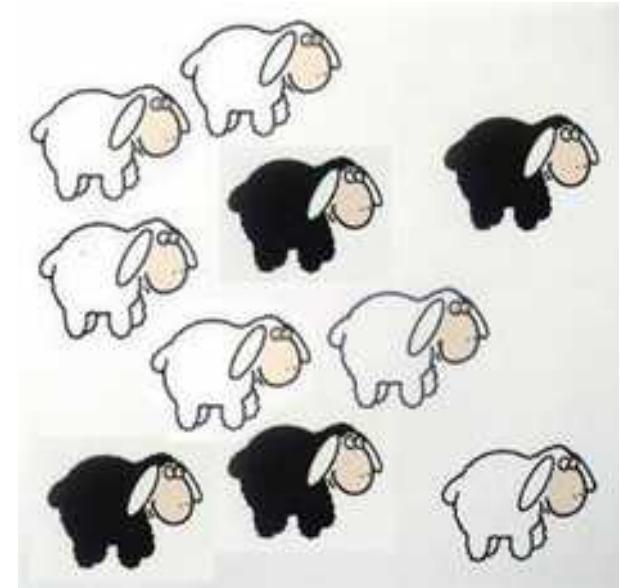
- Ansicht – Tabelle
  - Analyse einer Variablen
  - Wahrscheinlichkeitsrechner
  - Verteilung auswählen



# Arbeitsauftrag für eine Klasse im Einführungsjahr

Ein Bauer hat 10 Schafe, die mit Maul- und Klauenseuche infiziert sind. Ein Pharmaunternehmen produziert ein Medikament, das eine 80%-ige Heilungschance haben soll.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 6 Schafe geheilt werden?



Ermitteln Sie die Lösung mit der Statistik in GeoGebra.

**Hinweis:** Öffnen Sie eine Tabelle, dort finden Sie die *Statistik* unter der Analyse einer Variablen.

# 5. 3D-Graphik



- Die neueste Version mit 3D-Ansicht findet man unter  
<http://download.geogebra.org/installers/5.0/>

$$V = \frac{1}{3} \text{Grundfläche} * \text{Höhe}$$

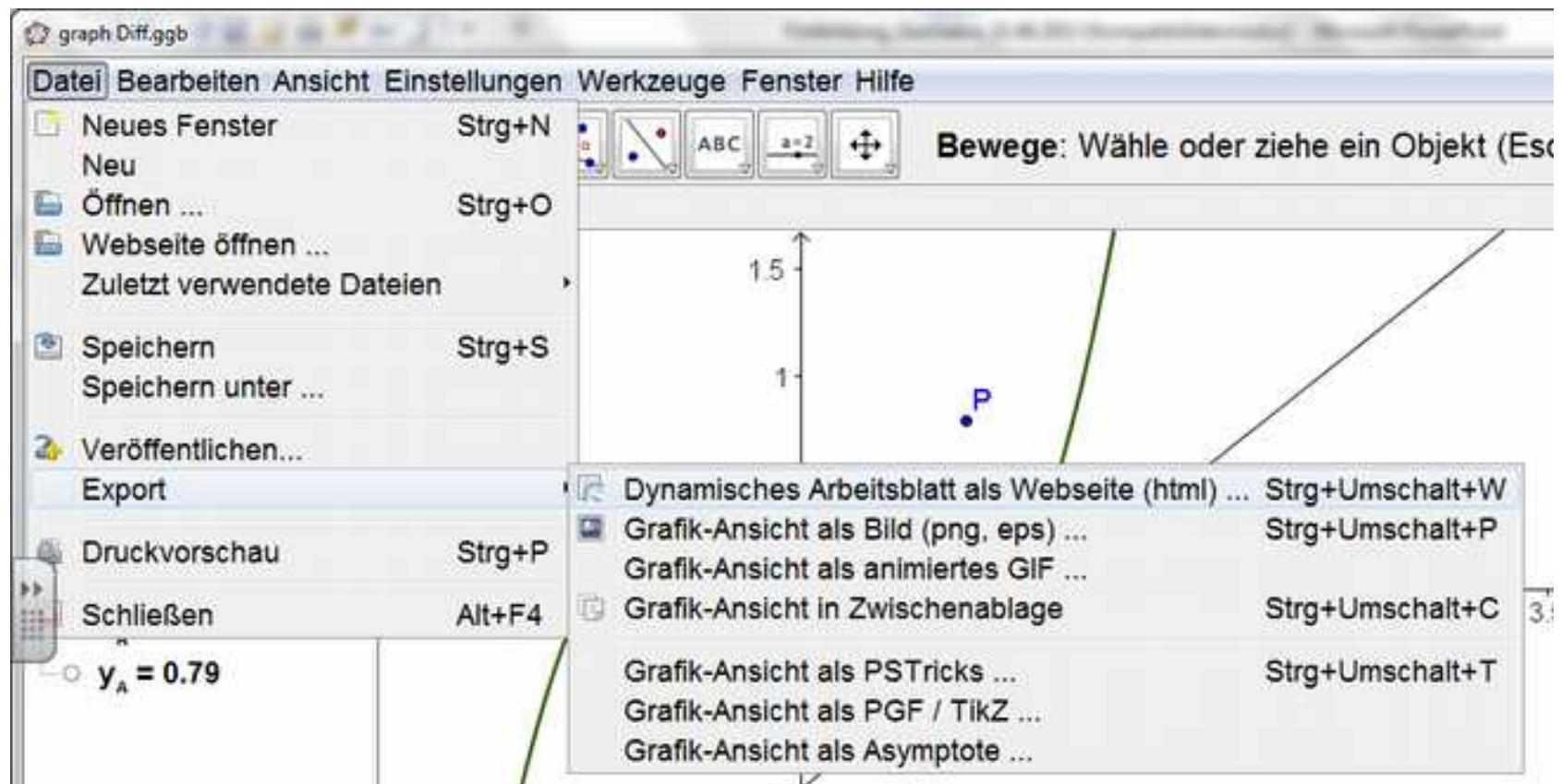
Erstellen Sie mit GeoGebra-3D einen Quader.

Erstellen Sie innerhalb des Quaders drei Pyramiden, deren Spitze im selben Punkt liegt.

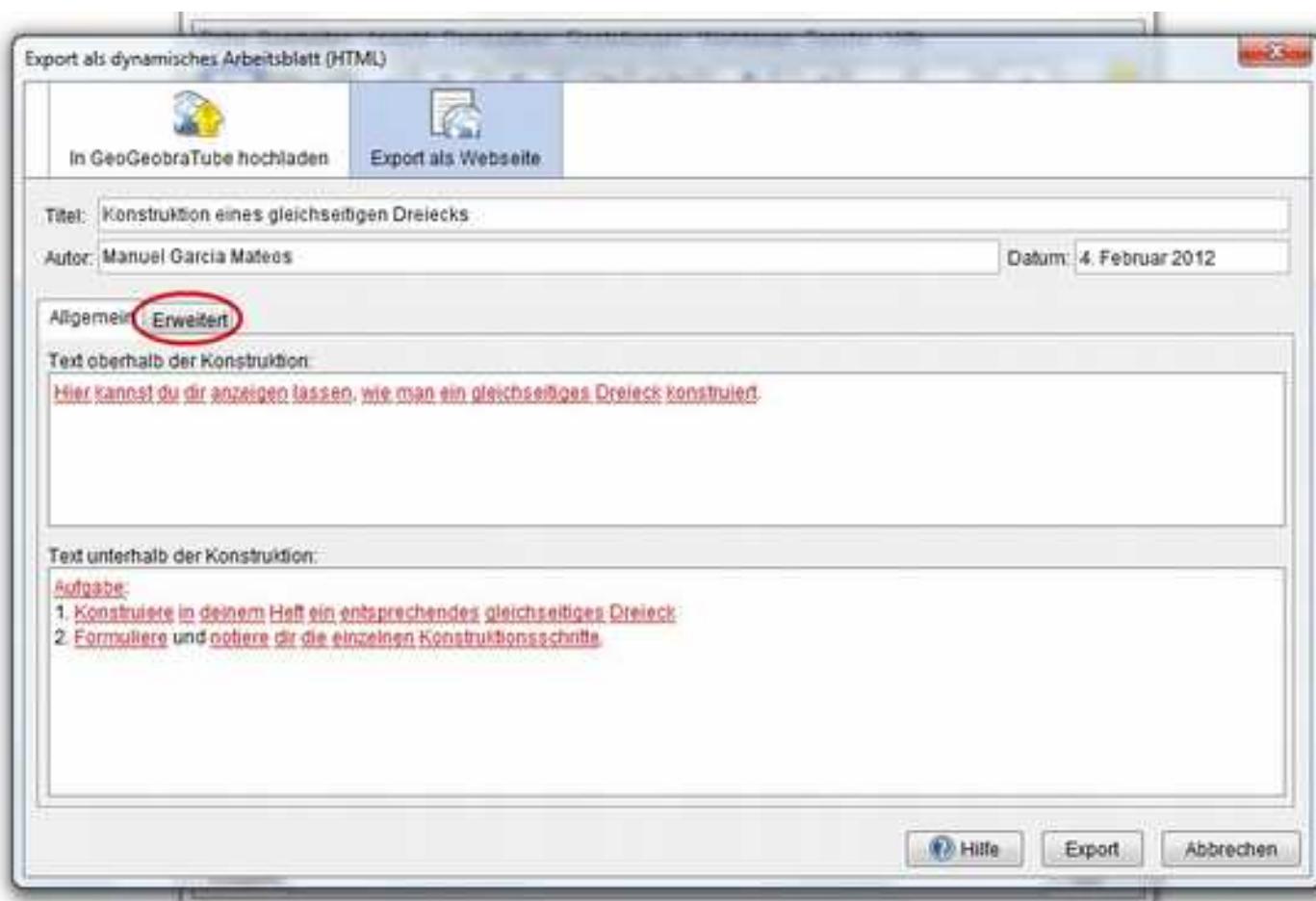
# 6. Dynamische Arbeitsblätter

- Die Datei wird als html-Datei exportiert
- Diese Datei kann mit einem html-Editor nachbearbeitet werden
  - Formatierung kann verändert werden
  - Texte können hinzugefügt werden
- Diese Datei kann auf eine Lernplattform (z. B. Moodle) hochgeladen werden und steht dann für jeden Schüler zur Verfügung
- Um die exportierte html-Datei zu nutzen, ist ein Internetzugang notwendig!
  - Es wird eine online-Version von GeoGebra gesucht und gestartet, was ohne online-Zugang nicht möglich ist (Applet-Version)
  - Wenn es nicht online geschehen soll, dann müssen beim Export die \*.jar-Dateien mit exportiert und versendet werden.

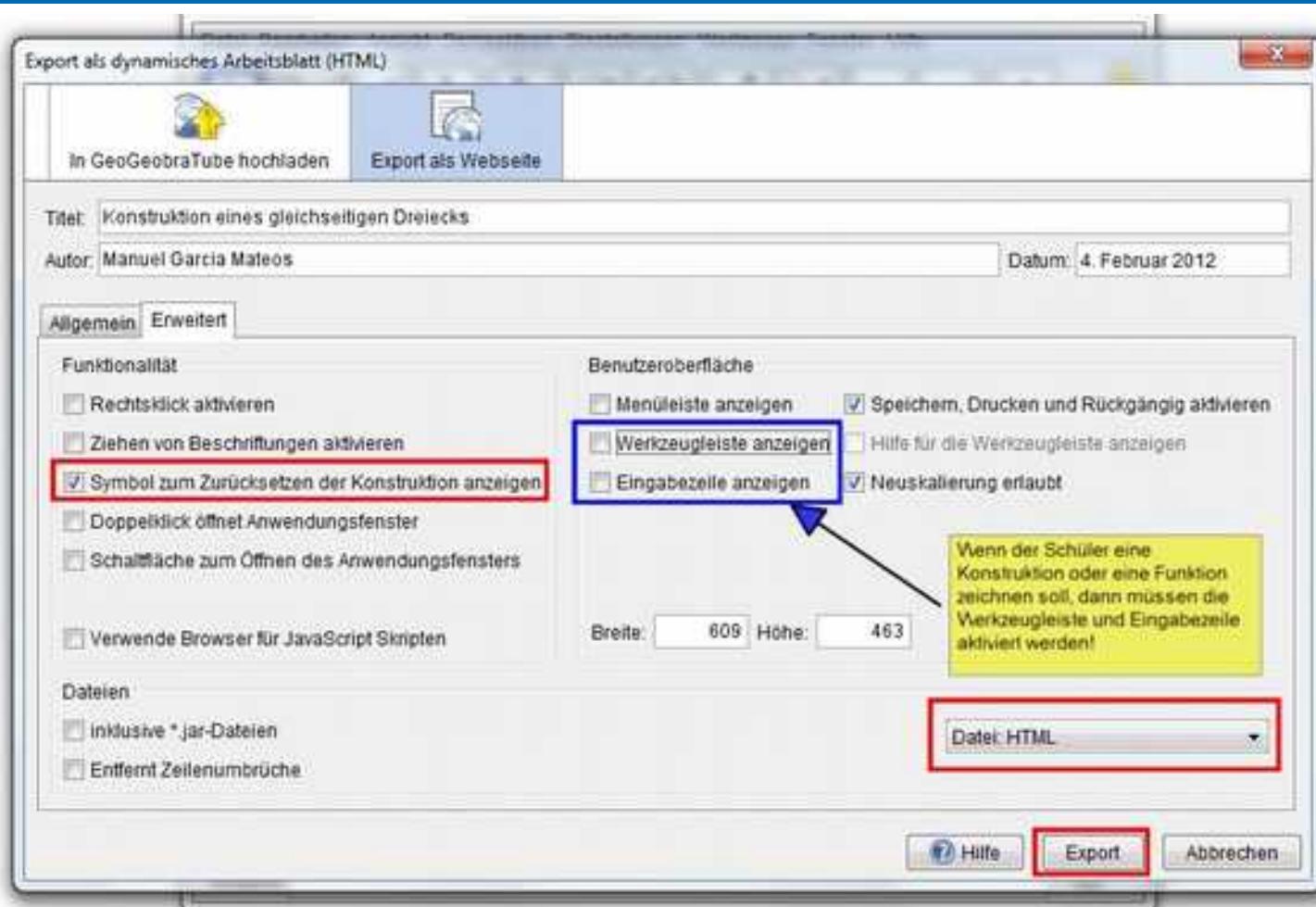
# Export-Funktion



# Export



# Export



# Dynamisches Arbeitsblatt mit GeoGebra

## Erzeugen von dynamischen Arbeitsblättern

**Technische Voraussetzung:** sowohl auf dem Rechner, auf dem Sie das Arbeitsblatt erstellen, wie auch auf den Rechnern, auf denen das Arbeitsblatt später verwendet werden soll, muss Java 1.4.2 (oder höher) installiert sein. Sie erhalten Java kostenlos von [www.java.com/de](http://www.java.com/de).

**Schritt 1: Eine Konstruktion mit GeoGebra erstellen.**

**Schritt 2: Das dynamische Arbeitsblatt erstellen.**

**Tipp:** Verändern Sie noch vor dem Export die Größe des Anwendungsfensters von GeoGebra so, dass die Konstruktion gut sichtbar ist, aber auch nicht zu viel Platz am Bildschirm einnimmt (das können Sie durch Ziehen einer "Ecke" des Anwendungsfensters mit der Maus erreichen).

**Schritt 3: Das Arbeitsblatt verfügbar machen - Export des Arbeitsblattes**

1) Wählen Sie im Menü „Datei“, „Export“ den Punkt „Dynamisches Arbeitsblatt als Webseite (html)“.

Im erscheinenden Export-Fenster können Sie Titel, Autor und Datum sowie einen Text oberhalb und unterhalb der dynamischen Konstruktion angeben (z.B. für eine Beschreibung der Konstruktion und Ihre Arbeitsaufträge).

Unter „Export als Website“, „Erweitert“ können Sie festlegen, was genau den Lernenden zur Verfügung stehen soll (Eingabezeile, Algebrafenster, Werkzeugleiste,...).

Sollen nur bestimmte Werkzeuge erscheinen, müssen die anderen vorher ausgeschaltet werden (unter „Werkzeuge“, „Werkzeugleiste anpassen“).

# Reflexion



- Heute habe ich gelernt, ...
- Ausprobieren will ich ...
- Ich hätte mir gewünscht, ...