



GeoGebra im Mathematikunterricht

Dr. Maike Abshagen
23. September 2015

Ergebnisse der E-Mail Umfrage

Folgende Schwerpunkte wurden gewünscht:

- Grundlagen
- Dreiecke/Vierecke Klasse 7/8
- Quadratische Funktionen
- Stochastik (Oberstufe)
- GeoGebra 3D
- Überblick

Programm

- Allgemeines zu GeoGebra
- Vorstellung verschiedener Elemente von GeoGebra mit jeweils anschließender differenzierender Übungsphase
 - Leitidee **Raum und Form**: Geometrische Konstruktionen (koordinatenfreie Geometrie und Geometrie im Gitternetz)
 - Leitidee **Funktionaler Zusammenhang**: Funktionsplotter mit dynamischer Veränderung der Graphen, Tabellendarstellung von Funktions- und Messwerten, Differentialrechnung (Berechnungen und Animationen)
 - Leitidee **Zahl**: Äquivalenzumformungen, Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
 - Leitidee **Messen**: Messungen an geometrischen Objekten (**3D**)
 - Leitidee **Daten und Zufall**: **Stochastik** (Berechnungen und Animationen)

Allgemeines Vorteile

- GeoGebra vereint die Systeme
 - DGS (Dynamisches Geometrie-System),
 - TKS (Tabellenkalkulationssystem) und
 - CAS (Computer-Algebra-System)(Ein „Excel-Führerschein“ ist dennoch sinnvoll!)
- GeoGebra ist kostenlos erhältlich
- GeoGebra läuft in vielen Konfigurationen
(installiert, im Internet, Arbeitsbögen als HTML-Datei, auf Tablets)
und in vielen Betriebssystemen (Windows, Mac, Linux)

Allgemeines Ablauf einer PC-Stunde

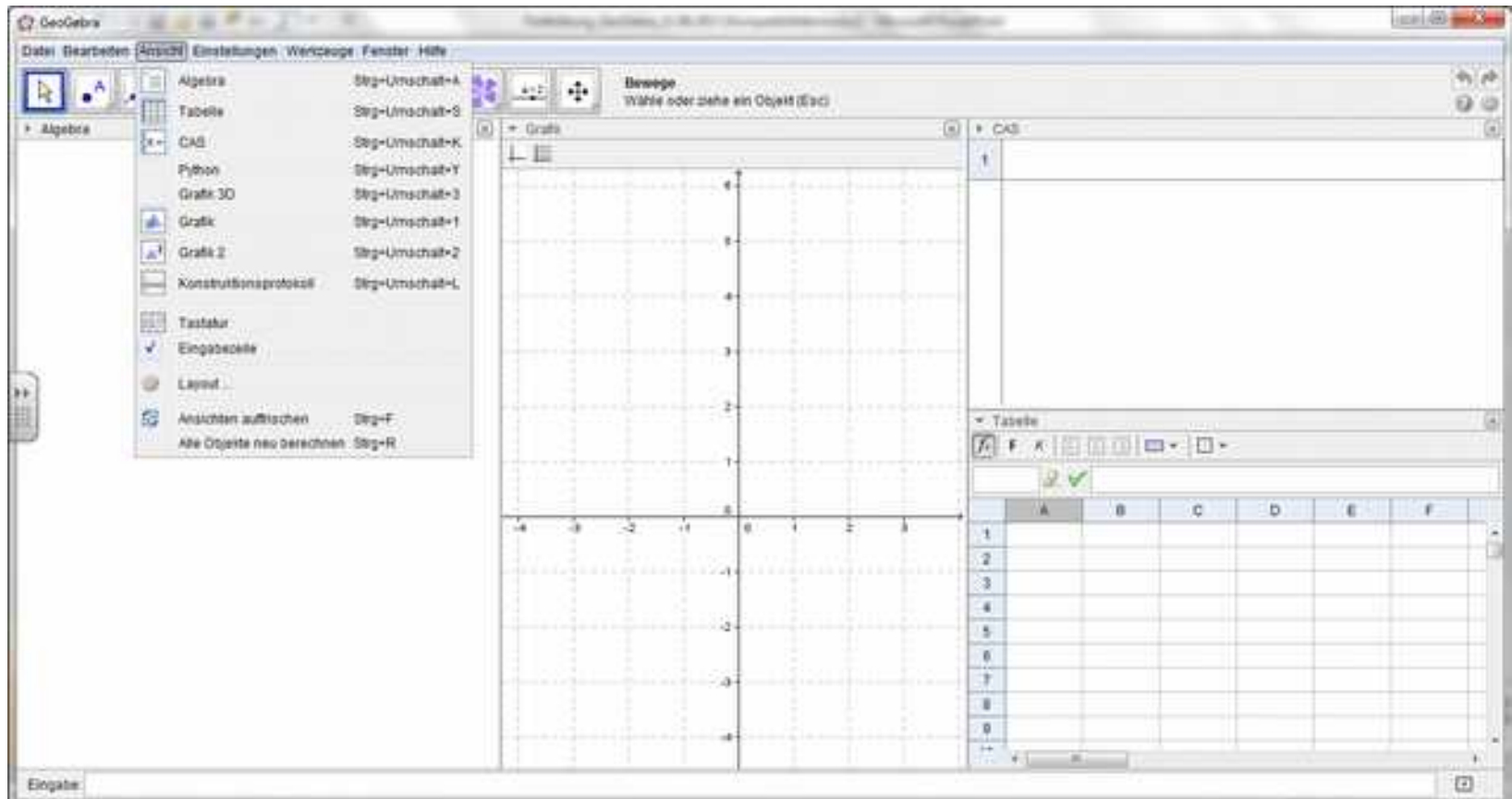
- Am Anfang der Stunde mindestens 5-minütige Plenumsphase, **Rechner ausgeschaltet** (oder mindestens: Monitor aus)
- UG nur bei ausgeschalteten Rechnern
- Keine erarbeitende Parallelarbeit LV (UG) ↔ Schülerarbeit am PC
- **Häufige Phasenwechsel im PC-Raum vermeiden!** Wenn Phasenwechsel, dann deutlich und durchsetzen!
- **Arbeitsaufträge schriftlich formulieren**
- Schriftliche Bedienungshilfen für das Programm bereitstellen
- Gruppenorganisation: zu zweit am Rechner: Wer bedient die Tastatur? Wie wird gewechselt?
- Konsequenzen bei Fehlverhalten vereinbaren: Regeln mit der Lerngruppe festlegen
- Sicherung der Ergebnisse überlegen
- Am Ende der Stunde mindestens 5-minütige Plenumsphase, **Rechner ausgeschaltet!**

Allgemeines GeoGebra-Benutzeroberfläche

- Verschiedene Ansichten
 - Grafik-Ansicht (z. B. Geometrische Konstruktionen)
 - Algebra-Ansicht (z. B. Symbolische Darstellungen)
 - Tabellen-Ansicht (z. B. Tabellenkalkulationen)
 - CAS-Ansicht (z. B. Berechnungen)
- Benutzeroberfläche ist flexibel nach Bedürfnissen gestaltbar

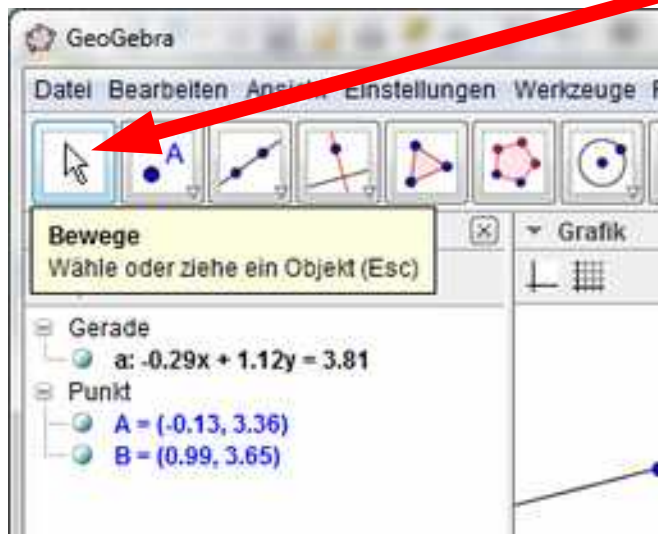
Start von [GeoGebra.ggb](https://www.geogebra.org/m)

Allgemeines GeoGebra-Benutzeroberfläche



Allgemeines zu GeoGebra Hinweise

- Wichtigster Button „DER PFEIL“!



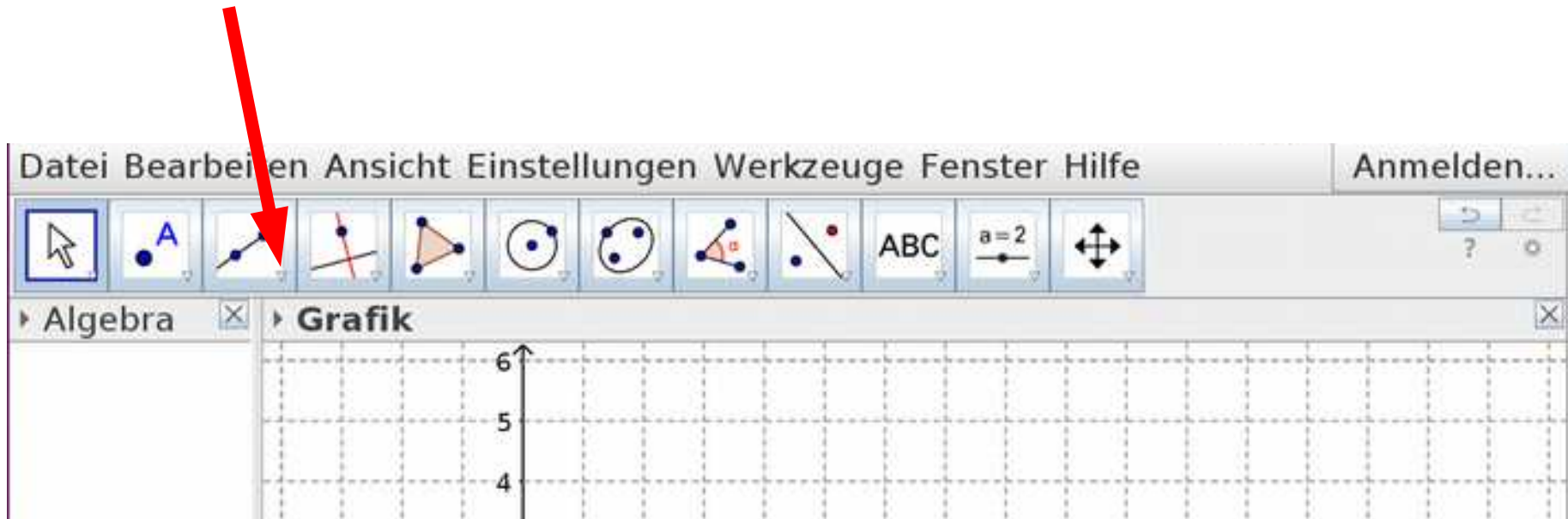
Allgemeines zu GeoGebra Hinweise

- Anwählen → Erklärungen



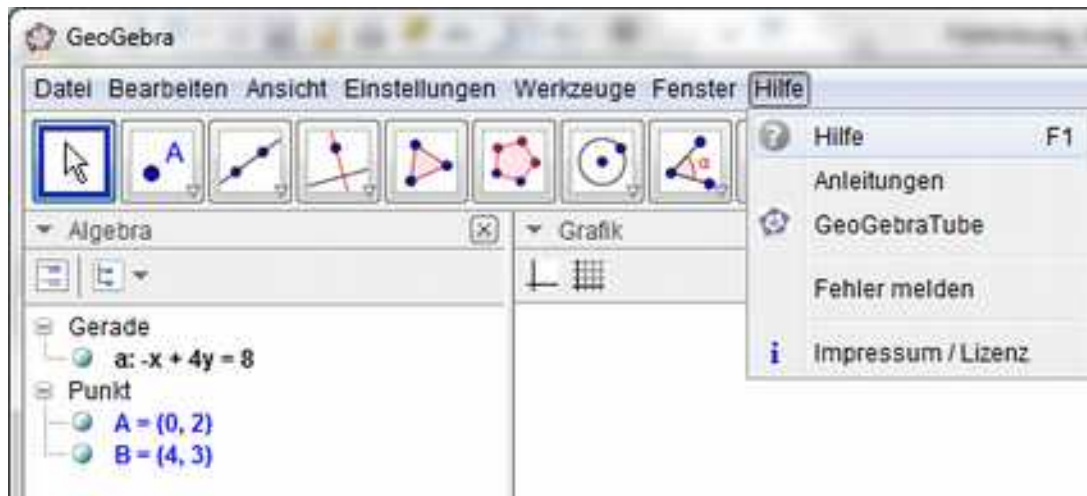
Allgemeines zu GeoGebra Hinweise

- Anwählen des kleinen Dreiecks
→ Liste ähnlicher Befehle



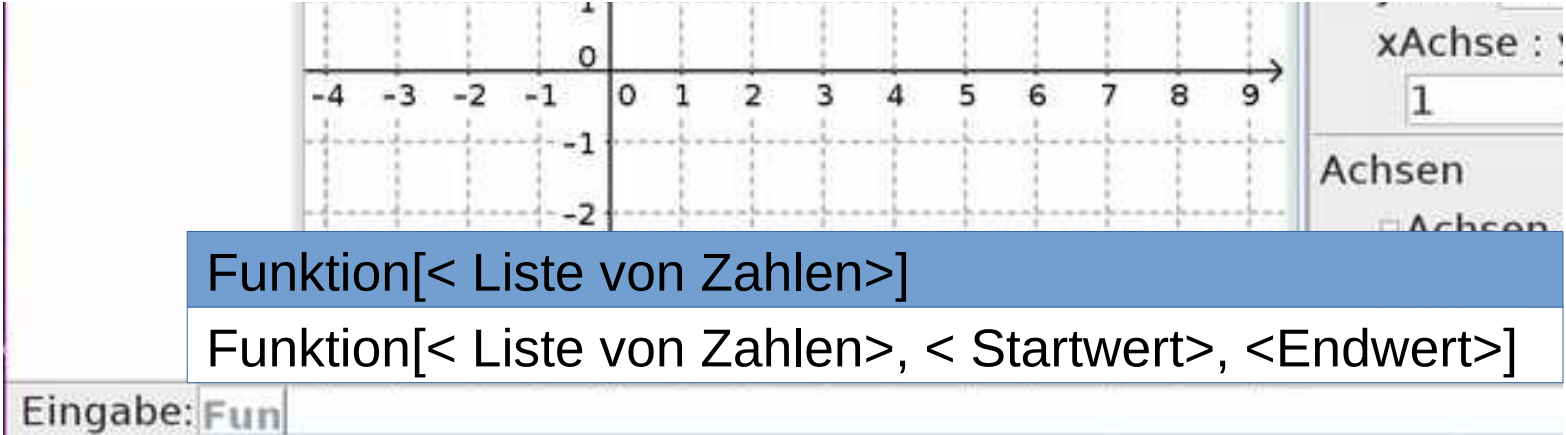
Allgemeines zu GeoGebra Hinweise

- Online-Hilfe nutzen



Allgemeines zu GeoGebra Hinweise

- Eingabezeile nutzen



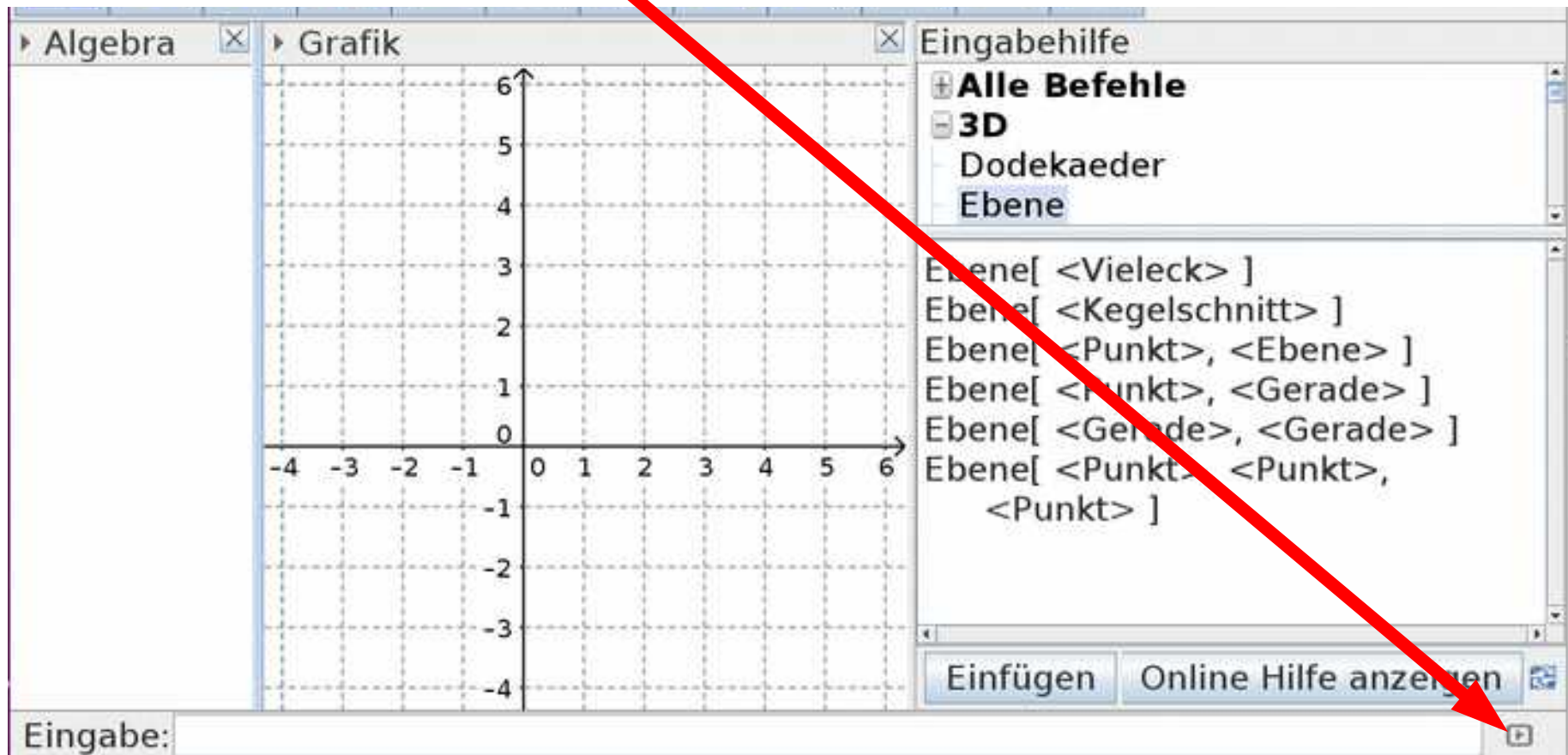
The screenshot shows the GeoGebra interface. In the background, there is a coordinate system with a grid. The x-axis is labeled from -4 to 9, and the y-axis is labeled from -2 to 1. To the right of the coordinate system, there are input fields for 'xAchse' (set to 1) and 'yAchse' (set to 1). Below these, there are checkboxes for 'Achsen' and 'Einheitsvektoren'. In the foreground, there is a blue semi-transparent box containing the text 'Funktion[< Liste von Zahlen>]' and 'Funktion[< Liste von Zahlen>, < Startwert>, <Endwert>]'. At the bottom, there is an input field labeled 'Eingabe:' with the text 'Fun' entered.

Funktion[< Liste von Zahlen>]
Funktion[< Liste von Zahlen>, < Startwert>, <Endwert>]

Eingabe: Fun

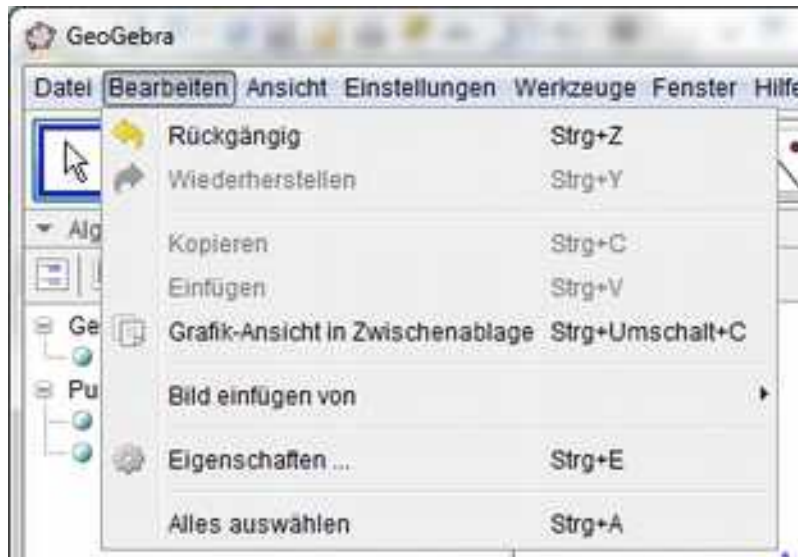
Allgemeines zu GeoGebra Hinweise

- Befehlsliste nutzen



Allgemeines zu GeoGebra Hinweise

- Schaltflächen „Rückgängig“ und „Wiederherstellen“ in der rechten oberen Ecke des GeoGebra-Fensters dazu verwenden, um etwaige Fehler auszubessern



Arbeitsauftrag:

Finden Sie heraus, wie man
ein Dreieck (*) oder ein Bild (**)
an einer Geraden spiegelt.

Arbeitsauftrag für eine sechste Klasse

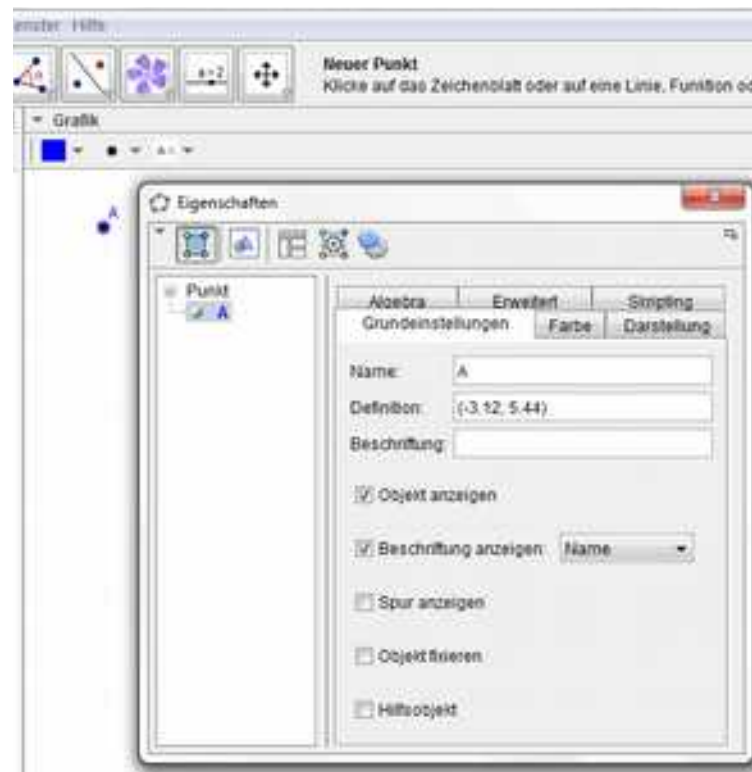
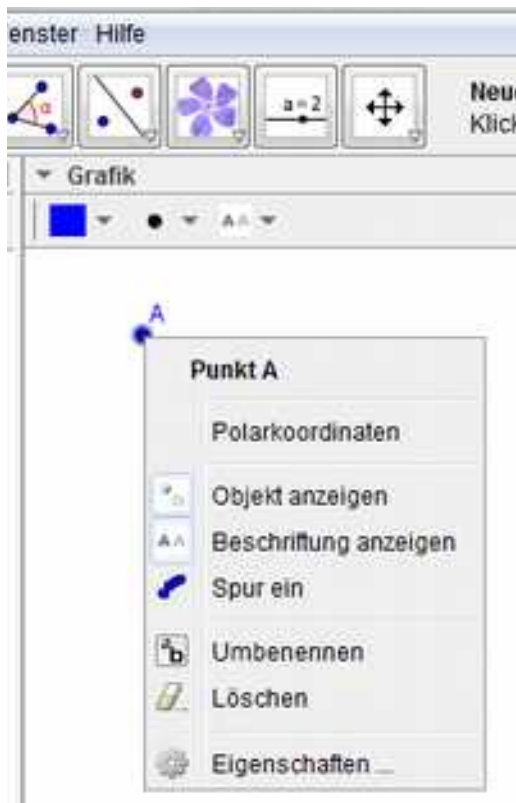
Bearbeite die folgende Aufgabe **ALLEINE**:

- Trage die folgenden Punkte in ein Koordinatensystem ein:
A(3|1), B(4|3), C(3|4), D(2|2)
- Verbinde die vier Punkte zu einem Viereck.
- Spiegele die Figur an der y-Achse.
- Drehe die Figur. Nimm den Punkt (5|-1) als Drehzentrum und drehe um einen Winkel von 45° .
- Verschiebe um den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Setzen Sie den Arbeitsauftrag mit GeoGebra um.

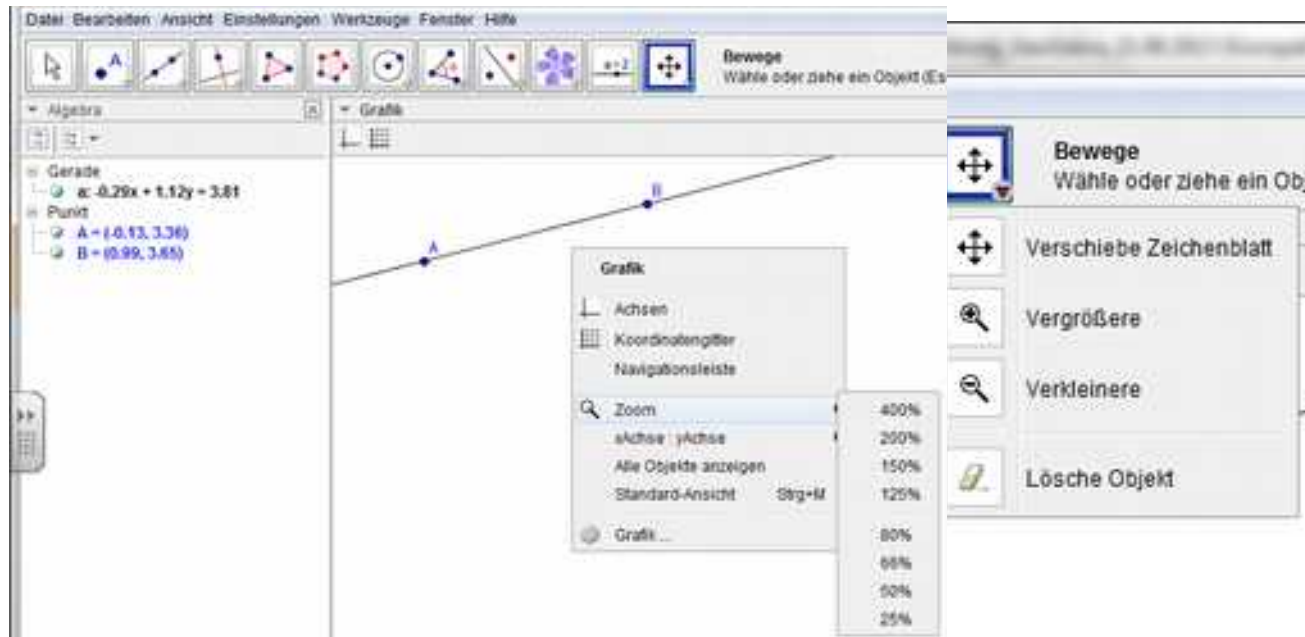
Allgemeines zu GeoGebra Hinweise

- Objekte ein- und ausblenden, Eigenschaften ändern
 - Objekt anklicken, rechte Maustaste, Eigenschaften

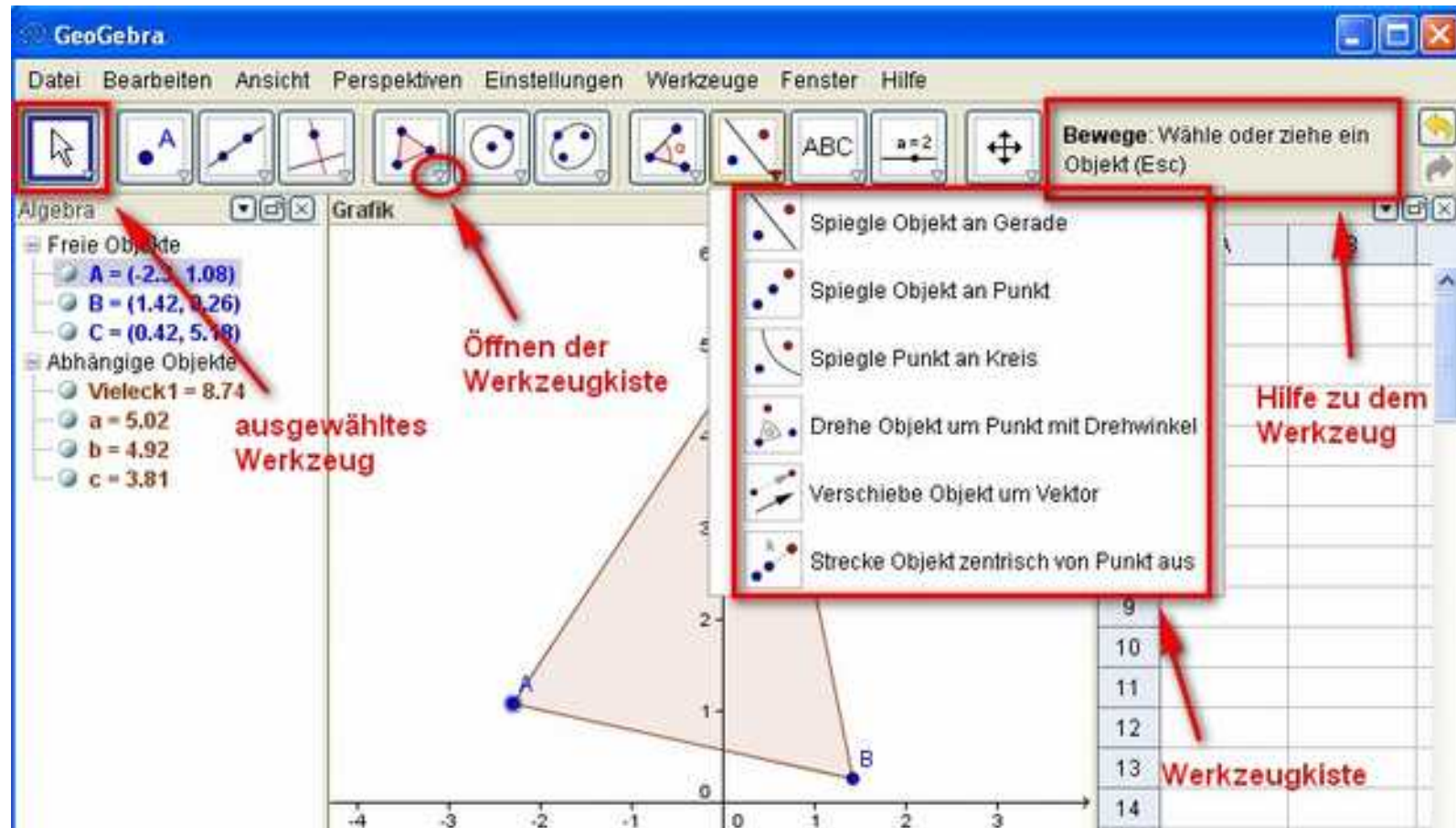


Allgemeines zu GeoGebra Hinweise

- Vergrößern, Verkleinern und Verschieben des Bildausschnitts
 - Klicken Sie mit der rechten Maustaste auf eine freie Stelle des Zeichenblatts und wählen den Zoom-Faktor, oder ziehen Sie mit gedrückter rechter Maustaste ein Zoom-Fenster auf









Konstruktionswerkzeuge



Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal

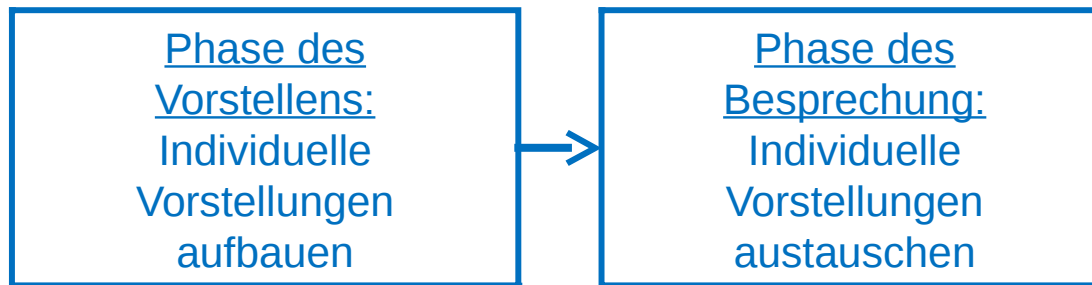
Grundkonstruktionen sind Konstruktionen, die man mit den zugelassenen Hilfsmittel in einem Schritt durchführen kann. Mit Zirkel und Lineal gibt es die folgenden Grundkonstruktionen:

Nr.	Beschreibung	Geogebra-Schaltfläche	Konstruktionstext in Geogebra
1	Zeichne einen Punkt A auf der Zeichenfläche.		-
2	Zeichne zu zwei Punkten A und B die Strecke \overline{AB} .		Strecke [A, C]
3	Zeichne zu zwei Punkten A und B die Gerade AB.		Gerade durch A, B
4	Wähle einen Punkt auf einer Linie a.		Punkt auf a
5	Schlage einen Kreis um den Mittelpunkt B, der durch A verläuft.		Kreis durch A mit Mittelpunkt B
6	Markiere den Schnittpunkt (die Schnittpunkte) zweier Linien.		Schnittpunkt von a, c

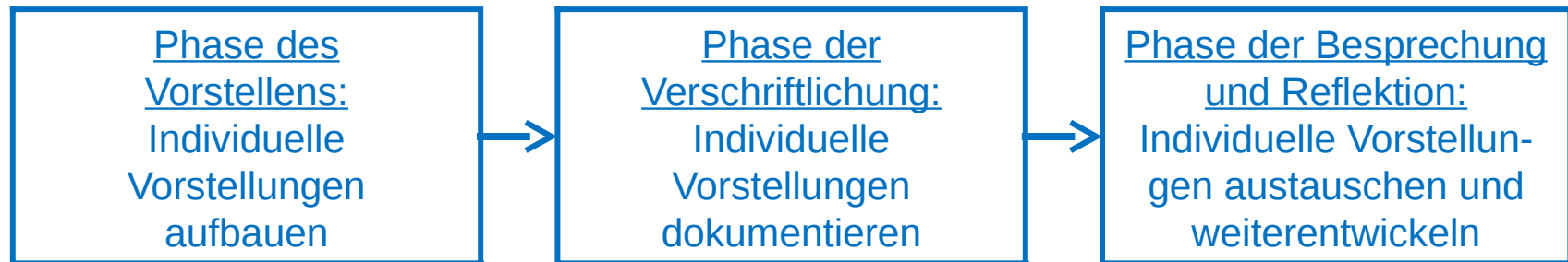
Vorstellungsübung

Christoph Weber (2010)

- Ablauf von Vorstellungsübungen: Minimalvariante



- Ablauf von Vorstellungsübungen: Luxusvariante












Christoph Weber (2010): Mathematische Vorstellungsübungen im Unterricht
– Ein Handbuch für das Gymnasium. Klett – Kallmeyer (ISBN 978-3-7800-1047-6).

Vorstellungsübung „Leiter rutschen“

- Durchführung der Vorstellungsübung
- Anschließende Fragen
 - Zum mathematischen Inhalt
 - Zum individuellen Vorstellungsaufbau

Vorstellungsübung „Leiter rutschen“

	Beschreibung	Schaltfläche	Konstruktionstext in GeoGebra	Text in Eingabezeile
0	Auswahlfeil		-	
1	Punkt A			$A=(1,2)$
2	Strecke von A nach B		Strecke [A,B]	Strecke [A,B]
3	Schieberegler von 0 bis 5 in 0,1er Schritten			Schieberegler[0,5,0.1]
4	Punkt auf der Gerade a		Punkt auf a	Punkt[a]
5	Kreis mit Mittelpunkt A durch B		Kreis mit Mittelpunkt A	Kreis[A,B]
6	Kreis mit Mittelpunkt A und Radius r		Kreis mit Mittelpunkt A	Kreis[A,r]
7	Schnittpunkt der Geraden (Strecken) a und b		Schnittpunkt von a,b	Schneide[a,b]
8	Mittelpunkt zwischen A und B		Mittelpunkt von A,B	Mittelpunkt[A,B]

Feuerwehrleiter

- Eine Feuerwehrleiter wird an eine Wand gelehnt.
- Die Leiter wurde leider nicht festgemacht und rutscht nun an der Wand herunter.
- Stellen Sie die Situation mit GeoGebra dar.
- (*) Markieren Sie den Mittelpunkt auf der Leiter. Nutzen Sie die Spur, um zu sehen, auf welcher Kurve sich der Mittelpunkt bewegt.
- (**) Stellen Sie im zweiten Grafikfenster dar, wie sich die Höhe der Leiter in Abhängigkeit vom Anstellwinkel verändert.

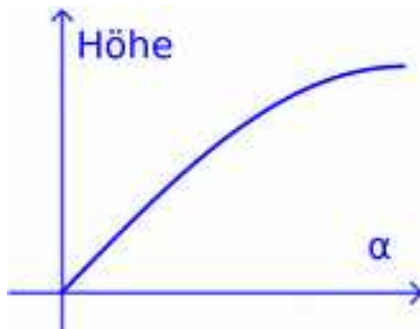
Feuerwehrleiter.ggb

Darstellungsformen

Text

Die über eine Drehleiter einer Feuerwehr erreichbare Höhe hängt vom Anstellwinkel ab.

Graph



Wertetabelle

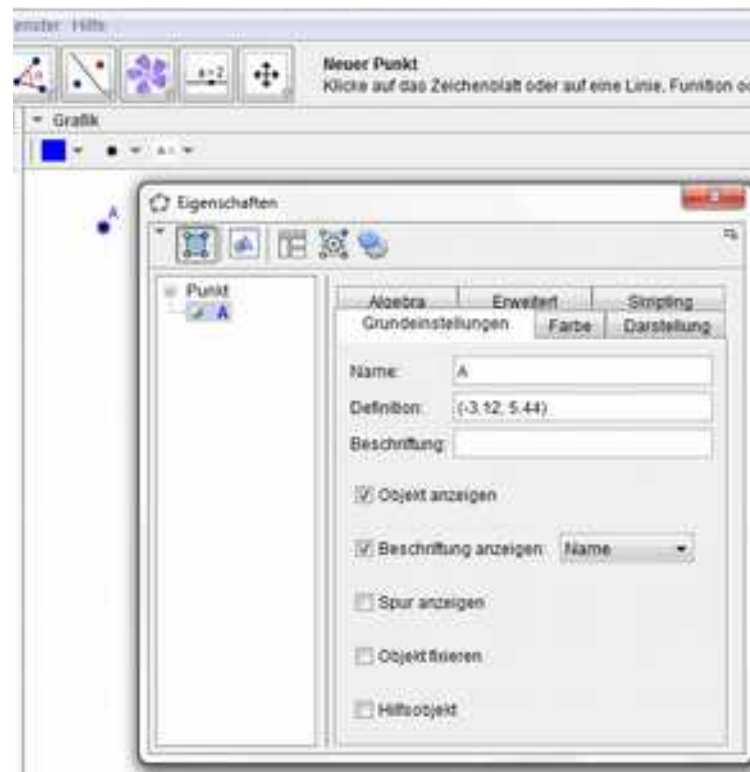
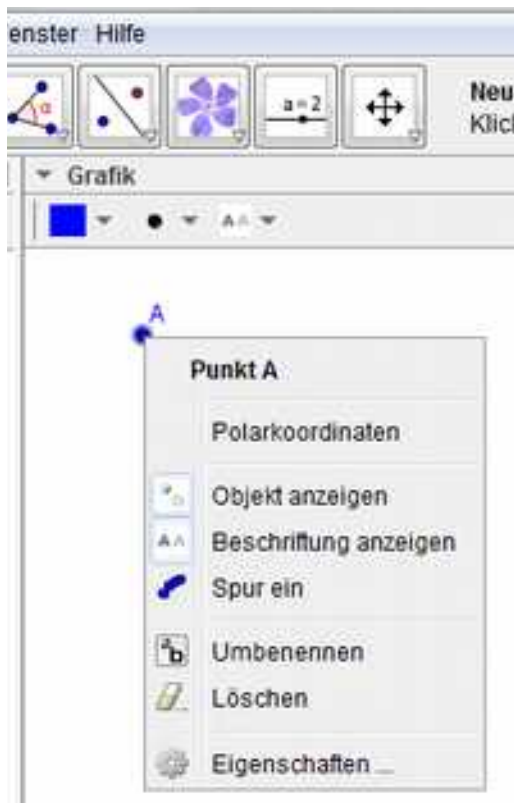
Winkel	Höhe
50	7,7
60	8,7
70	9,4

Term

$$\alpha \rightarrow 10 \cdot \sin(\alpha)$$

Allgemeines zu GeoGebra Hinweise

- Fremde Dateien untersuchen!
 - Objekt anklicken, rechte Maustaste, Eigenschaften



Konstruktionsprotokoll

Konstruktionsprotokoll - Dreieck SSS.ggb

Nr.	Name	Definition	Haltepunkt
1	Punkt A		<input checked="" type="checkbox"/>
2	Kreis c_2	Kreis mit Mittelpunkt A und Radius 5	<input checked="" type="checkbox"/>
3	Punkt B	Punkt auf c_2	<input checked="" type="checkbox"/>
4	Kreis e	Kreis mit Mittelpunkt A und Radius 8	<input checked="" type="checkbox"/>
5	Kreis d	Kreis mit Mittelpunkt B und Radius 7	<input checked="" type="checkbox"/>
6	Strecke c_3	Strecke [A, B]	<input checked="" type="checkbox"/>
7	Punkt C'	Schnittpunkt von e, d	<input checked="" type="checkbox"/>
8	Dreieck Vieleck1	Vieleck A, B, C	<input checked="" type="checkbox"/>
9	Dreieck Vieleck2	Vieleck A, B, C'	<input checked="" type="checkbox"/>

9 / 9

<input checked="" type="checkbox"/> Name	Symbol der Werkzeugleiste
<input checked="" type="checkbox"/> Definition	Befehl
	Wert
	Beschriftung
<input checked="" type="checkbox"/> Haltepunkt	

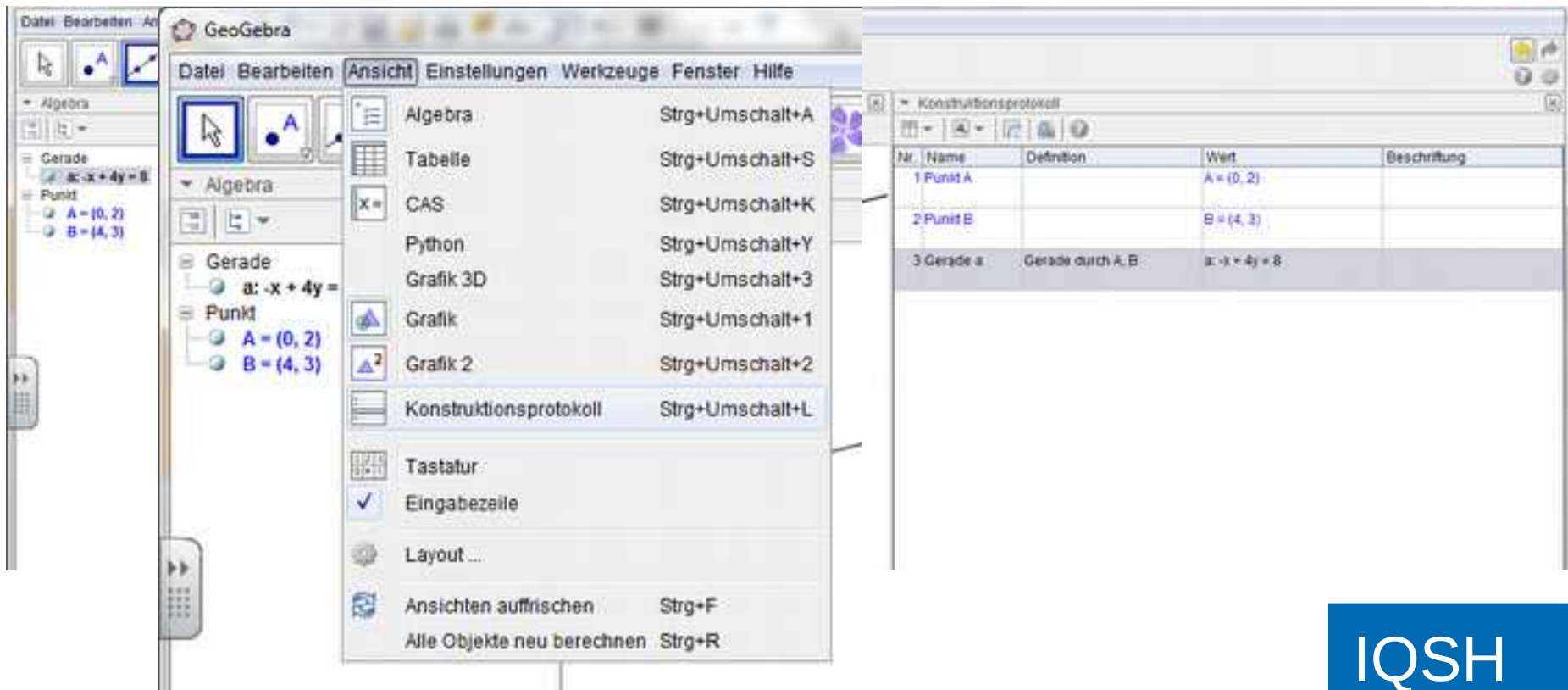
☒ Nur Haltepunkte anzeigen
☒ Konstruktionsprotokoll in Farbe

Kreis c_2	Kreis mit Mittelpunkt A und Radius 5
Punkt B	Punkt auf c_2

Feuerwehrleiter an der Wand.ggb

Allgemeines zu GeoGebra Hinweise

- Fremde Dateien untersuchen!
 - Ansicht Konstruktionsprotokoll: Konstruktion noch einmal abspielen



The screenshot shows the GeoGebra software interface. The 'Ansicht' (View) menu is open, and the 'Konstruktionsprotokoll' (Construction Protocol) option is selected. The 'Konstruktionsprotokoll' window is open, displaying a table of construction steps.

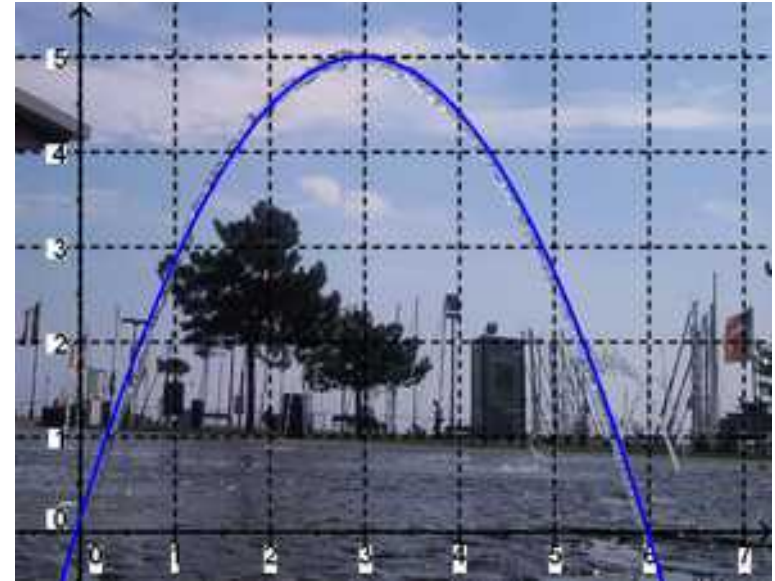
Nr.	Name	Definition	Wert	Beschriftung
1	Punkt A		$A = (0, 2)$	
2	Punkt B		$B = (4, 3)$	
3	Gerade a	Gerade durch A, B	$a: x + 4y = 8$	

Aufgabe für eine neunte Klasse:

Schätze die Funktionsgleichung der Parabel

Erstellen Sie eine GeoGebra-Datei mit Hintergrundbild und fitten Sie etwas an. Verwenden Sie dazu Schieberegler.

(**) Beschriften Sie Ihre Grafik. Verwenden Sie dazu LaTeX (siehe Tabelle).



(**) Setzen Sie drei Punkte auf den Wasserstrahl. Lassen Sie die passende Parabel einzeichnen.

Hilfe: Tragen Sie die Punkte in eine Tabelle ein. Markieren Sie die Punkte. Gehen Sie auf Analyse zweier Variabeln.

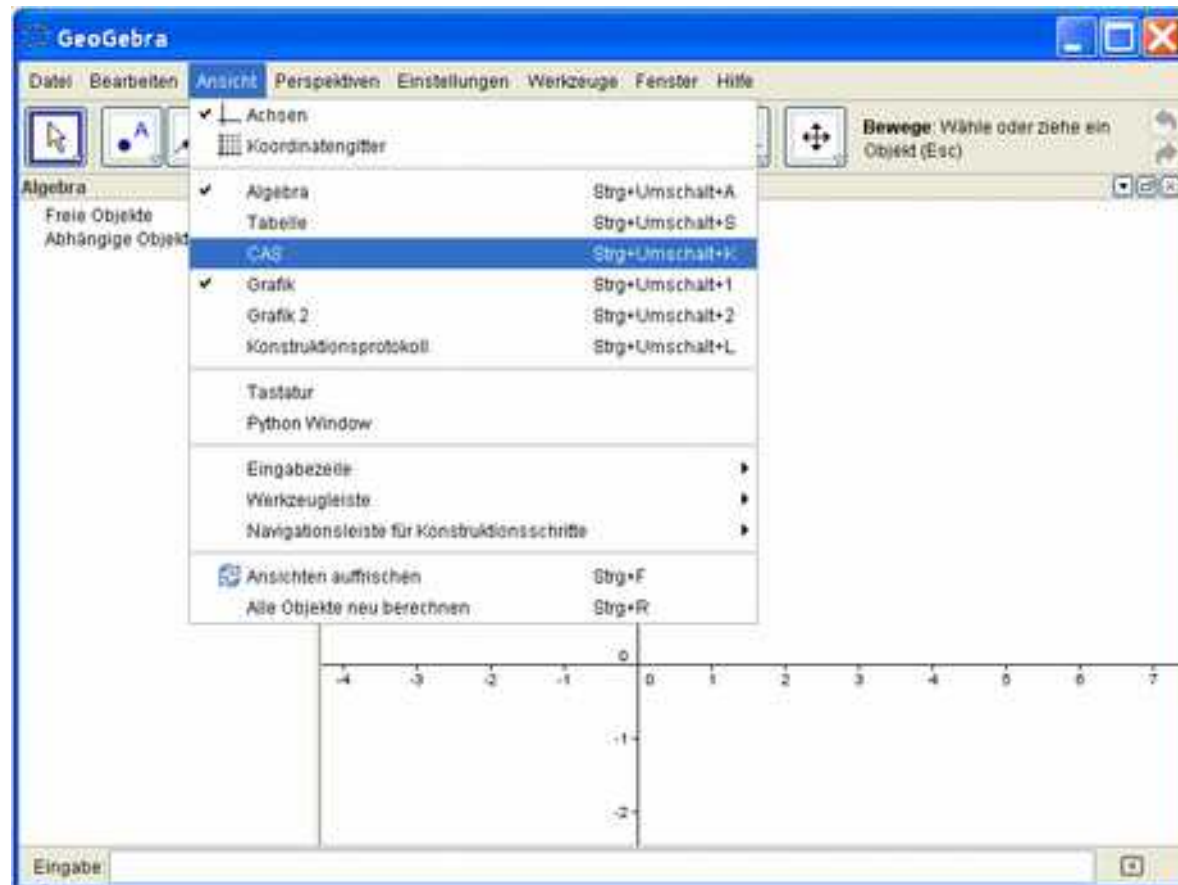
Allgemeines zu GeoGebra Hinweise

- Grafikansicht als Bild exportieren
 - Datei – Export – Grafikansicht als Datei – Grafikansicht in Zwischenablage
 - Textdokument (z.B. Word oder OpenOffice) öffnen, einfügen z.B. über die rechte Maustaste
 - Falls man zwei Grafiken erzeugt hat: Es wird immer das Bild exportiert, das angeklickt ist.

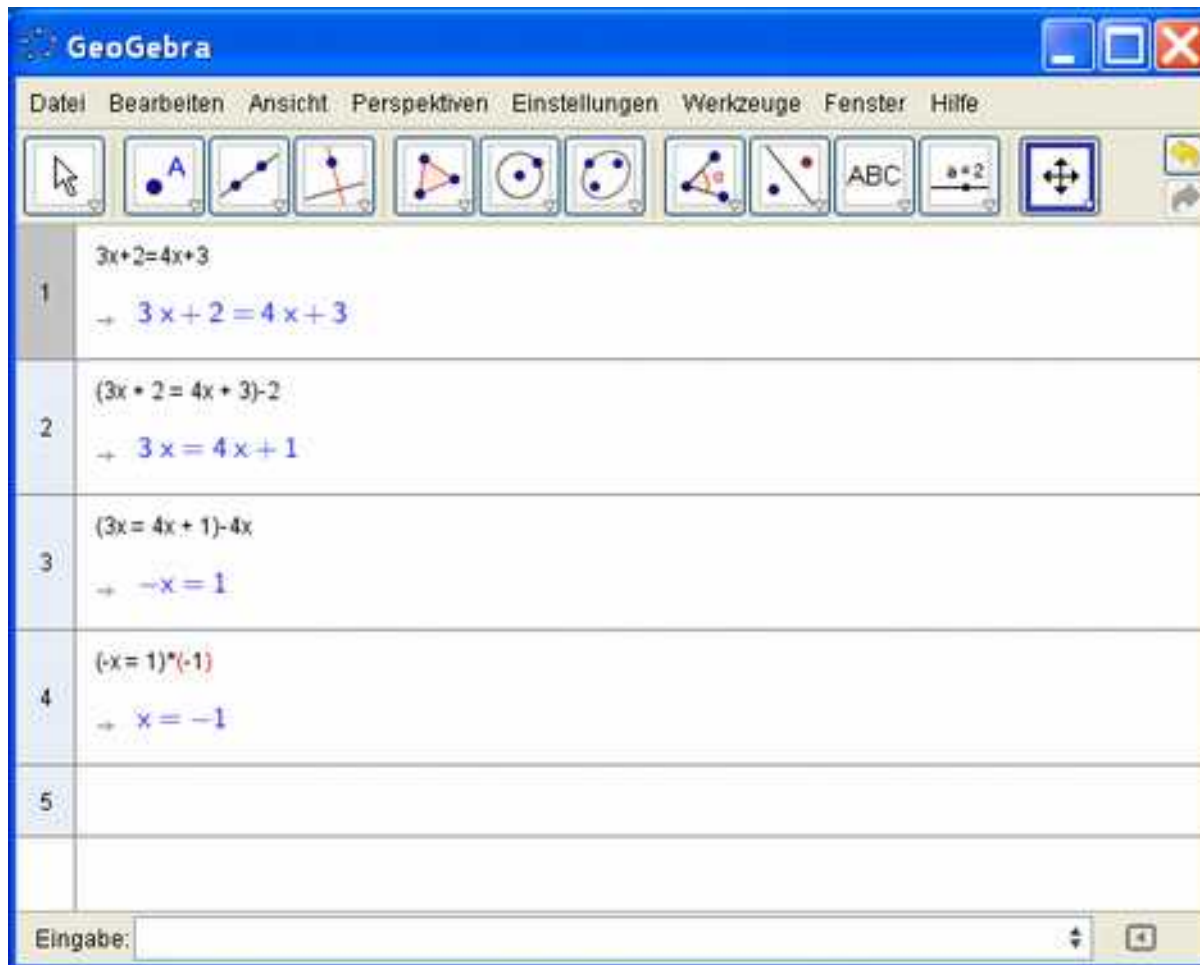
Äquivalenzumformungen mit GeoGebra

- Fast alle Computer-Algebra-Systeme erlauben das schrittweise Durchführen von Äquivalenzumformungen.
- Es ist an dieser Stelle nicht beabsichtigt, den Befehl „Solve“ anzuwenden. Vielmehr geht es darum, das Erkennen der jeweils notwendigen Äquivalenzumformungen zu üben.

Äquivalenzumformungen mit GeoGebra



Äquivalenzumformungen



CAS-Fenster
Befehl „subtrahiere 2“
Eingabe „#-2“

Lösen von Gleichungen

- **Faktorisieren (ALGEBRA-Fenster)**
 - Geben Sie die Funktionsgleichung „ $f(x)=x^2-3x+2$ “ ein
 - Verwenden Sie den Befehl `Faktorisiere[f]`
 - Verwenden Sie den Befehl `VollständigesQuadrat[f]`
- **Gleichungen lösen (CAS-Fenster)**
 - „Löse[#1,x] return“ (#1 verwendet Zeile Nummer 1, löst nach x auf)
 - Kann quadratische Gleichungen lösen, ableiten (`Ableitung[Funktion]`), Stammfunktionen bilden (`Integral[Funktion]`),...

Lösen von Gleichungssystemen

The screenshot shows the GeoGebra software interface with a menu bar (Datei, Bearbeiten, Ansicht, Perspektiven, Einstellungen, Werkzeuge, Fenster, Hilfe) and a toolbar. The main workspace displays a list of equations and operations:

Step	Equation	Operation
1	$2x + 3y = 5$	Eingabe der ersten Gleichung
2	$x - y = 3$	Eingabe der zweiten Gleichung
3	$3x - 3y = 9$	#*3
4	$5x = 14$	#1+ #3
5	$x = \frac{14}{5}$	#/5
6	$y = -\frac{1}{5}$	#5 - #2

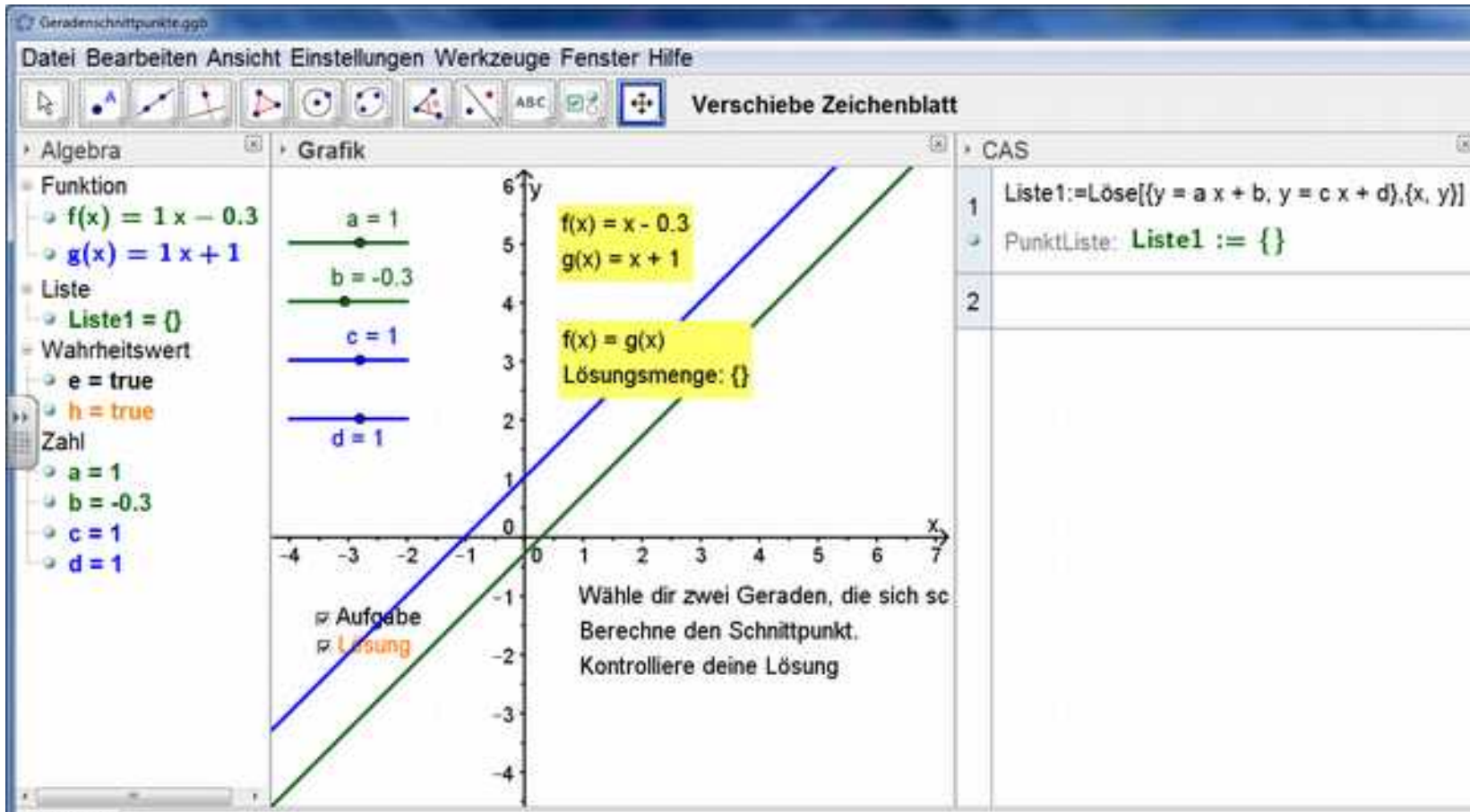
Lösen von Gleichungssystemen

The screenshot shows a software window with a menu bar (Datei, Bearbeiten, Ansicht, Einstellungen, Werkzeuge, Fenster, Hilfe) and a toolbar with mathematical symbols like equals, approximate, check, fraction, parentheses, square root, and matrix. The main area is a table with four rows:

	T
1	$4x+2y=5$ → $4x + 2y = 5$
2	$-2x+3=4$ → $-2x + 3 = 4$
3	$\text{Löse}[\{(4x + 2y = 5), (-2x + 3 = 4)\}, \{x, y\}]$ → $\left(x = -\frac{1}{2} \quad y = \frac{7}{2}\right)$
4	

On the right, the 'Eingabehilfe' (Input Help) pane lists topics: Komplexwertinstelle, Kovarianz, Kreuzprodukt, and Länge. Below this, 'CAS spezifische Befehle:' (CAS specific commands:) are listed: $\text{Löse[<Gleichung in x>]}$, $\text{Löse[<Gleichung>, <Variable>]}$, and $\text{Löse[<Liste von Gleichungen>, <Liste von Variablen>]}$. At the bottom right are buttons for 'Einfügen' (Paste) and 'Online Hilfe anzeigen' (Show online help).

Lösen von Gleichungssystemen



Gleichungssystem lösen mittels Matrix

- Gleichungssystem in eine Tabelle eintragen
- Matrix aus **Tabelleneinträgen** erzeugen: Bereich markieren (z.B. 3 Zeilen, vier Spalten), rechte Maustaste, **Erzeuge - Matrix**
- Lösen des Gleichungssystems:
Treppennormalform[Matrix1] in der Eingabezeile eingeben (ergibt Matrix2)
- Aus der Tabelle eine Liste erzeugen: **Erzeuge – Liste** (aus dem markierten Bereich), dann **Matrix2 * Liste1** in der Eingabezeile eingeben

Analytische Geometrie

Eingabezeile (viele funktioniert im CAS-Fenster nicht!)

$A=(1,2,3)$ legt den Punkt A fest

$\text{Ebene}[A,B,C]$ legt eine Ebene durch die Punkte ABC fest

$\text{Vektor}[A,B]$ erzeugt einen Vektor von A nach B

$\text{Länge}[u]$ bestimmt die Länge des Vektors u

$\text{Abstand}[A,g]$ bestimmt den Abstand von Punkt A zur Geraden g

$\text{Schneide}[g,h]$ ergibt den Schnittpunkt der Geraden g und h

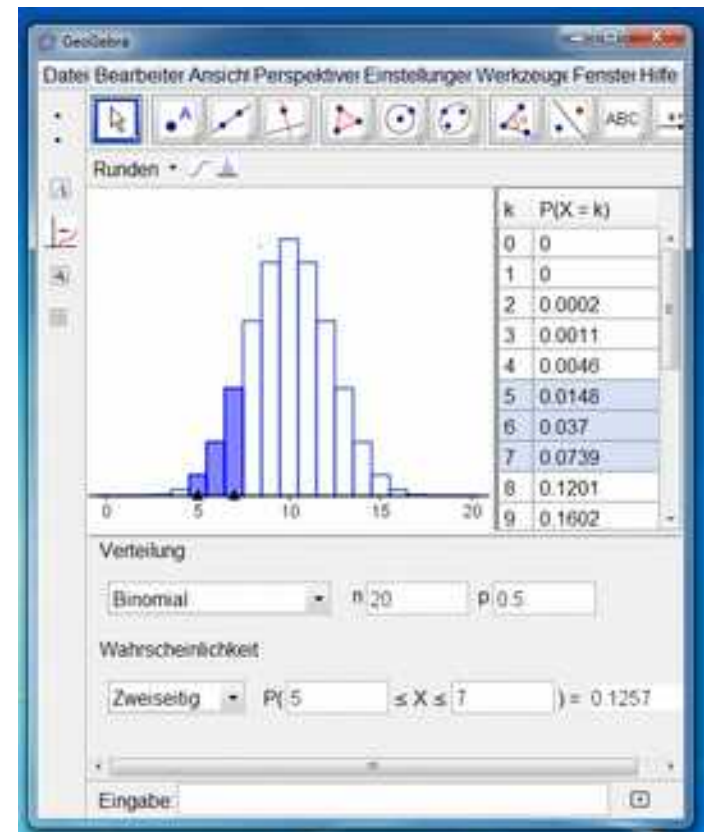
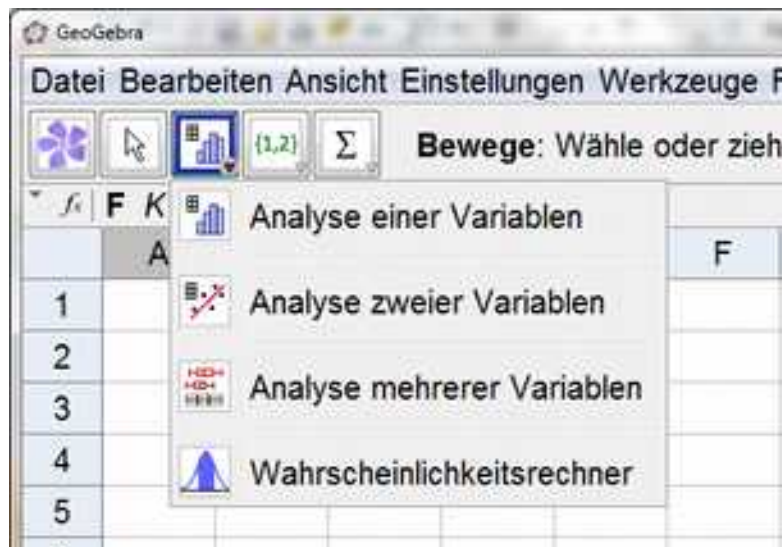
$\text{Schneide}[\text{Ebene_1},\text{Ebene_2}]$ ergibt die Schnittgerade

$\text{Vieleck}[ABCA]$ erzeugt das Dreieck ABC

$\text{Winkel}[u,v]$ gibt den Schnittwinkel zwischen den Vektoren u und v an

Wahrscheinlichkeitsrechnung

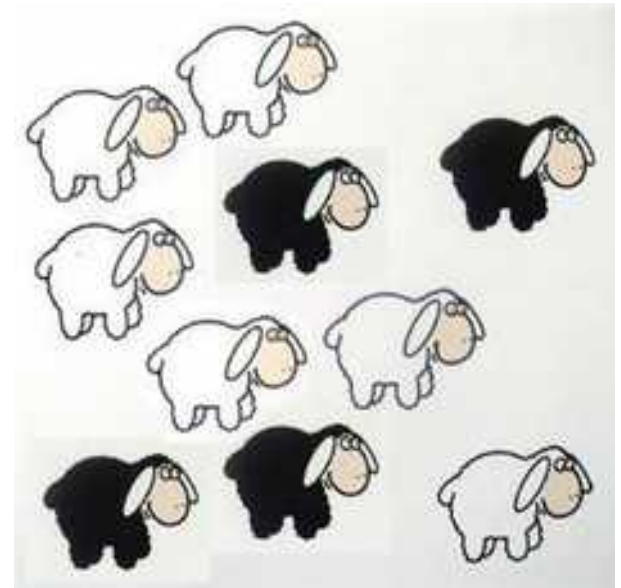
- Ansicht – Tabelle
 - Analyse einer Variablen
 - Wahrscheinlichkeitsrechner
 - Verteilung auswählen



Arbeitsauftrag für eine Klasse im Einführungsjahr

Ein Bauer hat 10 Schafe, die mit Maul- und Klauenseuche infiziert sind. Ein Pharmaunternehmen produziert ein Medikament, das eine 80%-ige Heilungschance haben soll.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 6 Schafe geheilt werden?



Ermitteln Sie die Lösung mit der Statistik in GeoGebra.

Hinweis: Öffnen Sie eine Tabelle, dort finden Sie die *Statistik* unter der *Analyse einer Variablen*.

5. 3D-Graphik

- Die neueste Version mit 3D-Ansicht findet man unter <http://download.geogebra.org/installers/5.0/>

$$V = \frac{1}{3} \text{ Grundfläche} * \text{Höhe}$$

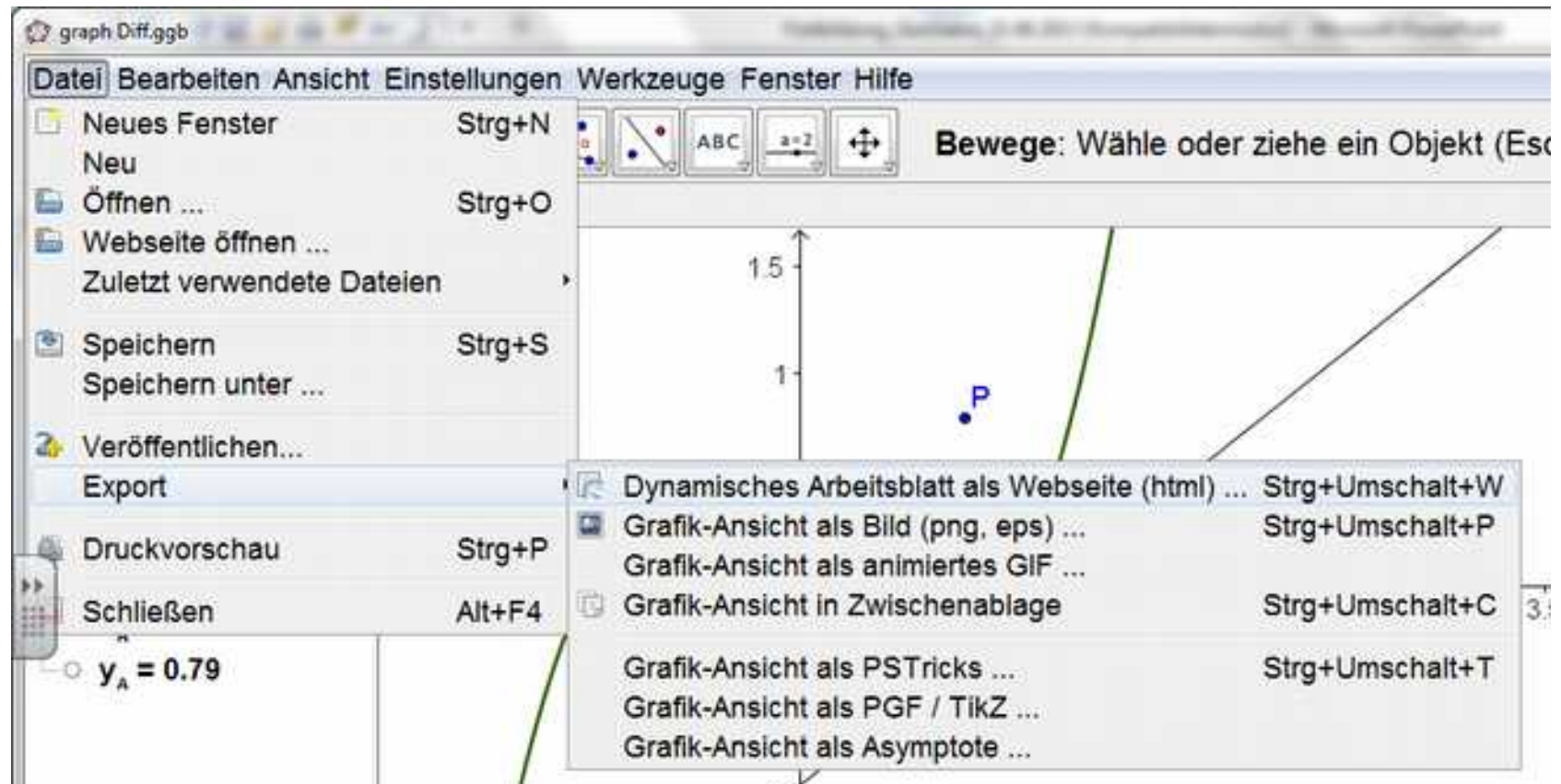
Erstellen Sie mit GeoGebra-3D einen Quader.

Erstellen Sie innerhalb des Quaders drei Pyramiden, deren Spitze im selben Punkt liegt.

6. Dynamische Arbeitsblätter



- Die Datei wird als html-Datei exportiert
- Diese Datei kann mit einem html-Editor nachbearbeitet werden
 - Formatierung kann verändert werden
 - Texte können hinzugefügt werden
- Diese Datei kann auf eine Lernplattform (z. B. Moodle) hochgeladen werden und steht dann für jeden Schüler zur Verfügung
- Um die exportierte html-Datei zu nutzen, ist ein Internetzugang notwendig!
 - Es wird eine online-Version von GeoGebra gesucht und gestartet, was ohne online-Zugang nicht möglich ist (Applet-Version)
 - Wenn es nicht online geschehen soll, dann müssen beim Export die *.jar-Dateien mit exportiert und versendet werden.

Export-Funktion



Export

Export als dynamisches Arbeitsblatt (HTML)

 In GeoGebraTube hochladen  Export als Webseite

Titel: Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks

Autor: Manuel Garcia Mateos Datum: 4. Februar 2012

Allgemein **Erweitert**

Text oberhalb der Konstruktion:

Hier kannst du dir anzeigen lassen, wie man ein gleichseitiges Dreieck konstruiert.

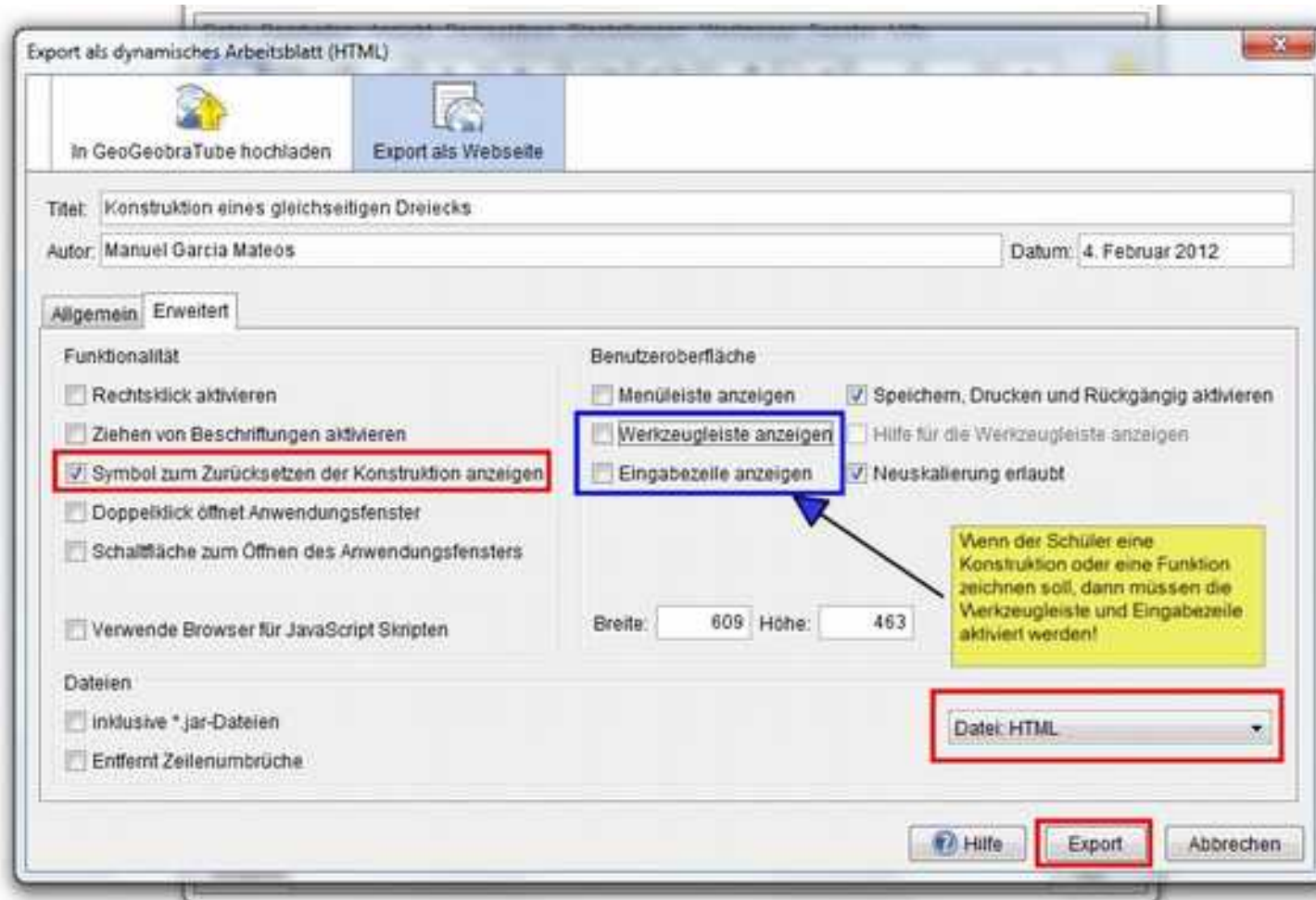
Text unterhalb der Konstruktion:

Aufgabe:

1. Konstruiere in deinem Heft ein entsprechendes gleichseitiges Dreieck.
2. Formuliere und notiere dir die einzelnen Konstruktionsschritte.

Hilfe Export Abbrechen

Export



Dynamisches Arbeitsblatt mit GeoGebra

Erzeugen von dynamischen Arbeitsblättern

Technische Voraussetzung: sowohl auf dem Rechner, auf dem Sie das Arbeitsblatt erstellen, wie auch auf den Rechnern, auf denen das Arbeitsblatt später verwendet werden soll, muss Java 1.4.2 (oder höher) installiert sein. Sie erhalten Java kostenlos von www.java.com/de.

Schritt 1: Eine Konstruktion mit GeoGebra erstellen.

Schritt 2: Das dynamische Arbeitsblatt erstellen.

Tipp: Verändern Sie noch vor dem Export die Größe des Anwendungsfensters von GeoGebra so, dass die **Konstruktion gut sichtbar** ist, aber auch nicht zu viel Platz am Bildschirm einnimmt (das können Sie durch Ziehen einer "Ecke" des Anwendungsfensters mit der Maus erreichen).

Schritt 3: Das Arbeitsblatt verfügbar machen - Export des Arbeitsblattes

1) Wählen Sie im Menü „Datei“, „Export“ den Punkt „Dynamisches Arbeitsblatt als Webseite (html)“.

Im erscheinenden Export-Fenster können Sie Titel, Autor und Datum sowie einen Text oberhalb und unterhalb der dynamischen Konstruktion angeben (z.B. für eine Beschreibung der Konstruktion und Ihre Arbeitsaufträge).

Unter „Export als Website“, „Erweitert“ können Sie festlegen, was genau den Lernenden zur Verfügung stehen soll (Eingabezeile, Algebrafenster, Werkzeugleiste,...).

Sollen nur bestimmte Werkzeuge erscheinen, müssen die anderen vorher ausgeschaltet werden (unter „Werkzeuge“, „Werkzeugleiste anpassen“).

Reflexion

- Heute habe ich gelernt,...
- Ausprobieren will ich ...
- Ich hätte mir gewünscht,...