

Grundvorstellungen aufbauen

Was sind Grundvorstellungen? Welche Rolle spielen sie beim Lernen von Mathematik? Und wie kann man die Entstehung und Entwicklung von Grundvorstellungen fördern?

**RUDOLF
VOM HOFE,
JÜRGEN ROTH**

Auf diese Fragen geben wir eine Antwort und erklären zunächst, was man im Allgemeinen unter Grundvorstellungen versteht. Dabei handelt es sich nicht um statische Vorstellungsbilder, sondern um ein lebendiges System, das mit fortschreitendem Kompetenzaufbau erweitert und vernetzt wird. Anhand von Beispielen zeigen wir, wie sich Grundvorstellungen vom Beginn der Schulzeit bis in die Sekundarstufe hinein entwickeln.

Das Lernen besser verstehen

Wie spielt man Volleyball?

Betrachten wir Jugendliche, die Beachvolleyball spielen (**Abb. 1**). Wie machen die das? Woher wissen sie, wie sie die Hand halten müssen, wie hoch sie springen und wie sie ihren Körper strecken müssen? Natürlich hat dies viel mit Übung zu tun und mit Wissen und Erfahrung, die im Langzeitgedächtnis gespeichert sind. Doch wie? Merkt man sich „fotografisch“ Spielsituationen, um sie später wieder abzurufen? Oder merkt man sich einzelne Bewegungsabläufe und ihre Kombinationen?

Aus der Sportpsychologie wissen wir, dass Bewegungsabläufe durch *Bewegungsvorstellungen* gesteuert werden. Komplexe Bewegungsabläufe setzen sich aus Einzelbewegungen zusammen, die – je nach Situation – flexibel koordiniert werden können. Diesen Einzelbewegungen entsprechen *motorischen Elementarvorstellungen*. Diese sind im Langzeitgedächtnis gespeichert und können – je nach Situation – kombiniert und als Komplex abgerufen werden (s. Schack u. a. 2020).

Und wie ist das beim Mathematiklernen?

Im Gegensatz zum Volleyball hat man bei der Mathematik mehr Zeit zum Überlegen (**Abb. 2**). Aber woher weiß man, wie man eine Aufgabe angeht, ob Addieren oder Multiplizieren, ob eine lineare oder eine quadratische Funktion passend ist?

Wie wir aus vielen Untersuchungen wissen, ist auch mathematisches Denken und Handeln immer mit *Vorstellungen* verbunden, die bewusst oder

unbewusst wirksam sind. Diese Vorstellungen sind ebenfalls im Langzeitgedächtnis gespeichert und vernetzt. Oft müssen mehrere Vorstellungen aktiviert und koordiniert werden, um eine Aufgabe zu bewältigen. Diese Vorstellungen können für die Lösung zielführend sein – aber auch Fehler verursachen.

Tragfähige mathematische Vorstellungen nennen wir *Grundvorstellungen*; abgekürzt GV.

(vom Hofe/Blum 2016)

Die Bedeutung von Grundvorstellungen wird besonders deutlich, wenn wir ihre Rolle im Modellierungsprozess betrachten (s. Blum/Leiss 2005). Für die wichtige Übersetzung zwischen Realität und Mathematik (in **Abb. 3** an den Stellen 2 und 4) sind Grundvorstellungen erforderlich. Ist etwa eine Situation mit einem linearen Wachstum gegeben, brauche ich eine Vorstellung davon, mit welchen mathematischen Mitteln man dieses Wachstum darstellen kann. Welche Funktionen sind dafür geeignet und welche nicht? Fehlen solche Vorstellungen, stehen sich Realität und Mathematik beziehungslos gegenüber.

Bei vielen Lernenden ist dies tatsächlich der Fall: Sie können sich gut in realen Kontexten bewegen, haben aber keine Ahnung, wie sie diese in Mathematik übersetzen können. Aber auch das Gegenteil kommt häufig vor: Lernende können gut rechnen, wissen aber nicht, was ihre Rechnungen für Anwendungssituationen bedeuten. Und auch innerhalb der Mathematik (in **Abb. 3** an Stelle 3) sind Grundvorstellungen erforderlich, wenn etwa zwischen Geometrie und Algebra übersetzt werden muss und eine graphisch dargestellte lineare Steigung mit einem Term auszudrücken ist.

Wie entstehen Grundvorstellungen?

Basis für die Entwicklung von Grundvorstellungen sind mathematische Handlungserfahrungen. Diese entwickeln sich über Prozesse der Verinnerlichung zu Handlungsmustern. Die Ausprägung von Grundvorstellungen hängt ab vom Umfang der entsprechenden Handlungserfahrungen und von der Häufigkeit ihrer Aktivierung. Dabei lassen sich zwei Arten von Grundvorstellungen unterscheiden:



Abb. 1: Bewegungsabläufe setzen sich aus Einzelbewegungen (motorischen Elementarvorstellungen) zusammen. Diese werden im Langzeitgedächtnis gespeichert.



Abb. 2: Mathematisches Denken und Handeln beruht auf Vorstellungen, die ebenfalls im Langzeitgedächtnis gespeichert und vernetzt sind.

- *Primäre Grundvorstellungen* haben ihren Ursprung in Handlungen mit realen Objekten; zum Beispiel „Hinzufügen“ (als GV der Addition) oder „Wegnehmen“ (als GV der Subtraktion). Diese Grundvorstellungen entwickeln sich schon lange vor der Schulzeit, z. B. aus dem spielerischen Umgang mit Spielsteinen, Äpfeln, Geld usw.
- *Sekundäre Grundvorstellungen* entwickeln sich im Unterricht und basieren auf dem Umgang mit mathematischen Objekten wie Termen, Gleichungen oder Funktionen. Ein Beispiel ist das *mentale Bewegen im Koordinatensystem*, wenn man in Gedanken die x -Achse durchläuft und die davon abhängige Änderung des Funktionswerts betrachtet. Dies entspricht der „Kovariation“ als einer der wichtigen Grundvorstellungen für funktionales Denken.

wir vermitteln möchten, und den Vorstellungen, die sich bei den Lernenden tatsächlich ausbilden.

Insofern ist es sinnvoll zu unterscheiden, ob man von Grundvorstellungen im normativen oder im deskriptiven Sinne spricht:

Normativ formulierte Grundvorstellungen

sind didaktische Leitlinien, die Deutungsmöglichkeiten eines mathematischen Inhalts oder Verfahrens beschreiben.

Deskriptiv ermittelte Schülervorstellungen

geben Aufschluss über die individuellen Vorstellungen und Erklärungsmodelle, die Lernende tatsächlich haben; diese weichen mehr oder weniger von den intendierten Grundvorstellungen ab.

Welche Rolle spielen Grundvorstellungen im Mathematikunterricht?

Wie wir wissen, ist Lernen ein individueller und konstruktiver Prozess, der sich durch guten Unterricht unterstützen, aber nicht bis ins letzte Detail steuern lässt. Mathematische Begriffe und Verfahren können nicht einfach in das Denken der Schülerinnen und Schüler transferiert werden, sondern müssen über sinnvolle Erkundungen und Erklärungen, Übungen und Anwendungen erworben werden. Dabei entspricht das, was gelernt wird, nicht immer dem, was Lehrende vermitteln möchten. Ebenso ist es mit den Grundvorstellungen, welche

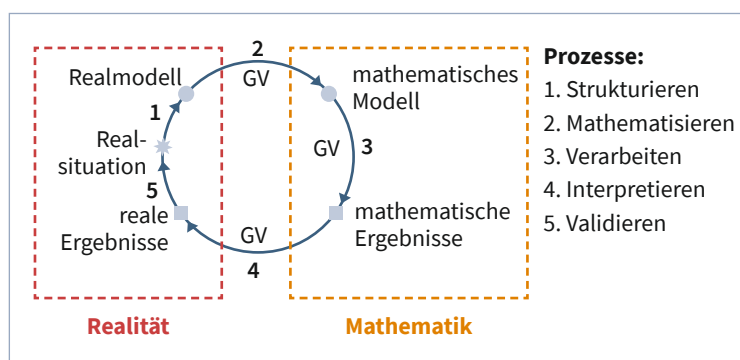


Abb. 3: Grundvorstellungen sind besonders wichtig bei der Übersetzung zwischen Realität und Mathematik, d. h. an den Stellen 2 und 4.

Im Idealfall entwickeln sich aus den vom Unterricht intendierten (normativen) Grundvorstellungen auch entsprechende tragfähige Vorstellungen der Lernenden.

Abb. 4 zeigt die Unterrichtsschritte und die individuellen Lernschritte in ihrem Zusammenspiel: Am Beginn steht die Überlegung, welche Grundvorstellungen für die Vermittlung bestimmter Inhalte oder Verfahren sinnvoll sind. Daraus folgt die Entwicklung geeigneter Lernkontexte als Verstehensanker, die das Vorwissen der Lernenden aktivieren und zum neuen Inhalt führen. So können die Lernenden den Lernkontext erfassen, tragfähige Grundvorstellungen aufbauen und nach entsprechenden Übungs- und Anwendungsphasen den Begriff bzw. das Verfahren verstehen. In diesem Sinne kann man sagen:

Grundvorstellungen

sind anschauliche Deutungen eines mathematischen Begriffs, die diesem Sinn geben und Verständnis ermöglichen.

Die Entwicklung von Grundvorstellungen erstreckt sich vom Kindergarten bis zur gymnasialen Oberstufe und darüber hinaus. Dementsprechend gibt es Grundvorstellungen von verschiedener Komplexität, die wir im Folgenden exemplarisch aufzeigen möchten. Wir betrachten zunächst elementare Grundvorstellungen am Beispiel des Übergangs vom Rechnen mit natürlichen Zahlen zur Bruchrechnung.

Elementare Grundvorstellungen von natürlichen Zahlen und Brüchen

Addieren – in verschiedenen Situationen

Die Addition ist die erste Grundrechenart. **Abb. 5** gibt einen Überblick über die für die Addition relevanten Grundvorstellungen (als Wurzeln) und ihre

Anwendungssituationen (als darüber liegende Äste). Beginnen wir mit der ersten Sachsituation von links: Lilly hat 3€, ihre Mutter gibt ihr 4€ hinzu. Wie viel Euro hat Lilly insgesamt? Die Situation entspricht der Vorstellung des *Hinzufügens*: Die Ausgangssituation ist ein Zustand, dann erfolgt eine Änderung, das Ergebnis ist wieder ein Zustand. Wir haben die Struktur Zustand–Änderung–Zustand, kurz Z–Ä–Z.

Lilly bekommt von Onkel Kevin 3€ und von Tante Chantal 4€ ... Hier haben wir die Struktur Änderung–Änderung–Änderung, zwei Änderungen werden zu einer Gesamtänderung zusammengefasst.

Lilly hat 3€, Marc hat 4€. Wie viel Euro haben sie zusammen? Hier passiert nichts, es ist eine statische Situation. Man stellt sich nur vor, wie viel beide zusammen haben. Diese Vorstellung ist abstrakter als die ersten beiden und entspricht der mengentheoretischen Vereinigung.

Lilly hat von ihrem Taschengeld 4€ ausgegeben, jetzt hat sie noch 3€. Wie viel hatte sie vorher? Dies ist für Lernende die schwierigste Situation, weil die Oberflächenstruktur des Textes eine Subtraktion darstellt, die Tiefenstruktur der Aufgabe jedoch eine Addition erfordert. Es handelt sich um eine Umkehraufgabe, die Rückwärtsrechnen erfordert.

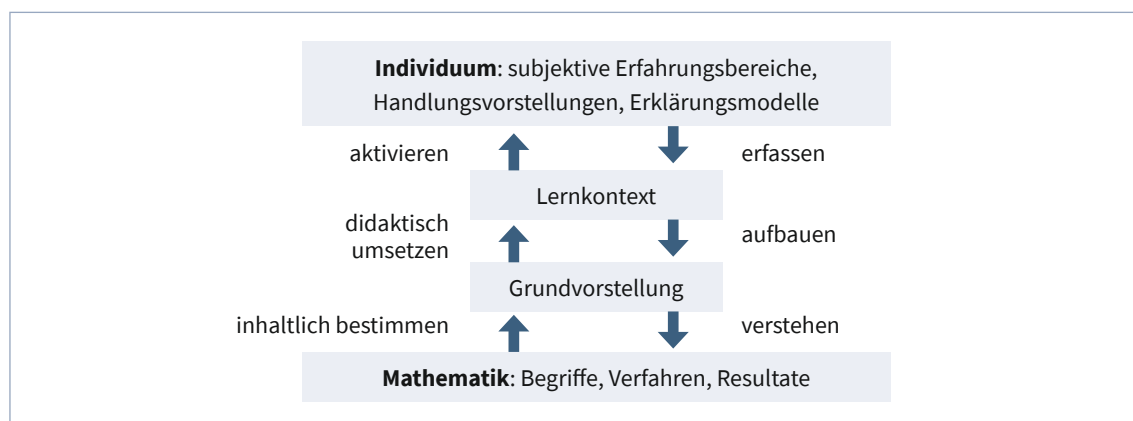
Subtrahieren – in verschiedenen Situationen

Nun zur Subtraktion (**Abb. 6**). Hier haben wir die Vorstellung des *Wegnehmens* und die Struktur Z–Ä–Z. Bei den nächsten zwei Beispielen geht es um den Vergleich von Änderungen und Zuständen. Bei der Situation Ä–Ä–Ä geht es um den Unterschied zweier Änderungen. Bei der Situation Z–Z–Z wird nichts weggenommen, es ist eine statische Situation des Vergleichs. Bei der letzten Situation handelt es sich wieder um die Umkehraufgabe; dem entspricht die Vorstellung des *Ergänzens*, die manchen schwerfällt, für das Rechnen jedoch wichtig ist.

Multiplizieren und Dividieren

Betrachten wir noch kurz Multiplikation und Division. Die wichtigste Grundvorstellung des

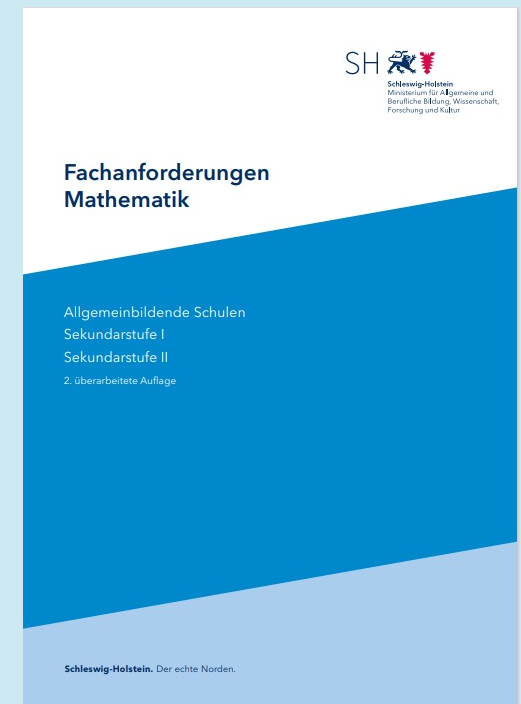
Abb. 4: Unterrichtliche Schritte (links) und individuelle Lernschritte (rechts) im Zusammenspiel



Grundvorstellungen

Ein Rückgriff auf vorangegangene Unterrichtsinhalte kann nur bei nachhaltigem Arbeiten erfolgreich sein. Geeignete Lernumgebungen veranlassen Schülerinnen und Schüler, reflektiert Basiswissen abzurufen. Eigenständig und zielgerichtet gelingt ihnen dies eher, wenn im vorangegangenen Unterricht der Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen Priorität hatte. Beispielsweise ist in der Leitidee Zahl und Operation eine verstehensorientierte Vorgehensweise bei Zahlbereichserweiterungen zwingend, damit die Bedeutung der Zahlen und der Rechenoperationen gedanklich durchdrungen werden kann. Ein überwiegend an Rechenverfahren orientiertes Vorgehen ist demgegenüber äußerst anfällig für Fehlvorstellungen, Verwechslungen und Vergessen. In der Algebra zum Beispiel ist die Interpretation von Variablen und Termen eine notwendige Voraussetzung für eine Einsicht in das formale Rechnen.

Grundvorstellungen in den Fachanforderungen (S.17)



In vier Phasen vom konkreten zum gedanklichen Darstellen		
Phase	Aufgaben des Schülers	Aufgaben der Lehrkraft
1	<i>Handeln am geeigneten Material</i> Der Schüler benutzt das Material und beschreibt die mathematische Bedeutung der Handlung. Zentral: Versprachlichen der Handlung <i>und</i> der mathematischen Symbole.	Auswahl eines <i>geeigneten</i> Materials und Klärung der Konventionen. Die Schülerhandlung wird beobachtet und bewertet, ob sie so durchgeführt wird, dass sie später auch „im Kopf“ vorgenommen werden kann. Aufforderung zur Versprachlichung der Handlung.
2	<i>Beschreiben der Handlung mit Sicht auf das Material</i> Der Schüler handelt nicht mehr selbst, sondern diktiert einem Partner die Handlung. Dieser führt die Handlung aus. Der Schüler kontrolliert den Handlungsprozess durch Beobachtung.	Einsatz des in Phase 1 gemeinsam erarbeiteten Handlungsvokabulars. Thematisierung von Missverständnissen und Unklarheiten.
3	<i>Beschreiben der Handlung ohne Sicht auf das Material (Sichtschirm)</i> Der Schüler beschreibt die Handlung und stellt sie sich am Material vor.	Einsatz des in Phase 1 erarbeiteten und in Phase 2 gefestigten Handlungsvokabulars. Operieren auf der symbolischen und vorgestellten Handlungsebene. Nicht vorschnell auf der rein symbolischen Ebene arbeiten, Bezug nehmen auf die hinter dem Sichtschirm durchzuführende Handlung.
4	<i>Arbeiten auf symbolischer Ebene, Üben und Automatisieren</i> Der Schüler bearbeitet die Aufgaben ganz ohne Material. Gegebenenfalls wird die entsprechende Handlung in der Vorstellung aktiviert.	Öfters einen Rückbezug auf Phase 3 herstellen und Fragen stellen wie „Was müsste mit einem Rechteck machen, um $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ zu rechnen?“. Damit wird eine vorschnelle Verselbstständigung der symbolischen Ebene vermieden.

Tab. 2: In vier Phasen den Aufbau von Grundvorstellungen unterstützen

Wartha, Sebastian (2011): „Handeln und Verstehen – Förderbaustein: Grundvorstellungen aufbauen“ in mathematik lehren, Heft 166, S. 8 - 14

Der Aufbau von Grundvorstellungen

Der Aufbau von Grundvorstellungen wird über vier Phasen umgesetzt:

Phase (1): Das Kind handelt am geeigneten Material und versprachlicht diese Handlung – auch auf mathematischer Symbolebene.

Phase (2): Das Kind diktiert der Lehrkraft die Handlung am Material und kontrolliert, wie diese nach seinen Anweisungen durchgeführt wird.

Phase (3): Wie bei (2), nur dass die Handlung der Lehrkraft hinter einem Sichtschirm durchgeführt wird und das Kind gezwungen wird, sich nicht nur die Handlung vorzustellen, sondern diese auch so zu formulieren, dass sie tatsächlich durchgeführt werden kann.

Phase (4): Üben und Automatisieren auf symbolischer Ebene, ggf. Aktivierung der Handlung in der Vorstellung.

Hinweis –
Schülerinnen und
Schüler bringen
Vorstellungen mit!

Nicht alle Phasen
müssen/werden
durchlaufen – ein
flexibles Wechseln ist
möglich.

Die Leitfragen und Beobachtungsschwerpunkte in den Phasen bei der Förderarbeit sind:

Phase (1): Beobachtung und Bewertung der Schülerhandlung mit Hinblick auf die mentale Fortsetzbarkeit. Hierbei findet die Thematisierung und Erarbeitung eines gemeinsamen Vokabulars statt.

Phase (2): Nutzung des gemeinsamen Handlungsvokabulars und Thematisierung von Missverständnissen und Unklarheiten.

Phase (3): Aktivierung mentaler Handlungen durch ein gemeinsames Vokabular und eines „inneren Bildes“ der Operationen. Dabei wird berücksichtigt, dass immer noch auf verschiedenen Darstellungsebenen operiert und die Handlungsebene nicht vorschnell verlassen wird, indem auf die hinter dem Sichtschirm tatsächlich durchgeführte Handlung fokussiert wird.

Phase (4): Es wird immer wieder der Rückbezug zu Phase (3) hergestellt, um eine Verselbstständigung der symbolischen Ebene zu vermeiden.

Vgl. Wartha, Sebastian

EIS-Prinzip-Theorie 1



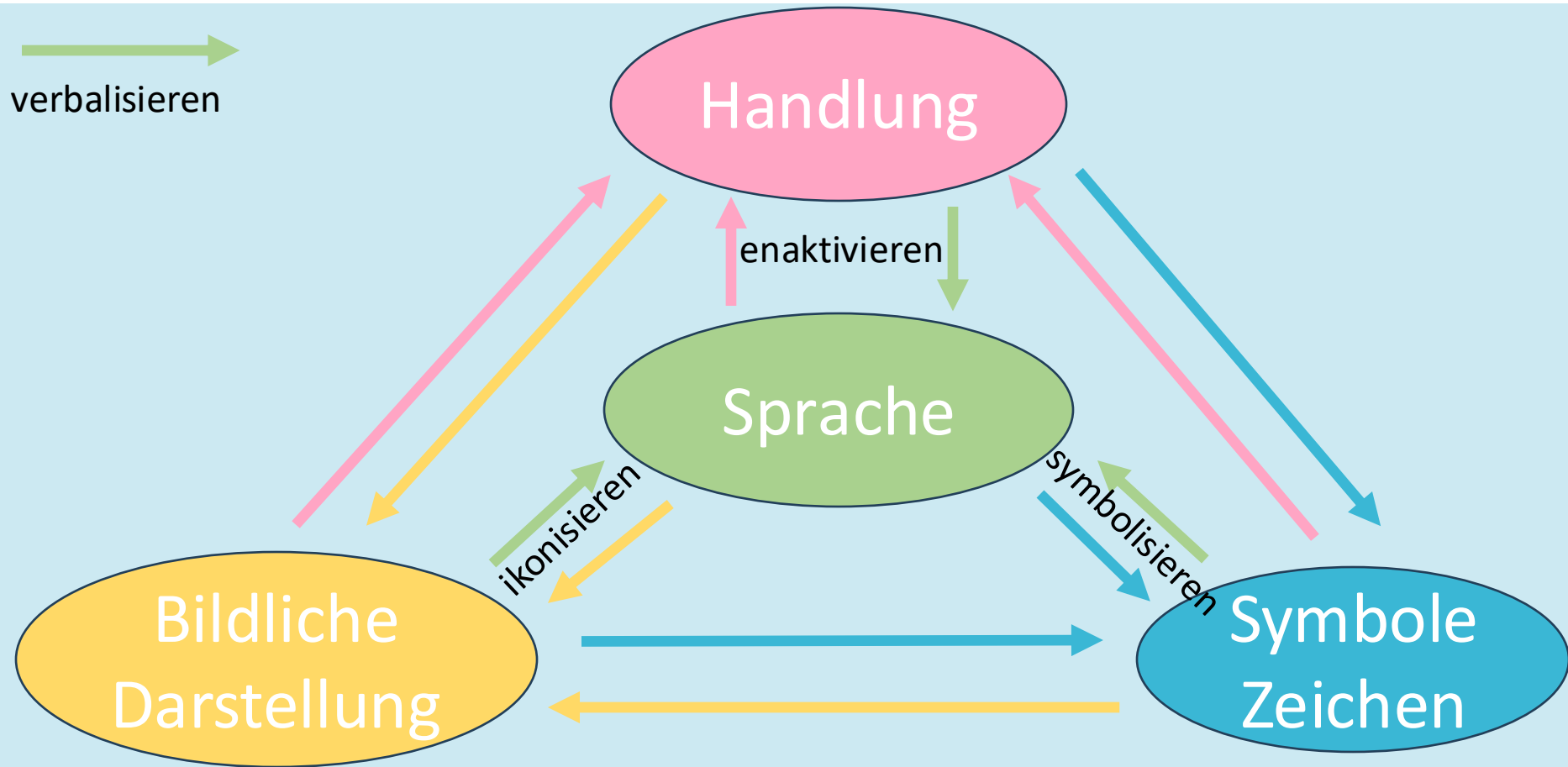
Jerome Bruner



Ein mathematischer Sachverhalt kann nach J. Bruner auf drei verschiedene Arten dargestellt werden

- **enaktiv, d.h. handelnd**
- **ikonisch, d.h. bildlich**
- **symbolisch, d.h. verbal oder formal**

Übergänge zwischen den Darstellungsebenen



Grundvorstellungen beim Erlernen von Mathematik

