

# Aktivität

**Erkunden** Sie die Lernumgebungen zum Satz des Pythagoras im Leitfaden zu den Fachanforderungen. (Material - in der moodle Gruppe)

- a) **Ordnen** Sie den Aufgaben in der Lernumgebungen die Schritte aus dem KOSIMA – Strukturmodell zu.
- b) **Beurteilen** Sie die Lernumgebung nach den wesentlichen Aspekten (s.Roth).  
**Finden** Sie Beispiele für die Umsetzung in der Lernumgebung.

**Themenkreise:**

**Themenkreise** stellen die Zusammenhänge zwischen den Themensträngen her. Sie lassen die horizontalen Verbindungen der Themenstränge sichtbar werden, führen also zur Vernetzung der Sachverhalte. Durch diese Bewusstmachung ist ein Wechsel in den Darstellungen möglich. Damit wird im Sinne des gemeinsamen Lernens auch der Aspekt der Differenzierung in den Blick genommen.

Im Übersichtsplakat sind drei Themenkreise bewusst hervorgehoben. Sie verdeutlichen den engen Zusammenhang zwischen Themen der Algebra und der Geometrie.

Dazu einige Beispiele:

- Die Länge von offenen und geschlossenen Streckenzügen lässt sich durch Summenterme beschreiben.
- Das Produkt zweier Variablen lässt sich als Flächeninhalt eines Rechtecks visualisieren.
- Parkettierung von Rechtecken führt zu der Erkenntnis, dass sich deren Größe über die Anzahl der Messquadrate in einer Reihe multipliziert mit der Anzahl der Reihen bestimmen lässt.
- Parkettierung im Zusammenhang mit dem Zerlegungs- und Ergänzungsprinzip ermöglicht, ergänzt durch die sprachliche Erläuterung, ein Verstehen der algebraischen Beschreibungen (Terme, Themenkreis 2).
- Deutlich wird der Perspektivwechsel zwischen der algebraischen und der geometrischen Darstellung ebenfalls im Themenkreis 3. Lässt sich aus drei Strecken ein rechtwinkliges Dreieck erzeugen, so bilden die ganzzahligen Maßzahlen der Seitenlängen ein pythagoreisches Zahlentripel. Maßzahlen, die Dezimalzahlen sind, ermöglichen ebenfalls einen Nachweis auf Rechtwinkligkeit. Bei der Untersuchung auf Rechtwinkligkeit kommt die Bedeutung des grünen Themenstrangs, insbesondere durch die Berücksichtigung der Winkelarten zum Tragen.

Bei der Umkehrung geht es um die algebraische Untersuchung von Zahlentripeln, die nur dann ein rechtwinkliges Dreieck erzeugen, wenn es sich um pythagoreische Zahlentripel handelt, also wenn für das Tripel  $(x,y,z)$  die Gleichung  $x^2 + y^2 = z^2$  gilt.

In den Fachanforderungen findet sich weiterhin unter dem Punkt 1.4 „Didaktische Leitlinien des Faches Mathematik in der Sekundarstufe I“ der Begriff der **Lernumgebungen**.

**Lernumgebungen** sind Aufgabenformate, die einen konkreten Lernprozess sinnstiftend (inner- wie außermathematisch) initiieren. Sie sind so gewählt, dass sie für die Lernenden auf allen Anforderungsebenen geeignete Zugänge eröffnen. Schülerinnen und Schüler bestimmen dabei individuell ihre Vorgehensweise in der Bearbeitung und bewegen sich so auf eigenen Lern- und Lösungswegen. Dies ermöglicht der Lehrkraft in der Beobachtung und Begleitung des Prozesses eine gezielte Förderung.

**Der Satz des Pythagoras – ein Beispiel für gemeinsames Lernen**

Hieran anknüpfend soll im folgenden Beispiel zum Satz des Pythagoras das gemeinsame Lernen im Mittelpunkt stehen.

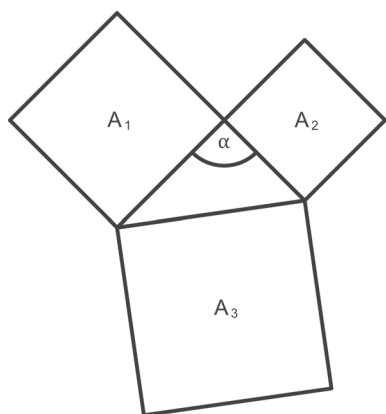
Notwendig ist es, die Schülerinnen und Schüler in die Auseinandersetzung mit Lernumgebungen zu schicken. Dabei soll – so häufig wie möglich – das „entdeckende Lernen“ im Vordergrund stehen.

Die Prozesskontexte (*Erfinden/Entdecken, Prüfen/Beweisen, Vernetzen/Anwenden, Überzeugen/Darstellen*, siehe Prozesskontexte, Timo Leuders) werden von der Lehrkraft bewusst initiiert, um allen Lernenden den Erwerb prozessbezogener Kompetenzen zu ermöglichen.

Das folgende Aufgabenformat (als Arbeitsbogen verfügbar) erfüllt diese Anforderungen. **Alle** Lernenden einer sehr heterogenen Lerngruppe können, mit Rückgriff

auf Erfahrungen zur Ermittlung des Flächeninhalts, diese Aufgabe bewältigen.

Bestimme die Größe der Flächeninhalte  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$ .  
Trage die Ergebnisse in die nachfolgende Tabelle ein.



|                            | Größe des Winkels $\alpha$ | Größe der Fläche $A_1$ | Größe der Fläche $A_2$ | Größe der Fläche $A_3$ |
|----------------------------|----------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 1. Dreieck Ausgangsdreieck |                            |                        |                        |                        |

Betrachte die Größe der Flächeninhalte und stelle einen Zusammenhang her.

Der Operator „Bestimme“ wurde im Arbeitsauftrag bewusst gewählt, weil er verschiedene Vorgehensweisen zulässt und die Dokumentation des Lösungsweges beinhaltet. Damit wird eine Verschriftlichung der gewählten Vorgehensweise (Parkettierung mit und ohne Raster, Messen, Flächeninhaltsformel) verlangt.

In dieser Phase steht das Erfinden/ Entdecken im Vordergrund. Die Aufgabe ist leicht zugänglich, da sie auf erworbenen Grundvorstellungen vorangegangener Jahrgangsstufen aufbaut.

Ziel der Erarbeitung ist, dass die Aussage  $A_1 + A_2 = A_3$  für das vorgegebene Dreieck gilt.

In der sich anschließenden Partnerarbeit, geht es um die Frage: Gilt die Aussage  $A_1 + A_2 = A_3$  für **jedes** Dreieck? Diese Forscherfrage stellt eine Herausforderung dar.

Sie führt hinsichtlich der Prozesskontexte zur Phase des Überprüfens.

Zur Beantwortung dieser Frage bieten sich folgenden Aufgabenstellungen für die drei Anforderungsebenen an. Die Ergebnisdokumentationen finden übereinstimmend für alle Anforderungsebenen in einer Tabelle statt. (Die Arbeitsbögen sind im IQSH-Fächerportal verfügbar: <http://faecher.lernnetz.de/faecherportal/index.php?key=2&wahl=10217&auswahl=39>)



**1 Planung von kompetenzorientiertem Mathematikunterricht**

Aufgabenstellung für die Anforderungsebene des MSA:

Zeichne vier weitere Dreiecke mit den dazugehörigen Quadraten über den Seiten.  
Verändere dazu die Größe des Winkels  $\alpha$ .

Die Anforderungsebene des MSA ergibt sich dadurch, dass die Lernenden selbstständig, mehr oder weniger gezielt, ihre Dreiecke auswählen müssen. Dabei verändern sie bewusst den anfänglichen  $90^\circ$  großen Winkel.

Das Variieren der Winkelgröße führt zu der Erkenntnis, dass die Aussage nicht allgemein gültig ist.

Es entsteht dadurch eine Bewusstheit darüber, dass ein rechtwinkliges Dreieck vorliegen muss, wenn gilt  $A_1 + A_2 = A_3$ .

Dem Prinzip des gemeinsamen Lernens, d. h. dem Beachten der verschiedenen Anforderungsebenen, wird durch die Maßnahmen entsprochen, alternative Aufgabenformate anzubieten:

Differenzierung nach oben (Anforderungsebene des ÜOS):

Zeichne vier weitere Dreiecke in dein Heft mit den dazugehörigen Quadraten über den Dreieckseiten. Berücksichtige für die Größe des Winkels  $\alpha$  die verschiedenen Winkelarten.

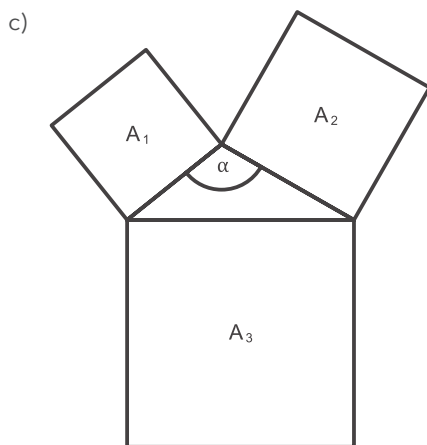
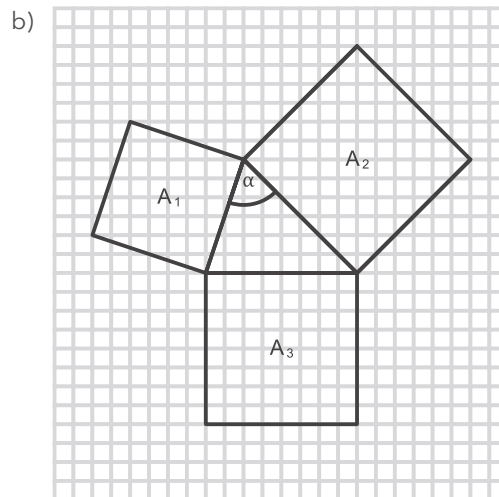
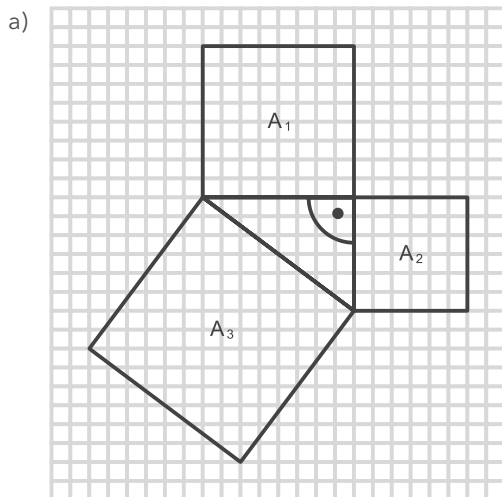
In diesem Fall ist ein gezielter Umgang mit Vorwissen zu den Winkelarten erforderlich.

Die folgende Tabelle dient der Ergebnisdokumentation für die Anforderungsebenen des MSA und des ÜOS:

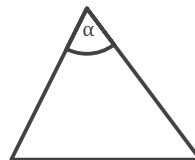
|                                     | Größe des Winkels $\alpha$ | Größe der Fläche $A_1$ | Größe der Fläche $A_2$ | Größe der Fläche $A_1 + A_2$ | Größe der Fläche $A_3$ |
|-------------------------------------|----------------------------|------------------------|------------------------|------------------------------|------------------------|
| <b>1. Dreieck (Ausgangsdreieck)</b> |                            |                        |                        |                              |                        |
| <b>2. Dreieck</b>                   |                            |                        |                        |                              |                        |
| <b>3. Dreieck</b>                   |                            |                        |                        |                              |                        |
| <b>4. Dreieck</b>                   |                            |                        |                        |                              |                        |
| <b>5. Dreieck</b>                   |                            |                        |                        |                              |                        |

Differenzierung nach unten (Anforderungsebene des ESA):

Miss die Größe des Winkels  $\alpha$  und bestimme die Größe der Flächeninhalte der Quadrate über den Dreiecksseiten. Trage die Ergebnisse in die nachfolgende Tabelle ein.



d) Zeichne die Quadrate über den Dreiecksseiten und bestimme ihre Flächeninhalte.



Die Lernenden erhalten hier vier Abbildungen, die ein Arbeiten auf einem zunehmenden Abstraktionsgrad ermöglichen. Die folgende Tabelle dient der Ergebnisdokumentation auf der Anforderungsebene ESA. Sie unterstützt durch zusätzliche Spalten das Erkennen des Zusammenhangs:

|                              | Größe des Winkels $\alpha$ | Größe der Fläche $A_1$ | Größe der Fläche $A_2$ | Größe der Fläche $A_3$ | < oder = oder > | Größe der Fläche $A_3$ | Dreieckstyp (rechtwinklig, spitzwinklig, stumpfwinklig) |
|------------------------------|----------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-----------------|------------------------|---------------------------------------------------------|
| 1. Dreieck (Ausgangsdreieck) |                            |                        |                        |                        |                 |                        |                                                         |
| a) Dreieck                   |                            |                        |                        |                        |                 |                        |                                                         |
| b) Dreieck                   |                            |                        |                        |                        |                 |                        |                                                         |
| c) Dreieck                   |                            |                        |                        |                        |                 |                        |                                                         |
| d) Dreieck                   |                            |                        |                        |                        |                 |                        |                                                         |

**1 Planung von kompetenzorientiertem Mathematikunterricht**

Es findet hier gemeinsames Lernen auf individuellen Wegen statt, d. h. alle arbeiten an ein und demselben Unterrichtsgegenstand jeweils auf ihrer Anforderungsebene. Die einheitliche Tabelle zur Ergebnisdokumentation führt die Ergebnisse zusammen und lässt ein gemeinsames Weiterarbeiten zu.

Es wird deutlich, dass die bewusste Nutzung des „geometrischen Themenstrangs“ für alle Lernenden sichere Vorerfahrungen schafft, die ein gemeinsames Lernen auf unterschiedlichen Anforderungsebenen ermöglicht.

Formuliere die Zusammenhänge, die du erkannt hast, in vollständigen Sätzen.

Die Verschriftlichung der Erkenntnisse führt zu einer Entschleunigung, erzwingt die Bewusstmachung der einzelnen Elemente des Arbeitsprozesses, ermöglicht ein mathematisches Kommunizieren und Argumentieren. Die Lehrkraft erhält differenzierte Informationen und damit Einblick in den Lernstand der einzelnen Lernenden, um darauf individuell reagieren zu können.

Ergebnisse aus der Plenumsphase könnten sein:

Ich stelle fest:

- Wenn das Dreieck spitzwinklig ist ( $\alpha < 90^\circ$ ), dann ist der Flächeninhalt von  $A_1 + A_2$  größer als der Flächeninhalt von  $A_3$ .
- Wenn das Dreieck stumpfwinklig ist ( $\alpha > 90^\circ$ ), dann ist der Flächeninhalt von  $A_1 + A_2$  kleiner als der Flächeninhalt von  $A_3$ .
- Wenn das Dreieck rechtwinklig ist ( $\alpha = 90^\circ$ ), dann ist der Flächeninhalt von  $A_1 + A_2$  gleich dem Flächeninhalt von  $A_3$ .

In der Weiterarbeit findet nun die Fokussierung auf die Beziehung der Flächeninhalte der Quadrate über den Seiten im rechtwinkligen Dreieck statt. Es geht darum, diese auf Allgemeingültigkeit zu untersuchen bzw. nachzuweisen.

Die unterschiedliche Vorgehensweise auf den verschiedenen Anforderungsebenen wird im Folgenden dokumentiert.

Auf Anforderungsebene des ESA erfolgt dieser Nachweis exemplarisch.

Zeichne folgende Dreiecke:

$a = 3 \text{ cm}, b = 4 \text{ cm}, c = 5 \text{ cm}$

$a = 10 \text{ cm}, b = 6 \text{ cm}, c = 8 \text{ cm}$

$a = 12 \text{ cm}, b = 13 \text{ cm}, c = 5 \text{ cm}$

$a = 12 \text{ cm}, b = 9 \text{ cm}, c = 15 \text{ cm}$

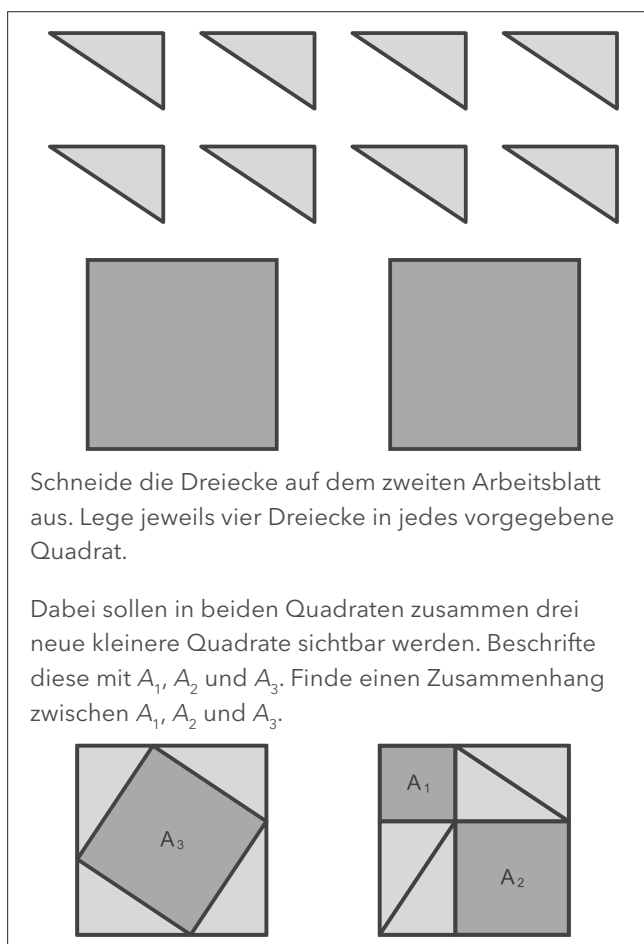
Überprüfe: Der Flächeninhalt des größten Quadrats ist genau so groß wie der Flächeninhalt der beiden kleineren Quadrate zusammen.

Anforderungsebene des MSA:

Die Lernenden begründen die **Allgemeingültigkeit** des Satzes des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck mit einem Plausibilitätsbeweis.

Dieses sollte ohne Verwendung mathematischer Symbolik aktiv handelnd (enaktiv) durchgeführt werden.

Die Lernenden erhalten folgendes Material. Sie arbeiten mit diesem Material zuerst allein, anschließend wird kooperiert.



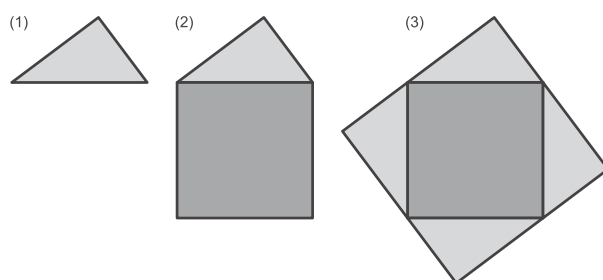
Die Interpretation der Lösung erzwingt ein zweischrittiges Vorgehen:

1.  $A_1 + A_2 = A_3$  (Der „Rest“ in jedem großen Quadrat besteht aus vier rechtwinkligen Dreiecken.)
2. Die Seitenlängen der drei Quadrate  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$  entsprechen den Seitenlängen des rechtwinkligen Dreiecks. (Dies sollte sichtbar gemacht werden.)

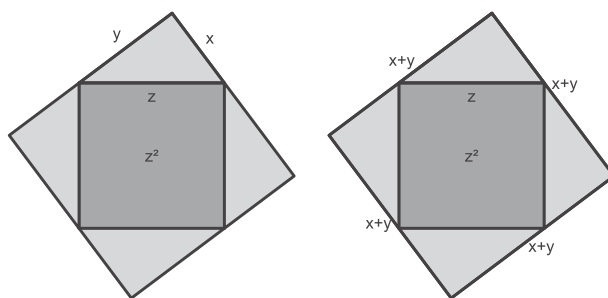
Um die Zusammenhänge zwischen den Seitenlängen der Quadrate mit den Längen der Dreiecksseiten entdecken zu können, gibt die Lehrkraft bei Bedarf Impulse nach dem Prinzip der minimalen Hilfe.

Anforderungsebene des ÜOS:

1. Zeichne ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck und benenne die Seiten.
2. Zeichne das Quadrat über der längsten Seite.
3. Zeichne das rechtwinklige Dreieck jetzt über jeder Quadratseite.



4. Bestimme den Flächeninhalt des äußeren Quadrats.
5. Bestimme den Flächeninhalt der Dreiecksflächen.
6. Bestimme den Flächeninhalt des inneren Quadrats.



Äußeres Quadrat:  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$  (4.)

Dreiecksflächen:  $4 \cdot \frac{xy}{2} = 2xy$  (5.)

Inneres Quadrat: a)  $(x^2 + 2xy + y^2) - (2xy)$  (6.)  
 $= x^2 + 2xy + y^2 - 2xy$   
 $= x^2 + y^2$

Inneres Quadrat: b)  $z^2$

**1 Planung von kompetenzorientiertem Mathematikunterricht**

Zur Bearbeitung der Aufträge 4 bis 6 ist folgende Denkleistung schrittweise zu erbringen:

- Die Bezeichnungen müssen durchgängig ergänzt werden, wo die jeweiligen Seitenlängen sich wiederholen.
- Aufstellen der Terme zur Berechnung der Flächeninhalte des äußeren und des inneren Quadrats.
- Umformung des Produktterms in einen Summenterm (1. Binomische Formel)
- Bestimmen des Flächeninhalts der vier rechtwinkligen Dreiecke (2-er Rechtecke).
- Erkennen, dass gilt:  $x^2 + y^2 = z^2$
- Übertragen der Erkenntnis auf das Ausgangsdreieck durch Ergänzen der Quadrate über den entsprechenden Seiten.

Auf allen drei Anforderungsebenen bietet sich das Arbeiten nach dem Ich-Du-Wir-Prinzip an, d. h. die Lernenden setzen sich zuerst individuell mit dem Arbeitsauftrag auseinander (Ich), stellen in der anschließenden Partnerarbeit ihre Überlegungen vor und tauschen sich diesbezüglich aus (Du). In der nächsten Phase präsentieren die Lernenden im Plenum (Wir) ihre Vorgehensweisen auf den drei Anforderungsebenen. Dabei ist mit der Anforderungsebene ESA zu beginnen. (Prozesskontext: Überzeugen/Darstellen)

Erst nach der Präsentation erfolgt die Begriffszuweisung Hypotenuse (längste Seite, liegt dem rechten Winkel gegenüber) und Katheten (die beiden Katheten schließen den rechten Winkel ein) im rechtwinkligen Dreieck.

Besonderer Wert ist auf eine auf die Anforderungsebenen zugeschnittene eigenständige Versprachlichung zu legen.

Der folgende Lückentext kann Grundlage für das Formulieren auf Anforderungsebene ESA und MSA sein:

In jedem ..... Dreieck haben die ..... über den ..... zusammen ..... Flächeninhalt wie das ..... über der Hypotenuse.

Anforderungsebene des ESA:

Setze die folgenden Begriffe an der passenden Stelle ein: Quadrat, Quadrate, denselben, rechtwinkligen, Katheten.

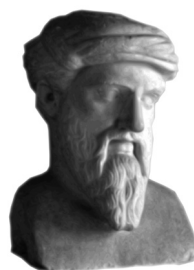
Anforderungsebene des MSA:

Wähle die geeigneten Begriffe aus und setze sie an den passenden Stellen ein:

Katheten, gleichschenkligen, stumpfwinkligen, denselben, Dreiecke, Quadrate, Quadrat, spitzwinkligen, Hypotenuse, rechtwinkligen, größer, kleiner, Dreieck.

Auf der Anforderungsebene des ÜOS entwickeln die Lernenden eine freie Formulierung zum Satz des Pythagoras.

Im weiteren Verlauf ist auf eine beliebige Beschriftung im rechtwinkligen Dreieck Wert zu legen, um Schülerinnen und Schülern ein verstehensorientiertes Arbeiten zu ermöglichen.



Eine Verknüpfung mit der historischen Person Pythagoras gibt dem Satz ein „Gesicht“. Nun haben die Lernenden erfahren, dass der Satz des Pythagoras ausschließlich für rechtwinklige Dreiecke gilt.

Seine Umkehrung ermöglicht die Überprüfung auf Rechtwinkligkeit. Eine hinreichende Bedingung hierfür stellen die pythagoreischen Zahlentripel dar:

| Maßzahl der 1. Kathete | Maßzahl der 2. Kathete | Maßzahl der Hypotenuse | Summe der Maßzahlen |
|------------------------|------------------------|------------------------|---------------------|
| 3                      | 4                      | 5                      | 12                  |
| 6                      | 8                      | 10                     | 24                  |
| 9                      | 12                     | 15                     | 36                  |
| 5                      | 12                     | 13                     | 30                  |
| 10                     | 24                     | 26                     | 60                  |

Erkundungsauftrag:

Erzeuge aus der Gliederkette ein Dreieck, für das gilt: Der Flächeninhalt des Quadrats über der längsten Seite hat den gleichen Flächeninhalt wie die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den beiden anderen Seiten.

Die Lernenden erhalten eine Gliederkette aus Büroklammern. Die Anzahl der Kettenglieder entspricht der Summe eines pythagoreischen Zahlentripels, die erhöht wird um drei weitere Kettenglieder zum Festhalten und Spannen.

Je nach Abstraktionsvermögen agieren die Gruppen durch ungerichtetes bzw. systematisches Probieren. Sowohl ein arithmetischer als auch ein geometrischer Annäherungsprozess (oder Kombination von beidem) kann dabei zielführend sein.



Ein erhebliches Differenzierungspotential hinsichtlich der Anforderungsebenen ergibt sich aus der Gesamtzahl der Kettenglieder, die die Anzahl der Kombinationsbreite bestimmt.

Die Einsicht, dass ausschließlich rechtwinklige Dreiecke die Forderung des Arbeitsauftrags erfüllen, kann auf der enaktiven, ikonischen (Kettensituation wird auf Papier übertragen) und symbolischen Ebene (algebraische Betrachtungsweise) gewonnen werden (**E-I-S-Prinzip** / Wechsel der Darstellungsebenen).

Das Kettenmaterial kann auch, um allen Anforderungsebenen gerecht zu werden, in folgenden Varianten eingesetzt werden.

Erzeugt mit dem Material rechtwinklige Dreiecke.  
Haltet die Anzahl der Kettenglieder der einzelnen Seiten in der vorgegebenen Tabelle fest.

Dazu benötigen die Gruppen geschlossene Ketten aus Büroklammern.

1. Möglichkeit:

Die Anzahl der Kettenglieder für die Hypotenuse wird durch Einfügen zweier andersfarbiger Büroklammern festgelegt. Die Anzahl der Summe der Kettenglieder für die beiden Katheten ist um 1 erhöht. Dieses zusätzliche Kettenglied wird zum Festhalten und Spannen benötigt (vgl. Bild). Die Lernenden müssen das zusätzliche Kettenglied an geeigneter Stelle herausziehen, so dass ein rechtwinkliges Dreieck entsteht und die Anzahl der Kettenglieder für die Katheten ermittelt werden kann. Die so bestimmten Werte werden in der Tabelle festgehalten.



**1 Planung von kompetenzorientiertem Mathematikunterricht****2. Möglichkeit:**

Die Anzahl der Kettenglieder für eine Kathete wird durch Einfügen zweier andersfarbiger Büroklammern festgelegt. Die Anzahl der Summe der Kettenglieder für die Hypotenuse und die andere Kathete ist um 1 erhöht. Dieses zusätzliche Kettenglied wird zum Festhalten und Spannen benötigt. (vgl. Bild) Die Lernenden müssen das zusätzliche Kettenglied an geeigneter Stelle herausziehen, so dass ein rechtwinkliges Dreieck entsteht und die Anzahl der Kettenglieder für die zweite Kathete und die Hypotenuse ermittelt werden kann. Die so bestimmten Werte werden in der Tabelle festgehalten.



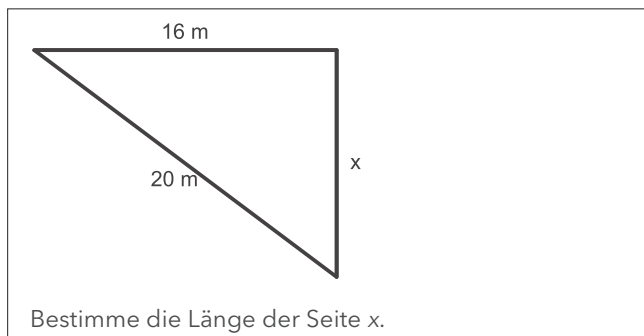
| Anzahl der Kettenglieder für die 1. Seite | Anzahl der Kettenglieder für die 2. Seite | Anzahl der Kettenglieder für die längste Seite | Gesamtanzahl der Kettenglieder |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------|------------------------------------------------|--------------------------------|
|                                           |                                           | 5                                              | 12                             |
|                                           | 8                                         |                                                | 24                             |
|                                           |                                           | 15                                             | 36                             |
|                                           | 12                                        |                                                | 30                             |
|                                           |                                           |                                                |                                |

Zur Steuerung des Unterrichtsprozesses ist es sinnvoll, die verschiedenen Büroklammerketten gezielt auszuteilen.

Diese Arbeitsweise ermöglicht den Lernenden die Einsicht, dass allein die gegebenen Seitenlängen als Grundlage ausreichen, um zu überprüfen, ob ein Dreieck rechtwinklig ist. Eine Konstruktion ist nicht erforderlich.

**Aufgabenbeispiele zum Vernetzen und Anwenden**

Im Folgenden wird der Prozesskontext „Anwenden und Vernetzen“ durch vielfältige Aufgabenbeispiele veranschaulicht. Einen Schwerpunkt bilden dabei die adressatenbezogenen Arbeitsaufträge unter besonderer Berücksichtigung der Anforderungsebenen.

**Aufgabe 1:**

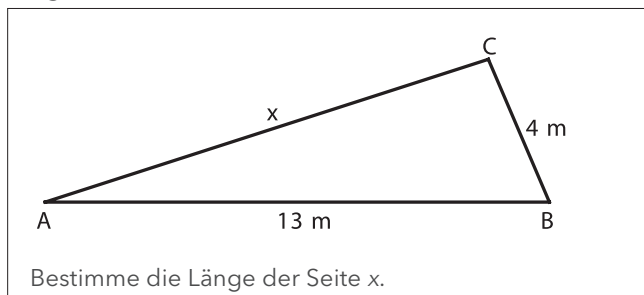
Der Operator „Bestimme“ erzwingt die Dokumentation des individuellen Lösungsweges. Dabei muss bei allen Lösungswegen vorangestellt werden, dass es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt.

Die Aufgabenstellung lässt vielfältige Vorgehensweisen zu:

1. Gliederketten als Hilfsmittel
2. Messen, Nutzen des Maßstabes
3. Rückwärtsarbeiten mit Einzeichnen der Quadrate über den Dreiecksseiten.
4. Rückwärtsarbeiten ohne Einzeichnen der Quadrate.
5. Aufstellen, ggf. Umstellen einer Gleichung

Auf der Grundlage der Vorkenntnisse wird erstmalig die Länge einer Kathete bestimmt. Die Lernenden verfügen hierzu über kein Lösungsschema, d. h. es wird ein Problemlöseprozess initiiert, der einen flexiblen Umgang mit individuellem Vorwissen erfordert (Anwenden und Vernetzen).

Die Aufgabe hat damit so viel diagnostisches Potential, dass die Vorgehensweise der Lernenden Rückschlüsse auf deren Lernstand zulässt.

**Aufgabe 2:**

Die Vorgehensweisen 1 - 5 aus Aufgabe 1 gelten hier gleichermaßen. Die Lösungswege führen allerdings zu Irritationen, da es sich um ein stumpfwinkliges Dreieck handelt. Es muss deutlich werden, dass eine Überprüfung auf Rechtwinkligkeit vor Nutzung des Satzes des Pythagoras zwingend erforderlich ist.

Grundverständnis zu Längenberechnungen von Diagonalen in Rechtecken, zu Flächeninhaltsbestimmungen in gleichschenkligen bzw. gleichseitigen Dreiecken und in regelmäßigen Sechsecken ist notwendig, um darauf im Bereich der Trigonometrie und Stereometrie aufbauen zu können.

**Aufgabe 3: Pythagoras im Handwerk**

Der Satz des Pythagoras spielt in erster Linie in der Geländevermessung und im Bauhandwerk eine Rolle. Die Kenntnis über die pythagoreischen Tripel wird also in der beruflichen Praxis benötigt. Zum Einwinkeln eines rechteckigen Grundstücks oder Gebäudes nutzt der Fachmann ein Maurerdreieck, dessen Seitenlängen im Verhältnis 3:4:5 zueinander stehen.

An diesen Sachverhalt knüpft die folgende in einer Filmsequenz dargestellte Ausgangssituation an:

Grundkurs Mathematik - der Satz des Pythagoras im ARD-Bildungskanal  $\alpha$   
<http://www.br.de/fernsehen/ard-alpha/sendungen/grundkurs-mathematik/grundkurs-mathematik-rechtwinkliges-dreieck100.html>



Ein Auszubildender sieht sich einer Problemstellung ausgesetzt, die er nur mit dem Wissen zum Satz des Pythagoras und den dazugehörigen Zahlentripeln bewältigen kann. Wie kann ich den ersten rechten Winkel zum Bau einer Halle mit rechteckiger Grundfläche auf einem ebenen Untergrund erzeugen? (Die Situation könnte auf dem Schulhof/ Sportplatz nachgestellt werden.)

## 1 Planung von kompetenzorientiertem Mathematikunterricht

Sinnvoll ist es den Filmausschnitt nach Darstellung der Ausgangssituation (Problemstellung) zu unterbrechen und die Lernenden kooperativ in einen Problemlöseprozess im Freiland zu schicken.

Dazu müssen Materialien – abhängig vom Untergrund – zur Verfügung gestellt werden:  
Maßbänder, Holzpflocke oder Kreide zur Kennzeichnung der Eckpunkte.

Zur Problemlösung ist es notwendig, dass die Lernenden auf ihre Erfahrungen mit den Kettengliedern aus Büroklammern zu den pythagoreischen Zahlentripeln zurückgreifen.

Die Lösung im Film gibt einerseits Anlass zur Reflexion der eigenen Vorgehensweise, andererseits eröffnet sie die Möglichkeit Alltagssprache in die Fachsprache zu „übersetzen“.

## Aufgabe 4: Pythagoras in Figuren

Auf dem Arbeitsbogen siehst du die Darstellung von sechs ebenen Figuren.

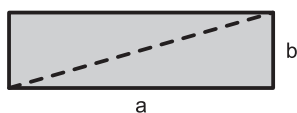
Schreibe den Namen jeder Figur auf die Linie unter der Figur.

Für die Figuren gelten folgende Längenangaben:

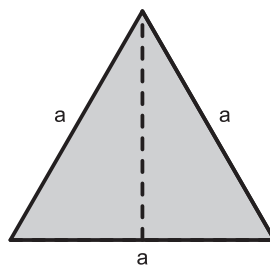
$a = 7 \text{ cm}$ ;  $b = 2 \text{ cm}$ ;  $s = 6 \text{ cm}$ ;  $e = 8 \text{ cm}$ ;  $f = 4 \text{ cm}$ ;  $x = 3,5 \text{ cm}$

Bearbeite die folgenden Aufträge für mindestens drei der sechs Figuren.

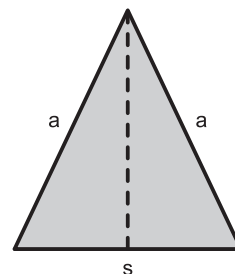
- Kennzeichne in den Figuren die rechten Winkel.
- Schraffiere in jeder Figur ein rechtwinkliges Dreieck.
- Berechne die Länge der gestrichelten Strecke.



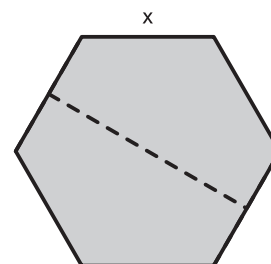
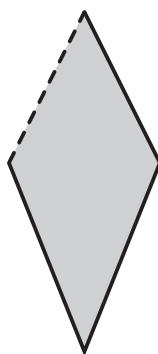
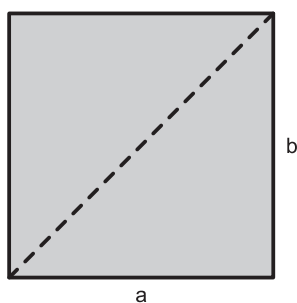
\_\_\_\_\_



\_\_\_\_\_



\_\_\_\_\_



Die sechs in ihrer Gesamtheit selbstdifferenzierenden Figuren sind so gewählt, dass sie ein Arbeiten auf allen Anforderungsebenen ermöglichen.

Die Bearbeitung der Aufträge a) und b) dienen der kognitiven Unterstützung hinsichtlich der Bewältigung des Arbeitsauftrags c). Gegebenenfalls trägt auch eine farbige Kennzeichnung der Hypotenuse zum Verstehensprozess bei.

Bei Rechteck und Quadrat handelt es sich um Grundaufgaben. Das bedeutet, dass sowohl der Anfangszustand wie auch der Lösungsweg bekannt sind.

Die Berechnung der Höhen in beiden Dreiecken erfordert einen flexiblen Umgang mit dem Satz des Pythagoras, da die Länge einer Kathete zu berechnen ist.

Die Berechnung der Seitenlänge der Raute erfordert eine mehrschrittige Vorgehensweise, zeigt das vernetzte Denken zwischen den Leitideen „Raum und Form“ sowie „Messen“ auf:

- $e$  und  $f$  geben die Längen der Diagonalen der Raute an,
- $e$  und  $f$  stehen senkrecht auf einander,
- $e$  und  $f$  halbieren einander,
- durch das Einzeichnen der Strecken  $e$  und  $f$  entstehen vier rechtwinklige Dreiecke,
- $v$  gibt die Länge der Hypotenuse an, die zu berechnen ist
- $\frac{e}{2}$  und  $\frac{f}{2}$  sind die Längen der Katheten.

Die Berechnung der Streckenlänge im regelmäßigen Sechseck ist der Anforderungsebene des ÜOS zuzuweisen.

Begründung:

- Im regelmäßigen Sechseck sind alle Seiten gleich lang.
- Komplexität der Form, die aus sechs regelmäßigen gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzt ist (Zerlegungsaspekt)
- Die gestrichelte Mittellinie muss als zweifache Höhe eines der gleichseitigen Dreiecke identifiziert werden.
- Die halbe Länge der Mittellinie bildet die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks.
- Die zweite Kathete hat die Länge  $\frac{x}{2}$ .

Besonders deutlich wird hier, dass alle Lernenden an einer Aufgabe arbeiten, allerdings jeweils auf ihrer Anforderungsebene, also gemeinsames Lernen praktiziert wird.

### Aufgabe 5: Pythagoras in Körpern

Die Anwendung des Satzes des Pythagoras auf Körper setzt ein flexibles Agieren mit diesem Satz in Figuren voraus (vgl. Aufgabe 4).

Für die folgende Auseinandersetzung benötigen die Lernenden pro Gruppe folgendes Material:

Schuhkarton ohne Deckel, Trinkhalm (1 m lang), Schere, Tonpapier, Tesafilm, Gliedermaßstab.

#### Arbeitsauftrag 1

Findet den längsten Trinkhalm, der in euren Schuhkarton passt. Dabei darf der Trinkhalm nicht gebogen werden.

#### Arbeitsauftrag 2

Schätzt die Länge des gefundenen Trinkhalms. Beschreibt, wie ihr zu eurem Schätzwert gekommen seid. Tippkarte: Messt eine geeignete Kantenlänge des Schuhkartons.

#### Arbeitsauftrag 3

Überprüft eure Schätzung durch eine Rechnung.

Die Offenheit des Arbeitsauftrages 1 ermöglicht ein Erforschen und Entdecken auf der enaktiven Ebene. Experimentell wird eine Raumdiagonale als längste Strecke erkannt.

Mit dem Arbeitsauftrag 2 wird die notwendige Zweischrittigkeit angebahnt. Darüber hinaus erfolgt über die Verschriftlichung eine Entschleunigung und erzwingt eine Bewusstmachung der Vorgehensweise durch kooperative und kommunikative Prozesse.

**1 Planung von kompetenzorientiertem Mathematikunterricht**

Durch Arbeitsauftrag 3 initiierte Lösungswege werden in der sich anschließenden Plenumsphase präsentiert und strukturiert.

Der ergänzende Arbeitsauftrag „Nutzt das Tonpapier (2 Farben: Dreieck zur Bestimmung der Grundflächendiagonale und Dreieck zur Bestimmung der Raumdiagonale), um euren Rechenweg im Schuhkarton sichtbar zu machen.“ führt von der symbolischen auf die enaktive Ebene. So wird der Rechenweg in seiner Zweischrittigkeit sichtbar und begreifbar.

Während im ersten Schritt die Grundflächendiagonale die Hypotenuse bildet, muss im zweiten Schritt der Vorstellungswechsel hin zur Kathete erfolgen.

Die folgenden Vorschläge zur Untersuchung von Abhängigkeiten richten sich ausschließlich an die Anforderungsebenen des MSA und des ÜOS.

Wähle dir die Kantenlängen eines Quaders.

Berechne die längste Flächendiagonale.

Die längste Kante des Quaders wird verdoppelt.

Untersuche, ob sich so auch die längste Flächendiagonale verdoppelt. Stelle zunächst eine begründete Vermutung auf.

Untersuche, ob sich die Länge der Raumdiagonalen verdoppelt. Stelle zunächst eine begründete Vermutung auf.

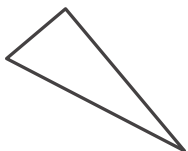
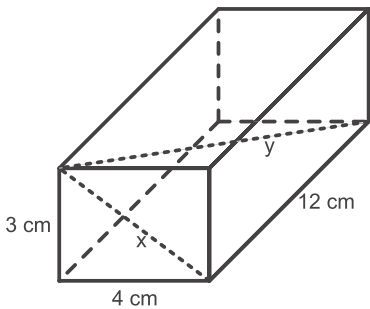
Diese Aufgabe kann auch mit anderen Vielfachen der gewählten Kantenlängen sowie ausschließlich mit Variablen bearbeitet werden.

Untersuche, ob die Summe der Flächeninhalte der Halbkreise über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks genau so groß ist wie der Flächeninhalt des Halbkreises über der Hypotenuse.

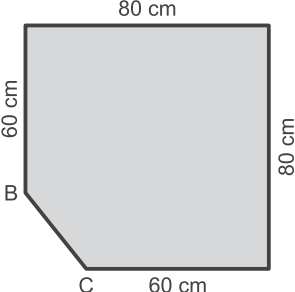
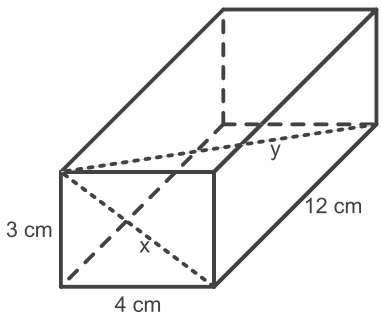
### **Anregungen für Leistungsaufgaben zur Unterrichtseinheit 'Pythagoras'**

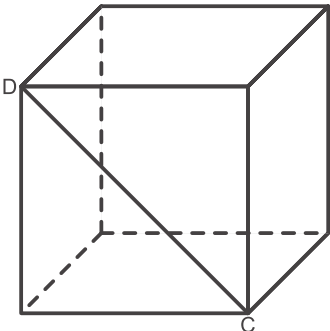
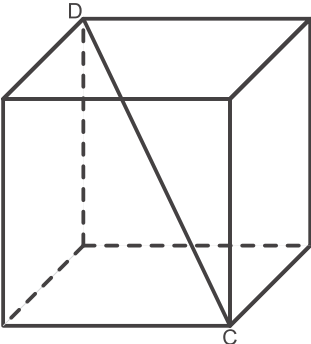
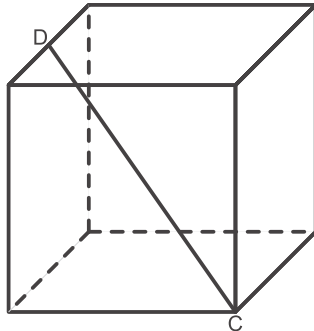
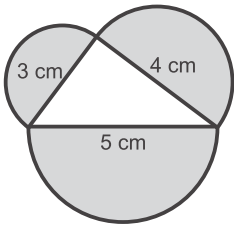
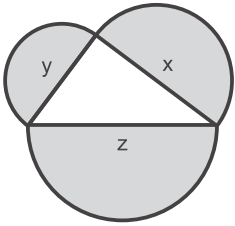
Die folgende Matrix zeigt einen Überblick des Outputs, der sich durch die Unterrichtseinheit Pythagoras ergeben kann. Dabei wird jeweils der gleiche Sachverhalt für die drei Anforderungsebenen variiert. Die hier exemplarisch dargestellten Leistungsaufgaben sind geeignet, der Forderung des gemeinsamen Lernens im Rahmen der Klassenarbeit zu entsprechen.

Das setzt immer voraus, dass sich die Lernsituationen (Berücksichtigung der Prozesskontexte, damit vielfältige kognitive Aktivierung, ausgelöst z. B. durch das E-I-S-Prinzip sowie kooperative Lernformen) in den Leistungsaufgaben widerspiegeln. Daraus wird deutlich, dass Lern- und Leistungssituation bei der Planung von kompetenzorientiertem Mathematikunterricht in direkter Abhängigkeit stehen.

|                                      | Anforderungsebene ESA                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Anforderungsebene MSA                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Anforderungsebene ÜOS                                                                                                               |
|--------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Anforderungsbereich I: Reproduzieren | <p>☛ Die Katheten in einem rechtwinkligen Dreieck sind 8 cm und 15 cm lang. Berechne die Länge der Hypotenuse.</p>  <p>☛ Zeige durch eine Rechnung, dass das Dreieck mit den Seitenlängen 12 cm, 13 cm und 5 cm rechtwinklig ist.</p>  | <p>☛ Gegeben ist die Länge der Kathete mit 10 cm und die Länge der Hypotenuse mit 26 cm. Berechne die Länge der anderen Kathete.</p> <p>☛ Gegeben sind die Seitenlängen eines Rechtecks mit 3 cm und 4 cm. Berechne die Länge der Diagonalen des Rechtecks.</p>                                                                                                   | <p>☛ Gegeben ist die Länge einer Kathete mit 6 cm und die Länge der Hypotenuse mit 14 cm. Berechne die Länge der dritten Seite.</p> |
|                                      | <p>Zu dieser Aufgabenstellung wurde kein Pendant für die Anforderungsebene des ESA formuliert.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | <p>☛ Berechne die Länge <math>x</math> der Flächendiagonalen und die Länge <math>y</math> der Raumdiagonalen im gegebene Quader.</p>                                                                                                                                           | <p>Zu dieser Aufgabenstellung wurde kein Pendant für die Anforderungsebene des ÜOS formuliert.</p>                                  |
|                                      | <p>☛ In jedem ... Dreieck haben die ... über den ... zusammen... Flächeninhalt wie das ... über der Hypotenuse.<br/>Setze die folgenden Begriffe in den Lückentext ein: Quadrat, Quadrate, denselben, rechtwinkligen, Katheten.</p>                                                                                                                                                                       | <p>☛ In jedem ... Dreieck haben die ... über den ... zusammen... Flächeninhalt wie das ... über der Hypotenuse.<br/>Wähle die geeigneten Begriffe aus und setze sie an den passenden Stellen ein: Katheten, gleichschenkligen, stumpfwinkligen, denselben, Dreiecke, Quadrate, Quadrat, spitzwinkligen, Hypotenuse, rechtwinkligen, größer, kleiner, Dreieck.</p> | <p>☛ Formuliere den Satz des Pythagoras mit eigenen Worten.</p>                                                                     |

## 1 Planung von kompetenzorientiertem Mathematikunterricht

|                                                       | Anforderungsebene ESA                                                                                                                                                                                                                                  | Anforderungsebene MSA                                                                                                                                                                                 | Anforderungsebene ÜOS                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Anforderungsbereich II: Herstellen von Zusammenhängen | <p>➡ Gegeben ist die Länge der einen Kathete mit 6 cm und die Länge der Hypotenuse mit 14 cm. Berechne die Länge der anderen Kathete.</p>                                                                                                              | <p>➡ Zeichne einen rechten Winkel. Ergänze den rechten Winkel zu einem rechtwinkligen Dreieck. Die Hypotenuse des Dreiecks soll eine Länge von 10 cm haben. Die Länge einer Kathete beträgt 8 cm.</p> | <p>➡ Ergänze einen rechten Winkel zu einem rechtwinkligen Dreieck. Die Hypotenuse des Dreiecks soll eine Länge von 10 cm haben.</p>                                                                                                                                                   |
|                                                       | <p>➡ Gegeben sind die Seitenlängen eines Rechtecks mit 3 cm und 4 cm. Berechne die Länge der Diagonalen.</p>                                                                                                                                           | <p>➡ Bestimme Umfang und Flächeninhalt der abgebildeten Figur.</p>                                                  | <p>➡ Zahlentripel beschreiben die Seitenlängen von Dreiecken.<br/>a) (26   24   10)<br/>b) (28   24   10)<br/>c) (24   24   10)<br/>Entscheide jeweils, ob es sich bei den Dreiecken um ein spitz-, stumpf- oder rechtwinkliges Dreieck handelt.<br/>Begründe deine Entscheidung.</p> |
|                                                       | <p>➡ Berechne die Länge x der Flächendiagonalen und die Länge y der Raumdiagonalen im abgebildeten Quader.</p>                                                      | <p>Zu dieser Aufgabenstellung wurde kein Pendant für die Anforderungsebene des MSA formuliert.</p>                                                                                                    | <p>Zu dieser Aufgabenstellung wurde kein Pendant für die Anforderungsebene des ÜOS formuliert.</p>                                                                                                                                                                                    |
|                                                       | <p>➡ Ergänze den folgenden Satz: Der Satz des Pythagoras gilt, wenn ...<br/>Mögliche Lösungen:<br/>1. das Dreieck rechtwinklig ist,<br/>2. der Flächeninhalt der Kathetenquadrate genau so groß ist wie der Flächeninhalt des Hypotenusenquadrats.</p> | <p>➡ Ein Dreieck hat die Seitenlängen a, b und c. Für das Dreieck gilt <math>a^2 = b^2 + c^2</math>.<br/>Zeichne ein dazu passendes Dreieck</p>                                                       | <p>➡ Zeichne ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c, in dem gilt <math>a^2 = b^2 + c^2</math>.</p>                                                                                                                                                                               |

|                                                       | Anforderungsebene ESA                                                                                                                                                                | Anforderungsebene MSA                                                                                                                                                                                      | Anforderungsebene ÜOS                                                                                                                                                                                                                                                  |
|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Anforderungsbereich II: Herstellen von Zusammenhängen | <p>☛ Der abgebildete Würfel hat eine Kantenlänge von 6 cm. Bestimme die Länge der Strecke CD.</p>   | <p>☛ Der abgebildete Würfel hat eine Kantenlänge von 6 cm. Bestimme die Länge der Strecke CD.</p>                         | <p>☛ Der abgebildete Würfel hat eine Kantenlänge von 6 cm. Bestimme die Länge der Strecke CD.</p>                                                                                   |
| Anforderungsbereich III: Verallgemeinern/Reflektieren | <p>☛ Prüfe, ob sich der Satz des Pythagoras auf Halbkreise über den Seiten übertragen lässt.</p>  | <p>☛ Weise nach, dass sich der Satz des Pythagoras auf Halbkreise über den Seiten eines Dreiecks übertragen lässt.</p>  | <p>☛ Weise nach, dass sich der Satz des Pythagoras auf Halbkreise über den Seiten eines Dreiecks übertragen lässt.</p> <p>☛ Überprüfe, ob der Satz des Pythagoras auch immer dann gilt, wenn du die Quadrate über den Seiten durch gleichseitige Dreiecke ersetzt.</p> |