

Zahlbereichserweiterung

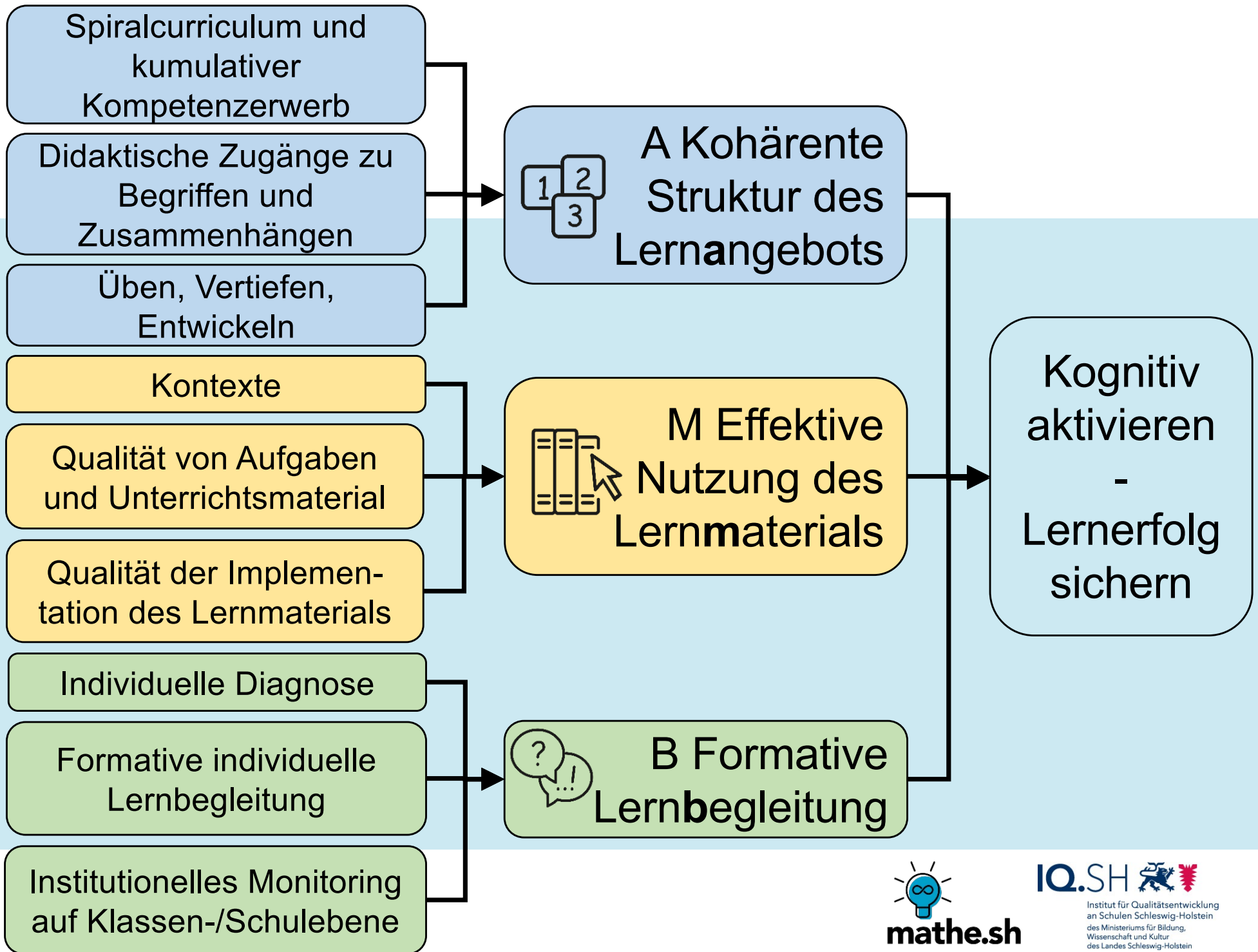
Herzlich Willkommen

Curriculum

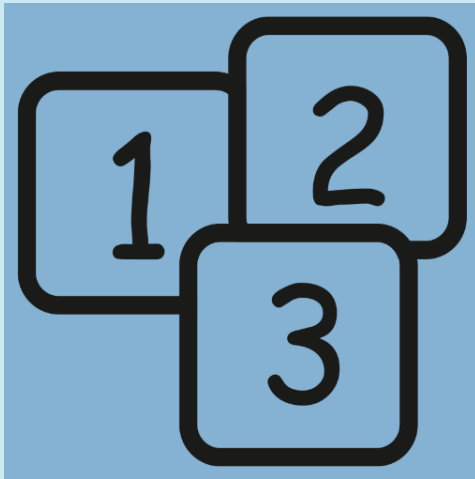
Ziel: Die LiV kennen die **verschiedenen Rollen, die Variablen haben können**, kennen typische Schülerfehler und können Gegenmaßnahmen einleiten. Als roter Faden ziehen sich die verschiedenen Rollen von Variablen (allgemeine Zahl (Unbestimmte), Unbekannte und Veränderliche) durch den Tag, für die jeweils repräsentative Aufgaben und Übungen vorgestellt werden, mit deren Hilfe **tragfähige Grundvorstellungen** aufgebaut werden sollen. Dabei ist an die Vorerfahrungen aus der Grundschule anzuknüpfen. Im Fokus stehen auch die Fachsprache sowie die Notation von Äquivalenzumformungen.

Ablaufplan

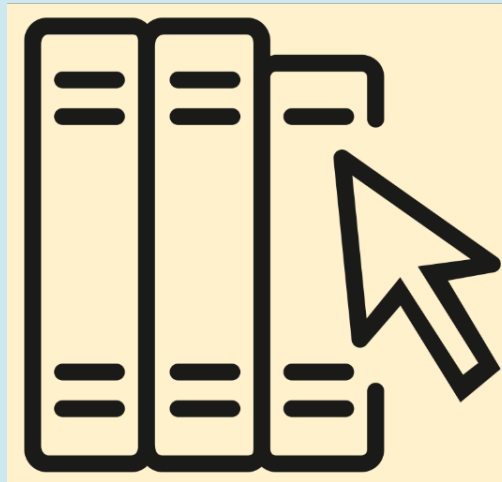
- Bezug zu mathe.sh
- Grundvorstellungen
- Zahlaspekte
- Stunde hospitieren und reflektieren
- Zahlbereiche: Fachanforderungen
- Brüche, Bruchzahlen, Dezimalzahlen
- Fehlvorstellungen
- (Rationale Zahlen)
- (Reelle Zahlen)
- Abschluss



Bezüge zu mathe.sh



A2: Didaktische
Zugänge zu Begriffen
und
Zusammenhängen



M3: Qualität der
Implementation des
Lernmaterials



Grundvorstellungen

Grundvorstellungen in der Mathematik

Tragfähige mathematische Vorstellungen nennen wir *Grundvorstellungen*; abgekürzt GV.

(vom Hofe/Blum 2016)

Grundvorstellungen

sind anschauliche Deutungen eines mathematischen Begriffs, die diesem Sinn geben und Verständnis ermöglichen.

Aus vom Hofe, Rudolf und Roth, Jürgen (2023): „Grundvorstellungen aufbauen“ in mathematik lehren, Heft 236, S. 2-7, Velber, Friedrich Verlag

Aufbau von Grundvorstellungen

“Karten legen“ mit Erklärungen

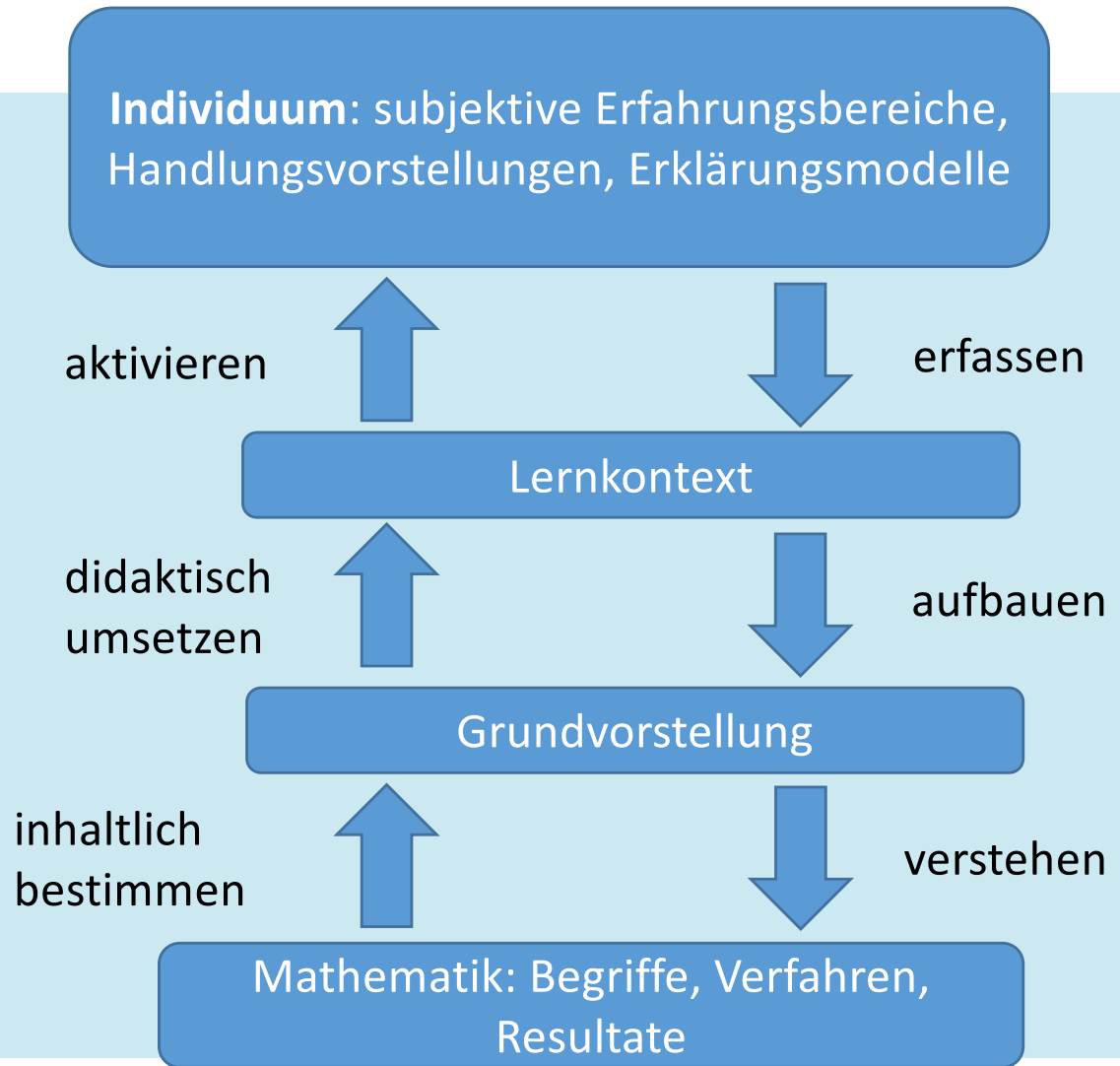


Aufbau von Grundvorstellungen

- **Knetgummi** nutzen (konkretes, strukturiertes Material nutzen)
- **Konkrete Bilder** im Kopf erzeugen
- In das **gedankliche Netzwerk** die Bilder einfügen
- **Vorstellungen** entwickeln
- Vorstellungen zielgerichtet und flexibel einsetzen
- Ständige **Verfügbarkeit**

Grundvorstellungen

- Subjektive Vorerfahrungen
- Subjektiver Erfahrungsbereich (SEB)
- (normative) Grundvorstellungen



EIS-Prinzip-Theorie 1

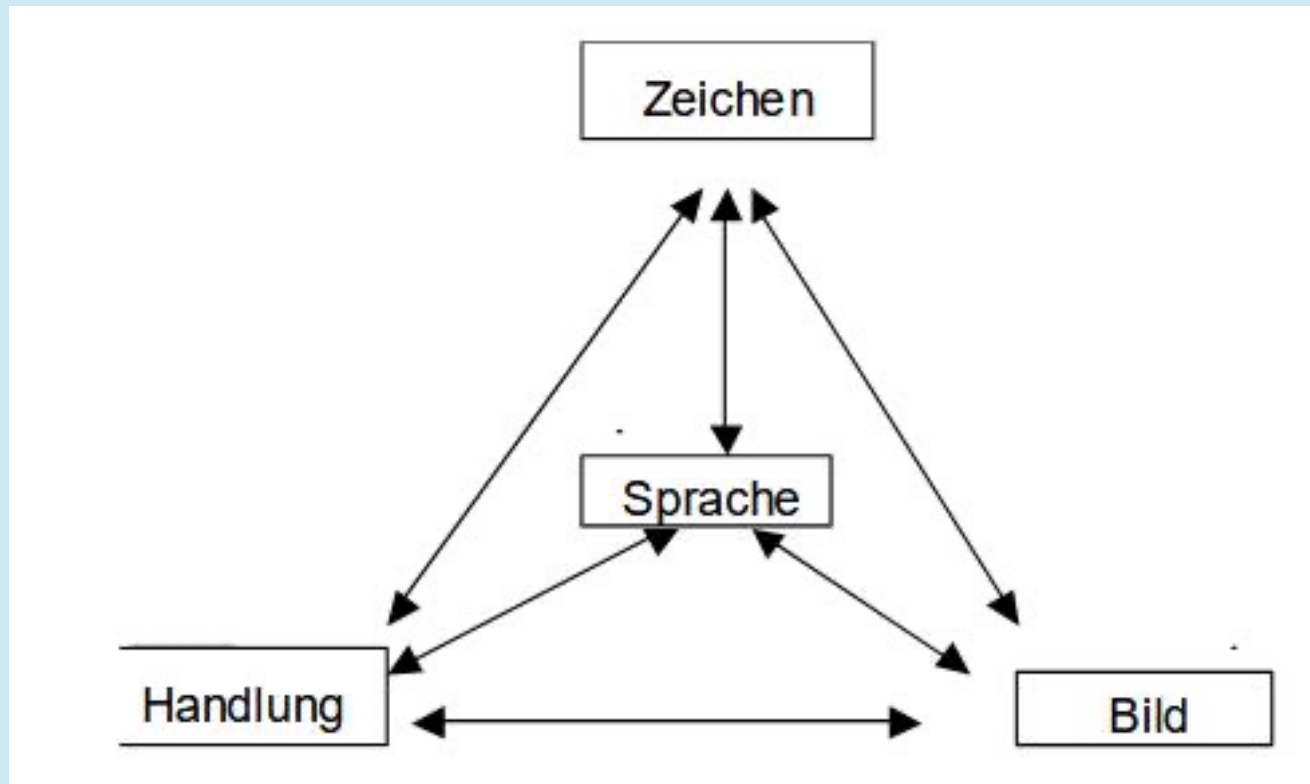


Jerome Bruner

Ein mathematischer Sachverhalt kann nach J. Bruner auf drei verschiedene Arten dargestellt werden

- **enaktiv, d.h. handelnd**
- **ikonisch, d.h. bildlich**
- **symbolisch, d.h. verbal oder formal**

Grundvorstellungen beim Erlernen von Mathematik



Grundvorstellungen vor Kalkül!

Zwei Aufgaben (aus dem PALMA-Projekt, Wartha):

(K) Berechne $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$.

(G) Vorgabe: Kreis mit 12 Sektoren. Färbe $\frac{1}{4}$ des Kreises und dann noch $\frac{1}{6}$. Welchen Bruchteil des Kreises hast du insgesamt gefärbt?

Ergebnis: (K): 66 %, (G) 31 %.

Wartha kommt zu dem Schluss: Wer anschauliche Vorstellungen zum Begriff besitzt, beherrscht im Allgemeinen auch das Kalkül.

Aktivität 2

Füllen Sie die folgende Tabelle mithilfe des Selbstlernkurses aus.

1.1 Grundvorstellungen - Pikas

Bearbeiten Sie auch die weiteren Aufgaben des Kurses.

Grundvorstellungen von natürlichen Zahlen (Zahlaspekte)

Zahlaspekte	Vorstellung	Passende Frage(n)	Beispiele
Kardinal-	Zahl als Anzahl von Objekten einer Menge		
Ordinal- (Zählzahlen/Ordnungszahlen)			
Maß-			
Operator-			
Rechen- (algebraischer/ algorithmischer A.)			
Kodierung-			

Grundvorstellungen von natürlichen Zahlen (Zahlaspekte)

Zahlaspekte	Vorstellung	Passende Frage(n)	Beispiele
Kardinal-	Zahl als Anzahl von Objekten einer Menge	Wie viele?	Auf der Weide stehen 6 Kühe.
Ordinal- (Zählzahlen/Ordnungszahlen)	Vorstellung von der Position einer Zahl in einer Zahlenreihe	Die nächste Zahl? An welcher Stelle?	1, 2, 3, 4, Er belegte den 3. Platz
Maß-	Maßzahlen für Größe (in Kombination mit einer Einheit)	Wie schwer? Wie lang? Wie hoch? Wie teuer?	12,5 kg 22cm 30€
Operator-	Vervielfacht einer Handlung oder eines Vorgangs	Wie oft?	Zweimal würfeln
Rechen- (algebraischer/ algorithmischer A.)	Gleichheitsaussagen (Komm./Asso./Distri.) Schriftliche Rechenverfahren	(Zahlen werden als Rechenzahlen genutzt.)	$12 + 5 = 5 + 12$ (Komm.) Verfahren (z.B. schriftl. Subtrahieren)
Kodierung-	Bezeichnung von Objekten/ Kodierung von Objekten	Welche Nummer steht für?	Postleitzahlen, ISBN, Telefonnummer

Unterrichtsbesuch

Verteilung der
Beobachtungsschwerpunkte

Unterrichtsstunde

Reflexion

Beobachtungsbogen der Prüfungsstunde als Grundlage für Hospitationsstunden

Übergeordnete Punkte:

1. Hat die LK sachlich und fachlich korrekt unterrichtet?
2. Hat die LK die Selbstständigkeit der Lernenden unter anderem durch schüleraktivierende Unterrichtsformen gefördert?
3. Hat die LK die unterschiedlichen Voraussetzungen und Kompetenzen der Lernenden berücksichtigt?
4. Hat die LK den Unterricht sinnvoll strukturiert und flexibel auf sich verändernde Situationen reagiert?
5. Hat die LK präzise und verständlich formuliert?
6. Ist die LK mit den Lernenden respektvoll und wertschätzend umgegangen?
7. Ist die LK überzeugend und als Vorbild aufgetreten?
8. Konnte die LK ihr didaktisches Konzept und dessen Realisierung angemessen reflektieren?

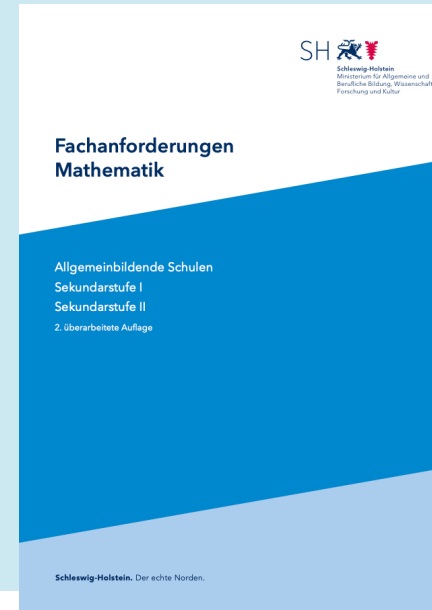
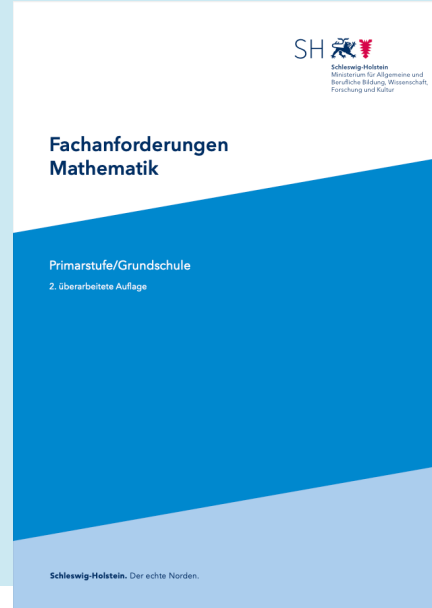
Reflexion der Stunde

1. Eigenreflexion:	LiV reflektiert ihre Unterrichtsstunde (Hilfe
2. Positivblitzlicht:	Jede LiV nennt einen Punkt (Bitte keine Dopplungen).
3. Beobachtungsaufträge:	Jede Gruppe stellt ihre Beobachtungen vor.
4. Tipps und Fragen:	LiV wählt ein bis zwei Tipps/Fragen aus, über die sie sprechen möchte.

Zahlbereiche: Fachanforderungen

Zahlenbereiche in der Grundschule

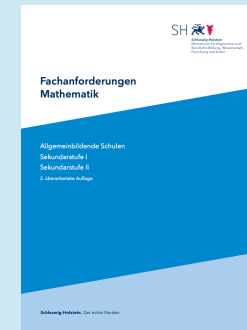
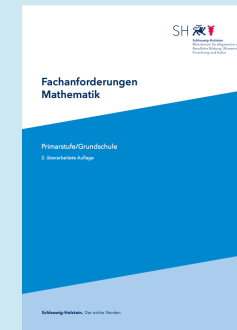
- Zahlbereichserweiterung in der Grundschule
- Fachanforderungen Mathematik SEK I



Aktivität 3

Fachanforderungen

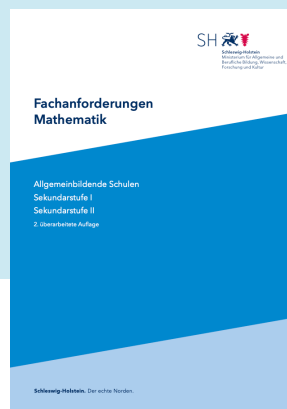
1. Sichten Sie die Fachanforderungen der GS und Sek I verorten Sie die Zahlbereichserweiterungen.



2. Erstellen Sie für die Sek I eine Zuordnung zu den Jahrgängen und vergleichen Sie sie mit ihrem SiFC.

Zahlbereichserweiterung

- Aus der Grundschule bekannt:
N (begrenzter Zahlenraum!)
- Klasse 6: Einführung der positiven Bruchzahlen
B
- Klasse 7: Einführung von Z (und Q)
- Klasse 9: Einführung von R



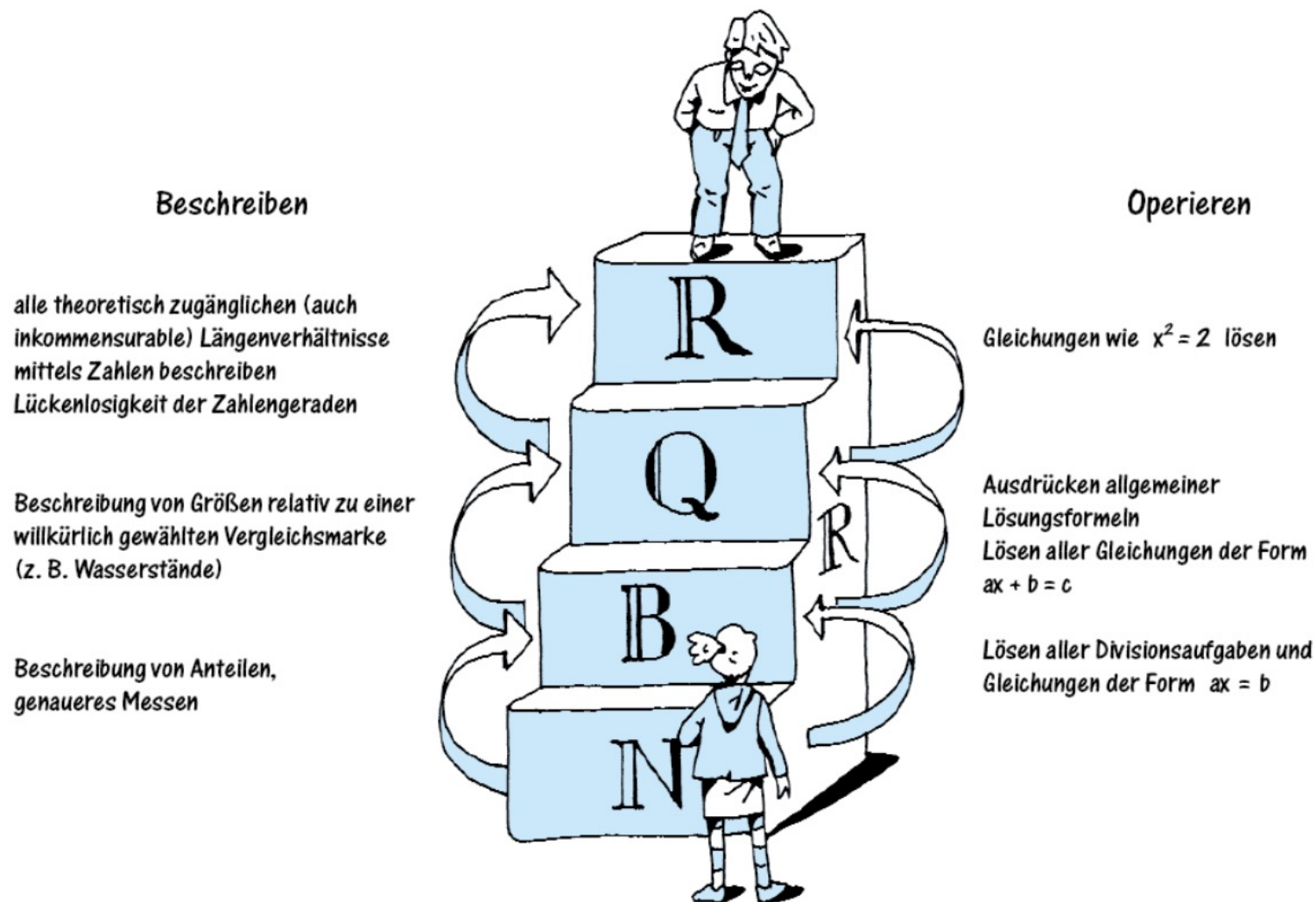
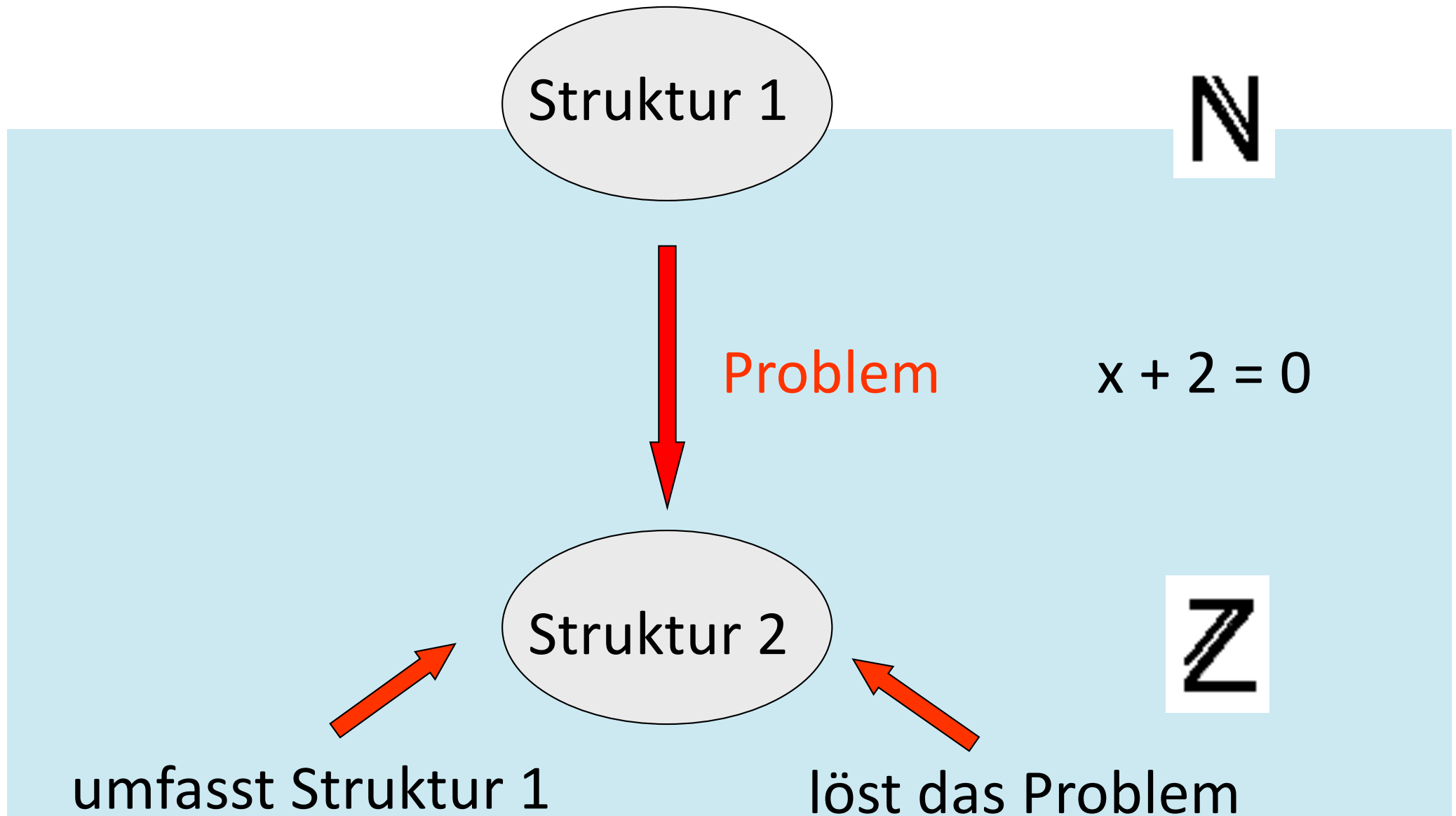


Abb. 1: Zahlbereichstreppe: Anlässe für Zahlbereichserweiterungen

Quelle: Hefendehl-Hebeke, Lisa und Prediger, Susanne (2006): Unzählig viele Zahlen: Zahlbereiche erweitern – Zahlvorstellungen wandeln ; Praxis der Mathematik in der Schule 48, S. 1-7.

Warum Zahlbereichserweiterungen?



Warum Zahlbereichserweiterungen?

Bei einer Zahlbereichserweiterung bekommen die Zahlen ein „erweitertes Aufgabenspektrum“ und brauchen dazu „personelle Verstärkung“.

Eine Zahlbereichserweiterung führt in eine veränderte Gedankenwelt.

Vor dem Unterricht zu klären – 6 Fragen

- Warum ist die angestrebte Zahlbereichserweiterung notwendig?
(fachliche Motivation - Motivation der Schüler)
- Wie wird diese in der Fachwissenschaft durchgeführt? Was lässt sich davon für den Unterricht nutzen, was nicht?
- Welche sinnstiftenden Vorstellungen von Zahlen und Rechenoperationen gibt es, wofür gibt es keine sinnstiftenden Vorstellungen? Wo sind die Grenzen einer sinnvollen Veranschaulichung?

Vor dem Unterricht zu klären – 6 Fragen

- Wie rechnet man mit den neuen Zahlen? Wie erweitert man die Regeln für die Grundrechenarten so, dass man in dem erweiterten Zahlbereich rechnen kann?
- Welche Veränderungen (insbesondere bei den Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler) bringen die jeweilige Zahlbereichserweiterung mit sich?
- Was sind typische Schülerfehler?

Brüche

Bruchzahlen

Dezimalzahlen

Vor dem Unterricht zu klären – 6 Fragen

- Warum ist die angestrebte Zahlbereichserweiterung notwendig?
(fachliche Motivation - Motivation der Schüler)
- Wie wird diese in der Fachwissenschaft durchgeführt? Was lässt sich davon für den Unterricht nutzen, was nicht?
- Welche sinnstiftenden Vorstellungen von Zahlen und Rechenoperationen gibt es, wofür gibt es keine sinnstiftenden Vorstellungen? Wo sind die Grenzen einer sinnvollen Veranschaulichung?

Warum muss der Zahlbereich erweitert werden?



Quelle: Mühle, Jörg (2019): Zwei für mich und einer für dich,
Kinderbuch, Moritz - Verlag

Warum muss der Zahlenbereich erweitert werden?

Ein Beispiel

Drei Schüler teilen eine Schokolade gerecht auf.



Bisheriges Zahlenverständnis – jeder Schüler bekommt 5 Stücke und ein Stück bleibt als Rest übrig.

Dieser Rest kann auch aufgeteilt werden, aber wie?

Warum Bruchzahlen?

- Die *Bruchzahlen* erhöhen die Genauigkeit beim Teilen und Messen: Wenn beim Teilen ein Rest bleibt, kann man diesen weiter teilen, indem man die Einheit in Stücke bricht. Wenn beim Messen die Genauigkeit nicht ausreicht, kann man kleinere Einheiten hinzuziehen. Die so entstehenden Zahlen haben viele Gesichter (Hefendehl-Hebeker 1996): Sie können als Teil eines oder mehrerer Ganzer auftreten, sie können aber auch multiplikative Vergleiche angeben (ein Stab ist $\frac{3}{5}$ mal so lang wie ein anderer) oder Verhältnisse (z. B. Steigungen) beschreiben.

Quelle: Hefendehl-Hebeke, Lisa und Prediger, Susanne (2006): Unzählig viele Zahlen: Zahlbereiche erweitern – Zahlvorstellungen wandeln ; Praxis der Mathematik in der Schule 48, S. 1-7.

Aktivität 4

Einführung der Bruchzahlen

Sichten Sie Ihre Schulbücher und ihre schulinternen Fachcurricula (SiFC).

Wie wird das „Warum Bruchzahlen“ in ihrem Schulbuch und ihrem SiFC eingeführt?

Welche Zugänge halten Sie für gelungen?

Tauschen Sie sich mit Ihren Sitznachbarn darüber **aus**?

Vor dem Unterricht zu klären – 6 Fragen

- Warum ist die angestrebte Zahlbereichserweiterung notwendig?
(fachliche Motivation - Motivation der Schüler)
- Wie wird diese in der Fachwissenschaft durchgeführt? Was lässt sich davon für den Unterricht nutzen, was nicht?
- Welche sinnstiftenden Vorstellungen von Zahlen und Rechenoperationen gibt es, wofür gibt es keine sinnstiftenden Vorstellungen? Wo sind die Grenzen einer sinnvollen Veranschaulichung?

Wie wird diese in der Fachwissenschaft durchgeführt?
Was lässt sich davon für den Unterricht nutzen, was nicht?

Wir gehen dafür genauer auf vier Konzepte nach Padberg ein!

Größenkonzept

Äquivalenzklassenkonzept

Gleichungskonzept

Operatorkonzept

Quelle: Padberg, Friedhelm (2002): *Didaktik der Bruchrechnung*,
3. Auflage, Heidelberg/Berlin, Spektrum Verlag, S.17ff

Aktivität 5

Konzepte zur Behandlung der Bruchrechnung

1. Bilden Sie vier Gruppen zu den Konzepten (gern semesterübergreifend).
2. Erarbeiten sie als Gruppe eine 5-minütige Präsentation zum jeweiligen Konzept und dessen Umsetzung im MU anhand der zur Verfügung gestellten Texte aus Padberg (2002).
3. Gehen Sie insbesondere auch auf die Herausforderungen und die Grenzen der Umsetzung im Unterricht der Sek I der Gemeinschaftsschule ein.

Sie haben 20 Minuten Zeit

Was ist eine Bruchzahl?

Eine Bruchzahl ist:

- Eine Größe --- Größenkonzept
- Eine Äquivalenzklasse --- Äquivalenzklassenkonzept
- Die Lösung einer linearen Gleichung --- Gleichungskonzept
- Eine Funktion --- Operatorkonzept

Äquivalenzklassenkonzept I

- Def. Menge der geordneten Paare (a, b) und Relation $\sim$ durch:
- $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$
- $\sim$ ist Äquivalenzrelation, da reflexiv, symmetrisch & transitiv
- ÄK in der $(3, 4)$ liegt heißt $\frac{3}{4}$, also $\frac{3}{4} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{N} \text{ und } 3 \cdot b = 4 \cdot a\}$
- Mengenschreibweise: $\frac{3}{4} = \{(3, 4), (6, 8), (9, 12), \dots\}$ – Repräsentanten der ÄK
- Def. Addition & Multiplikation durch

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q + n \cdot p}{n \cdot q} \quad \text{bzw.} \quad \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$$

Quelle: Padberg, Friedhelm (2002): Didaktik der Bruchrechnung, 3. Auflage, Heidelberg/Berlin, Spektrum Verlag, S. 17ff

Äquivalenzklassenkonzept II

Erscheint nicht schultauglich, Konzept der Klassenbildung in allen Schulbuchkonzepten: gleichwertige Brüche werden zu einer Bruchzahl zusammengefasst

Nachteile:

- Def. Bruchzahl & Rechenoperationen unmotiviert & rein formal für SuS
- **Kaum mögl. anschauliche Grundvorstellungen von Bruchzahlen & Verknüpfungen zu vermitteln**
- **Keine Anknüpfung an Vorwissen**
- Addition künstlich → komponentenweise Addition liegt näher, fördert daher Schülerfehler
- Einführung Addition & Multiplikation anwendungsfern

Operatorkonzept

Beispiel: $\frac{2}{3}$ von 6 kg sind 4 kg.

Deutung: „ $\frac{2}{3}$ von“ ordnet der Größe 6 kg die Größe 4 kg zu.

$\frac{2}{3}$ von 6 cm

$\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{3}$ Torte

Probleme bei der Umsetzung des Operatorkonzepts

- Addition ist recht kompliziert und unanschaulich zu erklären,
- an die Vorerfahrungen der Schüler über Bruchzahlen wird v. a. am Anfang nicht angeknüpft,

Gleichungskonzept

Die Bruchzahl $\frac{m}{n}$ ist die Lösung der linearen Gleichung $n \cdot x = m$ mit $m, n \in \mathbb{N}$

Nachteile:

- Die Einführung erfolgt recht formal.
- Es sind Kenntnisse aus der Gleichungslehre erforderlich, die oft erst später (Klasse 7) zur Verfügung stehen.
- Belastung für die spätere Behandlung der Gleichungslehre:
Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von Gleichungen werden einfach vorausgesetzt.
⇒ Gefahr der Generalisierung durch die Schüler.

Größenkonzept

Ausgegangen wird von konkreten Brüchen mit Maßeinheit

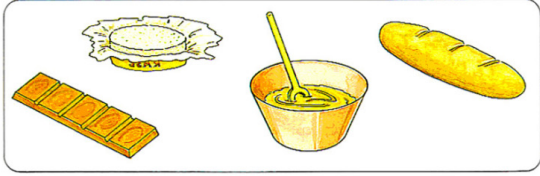
- viele Anwendungen im Alltag
- Rückgriff auf Vorkenntnisse der Schüler
- Erweitern, Kürzen, Anordnung, Addition, Subtraktion gut behandelbar, aber...

Größenkonzept

2 Brüche

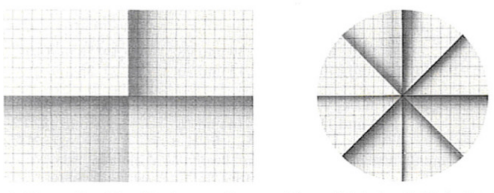
1 Bruchteile

1



a) Der Bäcker verkauft 1 halbes Brot. Worauf muß er beim Teilen achten?
b) Frau Göbel backt Marmorkuchen. Sie nimmt 1 Drittel des Teiges aus der Schüssel und mischt Kakao darunter. Wie findet sie das Drittel?
c) Der Käse soll in 4 gleich große Teile geteilt werden. Wie macht man das? Wie groß ist dann 1 Teil? Skizziere 3 Viertel des Käses.
d) Welcher Bruchteil der Schokolade ist 1 Stück? Beschreibe $\frac{3}{4}$ der Schokolade.

2



a) Das rechteckige Papier wurde so gefaltet, daß jedes Feld $\frac{1}{4}$ des ganzen Blattes beträgt. Schneide ein Rechteck aus und falte es ebenso. Färbe $\frac{2}{4}$.
b) Versuche ein Rechteck so zu falten, daß es in 3 gleich große Teile zerlegt ist. Färbe $\frac{2}{3}$.

3

a) In wie viele gleich große Teile wurde der Kreis beim Falten zerlegt?
b) Schneide einen Kreis aus und falte ihn so, daß er in 4 gleich große Teile zerlegt ist. Färbe $\frac{1}{4}$ rot und $\frac{3}{4}$ blau.

4

a) In wie viele gleich lange Teile wurde die Strecke zerlegt? Gib den Bruchteil der roten Teilstrecke von der ganzen Strecke an.
b) Gib den Bruchteil der blauen Teilstrecke von der ganzen Strecke an.



Einführung von Brüchen nach dem Größenkonzept in einem (älteren) Schulbuch (Gamma 6, Hauptschule)

Vorteile:

- Nähe zu den Anwendungen
- Addition und Subtraktion lassen sich sehr gut veranschaulichen

Hauptnachteil:

- Probleme bei der Multiplikation und Division – hierzu sind andere Ansätze erforderlich („von-Ansatz“, steht im Zusammenhang mit dem Operatorkonzept, s. u.).

Größenkonzept

Was ist $\frac{3}{4}$ Torte • $\frac{1}{2}$ Torte?

Aktivität 6

Schulbücher vergleichen

Untersuchen Sie die Schulbücher!
Welche Konzepte sehen Sie darin (auch nur ansatzweise)
umgesetzt?

Nennen Sie Beispiele!

Verschmelzung von Größen- und Operatorkonzept

- Keine Methodenreinheit
- Eine Bruchzahl kann als Größe und als Operator interpretiert werden.
- Zunächst Größenkonzept, dann Operatorkonzept

Vor dem Unterricht zu klären – 6 Fragen

- Warum ist die angestrebte Zahlbereichserweiterung notwendig?
(fachliche Motivation - Motivation der Schüler)
- Wie wird diese in der Fachwissenschaft durchgeführt? Was lässt sich davon für den Unterricht nutzen, was nicht?
- Welche sinnstiftenden Vorstellungen von Zahlen und Rechenoperationen gibt es, wofür gibt es keine sinnstiftenden Vorstellungen? Wo sind die Grenzen einer sinnvollen Veranschaulichung?

Aktivität 7

Grundvorstellungen zu Bruchzahlen

Bearbeiten Sie den Arbeitsbogen „Wie stellst du dir das Umgehen mit Brüchen vor?“ Welche Grundvorstellungen von Brüchen werden abgefragt/angeregt?

Wie kann der Bogen im MU eingesetzt werden? **Tauschen** Sie sich über Ihre Lösungen mit Ihrem Sitznachbarn **aus**.

Vertiefende Literatur:
Grundvorstellungen Malle

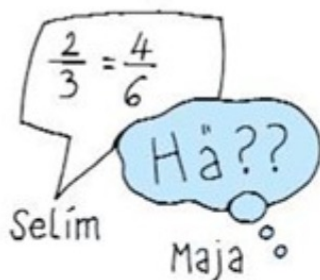
Aktivität 7

Grundvorstellungen zu Bruchzahlen

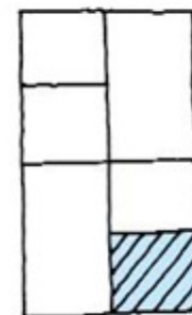
Wie stellst Du Dir das Umgehen mit Brüchen vor?

1. Wie würdest Du Deiner achtjährigen Nachbarin erklären, was $\frac{2}{5}$ sind?
Findest Du auch einen zweiten Weg? (z. B. ein Bild, eine Situation, ...)

2. Selim behauptet, dass $\frac{2}{3}$ genau so groß ist wie $\frac{4}{6}$, aber Maja glaubt ihr das nicht. Kannst Du ein Bild malen oder eine Situation beschreiben, die das erklärt?
Kennst Du noch zwei andere Brüche, die denselben Wert haben?



5. Anna sagt, der schraffierte Teil ist ein Sechstel des ganzen Rechtecks. Erkläre, was sie sich wohl gedacht hat, und wieso das noch nicht ganz stimmt.

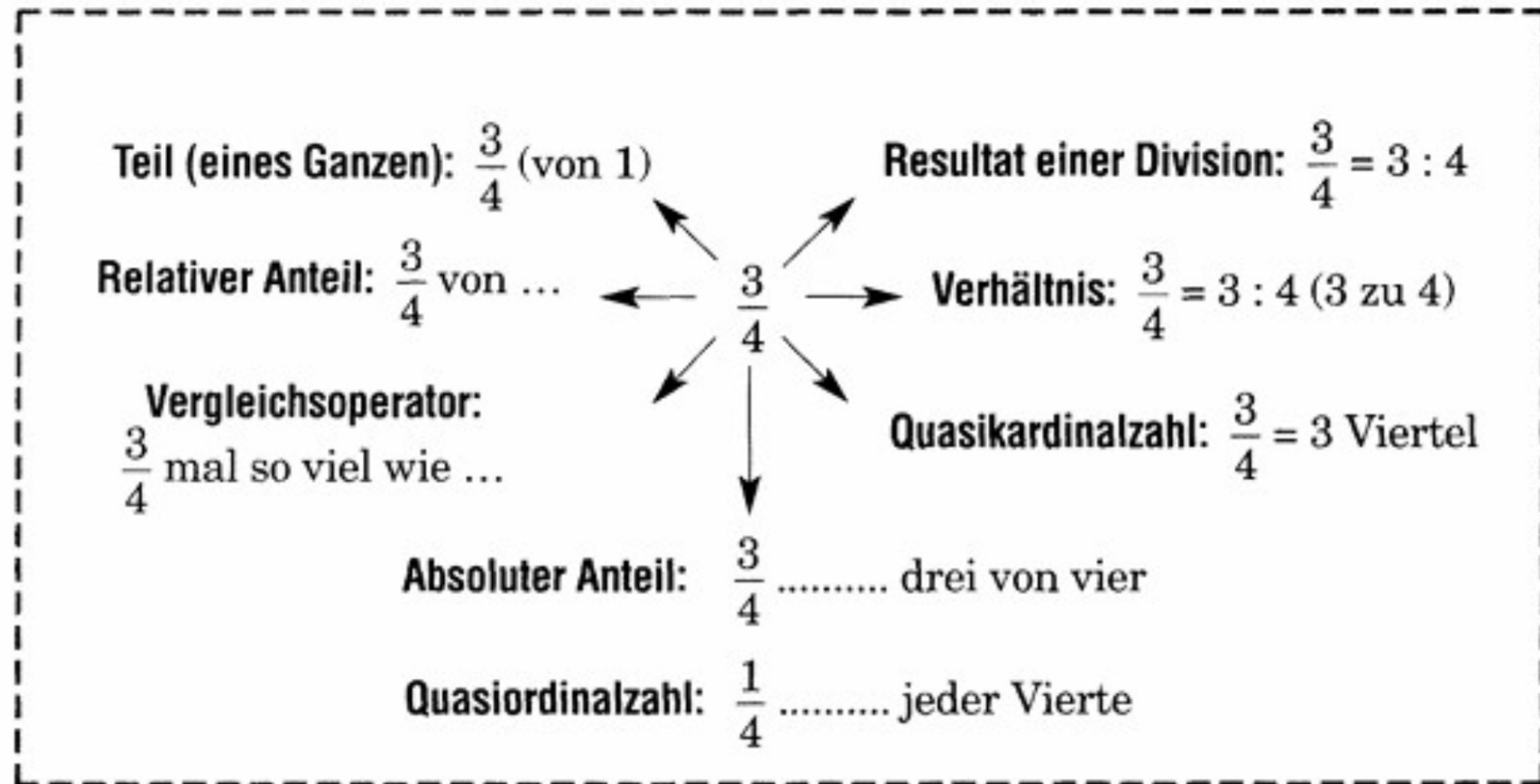


6. In einer Lostrommel beim Klassenfest der 6b sind noch 18 Lose. $\frac{2}{3}$ davon sind Nieten. Wie viel Nieten sind in der Lostrommel? Erkläre, wie Du das ausgerechnet hast.
7. Denke Dir eine Situation oder eine Textaufgabe aus, die zu der Rechnung $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ passt und

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$$

Welche **sinnstiftenden Vorstellungen** von Zahlen und Rechenoperationen gibt es, wofür gibt es keine sinnstiftenden Vorstellungen?

Wo sind die Grenzen einer sinnvollen Veranschaulichung?



Kasten 1: Einige Deutungen einer Bruchzahl

Aktivität 7

Grundvorstellungen zu Bruchzahlen

a im strikten Sinn: auf drei weiße Perlen folgt stets eine schwarze Perle.



b im statistischen Sinn: ein Viertel aller Perlen ist schwarz.



Beispiele:

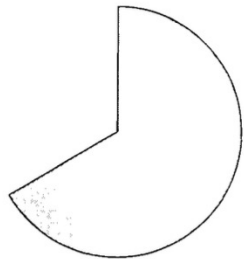


Abb. 1a:
Eine Zweidritteltorte



Abb. 1b:
Eine Viertelnote

Beispiel:

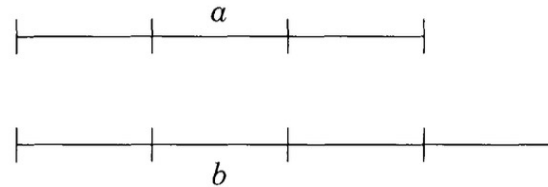


Abb. 5: Die Längen zweier Landebahnen verhalten sich wie 3:4.

Beispiel:

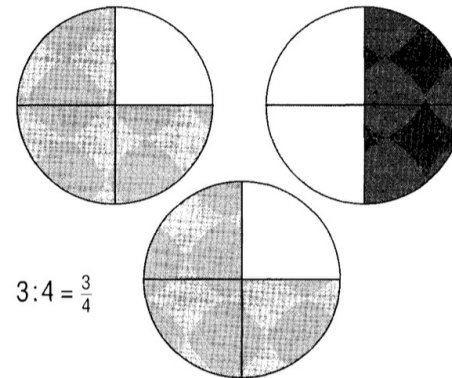


Abb. 4: Drei Pizzen sollen auf vier Personen aufgeteilt werden. Wie viel erhält jeder?

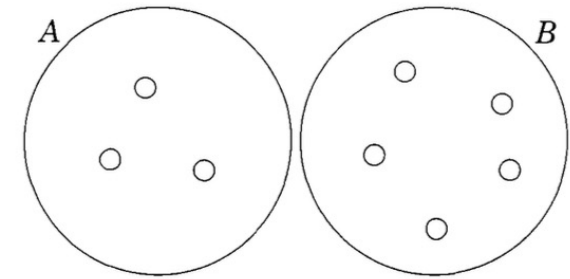


Abb. 3: Die Menge A enthält $\frac{3}{5}$ mal so viele Kugeln wie die Menge B

Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} + \frac{3}{5} &= 1 \text{ Fünftel} + 3 \text{ Fünftel} \\ &= 4 \text{ Fünftel} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

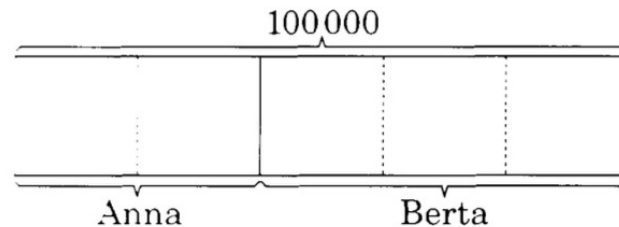
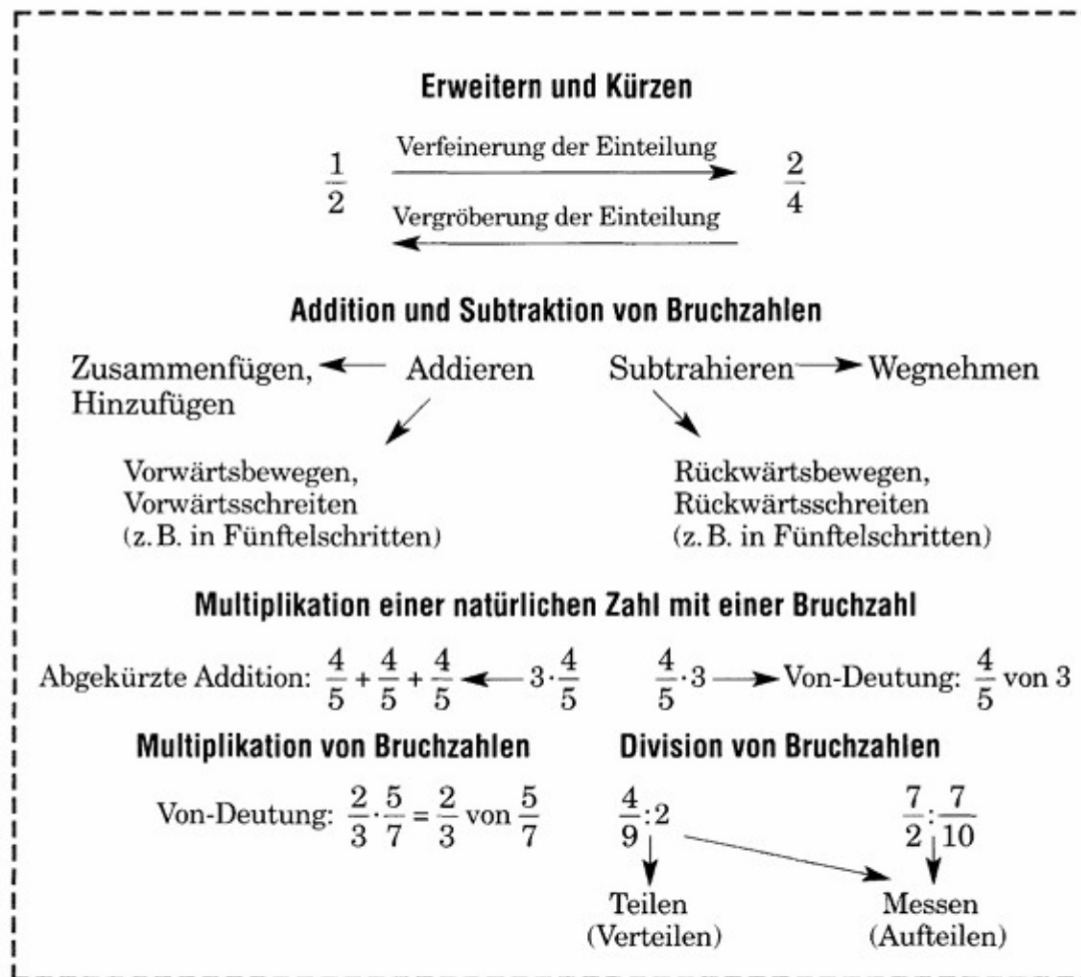


Abb. 2: Anna erbt $\frac{2}{5}$ von 100 000 €,
Berta erbt $\frac{3}{5}$ von 100 000 €

Welche **sinnstiftenden Vorstellungen** von Zahlen und Rechenoperationen gibt es, wofür gibt es keine sinnstiftenden Vorstellungen?

Wo sind die Grenzen einer sinnvollen Veranschaulichung?



Kasten 2: Einige Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen für Bruchzahlen

Quelle: Malle, Günther (2004): Grundvorstellungen zu Bruchzahlen; S. 4 – 8, mathematik lehren Heft 123 Brüche und Verhältnisse

Wichtige Grundvorstellung zum Rechnen mit Brüchen

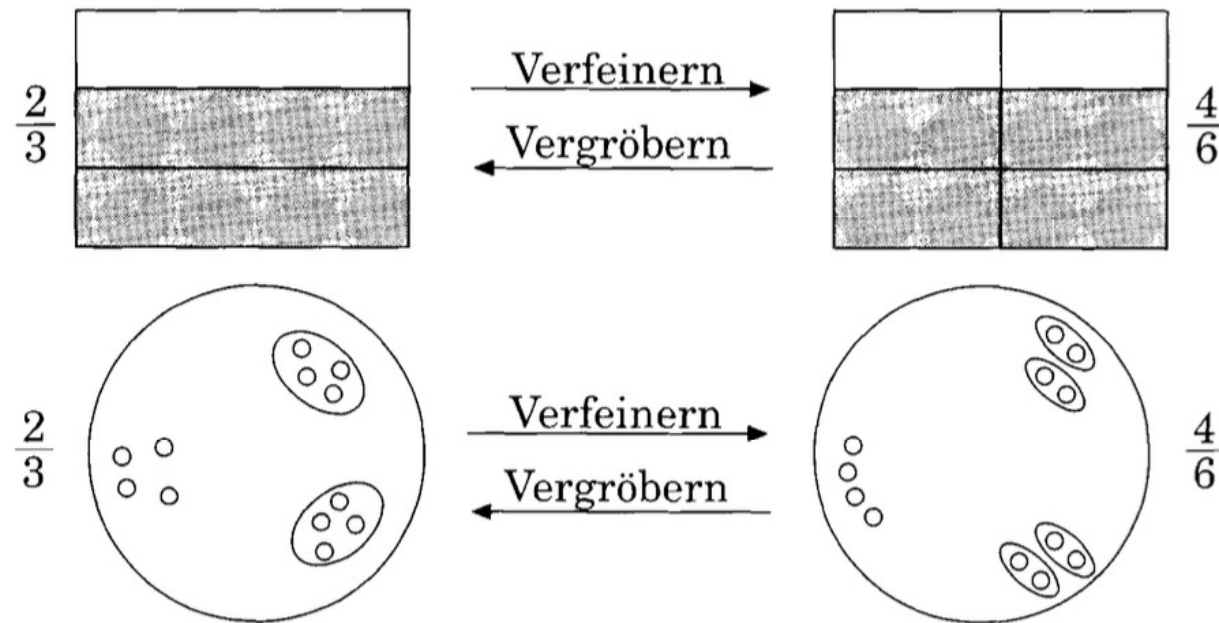


Abb. 7: Verfeinern und Vergröbern

Es gibt **kein Anwenden** ohne Grundvorstellungen!
Die Rolle der Grundvorstellungen an zwei Beispielen:

Beispiel 1

*Eine Katze trinkt täglich $\frac{1}{4}$ Liter
Milch. Wie viel Liter Milch trinkt
sie in einer Woche?*

Quelle: Malle, Günther (2004): Grundvorstellungen zu Bruchzahlen; S.
4 – 8, mathematik lehren Heft 123 Brüche und Verhältnisse

Man kann die Aufgabe durch siebenmalige Addition von $\frac{1}{4}$ lösen. Im Allgemeinen wird man sie jedoch durch eine Multiplikation lösen:

$7 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$. Woher aber weiß man, dass man 7 mit $\frac{1}{4}$ *multiplizieren* muss?

Ganz einfach, man benutzt die Grundvorstellung der Multiplikation als abgekürzte Addition. Die numerische Rechnung kann mit der Grundvorstellung der Bruchzahlen als Quasikardinalzahlen bewerkstelligt werden: $7 \cdot \frac{1}{4} = 7 \text{ Viertel} = \frac{7}{4}$.

Beispiel 2:

$\frac{7}{2}$ Liter Wein sollen in $\frac{7}{10}$ -Liter-Flaschen abgefüllt werden. Wie viele Flaschen können gefüllt werden?

Quelle: Malle, Günther (2004): Grundvorstellungen zu Bruchzahlen; S. 4 – 8, mathematik lehren Heft 123 Brüche und Verhältnisse

Die Aufgabe kann mit einer Kombination von Grundvorstellungen gelöst werden:

$$\frac{7}{2} : \frac{7}{10} \quad (\text{Dividieren als Messen})$$

$$= \frac{35}{10} : \frac{7}{10} \quad (\text{Verfeinerung der Einteilung, evtl. Zeichnung})$$

$$= 35 \text{ Zehntel} : 7 \text{ Zehntel} \quad (\text{Bruchzahlen als Quasikardinalzahlen})$$

$$= 5$$

Es können 5 Flaschen gefüllt werden.

Vor dem Unterricht zu klären – in Verbindung denken

- Welche sinnstiftenden Vorstellungen von Zahlen und Rechenoperationen gibt es, wofür gibt es keine sinnstiftenden Vorstellungen? Wo sind die Grenzen einer sinnvollen Veranschaulichung?
- Wie rechnet man mit den neuen Zahlen? Wie erweitert man die Regeln für die Grundrechenarten so, dass man in dem erweiterten Zahlbereich rechnen kann?

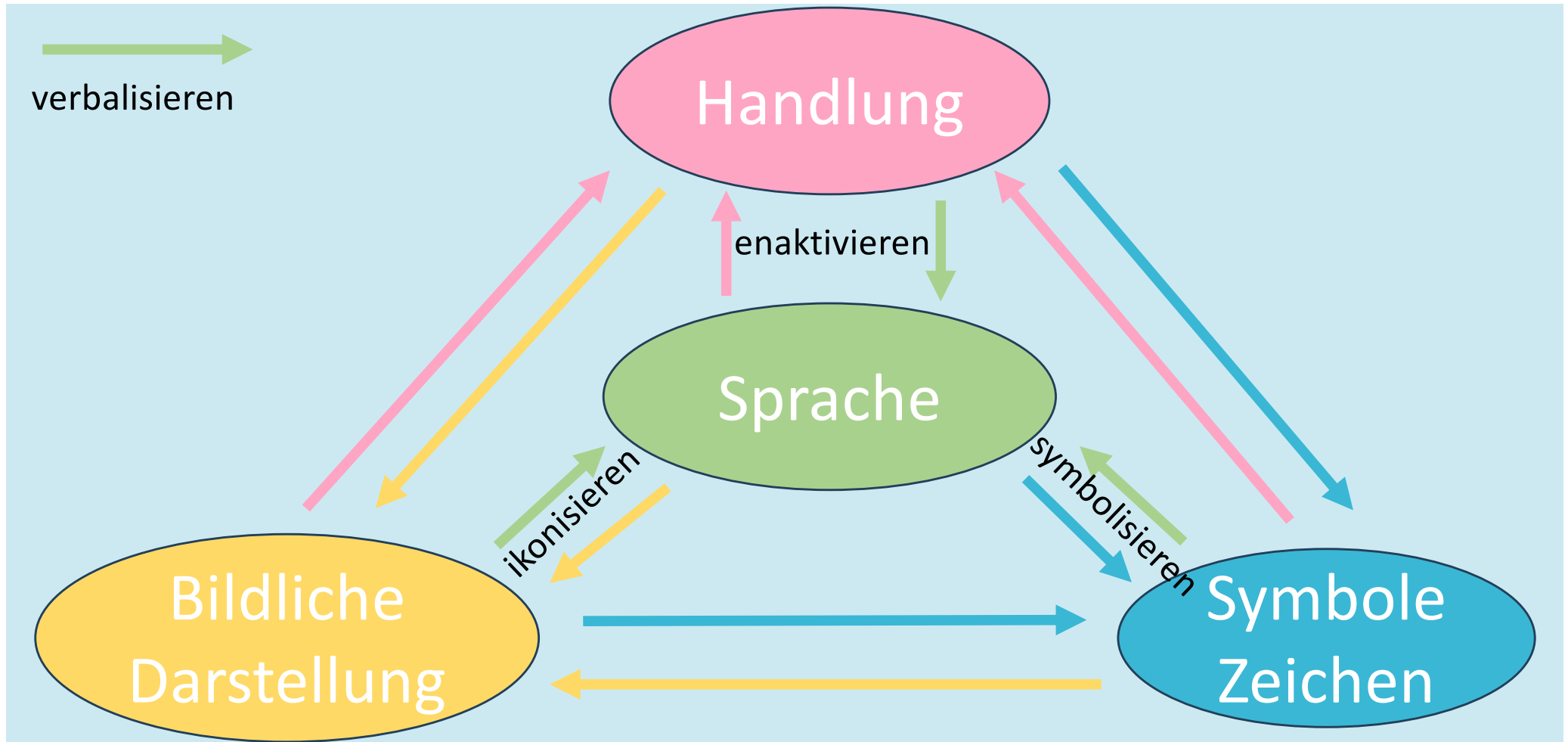
Grundvorstellungen aufbauen

EIS – Prinzip nach Bruner

Theorie der Darstellungsebenen nach Bruner

E naktive Darstellung	Erfassen von Sachverhalten durch eigene Handlungen
I konische Darstellung	Erfassen von Sachverhalten durch Bilder oder Graphiken
S ymbolische Darstellung	Erfassen von Sachverhalten durch abstrakte Zeichen

Übergänge zwischen den Darstellungsebenen



Schülertätigkeiten zum Einstieg in die Arbeit mit Brüchen

Tätigkeiten auf enaktiver Ebene

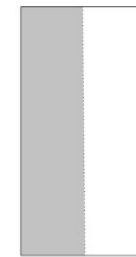
- Herstellen und Einstellen von Bruchteilen (Kreisscheibe, Uhren).

- Falten: Halbe, Viertel, Achtel:

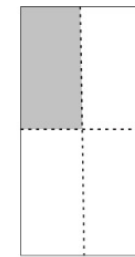
- $\frac{1}{2}$ Blatt = $\frac{1}{4}$ Blatt = $\frac{1}{8}$ Blatt
- Wie viele Achtel enthält ein dreiviertel Blatt?
- Wie viele Halbe, Viertel, Achtel sind in $2\frac{1}{2}$ Faltblättern enthalten?



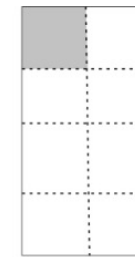
Ein Ganzes



Ein Halbes



Ein Viertel

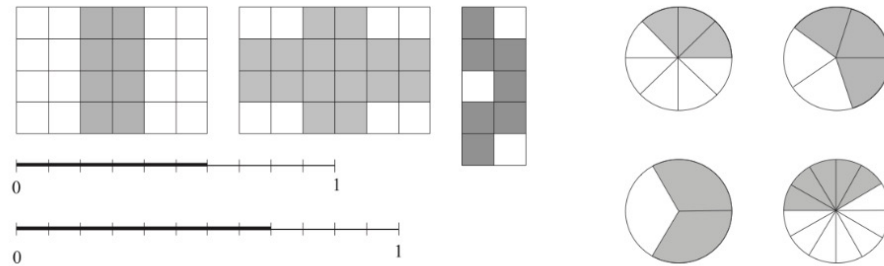


Ein Achtel

Schülertätigkeiten zum Einstieg in die Arbeit mit Brüchen

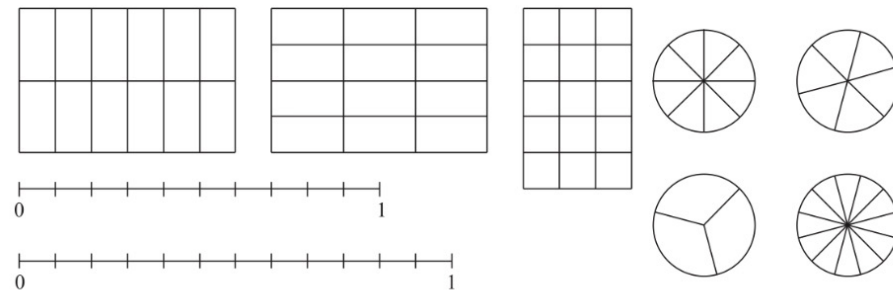
Tätigkeiten auf ikonischer Ebene (an Kreisen, Rechtecken, am Zahlenstrahl usw.)

- Welche Brüche sind dargestellt?

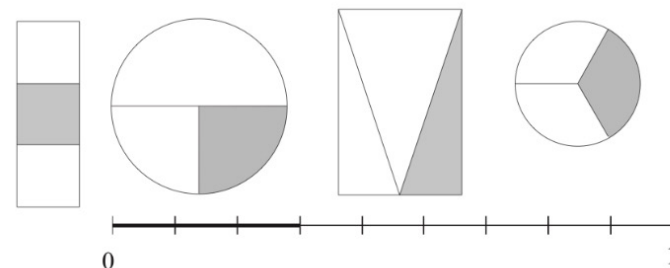


- Kennzeichne folgende Brüche an geeigneten Kreisen, Rechtecken und Zahlenstrahlen:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{5}{12}, \frac{11}{12}, \frac{7}{15}, \frac{5}{8}$$



- Wo wird $\frac{1}{3}$ *nicht* richtig dargestellt?



Führen Sie die Arbeitsaufträge der Station 7 durch.

Station 7: Brüche falten ohne Lineal und Bleistift

1. Jeder nimmt sich 5 farbige Papierstreifen. Nun faltet jeder einen Streifen so, dass 4 gleiche große Teile entstehen. Wenn ihr fertig seid, habt ihr den Streifen geviertelt.
2. Nun hat jeder noch 4 Streifen. Einen Streifen drittelt, einen achtelt, einen fünftelt und den letzten Streifen sechstelt ihr.
3. Besprecht eure Vorgehensweise. Vielleicht habt ihr verschiedene Lösungswege gewählt.
4. Markiert und beschriftet auf jedem Streifen die einzelnen Bruchteile und klebt die Streifen in eure Hefte.



Neu

Bruch oder Bruchzahl?

Jede **Bruchzahl** kann durch unendlich viele Brüche dargestellt werden.

Neu

A4 Wie viele Zahlen liegen zwischen 3,4 und 3,6?

- ☐ genau 1 Zahl
- ☐ genau 19 Zahlen
- ☐ mehr als 20 Zahlen

/1 P.

A10 Gib einen Bruch zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ an.

$$\frac{1}{2} > \text{---} > \frac{1}{3}$$

----- /1 P.

Neu

Die Dichtheit der Bruchzahlen

Fragestellung:

Wie viele Bruchzahlen liegen zwischen zwei gegebenen Bruchzahlen?

Neu

Multiplizieren macht manchmal kleiner!

Dividieren macht manchmal größer!

Neu

Tab. 1: Brüche kommen hinzu, Vorstellungen ändern sich

Was ändert sich von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{Q}$?		
	natürliche Zahlen	Brüche
Zahldarstellung	eine Zahl – eine Darstellung: 3	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 = 0,4\overline{9}$
Anordnung, Dichte	Vorgänger, Nachfolger	immer eine Zahl dazwischen
Multiplizieren	vergrößert	kann auch verkleinern
Dividieren	verkleinert	kann auch vergrößern

Grafik: © Friedrich Verlag GmbH

mathematik lehren 236 | 2023

Quelle: Vom Hofe, Rudolf und Roth, Jürgen (2023): Grundvorstellungen aufbauen, Mathematik lehren Heft 236, S. 2 – 7

Geobrett

1. Überlegen/Testen Sie, inwieweit das Geobrett als Material zur handlungsorientierten Entwicklung von Grundvorstellungen von Brüchen geeignet ist.
2. Entwerfen Sie eine Aufgabe zum Geobrett, in welcher die prozessbezogenen Kompetenzen sichtbar gefördert werden und laden Sie diese in Moodle hoch.

Sie haben 15 Minuten Zeit.

Vor dem Unterricht zu klären – 6 Fragen

- Warum ist die angestrebte Zahlbereichserweiterung notwendig?
(fachliche Motivation - Motivation der Schüler)
- Wie wird diese in der Fachwissenschaft durchgeführt? Was lässt sich davon für den Unterricht nutzen, was nicht?
- Welche sinnstiftenden Vorstellungen von Zahlen und Rechenoperationen gibt es, wofür gibt es keine sinnstiftenden Vorstellungen? Wo sind die Grenzen einer sinnvollen Veranschaulichung?

Vor dem Unterricht zu klären – 6 Fragen

- Wie rechnet man mit den neuen Zahlen? Wie erweitert man die Regeln für die Grundrechenarten so, dass man in dem erweiterten Zahlbereich rechnen kann?
- Welche Veränderungen (insbesondere bei den Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler) bringen die jeweilige Zahlbereichserweiterung mit sich?
- Was sind typische Schülerfehler?

Fehlvorstellungen

Was sind typische Schülerfehler?



Quelle: Stein, Ulli – Erscheinungsjahr unbekannt

Was sind typische Schülerfehler?

Katharina hat bei ihrer Hausaufgabe die Zahl 2 durch $\frac{1}{4}$ dividiert. Sie hat die Bruchrechenregeln richtig angewendet und das Ergebnis 8 erhalten. Anschließend kam sie zu mir, weil sie sich über das Ergebnis wunderte. Wieso konnte das Ergebnis größer sein als der Dividend? Sie hatte doch ‚geteilt‘!

- Was würdest Du Katharina sagen?
- Kannst Du ihre Denkweise nachvollziehen? Woran hat sie wohl gedacht?
- Wie würdest Du die Rechnung $2 : \frac{1}{4}$ so in eine Geschichte übersetzen, dass Du Dich nicht über das Ergebnis wundern musst?

Kasten 4: Nimm-Stellung-Aufgabe zu Katharinas Fehlvorstellung

Quelle: Susanne Prediger (2004): Brüche bei den Brüchen – aufgreifen oder umschiffen? Mathematik lehren Heft 123 .S. 10-13.

Division von Brüchen

Wie oft passt...

$$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{14}{21} \div \frac{15}{21} = \frac{14}{15}$$

„mit dem Kehrwert multiplizieren“ wird erkennbar und ist keine stumpf auswendig gelernte Regel

Was sind typische Schülerfehler?

Brüche

$$\frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{8}$$

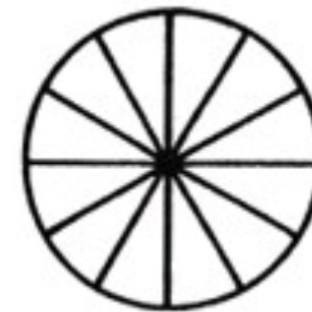
$$\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{8}$$

Was sind typische Schülerfehler?

Ein Beispiel mag aufzeigen, was hier gemeint ist. Im Rahmen einer Interviewserie¹ mit Haupt- und Realschülern des 7. Schuljahrs, die Ende der siebziger Jahre im Raum Osnabrück durchgeführt wurde, wurde u.a. folgende Aufgabe gestellt:

"Färbe erst $\frac{1}{4}$ des Kreises schwarz und dann noch einmal $\frac{1}{6}$ des Kreises. Welchen Bruchteil des Kreises hast du insgesamt gefärbt?"



Die Schülerin Anke färbte zunächst vier Sektoren des Kreises, dann weitere sechs Sektoren schwarz und beantwortete die Frage mit " $\frac{1}{10}$ des Ganzen". Anschließend wurde sie aufgefordert, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$ schriftlich zu addieren, was sie fehlerlos, sogar mit Erläuterung ihres Rechenverfahrens, ausführte: " $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$ "

Was sind typische Schülerfehler?

Im Anschluß daran entstand folgender Interviewausschnitt (Hasemann [1986] S. 4):

I: $\frac{5}{12}$. Das haben wir jetzt ausgerechnet, daß da $\frac{5}{12}$ rauskommt.
Und bei der Skizze eben, was hattest du da rausbekommen?

A: $\frac{1}{10}$.
Was ist denn nun richtig?

I: ... (6 sec) ... Beides.
Warum?

A: Ja, erstmal $\frac{1}{10}$, das habe ich ja abgezählt, und $\frac{5}{12}$ habe ich ja ausgerechnet."

Was sind typische Schülerfehler?

Gegenmaßnahmen

Vorschläge für Thematisierung von Bruchstellen

- Vielfältige inhaltliche Vorstellungen aufbauen als Voraussetzung
- Bewusstheit erzeugen durch systematisierende Übersichten
- Verbalisieren durch Rechengeschichten
- Ungeheuerlichkeit der Veränderung erlebbar machen, z.B. durch Phantasiegeschichten
- „Wunder“ inhaltlich aufklären lassen
- Unterschiede explizit gegenüberstellen lassen
- Fehlersuchaufgaben
- Aufdecken von Fehlvorstellungen
- Sinndimension dahinter ansprechen

Aus Prediger (2004): Brüche bei den Brüchen – aufgreifen oder umschiffen? – Abbildung 6 auf Seite 9,

Vor dem Unterricht zu klären – 6 Fragen

- Warum ist die angestrebte Zahlbereichserweiterung notwendig?
(fachliche Motivation - Motivation der Schüler)
- Wie wird diese in der Fachwissenschaft durchgeführt? Was lässt sich davon für den Unterricht nutzen, was nicht?
- Welche sinnstiftenden Vorstellungen von Zahlen und Rechenoperationen gibt es, wofür gibt es keine sinnstiftenden Vorstellungen? Wo sind die Grenzen einer sinnvollen Veranschaulichung?

Vor dem Unterricht zu klären – 6 Fragen

- Wie rechnet man mit den neuen Zahlen? Wie erweitert man die Regeln für die Grundrechenarten so, dass man in dem erweiterten Zahlbereich rechnen kann?
- Welche Veränderungen (insbesondere bei den Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler) bringen die jeweilige Zahlbereichserweiterung mit sich?
- Was sind typische Schülerfehler?

Fazit

- Regeln sind die Methode, um Einsicht zu verhindern!“
- Arbeit mit konkreten Brüchen. Bruchstreifen und -flächen als einfaches und hilfreiches Mittel.
- „Was muss da vernünftigerweise etwa rauskommen?“ Erst überlegen, dann – notfalls – rechnen! Mathematik ist die Kunst, das Rechnen zu vermeiden.
- Mehr Überschläge statt formaler Rechnungen! Anleitung zu Überschlägen bei Brüchen geben.
- Wenige Aufgaben mit jeweils ausführlichem Lösungsweg und Begründungen für das Vorgehen.

(z.T. nach

Prediger/Krauter)

Noch einmal: Zahlbereichserweiterung (nach Padberg)

Neue Zahlen entdecken:

- Aufgabenspektrum der neuen Zahlen
- Darstellungsformen, Schreibweisen für Zahlen
- Ordnen und Vergleichen
- Wie können wir mit den Zahlen rechnen?
 - Addition und Subtraktion
 - Multiplikation und Division

Rationale Zahlen:

Ganze Zahlen

Vor dem Unterricht zu klären – 6 Fragen

- Warum ist die angestrebte Zahlbereichserweiterung notwendig?
(fachliche Motivation - Motivation der Schüler)
- Wie wird diese in der Fachwissenschaft durchgeführt? Was lässt sich davon für den Unterricht nutzen, was nicht?
- Welche sinnstiftenden Vorstellungen von Zahlen und Rechenoperationen gibt es, wofür gibt es keine sinnstiftenden Vorstellungen? Wo sind die Grenzen einer sinnvollen Veranschaulichung?

Vor dem Unterricht zu klären – 6 Fragen

- Wie rechnet man mit den neuen Zahlen? Wie erweitert man die Regeln für die Grundrechenarten so, dass man in dem erweiterten Zahlbereich rechnen kann?
- Welche Veränderungen (insbesondere bei den Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler) bringen die jeweilige Zahlbereichserweiterung mit sich?
- Was sind typische Schülerfehler?

Warum negative Zahlen?

Auch die *negativen Zahlen* erweitern die Möglichkeiten beim Messen: Will man Größen relativ zu einer willkürlich gewählten Vergleichsmarke bestimmen (zum Beispiel Wasserstände in Bezug auf einen Normalstand), so ist dies ein Anlass, den Zahlenstrahl zur Zahlengeraden zu erweitern und unter die Nullmarke hinab zu zählen und zu messen. Die *rationalen Zahlen* sind daher geeignet, gerichtete Größen zu beschreiben.

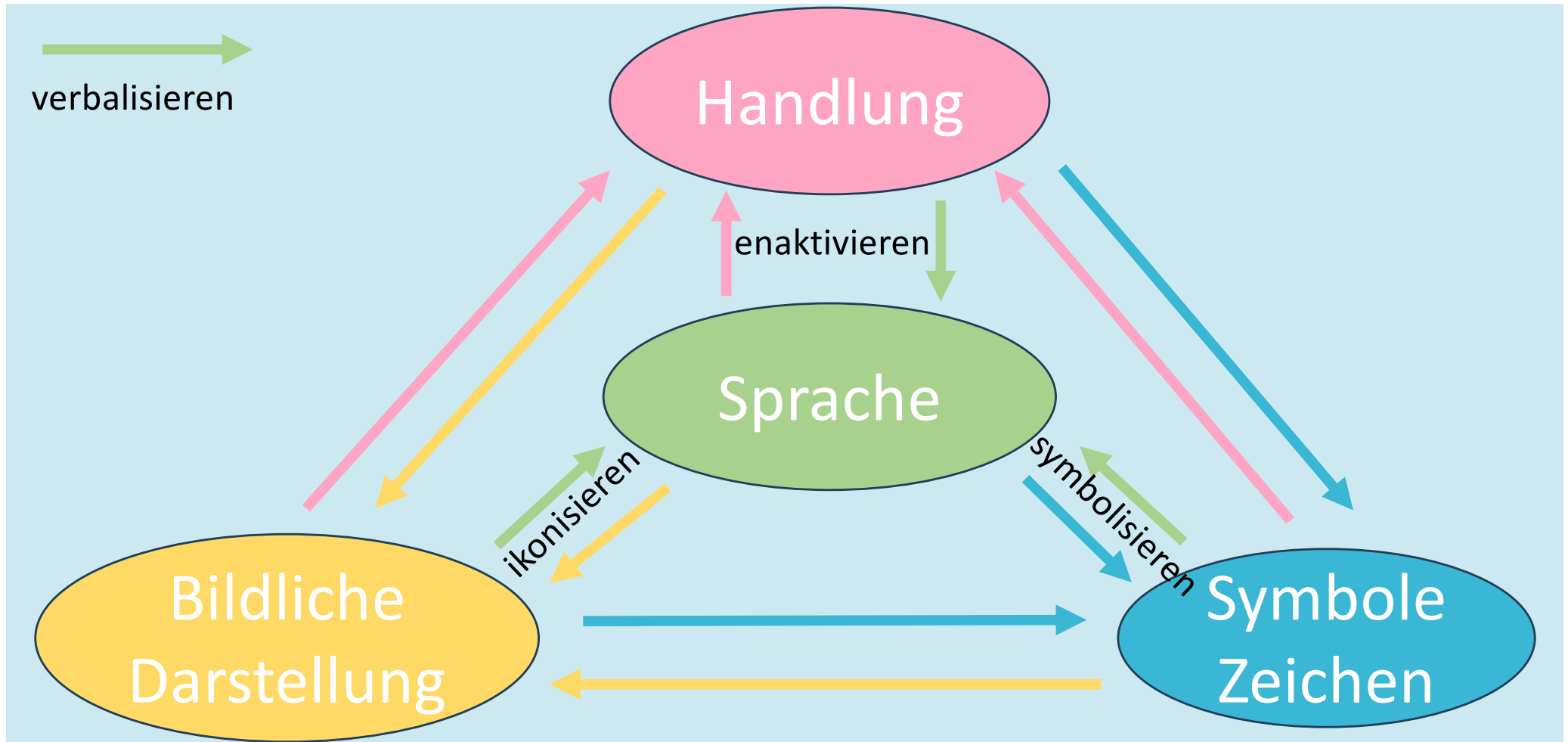
Quelle: Hefendehl-Hebeke, Lisa und Prediger, Susanne (2006): Unzählig viele Zahlen: Zahlbereiche erweitern – Zahlvorstellungen wandeln ; Praxis der Mathematik in der Schule 48, S. 1-7.



Theorie der Darstellungsebenen nach Bruner

E naktive Darstellung	Erfassen von Sachverhalten durch eigene Handlungen
I konische Darstellung	Erfassen von Sachverhalten durch Bilder oder Graphiken
S ymbolische Darstellung	Erfassen von Sachverhalten durch abstrakte Zeichen

Übergänge zwischen den Darstellungsebenen



Ideen zur Einführung der negativen Zahlen

1. Legosteine
2. Zahlengerade laufen
3. Treppen laufen/ auf Zahlen treten
4. Spiel zu negativen Zahlen mit Geld

Aktivität 10

Einführung negativer Zahlen - Gruppenpuzzle

Stammgruppe:

Bereiten Sie ihren Zugang zu den negativen Zahlen vor!

Adaptieren Sie die Materialien und führen Sie die Methode mehrmals durch?

Notieren Sie sich Vor- und Nachteile der Herangehensweise.

Expertengruppe:

Stellen Sie Ihren Zugang zu den negativen Zahlen der Gruppe vor.

Führen Sie die Methode beispielhaft durch!

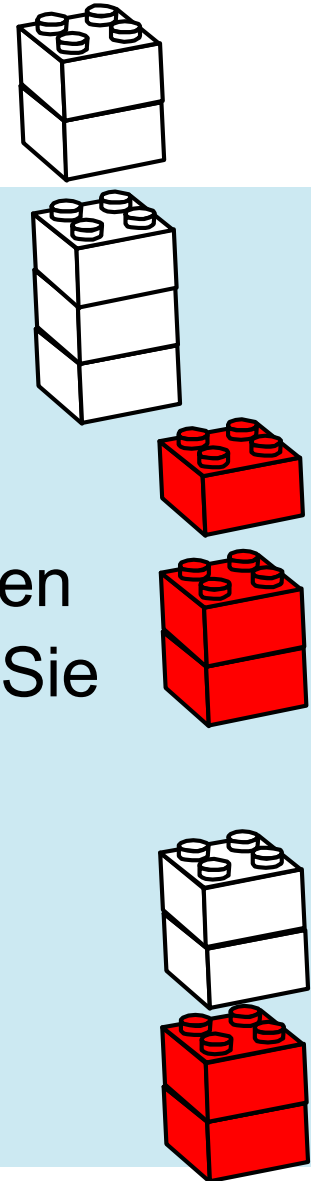
Tauschen Sie sich über die Methode (Vor- und Nachteile) aus!

1. Legosteine

Die Anzahl der weißen Legosteine ist eine positive ganze Zahl. Die Anzahl der roten Legosteine ist eine negative ganze Zahl.

Bei der Addition und Subtraktion ganzer Zahlen können acht verschiedene Fälle auftreten. Veranschaulichen Sie möglichst viele dieser Fälle mit weißen und roten Legosteinen.

Arbeiten Sie in Gruppen.
Sie haben 20 Minuten Zeit.



1. Legosteine

Einführung von Addition und Subtraktion in $\mathbb{Z}$

- Anzahlen von weißen und roten Legosteinen als positive und negative Zahlen; die Null als Summe von Zahl und Gegenzahl
- Vorwärts und rückwärts Gehen auf dem Zahlenstrahl mit Blickrichtung nach rechts bzw. nach links; Abzählen der Schritte
- Zwei Lineale bzw. Geodreiecke als Rechenschieber mit linearen Skalen; Addition und Subtraktion werden so ausgeführt wie beim historischen Rechenschieber Multiplikation und Division mit logarithmischen Skalen

2. Zahlengerade laufen

Rechenzeichen:

+ heißt

„schaue in die positive Richtung“

– heißt

„schaue in die negative Richtung“

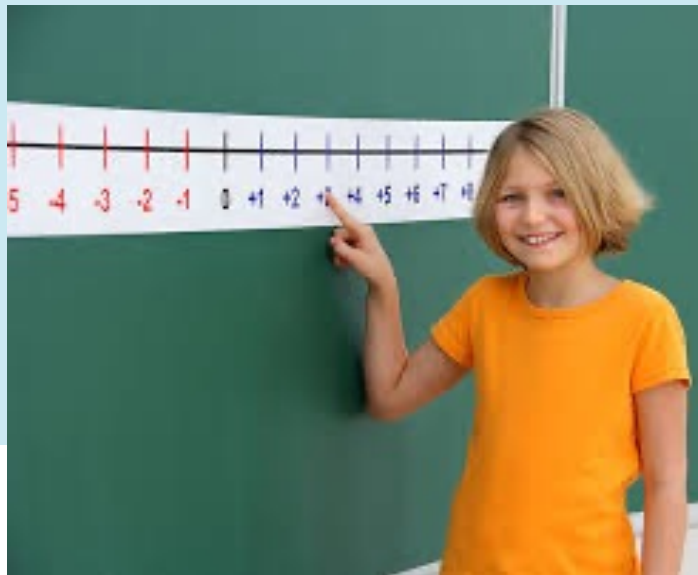
Vorzeichen:

3 = (+3) heißt

„gehe vorwärts“

(– 3) heißt

„gehe rückwärts“

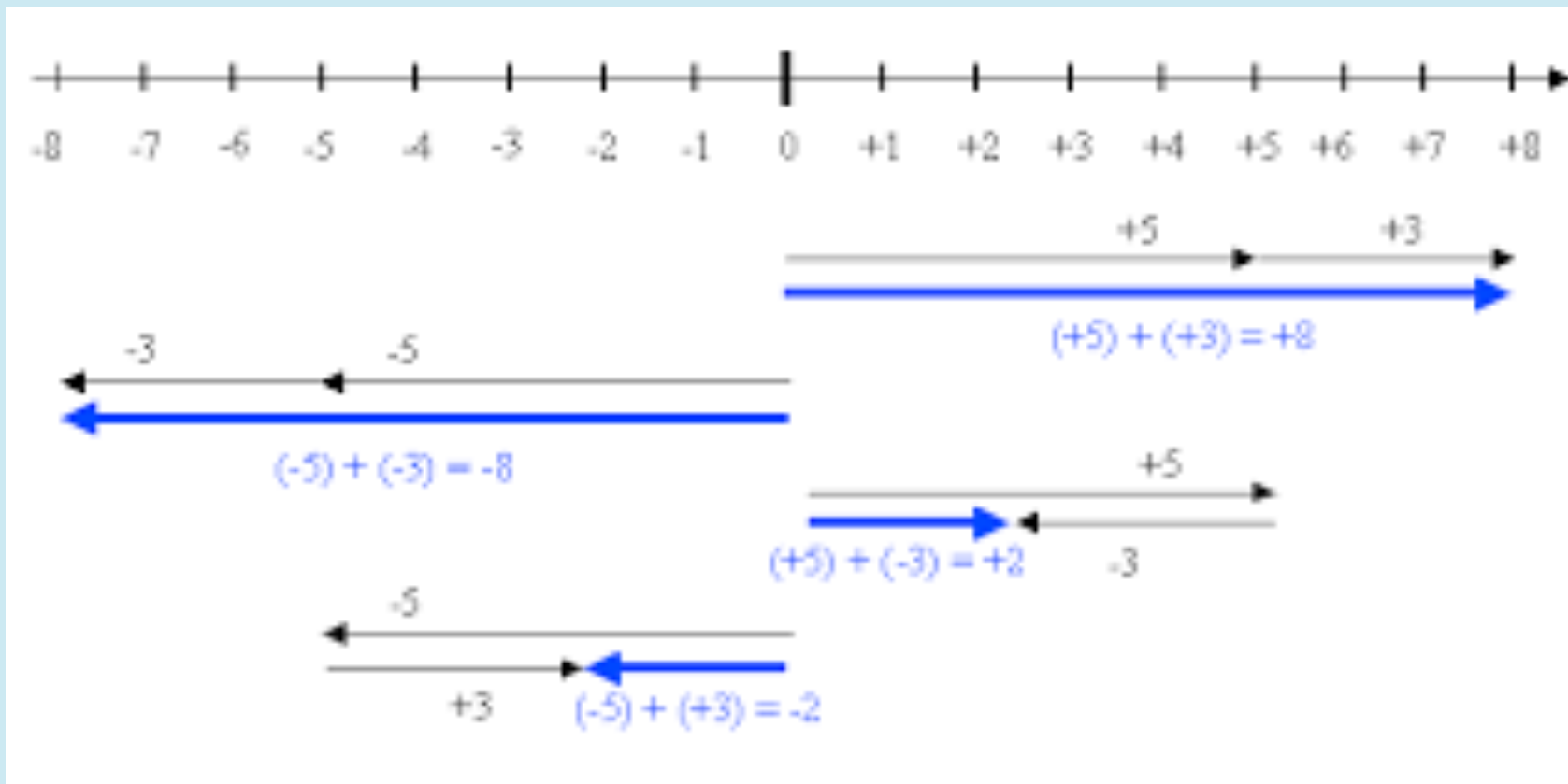


Aktivität 10b

Zahlengerade laufen

2. Zahlengerade laufen

Addition und Subtraktion



Aktivität 10b

Zahlengerade laufen

2. Zahlengerade laufen - Spielen: „Hin und Her“

Material:

- 3 Spielfiguren mit Gesicht
- Ein Würfel mit den Rechezeichen + und -
- Ein Würfel mit den Zahlen 0, -1, -2, +3, +4, +5
- Spielplan



So geht's

Jede Person erhält 3 Spielfiguren. Nun wird der Reihe nach mit beiden Würfeln gewürfelt und die Figur entsprechend bewegt.

Beim **Rechenwürfel** bedeutet

- + stelle deine Figur so, dass sie in die positive Richtung schaut
- stelle deine Figur so, dass sie in die negative Richtung schaut

Beim **Zahlenwürfel** bedeutet z.B.

- +3 gehe drei Felder vorwärts
- 4 gehe vier Felder rückwärts



Beispiel:

- + (-2) bedeutet: „Schaue in die positive Richtung und gehe 2 Felder rückwärts“
- (-4) bedeutet: „Schaue in die negative Richtung und gehe 4 Felder rückwärts“

Aktivität 10c

Treppen laufen/ auf Zahlen treten

3. Treppen laufen/ auf Zahlen treten



Arbeitsauftrag 1

Der Treppenabsatz zwischen den Etagen ist euer Startpunkt. Er bekommt die Zahl Null. Legt nun alle anderen Blätter mit den Zahlen in der richtigen Reihenfolge auf die Treppenstufen, die positiven treppauf, die negativen die Treppe hinunter. Wo müsste dann die -11 liegen? Wo die -15? Welche der beiden Zahlen ist größer? Wählt zwei beliebige Zahlen und erklärt, wie ihr erkennt, welche Zahl größer ist. Notiert verschiedene Beispiele.

Arbeitsauftrag 2:

Stellt euch auf die Null, als würdet ihr auf der Treppe ganz normal nach oben gehen.

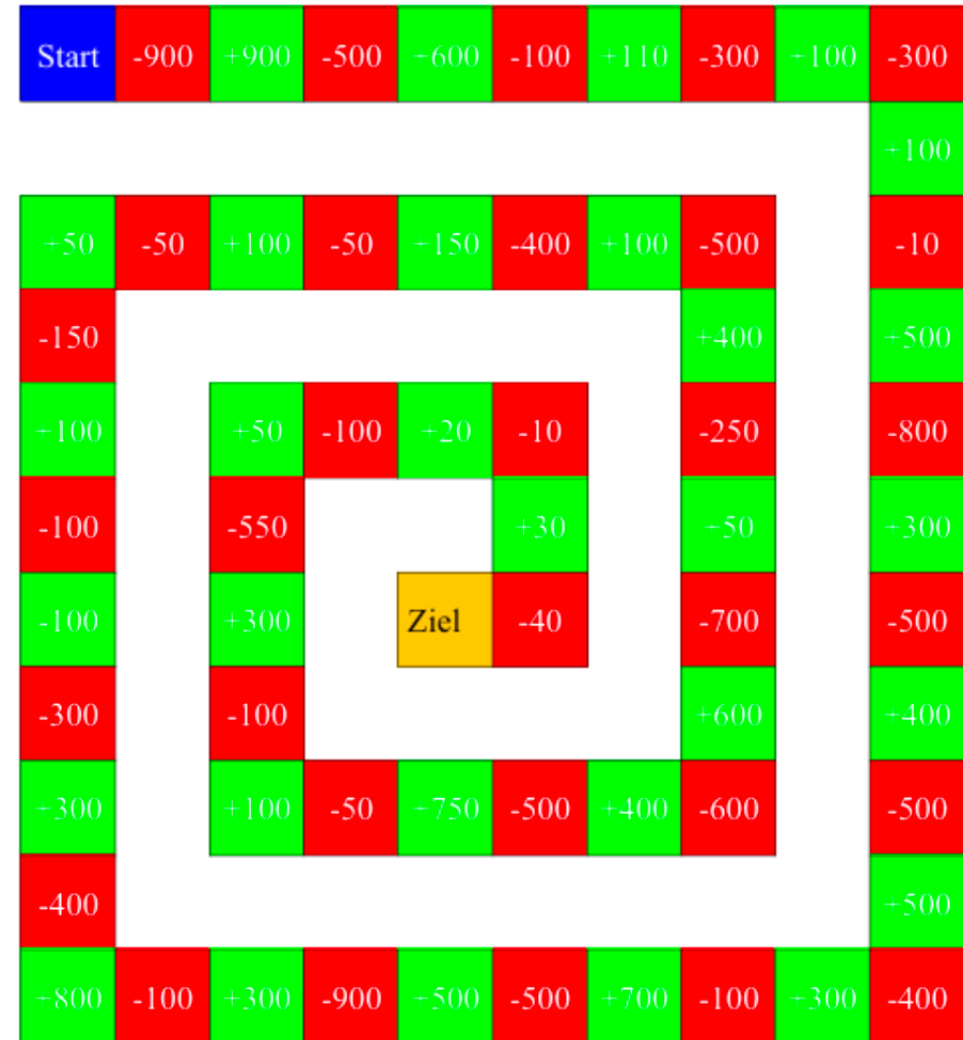
- Geht nun von der Null aus auf die Stufe mit der Zahl +3.
- Geht von der Null auf die Stufe mit der Zahl -3. Gibt es dafür verschiedene Möglichkeiten?
- Wie gelangt ihr von der Treppenstufe -3
... auf die Treppenstufe +4?
... auf die Treppenstufe -5?
... auf die Treppenstufe 0?
„Übersetzt“ eure Bewegung jeweils in eine Rechnung.
- Stellt euch auf zwei selbst gewählte Zahlen.
Mit welcher Bewegung gelangt ihr von der einen Zahl zur anderen? Gib es dafür verschiedene Möglichkeiten?
Notiert einige Beispiele.

aus: mathematik, Heft 33, 2015

Aktivität 10d

Spiel zu negativen Zahlen mit Geld

4. Guthaben und Schulden



Spielregeln

Das Spiel beginnt außen.

Es wird abwechselnd gewürfelt.

Jeder Spieler zählt sein Geld bzw. seine Schulden auf einem Kontozettel mit

Wenn der erste in der Mitte ankommt, ist das Spiel beendet.

Wer das meiste Geld oder die wenigsten Schulden hat, hat gewonnen.

Ideen zur Einführung der rationalen Zahlen

Lösungsidee:

1. Trennung zwischen Vorzeichen, Rechenzeichen und Verkürzungen: was bedeuten diese?
2. Treppe und Zahlenstrahl sind Vorstufen, man braucht Mengenvorstellung zum Rechnen
3. Vorgehensweise muss sein: zuerst Objekt, dann Verknüpfung, erst dann Kurzschreibweise (Erinnerung an Kosima / EIS)
4. Alle arbeiten ohne Beträge

Lego

- $+-$ und $-+$ sind unterschiedliche Dinge und bei hier kommt gleiches raus $2+(-3)$ und $2-(+3)$
- abgeben von 2 Minuspunkten ist dasselbe wie dazu von zwei Pluspunkten
- tolle Trennung zwischen Vor- und Rechenzeichen: 3W-2R

Treppenlaufen und Hin und Her am Zahlenstrahl

- Zustand + Veränderung = Zustandsveränderung

Aber:

Probleme beim Multiplizieren und Dividieren! - Daher Permanenzprinzip nötig; denn es gibt keine Anwendung im Alltag. Das ist aber legitim. (Mathematischen Prinzip)

Multiplikation: $(-a) \cdot (-b)$

Verschiedene Zugänge zu den Vorzeichenregeln bei der Multiplikation:

Verwendung des Permanenzprinzips

- unter Verwendung des Distributivgesetzes
- unter Verwendung von „Gleichungsketten“

Verwendung des Vektormodells (OS)

(zentrische Streckung, orientiert, eindimensional auf dem Zahlenstrahl)

Vorzeichenregel mit Distributivgesetz

$$\begin{aligned} 0 &= (-3) \cdot 0 \\ &= (-3) \cdot (5 + (-5)) \\ &= (-3) \cdot 5 + (-3) \cdot (-5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-3) \cdot (-5) &= - [(-3) \cdot 5] \\ &= - [-15] \\ &= 15 \end{aligned}$$

Vorzeichenregel mit Gleichungsketten

$$3 \cdot 5 = 15$$

$$2 \cdot 5 = 10$$

$$1 \cdot 5 = 5$$

$$0 \cdot 5 = 0$$

$$(-1) \cdot 5 = -5$$

$$(-2) \cdot 5 = -10$$

$$3 \cdot (-5) = -15$$

$$2 \cdot (-5) = -10$$

$$1 \cdot (-5) = -5$$

$$0 \cdot (-5) = 0$$

$$(-1) \cdot (-5) = 5$$

$$(-2) \cdot (-5) = 10$$

Was sind typische Schülerfehler?

Typische Schülerfehler – Addition und Subtraktion

■ $-4 - 7 = 11$

■ $3 - (-4) = 1$

■ $-(5 + x) = (-5) + x$

Betrachten Sie die Fehler:

Wie kommen diese zustande?

Welche Maßnahmen (Erklärungen, Ergänzungen und Beispiele) ergreifen Sie in ihrem Unterricht, um diese Fehler aufzudecken bzw. als Lernanlässe zu übernehmen?

Was sind typische Schülerfehler?

□ Typischer Fehler: Multiplikation/Division
■ $-2x = 8 \Leftrightarrow x = 10$

Betrachten Sie die Fehler:

Wie kommen diese zustande?

Welche Maßnahmen (Erklärungen, Ergänzungen und Beispiele) ergreifen Sie in ihrem Unterricht, um diese Fehler aufzudecken bzw. als Lernanlässe zu übernehmen?

Reelle Zahlen

Vor dem Unterricht zu klären – 6 Fragen

- Warum ist die angestrebte Zahlbereichserweiterung notwendig?
(fachliche Motivation - Motivation der Schüler)
- Wie wird diese in der Fachwissenschaft durchgeführt? Was lässt sich davon für den Unterricht nutzen, was nicht?
- Welche sinnstiftenden Vorstellungen von Zahlen und Rechenoperationen gibt es, wofür gibt es keine sinnstiftenden Vorstellungen? Wo sind die Grenzen einer sinnvollen Veranschaulichung?

Vor dem Unterricht zu klären – 6 Fragen

- Wie rechnet man mit den neuen Zahlen? Wie erweitert man die Regeln für die Grundrechenarten so, dass man in dem erweiterten Zahlbereich rechnen kann?
- Welche Veränderungen (insbesondere bei den Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler) bringen die jeweilige Zahlbereichserweiterung mit sich?
- Was sind typische Schülerfehler?

Was eine reelle Zahl?

Überlegen Sie kurz:

Wie beantworten Sie diese Frage heute und wie
im Unterricht?

Was ist eine reelle Zahl? I

Eine Zahl, deren Dezimalentwicklung unendlich und nicht-periodisch ist, heißt irrationale Zahl.

Was ist eine reelle Zahl? II

Alle inneren Zahlen von Intervallschachtelungen bilden die Menge der reellen Zahlen.
(Jede rationale und jede irrationale Zahl kann man durch eine Intervall-schachtelung eindeutig festlegen.)

Was ist eine reelle Zahl? III

Alle Zahlen, die Punkte auf der Zahlengeraden bezeichnen, fasst man als reelle Zahlen auf.

Die reellen Zahlen, die keine rationalen Zahlen sind, schließen die Lücken auf der rationalen Zahlengerade. Man nennt sie irrationale Zahlen.

Warum reelle Zahlen?

Schon die Pythagoräer haben entdeckt, dass die rationalen Zahlen nicht ausreichen, um alle Längenverhältnisse in geometrischen Figuren mittels Zahlen zu beschreiben oder – anders ausgedrückt – um bei vorgegebener Einheit jeder Länge eine Maßzahl zuzuordnen. Die so motivierte Einführung der *irrationalen Zahlen* lässt sich allerdings nicht aus praktischen Messaufgaben rechtfertigen. Sie geschieht, damit für gewisse geometrische und algebraische Probleme anschaulich vorhandene Lösungen auch in der Theorie existieren. Lehrkräften sollte bewusst sein, dass der nächstliegende algebraische Anlass zur Erweiterung der rationalen Zahlen, das Lösen neuer Gleichungstypen wie $x^2 = 2$, zunächst nur „recht wenige“ (aber immer noch abzählbar viele) neue Zahlen erfordern würde. Der zentrale Anlass zur Einführung *aller* (überabzählbar vielen) reellen Zahlen ist das *Stopfen der Lücken auf der Zahlengerade*. Er kommt aber erst in der Analysis in seiner vollen Breite zum Tragen (vgl. Danckwerts/Vogel in diesem Heft).

Quelle: Hefendehl-Hebeke, Lisa und Prediger, Susanne (2006): Unzählig viele Zahlen: Zahlbereiche erweitern – Zahlvorstellungen wandeln ; Praxis der Mathematik in der Schule 48, S. 1-7.

Die reellen Zahlen

Einstiegsfragestellungen

- Bestimme alle Zahlen, deren Quadrat 2 ist.
- Problem der Quadratverdopplung
- Bestimme die Länge der Diagonale im Einheitsquadrat
- Bestimmung von Fallzeiten beim freien Fall
- Oberflächeninhalt von Würfeln
- Schwingungsdauer eines Pendels
- ...

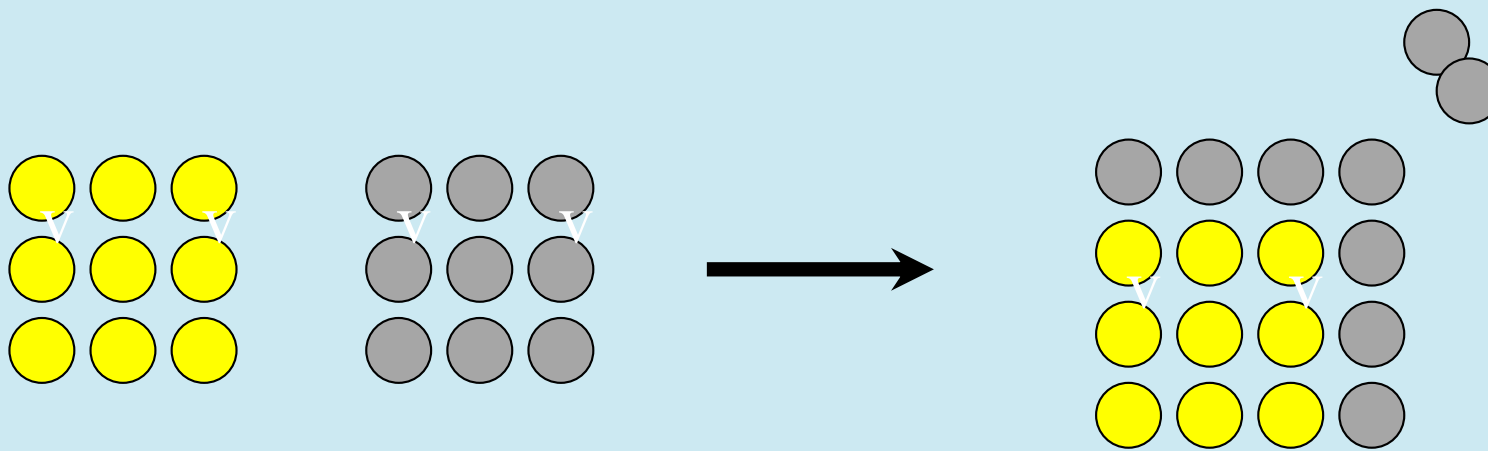
Die Quadratverdopplung



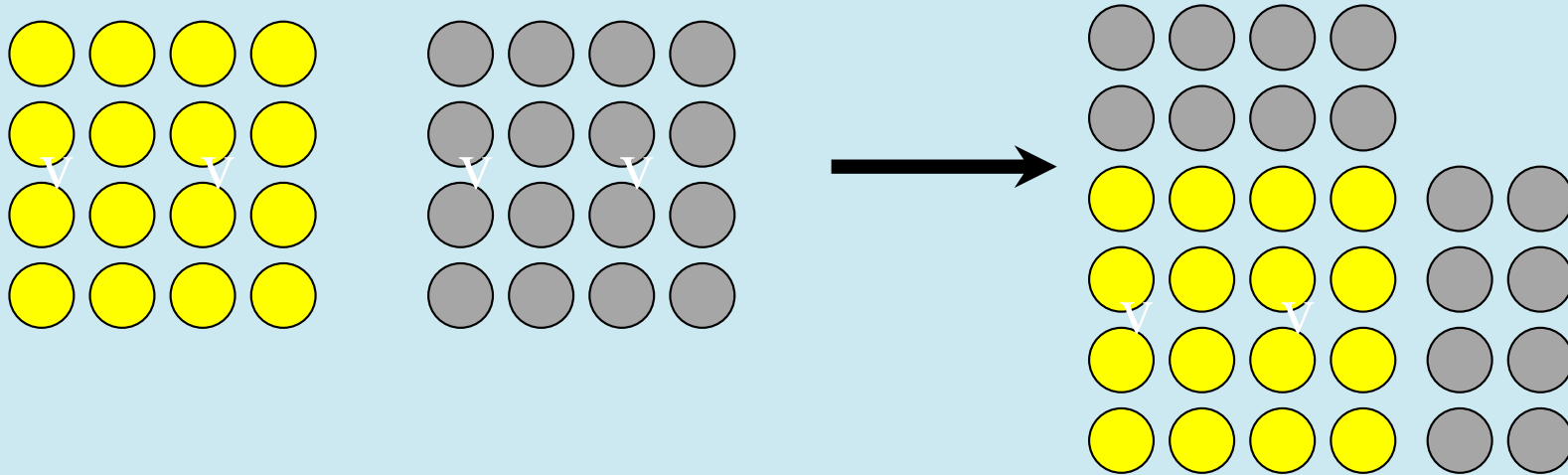
Vier gelbe und vier graue Plättchen sind jeweils zu einem Quadrat gelegt.
Aus allen 8 Plättchen soll ein neues Quadrat gelegt werden.

Ergänze die grauen Plättchen so am gelben Quadrat, dass ein großes Quadrat entsteht.

Die Quadratverdopplung



Die Quadratverdopplung



Welche Vermutung können SuS nach diesen Tätigkeiten formulieren?

Konstruierbare Längen ohne Maßzahlen

Näherungsweise Bestimmen durch
Intervallschachtelungen

Zehnteilungsverfahren

Halbierungsverfahren

Heron-Verfahren

	Natürliche Zahlen	Bruchzahlen	Rationale Zahlen	Reelle Zahlen
Grundvorstellungen zu den Zahlen	beschreiben in erster Linie Anzahlen, Ordnungszahlen, auch als Rechenzahlen verwendet	dienen zur Beschreibung von Anteilen eines Ganzen, Verteilsituationen, multiplikativen Vergleichen, relativen Anteilen, Verhältnissen	relative Zahlen bezüglich einer fest gewählten Vergleichsmarke	Grundvorstellungen ergeben sich aus Konstruktion der beliebig genauen Näherung globale Sicht: geschlossene Lücken auf der Zahlengerade
Zahldarstellung	eindeutige Zuordnung eines Zahlzeichens im dezimalen Stellenwertsystem, basierend auf der Idee der Zehnerbündelung	Darstellung nicht eindeutig: eine Bruchzahl kann durch unendlich viele Brüche oder eine Dezimalzahl oder Prozentzahl dargestellt werden	Darstellung mit bekannten Zahlsymbolen und mit Vorzeichen 3 Bedeutungen des Minuszeichens: Vor-, Rechen- und Inversionszeichen	Darstellung irrationaler Zahlen als nicht abbrechende, nicht periodische Dezimalzahlen im Stellenwertsystem keine exakte Darstellung mit endlich vielen Zeichen, nur indirekte Beschreibung
Ordnungsrelation	interpretiert als „weniger als“ (Anzahlen) bzw. „früher als“ (Ordnungszahlen) jede Zahl hat eindeutigen Nachfolger	Interpretation als „weniger als“ unproblematisch rechnerische Ausführung schwieriger als Interpretation kein eindeutiger Nachfolger, da Brüche dicht liegen	„weniger als“ ist neu deutungsbedürftig leitende Idee für Ordnungsrelation: Orientierung der Zahlengerade Symmetrie der Zahlengeraden versus Orientierung in Richtung der positiven Seite	Deutung der Ordnungsrelation keine neue Hürde Ordnungseigenschaft der Vollständigkeit ist zentraler Erweiterungsgrund und wird doch in der Mittelstufe kaum bemerkt
Grundvorstellungen für Operationen	Addition: Hinzufügen, Zusammenfügen Subtraktion: Wegnehmen, Vermindern Multiplikation: fortgesetztes Hinzufügen, kontinuierliches Skalieren, multiplikativer Vergleich Division: Verteilen, Einteilen	Addition und Subtraktion bleiben der Vorstellung nach gleich, der Einfachheit der Vorstellung entspricht keine vergleichbare Einfachheit der Durchführung Multiplikation und Division mit eingeschränkten und modifizierten Interpretationen, rechnerische Ausführung einfach neue Ordnungseigenschaften für Multiplikation/Division	Verständnishürde: Operationen werden nach Prinzip der Permanenz formaler Gesetze festgesetzt, so dass möglichst viele Regeln (z. B. Distributivität, ...) bleiben Interpretation ist Permanenz der formalen Gesetze nachgeordnet! modifizierte Interpretationen für Addition/Subtraktion, Multiplikation nur mit Hilfsinterpretation als gerichtetes Skalieren	keine neuen Grundvorstellungen nötig Da Unterricht selten zu grundlegenden Fragen vordringt (etwa: wie addiert man nicht abbrechende Dezimalzahlen?), werden hier selten Probleme erlebt

Abb. 3: Übersicht zu Kontinuitäten und Diskontinuitäten in den Vorstellungen zu Zahlen und Operationen

Quelle: Hefendehl-Hebeke, Lisa und Prediger, Susanne (2006): Unzählig viele Zahlen: Zahlbereiche erweitern – Zahlvorstellungen wandeln ; Praxis der Mathematik in der Schule 48, S. 1-7.

Feedback

1. Folgendes will ich im Unterricht ausprobieren...
2. Das war für mich neu...
3. Das war für mich die zentrale Botschaft...
4. Das kam für mich heute zu kurz...

Feedback

<https://oncoo.de/x6v7>



Los geht's!

Ausblick

Das nächste Modul zum Thema:
**„Funktionaler Zusammenhang – Darstellungen
verwenden“**

findet am 12.11.2025

bei _____
statt.

Gute Heimfahrt!

Quellenverzeichnis – Hinweis Verweise/Quellen – Internetseiten finden Sie auf den Folien

Abshagen, Maïke u.a. (2021): Basiswissen Lehrerbildung: Mathematik unterrichten, 2. Auflage, Hannover, Klett – Verlag.

A. Paulitsch: Zu Gast bei Brüchen und ganzen Zahlen. Aulis Verlag Deubner & Co KG, Köln 1997

BLK- Modellversuch: Materialien zum Modellversuch: Vorschläge und Anregungen zu einer veränderten Aufgabenkultur

Barzel, Bärbel u.a. (2012): Mathematik Methodik – Handbuch für die Sekundarstufe I und II, 6. Auflage, Berlin, Cornelsen Scriptor

Barzel, Hußmann, Leuders, Prediger (2013): mathewerkstatt 5 und 9, Schulbuch, Cornelsen Verlag, Berlin

Fauth, Benjamin (u.a.) (2021): Beobachtungsmanual zum Unterrichtsfeedbackbogen Tiefenstruktur, Institut für Bildungsanalysen Baden – Württemberg , Stuttgart.

Leuders, Timo u.a. (2013): Mathematik Didaktik – Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II, 8. Auflage, Berlin, Cornelsen Scriptor

Malle, Günther (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra, 1. Auflage, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden

Mathematik lehren, Heft 121, Dezember 2003, „Merkwürdige Zahlen“

Mathematik lehren, Heft 123, April 2004, „Brüche und Verhältnisse“

Mathematik lehren, Heft 142, Juni 2007, „Auf dem Weg zu neuen Zahlen“

Mathematik lehren, Heft 171, April 2012, „Zahlbeziehungen erkennen und nutzen“

Mathematik lehren, Heft 183, April 2014, „Zugänge zu negativen Zahlen“

Mathematik lehren, Sammelband Spiele

Mathematik 5-10, Heft 5, 4. Quartal 2008, Friedrich Verlag, „Brüche begreifen“

Mathematik 5-10, Heft 47, 2. Quartal 2019, Friedrich Verlag, „Zahl um Zahl – Zahlvorstellungen entwickeln“

Ministerium für Allgemeine und Berufliche Bildung, Wissenschaft, Forschung und Kultur (2024): Fachanforderungen Mathematik, 2. Auflage,

Kiel

Ministerium für Schule und Berufsbildung des Landes Schleswig – Holstein (2015): Leitfaden zu den Fachanforderungen - Allgemein

bildende Schulen Sekundarstufe I, 1. Auflage, Kiel

Padberg, Friedhelm (2002): Didaktik der Bruchrechnung, 3. Auflage, Heidelberg/Berlin, Spektrum Verlag

Vom Hofe, Rudolf und Roth, Jürgen (2023): Grundvorstellungen aufbauen, Mathematik lehren Heft 236, S. 2 – 7

Weitere (nicht mehr verfügbare) Zeitschriften: Praxis der Mathematik erschien bis 2017 im Aulisverlag:

PM, Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 11, Oktober 2006, Aulis Verlag, „Unzählig viele Zahlen – Zahlbereiche erweitern, Zahlvorstellungen wandeln“

PM, Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 17, Oktober 2007, Aulis Verlag, „Mit Unterschieden rechnen – Differenzieren“

PM, Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 25, Februar 2009, Aulis Verlag, „Produktive Übungsspiele“