Daten und Zufall - Gemeinsames Lernen

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

4. Daten und Zufall - gemeinsames Lernen

Ziel: Die LiV kennen Zugänge zum Wahrscheinlichkeitsbegriff, die gemeinsames Lernen auf allen Anforderungsebenen und in allen Anforderungsbereichen ermöglichen.

Die LiV…

- …betrachten die Leitidee Daten und Zufall unter dem Punkt des gemeinsamen Lernens.
- … erarbeiten sich den Einsatz und Umgang mit Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln unter Berücksichtigung von problemorientierten Aufgaben.
- … erproben verschiedene Zugänge (sowohl enaktiv als auch ikonisch) zur Leitidee Daten und Zufall.
- … wenden Tabellenkalkulationsprogramme für das Erstellen von Zufallsexperimenten, Diagrammen, Dateneingabe und –analyse an.

Quelle: Ausbildungscurriculum Mathematik, S. 103, IQSH

Ablauf

1. Rückblick
2. Gemeinsames Lernen
3. Daten und Zufall – eine reichhaltige Lernumgebung
4. Stochastische Vorstellungen
5. Zufallsexperimente
6. Tabellenkalkulationsprogramm

Rückblick: Daten und Zufall – mathematisch kommunizieren

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Lernplakat „Wahrscheinlichkeit" aus Heft 2 – bestens geeignet zur Begriffsklärung.

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Aktivität 1:
Zentrale Begriffe der Stochastik

Lernumgebung Bingo

Zufallsexperiment
Ergebnis
Ergebnismenge
Relative Häufigkeit
Absolute Häufigkeit
Wahrscheinlichkeit

Laplace-Experiment
Ereignis
Gegenereignis
Sicheres Ereignis
Unmögliches Ereignis

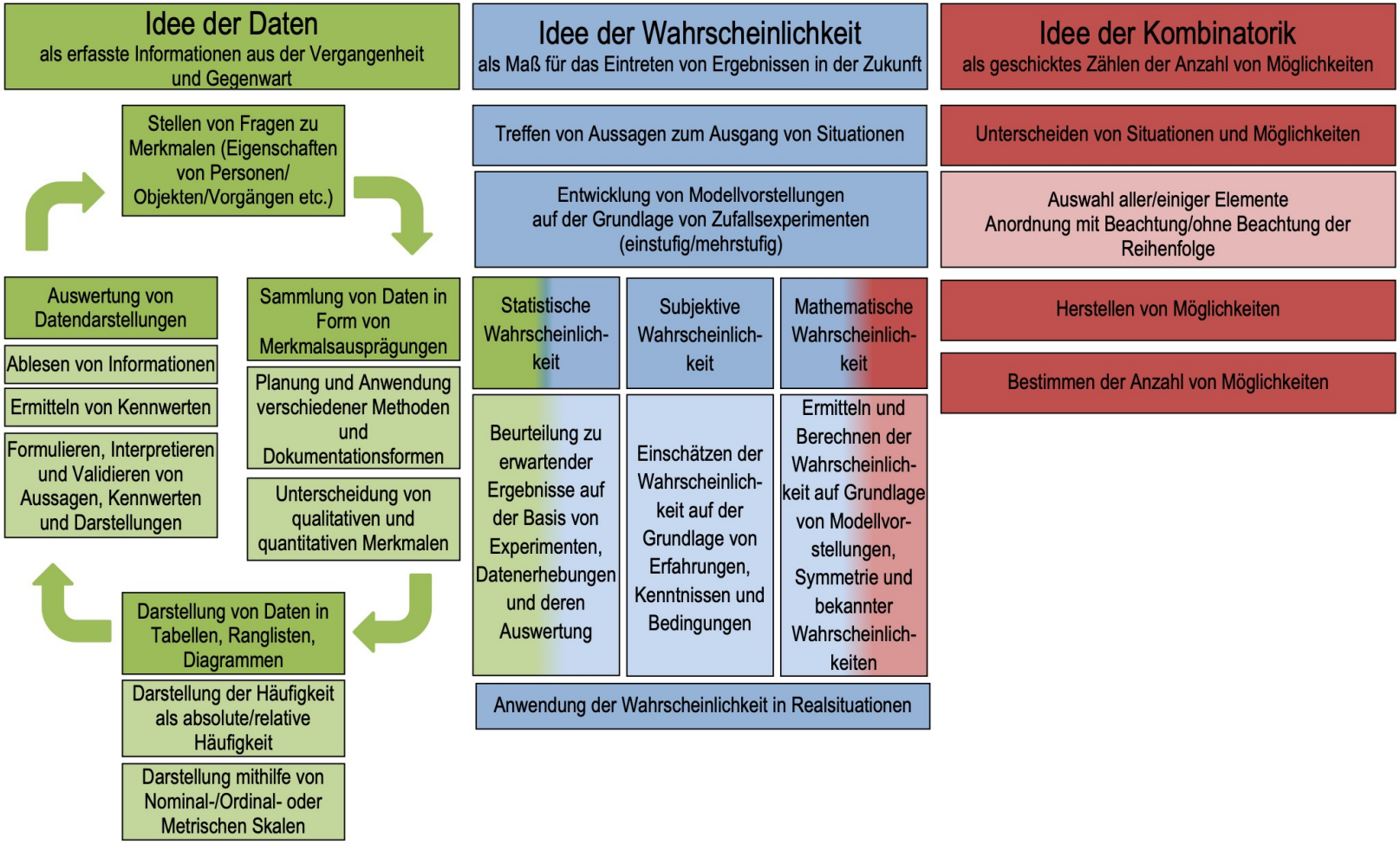
2	8
12	10

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Aktivität 2:
Zentrale Begriffe Abschlüsse

1. Sichtet die Stochastikaufgaben aus den Abschlussaufgaben (ESA und MSA).

2. Welche zentralen Begriffe werden für die Abschlüsse benötigt?

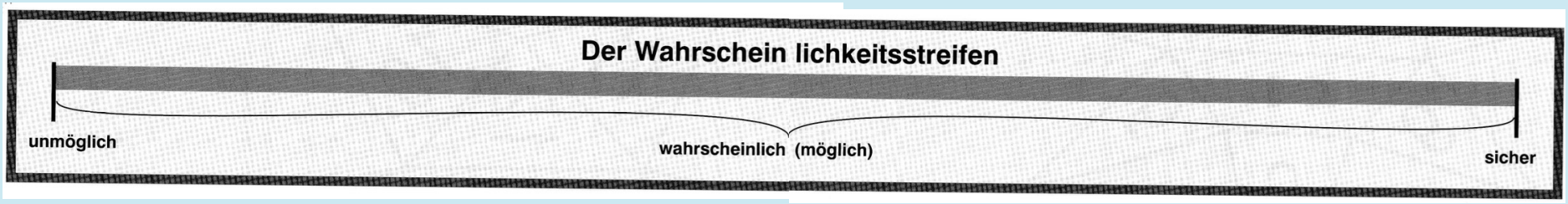


LISUM, CC-BY-SA 4.0

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

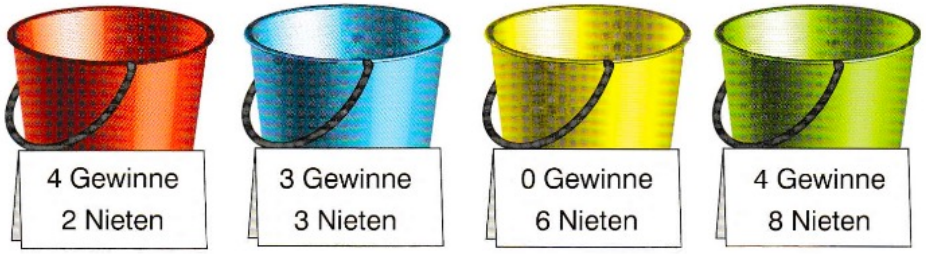
Aktivität 3:

Der Wahrscheinlichkeitsstreifen

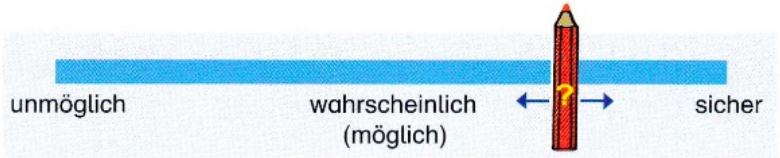


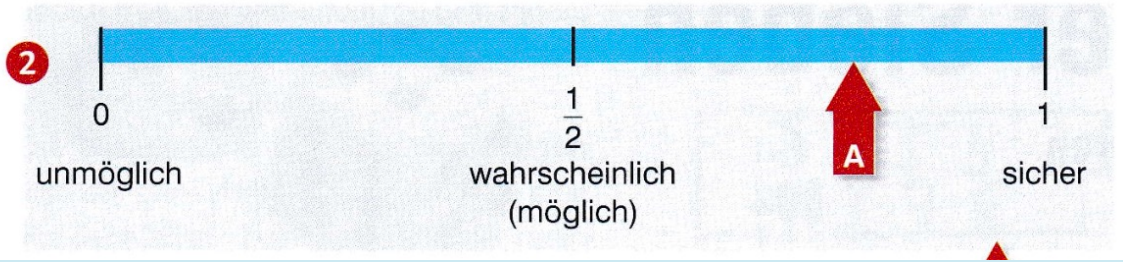
Ihr braucht:
1 Wahrscheinlichkeitsstreifen, 4 Buntstifte (rot/blau/gelb/grün)

Aus jedem Eimer wird ein Los gezogen.



Vergleicht die Wahrscheinlichkeiten, einen Gewinn zu ziehen.
Legt dazu für jede Eimerfarbe einen Buntstift auf den Wahrscheinlichkeitsstreifen.
Vergleicht mit einer anderen Gruppe.

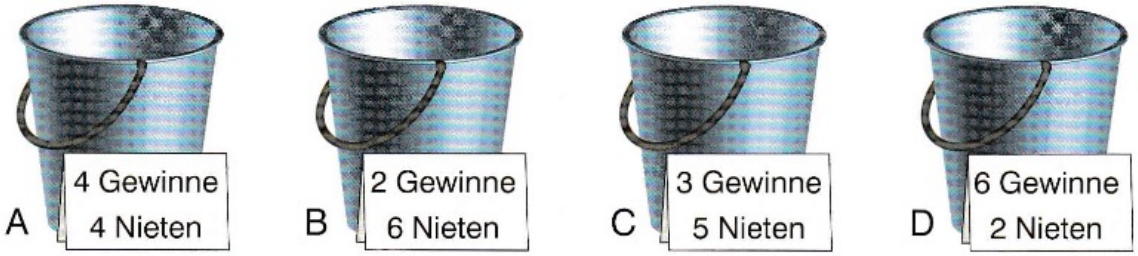




IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Ihr braucht:
4 Eimer, Gewinne und Nieten

Füllt 4 Eimer (wie auf dem Bild) mit Gewinnen und Nieten.
Nun deckt ihr Tücher über die Eimer und vertauscht die Eimer so oft, dass ihr nicht mehr wisst, in welchem Eimer welche Lose sind.



Zufallsexperiment für 4 Kinder:
Jeder zieht aus einem Eimer 50-mal (mit Zurücklegen) und notiert seine Ergebnisse in einer Strichliste.

Vergleicht die 4 Strichlisten. Vermutet, wer aus welchem Eimer (A, B, C oder D) gezogen hat. Begründet eure Meinung.

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Für das Schulfest haben die Kinder in 4 Eimer Gewinne und Nieten gelegt.
Die Verteilung der Gewinne und Nieten ist nicht bekannt, aber diese Aussagen passen zu den Eimern.

a) Beim roten Eimer ist die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn und für eine Niete gleich hoch.

b) Beim grünen Eimer ist die Gewinnchance am höchsten.

c) Beim gelben Eimer ist es nicht sehr wahrscheinlich, einen Gewinn zu ziehen.

d) Bei einem Eimer ist es unmöglich, einen Gewinn zu ziehen.

Zeichnet passende Eimer, sodass alle Aussagen stimmen.
Findet mehrere Möglichkeiten. Vergleicht mit einer anderen Gruppe.

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Unterrichtsbesuch

Verteilung der Beobachtungsschwerpunkte	Unterrichtsstunde	Reflexion

Beobachtungsbogen der Prüfungsstunde als Grundlage für Hospitationsstunden

Übergeordnete Punkte:

1. Hat die LK sachlich und fachlich korrekt unterrichtet?
2. Hat die LK die Selbstständigkeit der Lernenden unter anderem durch schüleraktivierende Unterrichtsformen gefördert?
3. Hat die LK die unterschiedlichen Voraussetzungen und Kompetenzen der Lernenden berücksichtigt?
4. Hat die LK den Unterricht sinnvoll strukturiert und flexibel auf sich verändernde Situationen reagiert?
5. Hat die LK präzise und verständlich formuliert?
6. Ist die LK mit den Lernenden respektvoll und wertschätzend umgegangen?
7. Ist die LK überzeugend und als Vorbild aufgetreten?
8. Konnte die LK ihr didaktisches Konzept und dessen Realisierung angemessen reflektieren?

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Reflexion der Stunde

1. Eigenreflexion:	LiV reflektiert ihre Unterrichtsstunde (Hilfe
2. Positivblitzlicht:	Jede LiV nennt einen Punkt (Bitte keine Dopplungen).
3. Beobachtungsaufträge:	Jede Gruppe stellt ihre Beobachtungen vor.
4. Tipps und Fragen:	LiV wählt ein bis zwei Tipps/Fragen aus, über die sie sprechen möchte.

Daten und Zufall – gemeinsames Lernen

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Aktivität 4:
Gemeinsames Lernen

Was verstehen wir unter: **Gemeinsames Lernen**?

Nähern Sie sich dieser Fragestellung unter zu Hilfenahme der Fachanforderungen und dem Leitfaden für die Sekundarstufe.

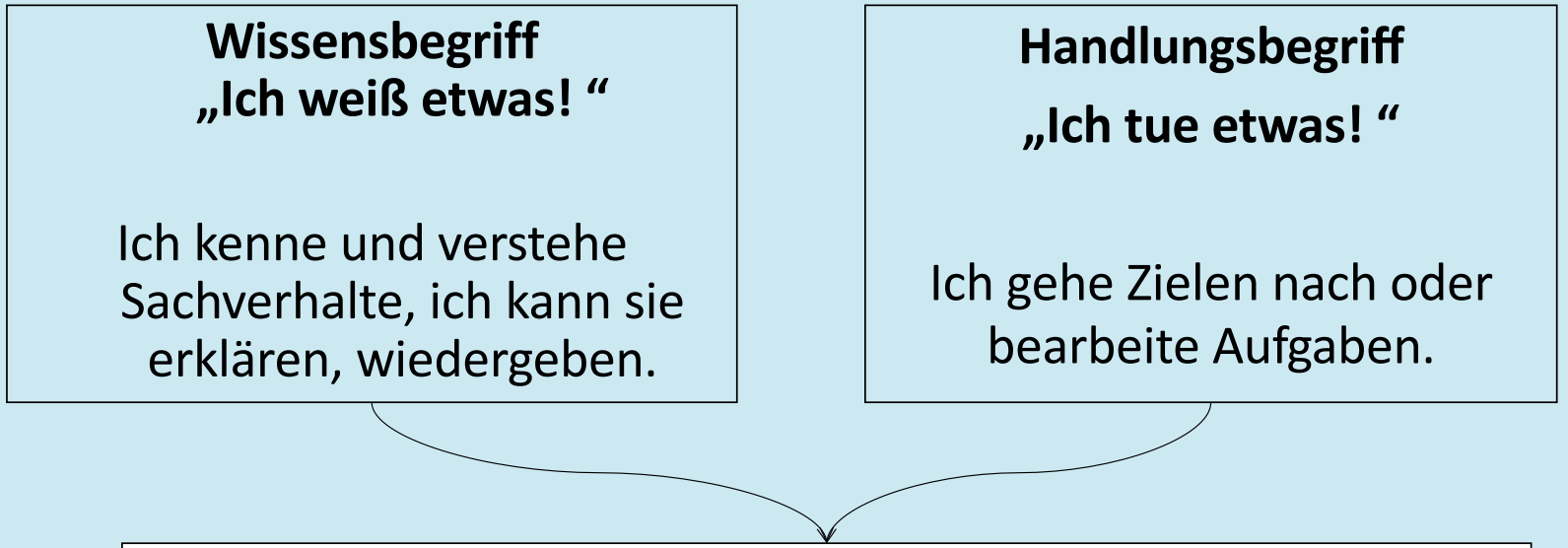
Stellen Sie Ihre Ergebnisse übersichtlich dar.

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Sammeln Sie Ihre Ergebnisse auf der Pinnwand.

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Kompetenzen – zwei Bereiche fließen zusammen



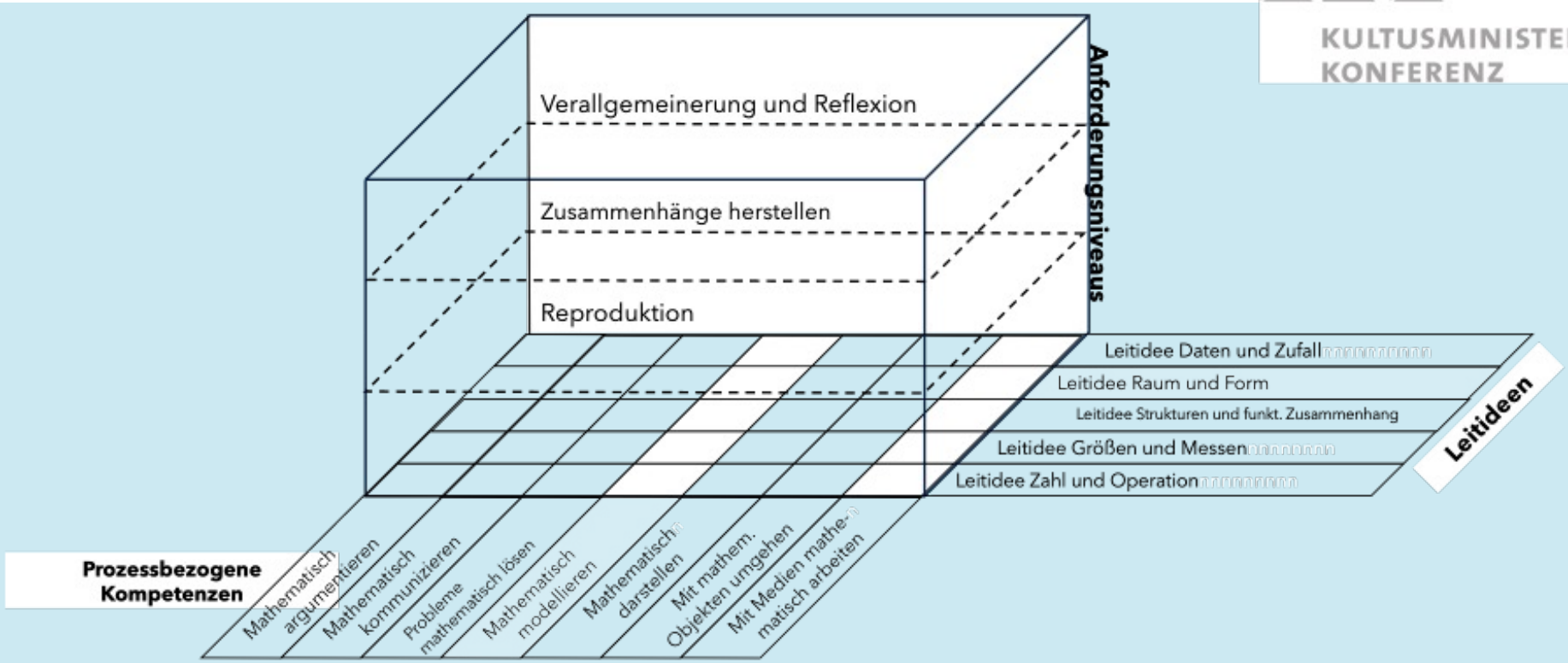
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Matrix des gemeinsamen Lernens

	Anforderungsebene ESA	Anforderungsebene MSA	Anforderungsebene ÜOS
Anforderungsbereich I			
Anforderungsbereich II			
Anforderungsbereich III			

Leitfaden zu den Fachanforderungen Mathematik, Seite 26.

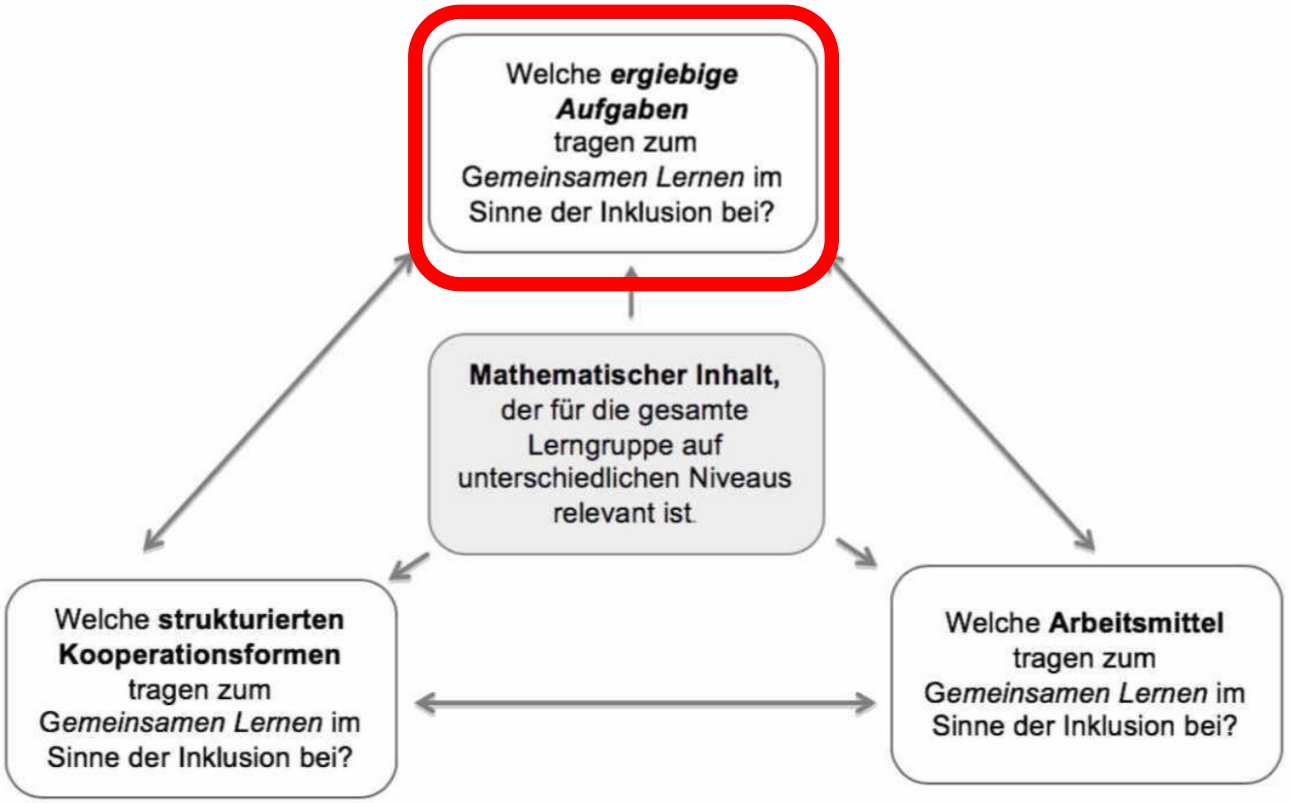
Kompetenzmodell
der Bildungsstandards



Kultusministerkonferenz (Hrsg.) (2022) Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards im Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA) . Beschluss vom 14.10.2004 i.d.F. vom 23.06.2022.

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Gemeinsam Lernen (nach Pikas)



Planungsfelder für das *Gemeinsame Lernen* im Mathematikunterricht (Planungsraster)

Ergiebige Aufgaben…

… sind Voraussetzung für die Arbeit am selben Inhalt/Gegenstand auf verschiedenen Niveau-Stufen:

a) **Komplexe Aufgaben** mit differenzierten Teilaufgaben (Differenzierung durch verschiedene Anforderungsbereiche)

b) **Offene Aufgaben** (Selbstdifferenzierung im Hinblick auf Auswahl, Komplexität/Anspruchsniveau, Lösungswege...)

c) **Parallele Aufgaben** (Differenzierung durch zueinander gehörige Inhalte im Sinne des Spiralprinzips)

d) **Substanzielle Aufgaben**, die auf unterschiedlichem Niveau zu bearbeiten sind (Differenzierung im Hinblick auf Lösungswege, auch konkretes Handeln möglich)

Ergiebige Aufgaben: Eisaufgabe

Situation: **Gefäß**: Becher oder Waffel
Eissorte: Zitrone oder Erdbeer
Soße: Karamell oder Himbeer

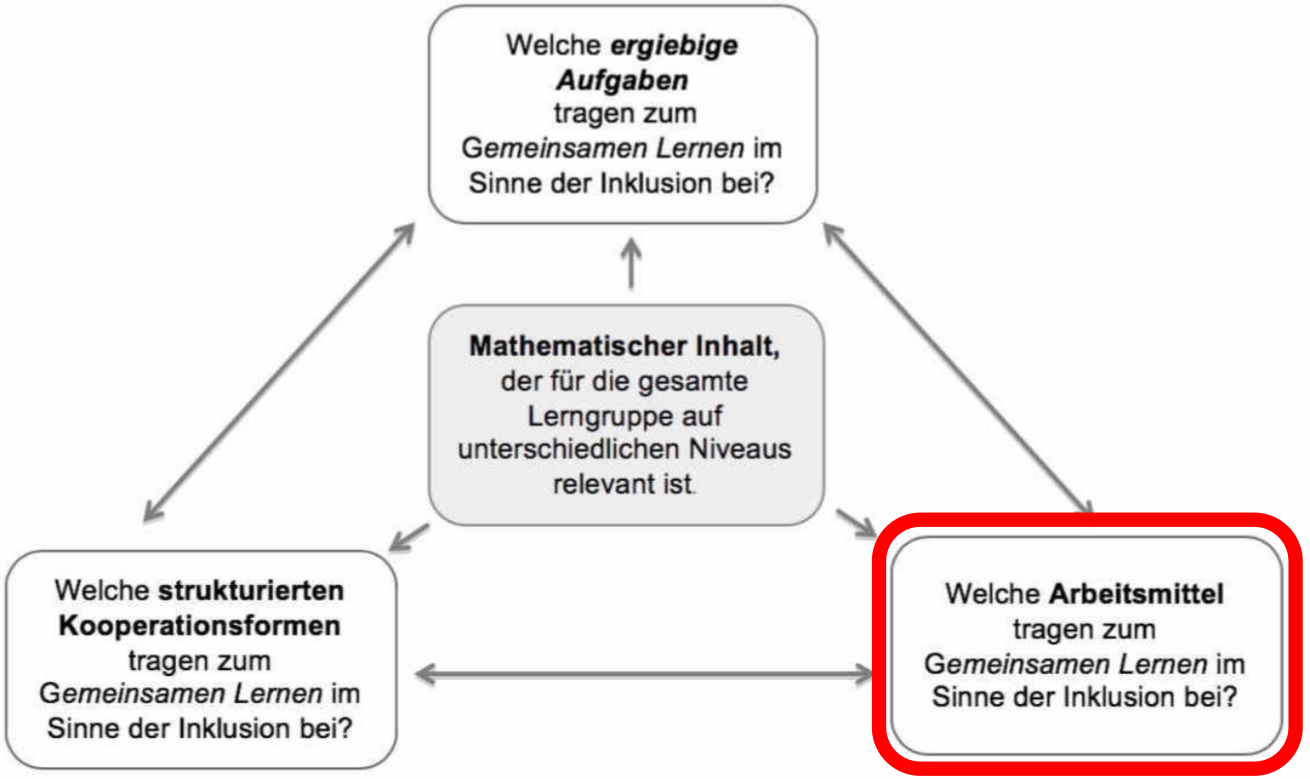
Aufgabe: Finde viele verschiedene Möglichkeiten ein Eis zu kaufen.

Aktivität: ☺ → ☺☺ → ☺☺☺☺
8 min → 15 min → 10 min

1. Finden Sie alle *Möglichkeiten* ein Eis zu kaufen. Welche *verschiedenen Lösungswege* könnten die Kinder wählen?
2. Finden Sie möglichst viele *verschieden Kompetenzerwartungen*, die mit dieser Aufgabe erreicht werden können.

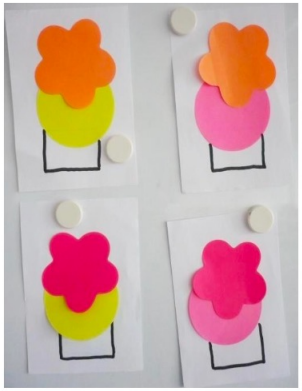
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

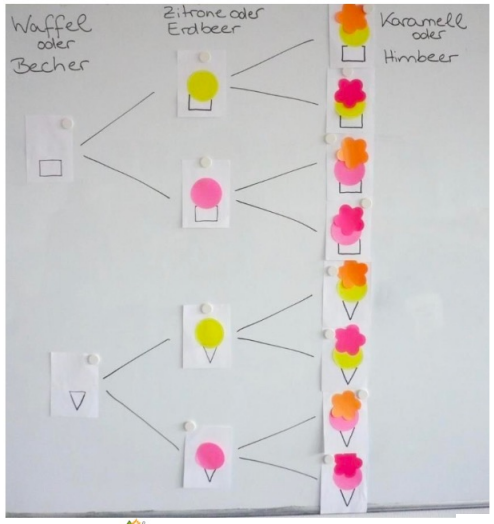
Gemeinsam Lernen (nach Pikas)



Arbeitsmittel als **Lernmittel**:

- **Beispiel**: Aufbau von Grundvorstellungen zu mathematischen Inhalten (Kombinatorischer Aspekt der Multiplikation)





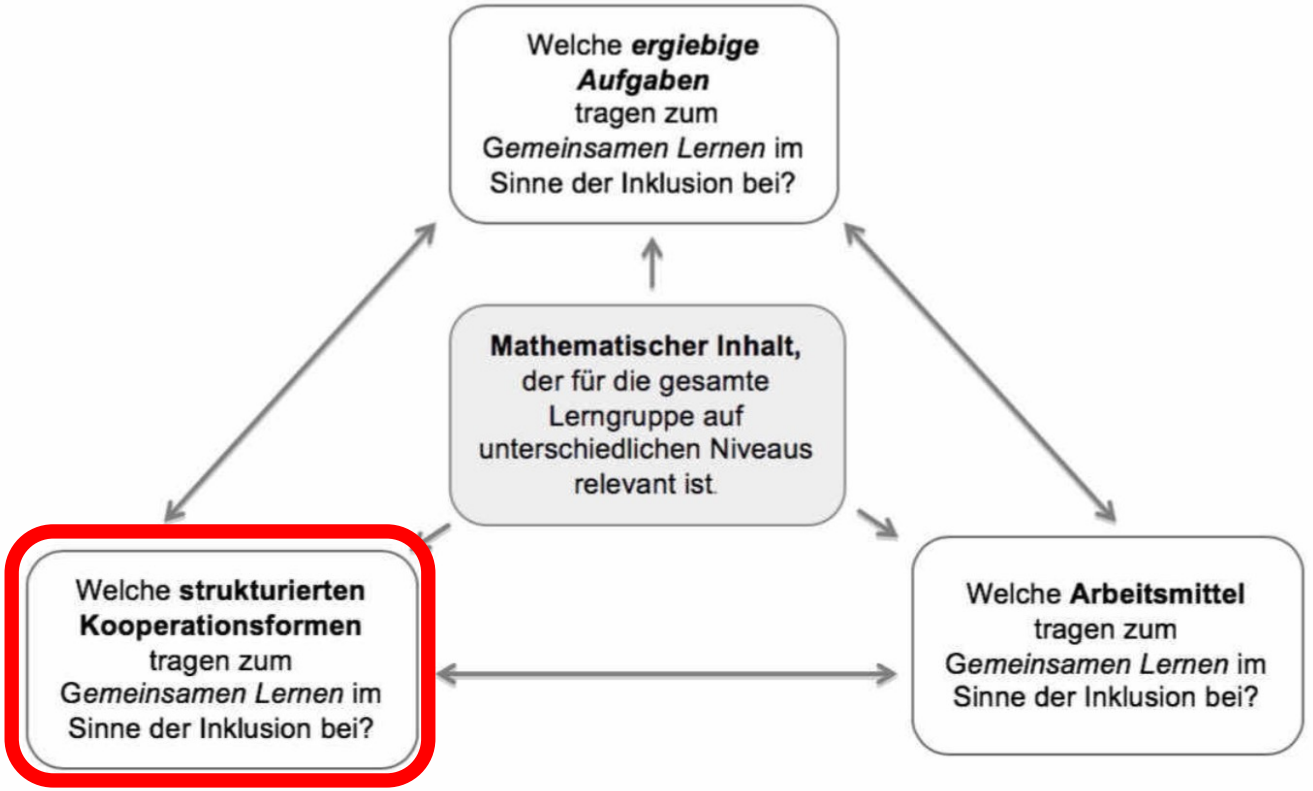
August 2015 © PIK AS (http://www.pikas.dzlm.de)

Arbeitsmittel als **Kommunikations-** und **Argumentations-** und **Beweismittel**:

- **Beispiele:** *Bewusstmachung, Beweis* von Gedankengängen
  Welche fehlen? Warum?

August 2015 © PIK AS (http://www.pikas.dzlm.de)

Gemeinsam Lernen (nach Pikas)



Think – pair – share

Strukturierung der Lernumgebung und der Rhythmisierung des Lernens in drei aufeinanderfolgenden Schritten:

think – pair – share oder ***ich - du - wir***

1. ICH setze mich mit meinem Arbeitsauftrag auseinander.

2. Wir tauschen uns aus. Ggf. arbeiten wir zusammen weiter.

3. Wir präsentieren und diskutieren unsere Ergebnisse im Plenum.

Kooperatives Lernen

Ziel einer kooperativen Lernumgebung im Fach Mathematik **ist nicht,** dass einzelne Kinder eine Aufgabe für die anderen Mitglieder besonders schnell lösen.

Ziel einer kooperativen Lernumgebung im Mathematikunterricht **ist es**, dass **jedes Mitglied** einer Gruppe auf seinem **individuellen Niveau** durch einen am **gemeinsamen Ziel orientierten Austausch**, und besonders den damit verbundenen, fortwährenden **Perspektivwechsel**, zu einem **tieferen Verständnis** mathematischer Inhalte gelangt.

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Gemeinsames Lernen *individuell* und gleichzeitig *kooperativ* gestalten:

Alle Kinder lernen erfolgreich...

- an einem **gemeinsamen Gegenstand**/ Inhalt/ Thema,
- in **Kooperation** miteinander,
- auf ihrem **individuellen Entwicklungsniveau** und
- mittels ihrer momentanen **individuellen Denk- und Handlungskompetenzen.**

(in Anlehnung an FEUSER 1996)

Rechnen im Team: “Gemeinsam Mathelernen muss stärker betont werden.“

Christoph Selter (Quamath)

Basiskompetenzen stärken: Mathematik ist hierarchisch strukturiert. Ohne solide Grundlagen ist das Weiterlernen nicht möglich. Lehrkräfte benötigen Unterstützung, um diagnosegeleitet fördern zu können. Dabei geht es nicht darum, Kinder einfach mehr üben zu lassen, sondern passgenaue Förderangebote zu entwickeln. Das erfordert gute Aufgaben, klare Interpretationshilfen und gezielte Materialien.

Leistungsstarke Schülerinnen und Schüler fördern: Diese Kinder fallen oft nicht auf, weil sie das Standardprogramm problemlos bewältigen. Hier brauchen Lehrkräfte Unterstützung, um anspruchsvollere Aufgaben zu entwickeln, die auch für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler eine Herausforderung darstellen und sie nicht bloß beschäftigen.

https://www.campus-schulmanagement.de/magazin/rechnen-im-team-gemeinsam-mathematiklernen-muss-staerker-betont-werden-christoph-selter, Interview mit Christioph Selter, 5.5.25, 10:58

Rechnen im Team: “Gemeinsam Mathelernen muss stärker betont werden.“

Christoph Selter (Quamath)

QuaMath

QuaMath (Unterrichts- und Fortbildungs-Qualität in Mathematik entwickeln) ist ein von der Kultusministerkonferenz (KMK) initiiertes Programm, das die Qualität des Mathematikunterrichts in Deutschland nachhaltig verbessern soll. Im Zentrum von *QuaMath* stehen fünf zentrale Prinzipien, die einen modernen Mathematikunterricht prägen:

1. Kognitive Aktivierung
2. Verstehensorientierung
3. Durchgängigkeit
4. Lernendenorientierung und Adaptivität
5. Kommunikationsförderung

Rechnen im Team: “Gemeinsam Mathelernen muss stärker betont werden.“

Christoph Selter (Quamath)

Redaktion: Ist dieser Austausch etwas, das in Zeiten eigenständiger, individueller Arbeitsweisen der Lernenden auf der Strecke bleibt?

Selter: Ja, gemeinsames Lernen muss wieder stärker betont werden. In vielen Schulen gibt es eine Tendenz zur individuellen Förderung, bei der Schülerinnen und Schüler Lernpakete eigenständig bearbeiten. Dadurch kann jedoch schnell der essenzielle Austausch mit der Lehrkraft und den Mitschülerinnen und Mitschülern verloren gehen. Gemeinsames Sprechen, Verstehen und Arbeiten sind gerade im Mathematikunterricht entscheidend, um komplexe Inhalte nachhaltig zu verstehen. Es ist unverzichtbar, den Mathematikunterricht langfristig wieder stärker auf Gemeinschaft und Interaktion auszurichten, um sowohl leistungsschwächere als auch leistungsstarke Schülerinnen und Schüler besser zu fördern.

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Rechnen im Team: “Gemeinsam Mathelernen muss stärker betont werden.“

Christoph Selter (Quamath)

In *QuaMath* möchten wir deutlich machen, dass viele mathematische Aufgaben das Potenzial haben, auf unterschiedlichen Niveaus bearbeitet zu werden, während sie gleichzeitig einen gemeinsamen Kern aufweisen. Eine Aufgabe kann etwa so gestaltet sein, dass manche Kinder sie mit Material bearbeiten, andere im kleineren Zahlenraum bis 20 oder im größeren Zahlenraum bis 100. Unsere Grundprinzipien – insbesondere Lernenden-Orientierung und Adaptivität – unterstützen die Lehrkräfte dabei, solche Konzepte umzusetzen. Das Ziel ist, den Unterricht fachlich zu rahmen und einen gemeinsamen Kern herauszustellen, statt jedes Kind isoliert an individuellen Lernpaketen arbeiten zu lassen.

Zusammenfassung: Gemeinsames Lernen im Mathematikunterricht

- Reichhaltige Lernumgebung
- Differenzierung
- Kooperationsformen
- Kommunikation (Operatoren)
- Verstehensorientierung
- Matrix des gemeinsamen Lernens
- Offene Lernaufgaben (ergiebige Aufgaben)
- Arbeitsmittel als Lernmittel

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Daten und Zufall – eine reichhaltige Lernumgebung

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Themen für die Leitidee Daten und Zufall

Auszug aus den Fachanforderungen:

- Strichlisten, absolute Häufigkeit, Tabelle, Säulendiagramme
- Baumdiagramme
- Zufallsexperimente, Ergebnis
- Median, arithmetischer Mittelwert
- Relative Häufigkeit
- Wahrscheinlichkeit, Empirisches Gesetz der großen Zahl, Ereignis, Gegenereignis
- Laplace-Experimente
- Zwei- bzw. mehrstufige Zufallsexperimente

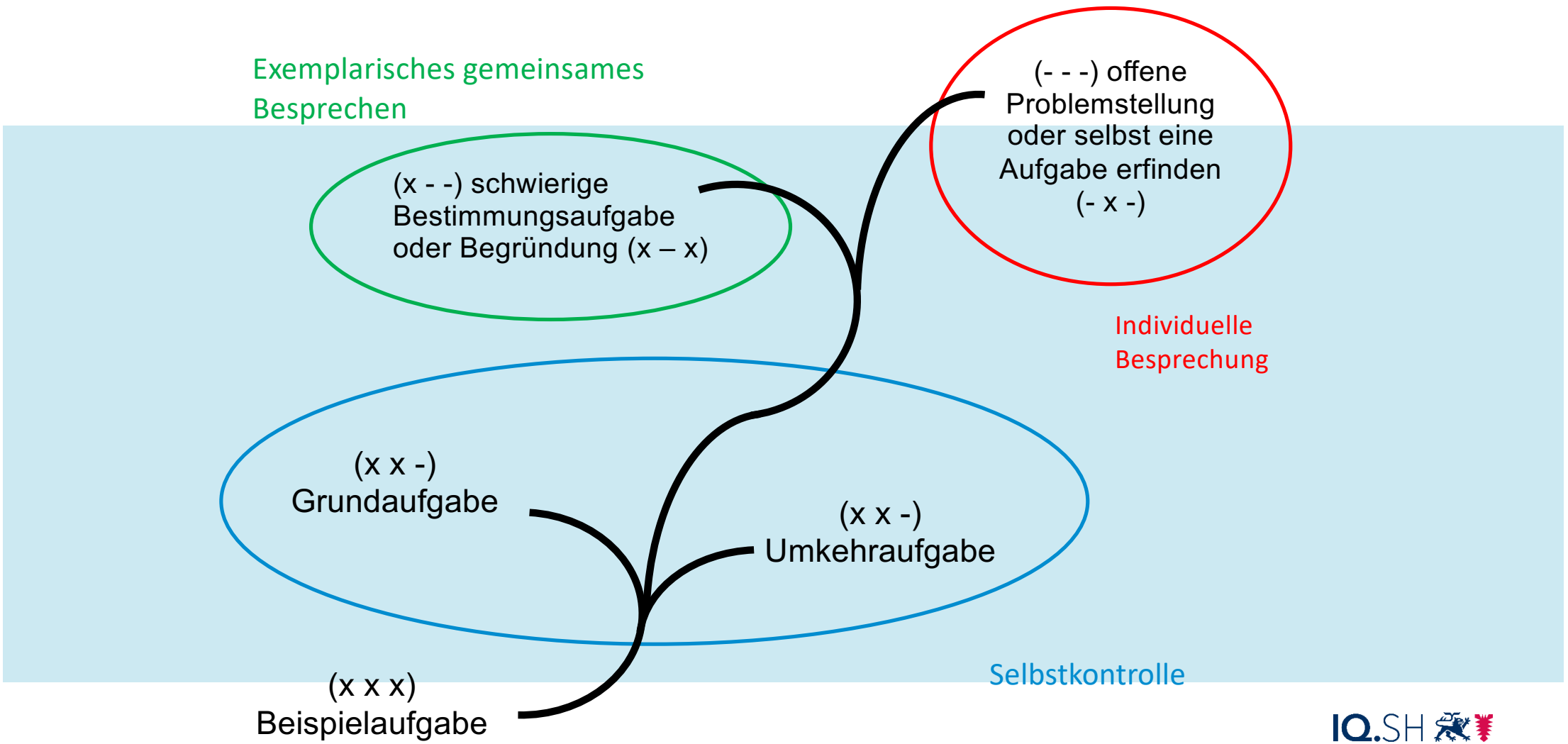
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Beispiele für die Öffnung von Aufgaben – Wiederholung aus der AV „Aufgabenkultur und Lernumgebung“

- Blütenaufgaben
- Produktives Üben
- Strategien nach Schupp
- Inner- und außermathematische Öffnung
- Intelligentes Üben (5)

Denkt an die verschiedenen Aufgabentypen

Umgang mit Blütenaufgaben



IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Produktives Üben

Beispielaufgabe (x x x)

Iterieren	(x x -)
Umkehren	(- x x) oder (- - x)
Analogisieren	(x x -)
Präzisieren	(x x -) oder (x - -)
Kombinieren	(x - -)
Verallgemeinern	(x - -) oder (- x -)
Kontext ändern	(- x -) oder (- - -)

Auch als Methoden bzw. Werkzeug für die Lernenden!

Der Durchmesser eines Baumes nimmt durchschnittlich um 8 mm/Jahr zu. Welchen Durchmesser hat der Baum nach
a) 5 Jahren b) 10 Jahren

c) … nach 15 Jahren.

Wie alt ist ein Baum, der einen Durchmesser von 3 m hat.?

Der Durchmesser eines Luftballon nimmt durchschnittlich um 1 cm/s zu. Welchen Durchmesser hat der Ballon nach einer halben Minute?

Ein Baum hatte nach 5 Jahren einen Durchmesser von 4,5 cm und nach 20 Jahren von 15 cm. Vergleiche mit dem durchschnittl. Wachstum von 8 mm/Jahr.

Mit 5 Jahren pflanzt Eike einen Baum, der durchschnittl. um 8 mm/Jahr wächst. Wie alt ist Eike, wenn der Baum einen Durchmesser von 30 cm hat?

Ein Baum wächst im Schnitt um x mm/Jahr. Welchen Umfang hat der Baum nach 5 Jahren.

Eine sogenannte Stundenkerze kann als Stoppuhr genutzt werden. Beschreibe wie dies erreicht werden kann.

Nach Abshagen, M. (2000): Praxishandbuch Sprachbildung Mathematik. Sprachsensibel unterrichten - Sprache fördern. Stuttgart: Klett.

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Strategien (nach Schupp)

Bei der Aufgabenvariation wird eine Ausgangsaufgabe mehrfach verändert, sodass neue Aufgaben entstehen.

- Ersetzen der Zielvorgabe durch eine **Frage**
  Bsp.: statt „Zeige, dass stets… ist“ die Frage „Ist…?“
- **Abschwächung**
  Bsp.: statt „Ist $x^2 +1 > 0$?“ die Frage „Kann $x^2 +1$ auch 0 sein?“
- **Unterbestimmung**
  Bsp.: Konstruiere zwei Kreise mit einer gemeinsamen Sehne so, dass diese Sehne genauso lang ist wie der Radius des einen Kreises.
- **Invertierung**
  Bsp.: Gib eine Gleichung an, die genau die Lösungen 1 und 2 besitzt.
- **Generalisierung**
  Bsp.: Ersetzten einer Konstanten durch einen variablen Parameter oder die Frage „Ist das immer so?“
- **Reduktion von Informationen**
  Bsp.: Hierbei entstehen sog. optionale Aufgaben, d.h. solche, die die Lernenden nach eigenem Geschmack durch Hinzufügen geeigneter Informationen festlegen können.

Strategien (nach Schupp)

- **Überladung**
  Es werden überflüssige Informationen hinzugefügt, die die Lernenden als solche identifizieren müssen.
- **Umwandlung in Textaufgaben**
  Bsp.: statt „28 – 3 = ?“ die Frage „Welche Zahl ist um 3 kleiner als 28?“
  Dieses sehr einfache Beispiel zeigt, dass Textaufgaben rein innermathematisch sein können und dass sie immer etwas mehr von den Lernenden abfordern als die äquivalente symbolische Variante.
- **Aufgaben-Addition**
  Verschiedene geschlossene Aufgaben, die im Prinzip zur selben Situation gehören, werden zu einer komplexen Fragestellung zusammengefügt.
- **Aufgabenvariation durch die Lernenden selber**
  Hierbei variieren die Lernenden bestimmte Parameter der Initialaufgabe (Startaufgabe) selber und öffnen damit die Aufgabe selber. Dies kann z.B. genutzt werden um an verschiedenen Beispielen Entdeckungen zu ermöglichen.

Aufgaben öffnen - innermathematisch

Zeichne zwei Dreiecke, die sich in genau zwei Punkten schneiden.

Variationen:

- Kann man zwei Dreiecke zeichnen, die sich in genau zwei Punkten schneiden?
- Zwei Dreiecke schneiden sich in genau drei Punkten. Zeichne möglichst unterschiedliche Beispiele.
- Kann man zwei Dreiecke so zeichnen, dass sie genau
  - einen gemeinsamen Punkt besitzen?
  - zwei gemeinsame Punkte besitzen?
  - …
  - sieben gemeinsame Punkte besitzen?
- Wie viele Schnittpunkte können zwei Kreise und zwei Geraden höchstens besitzen?

Mathematisch Argumentieren

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Aufgaben öffnen - außermathematisch

Es wird ein Basketball-Turnier mit 16 Mannschaften nach dem KO-System gespielt.

Enge Fragestellung:

- Wie viele Spielpaarungen gibt es in der ersten Runde?
  - Wie viele Gewinner gibt es?
  - Wie viele Verlierer gibt es?
- Wie viele Spielpaarungen gibt es in der zweiten Runde?
  - Wie viele Gewinner gibt es?
  - Wie viele Verlierer gibt es?
- …
- Wie viele Spiele sind notwendig, um den Sieger zu ermitteln?

Offene Fragestellung:

- Wie viel Zeit musst du für das Turnier einplanen?

Die Schüler*innen stellen sich jetzt vielleicht folgende Fragen:

- Wie viele Spielfelder habe ich zur Verfügung?
- Wie lange dauert ein Spiel?
- Wie lange sollen die Pausen sein?

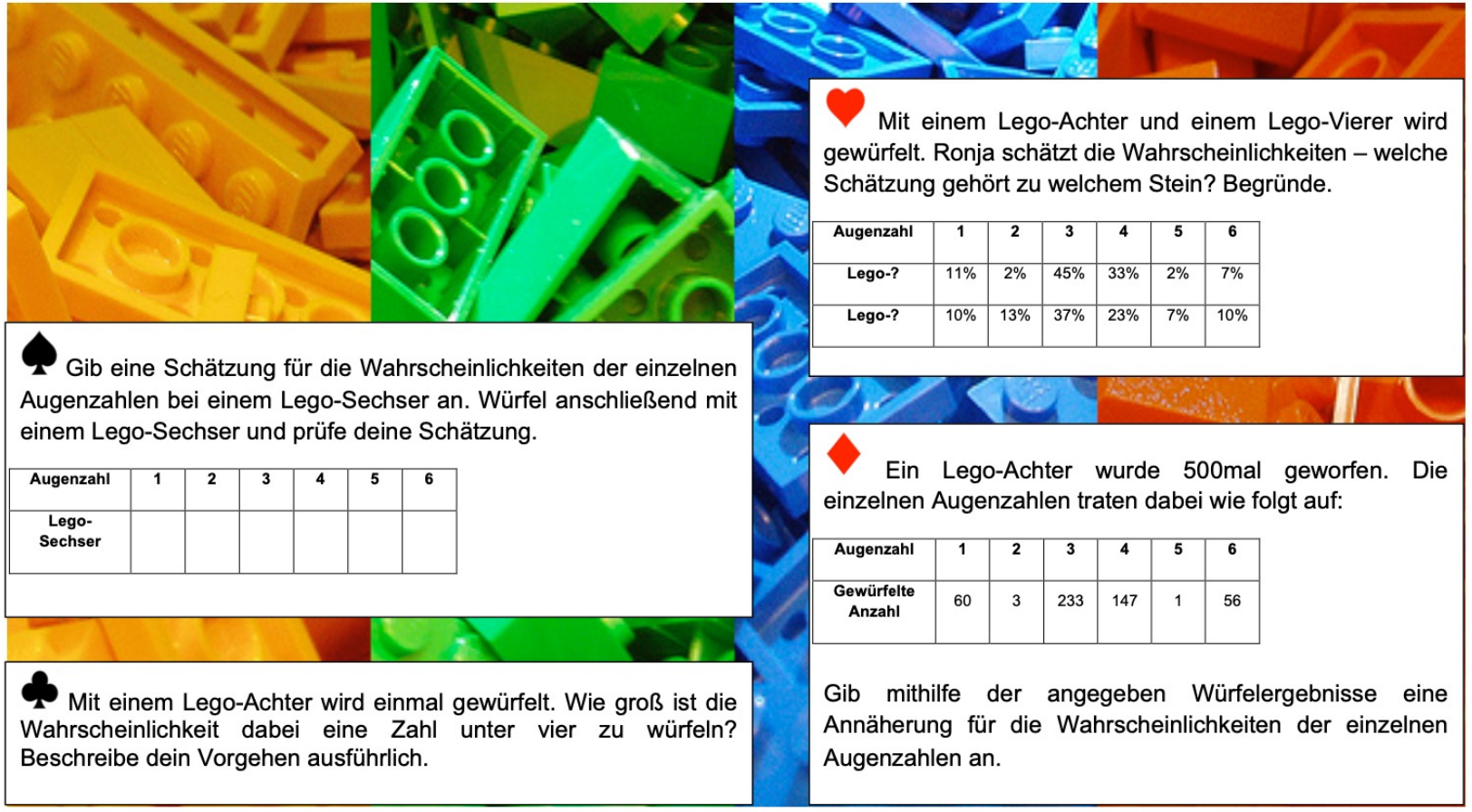
Formen des intelligenten Übens

Fünf Formen des intelligenten Übens (nach Leuders)

1. Reflektierendes Üben
2. Strukturierte Aufgaben
3. Entdeckendes Üben
4. Produktives Spielen
5. Fermiaufgaben

Ministerium für Schule und Berufsbildung des Landes Schleswig – Holstein (2015): Leitfaden zu den Fachanforderungen - Allgemein bildende Schulen Sekundarstufe I, 1. Auflage, Kiel, S.36ff

Beispiel: Blütenaufgabe



♠ Gib eine Schätzung für die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Augenzahlen bei einem Lego-Sechser an. Würfel anschließend mit einem Lego-Sechser und prüfe deine Schätzung.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Lego-Sechser						

♥ Mit einem Lego-Achter und einem Lego-Vierer wird gewürfelt. Ronja schätzt die Wahrscheinlichkeiten – welche Schätzung gehört zu welchem Stein? Begründe.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Lego-?	11%	2%	45%	33%	2%	7%
Lego-?	10%	13%	37%	23%	7%	10%

♣ Mit einem Lego-Achter wird einmal gewürfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dabei eine Zahl unter vier zu würfeln? Beschreibe dein Vorgehen ausführlich.

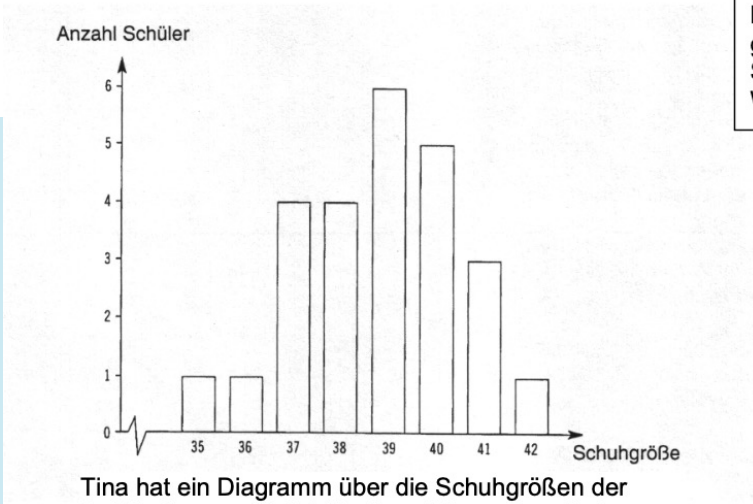
♦ Ein Lego-Achter wurde 500mal geworfen. Die einzelnen Augenzahlen traten dabei wie folgt auf:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Gewürfelte Anzahl	60	3	233	147	1	56

Gib mithilfe der angegeben Würfelergebnisse eine Annäherung für die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Augenzahlen an.

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Beispiel: Blütenaufgabe



Tina hat ein Diagramm über die Schuhgrößen der Schülerinnen und Schüler ihrer Klasse angefertigt.

♣ Wie viele Kinder haben die Schuhgröße 41?

♠ Formuliere selbst eine Aufgabe zu diesem Diagramm, die deine Mitschüler und Mitschülerinnen lösen sollen.

♥ Jeweils vier Kinder haben die gleiche Schuhgröße. Welche ist das?

♦ Wie viele Schüler gehen in Tinas Klasse?
Erkläre, wie Du das berechnet hast.

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Aktivität 5:
Daten und Zufall unter dem Aspekt des gemeinsamen Lernens

Erstellen Sie eine „reichhaltige Lernumgebung“ zur Leitidee Daten und Zufall unter dem Aspekt des gemeinsamen Lernens.

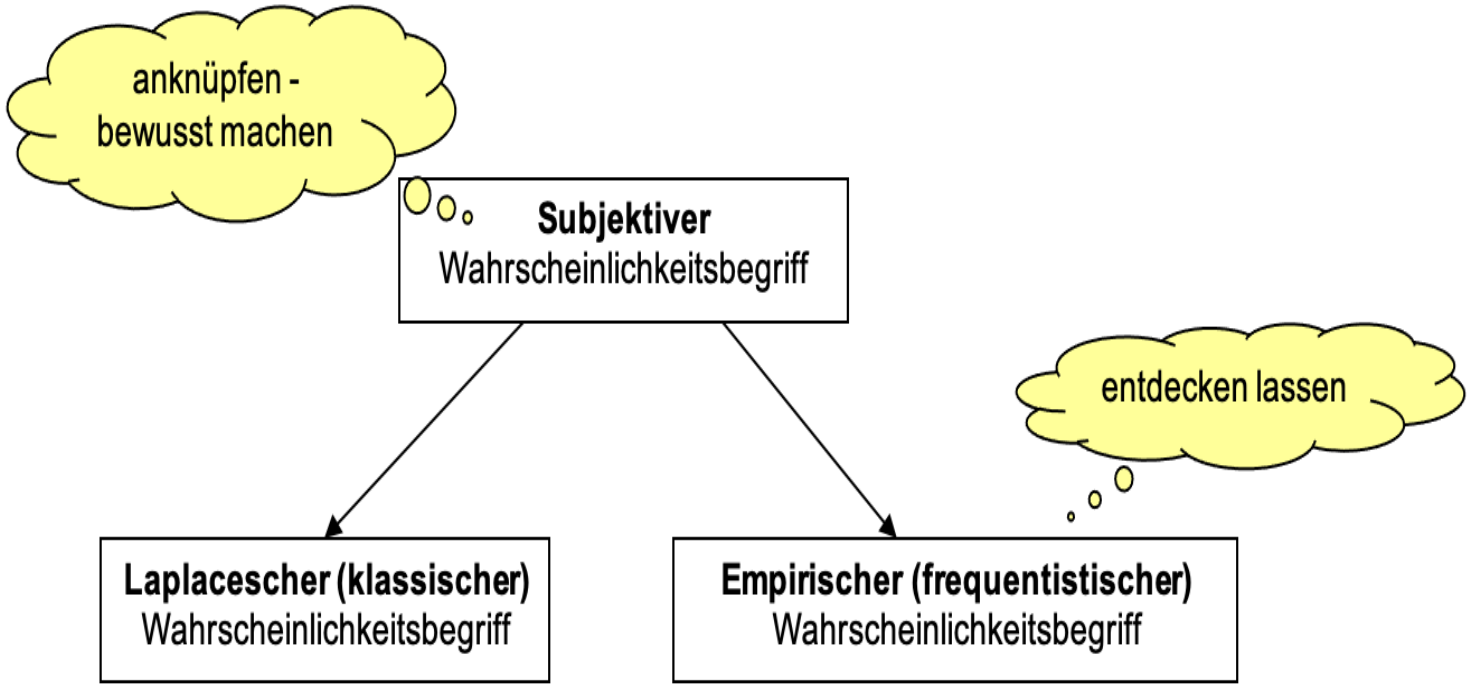
- Nutzen Sie gerne mitgebrachte Schulbücher bzw. Arbeitshefte.
- Wählen Sie ein Thema und die Klassenstufe nach Belieben aus.
- Beschreiben Sie anhand Ihres Beispiels die Berücksichtigung des gemeinsamen Lernens.

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Stochastische Vorstellungen entwickeln

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Didaktisches Vorgehen



Schwerpunkte des Bereichs Wahrscheinlichkeiten

- Kinder (müssen) lernen, „ihr subjektives Empfinden […] zunehmend in den Hintergrund“ zu stellen (Hasemann & Mirwald 2008, S. 141)

- Schülerinnen und Schüler kommen zu der Einsicht, „dass der Zufall kalkulierbar ist und dass zufällige Ereignisse mit mathematischen Mitteln modelliert werden können“ (Hasemann & Mirwald 2008, S. 141)

- Reflektierter Umgang mit Wahrscheinlichkeiten im Schulkontext und auch im Alltag

Differenz trifft…

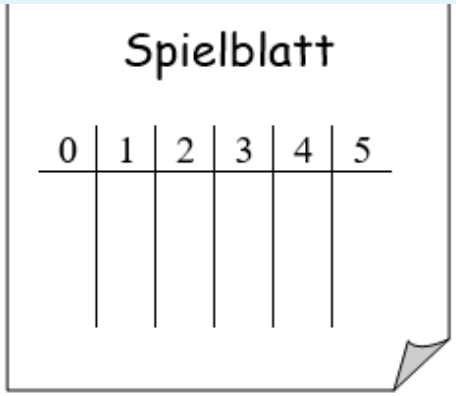
Stochastische Modelle entwickeln

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Spieler: 2 bis 4

Alter: ab Klasse 7

Benötigt werden: 2 Würfel,
ein Spielblatt für jeden Spieler,
18 Chips pro Spieler



9

Spielanleitung:

Jeder Spieler verteilt seine 18 Chips auf die Spalten nach seiner Wahl. Es wird reihum jeweils mit 2 Würfeln gewürfelt. Der jüngste Spieler beginnt.

Das Ergebnis eines Wurfes ist die Differenz der Augenzahlen. Wenn die Differenz z.B. 3 beträgt, so wird ein Chip aus der Spalte „3“ entfernt. Befindet sich dort kein Chip, dann hat man Pech.

Gewonnen hat, wer zuerst alle Chips abgeräumt hat.

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

(Fehl-) Vorstellungen „Differenz trifft“
Wie (re-)agierst du?

Anna: *„Ich lege alle Chips per Zufall. Beim Würfeln entscheidet es ja auch der Zufall.“*

Max: *„Einen Pasch zu würfeln, ist am schwersten. Deshalb lege ich keinen Chip auf die 0.“*

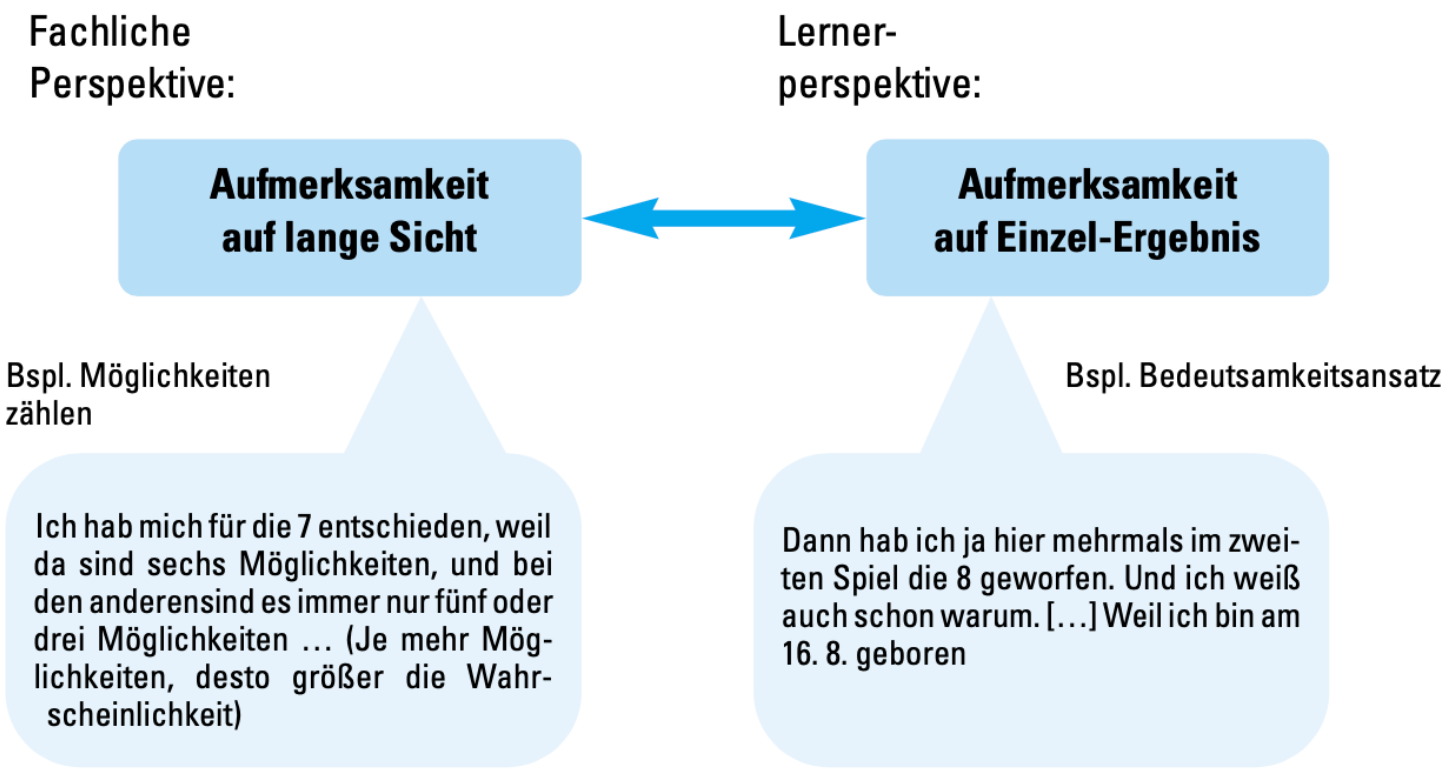
Afra: *„Alle Differenzen kommen gleich oft vor. Man könnte auch mit einem Würfel spielen.“*

Bennet: *„Die Wahrscheinlichkeiten helfen mir bei der Verteilung der Chips gar nicht! Der Zufall entscheidet es immer anders.“*

Büchter, A., Hußmann, S., Leuders, T., Prediger, S.: Den Zufall im Griff – Stochastische Vorstellungen fördern, Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 4, 2005.

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Fehlvorstellung oder berechtigte Perspektiven? Wie fachliche Sicht und Lernersicht auseinandergehen können



Vorstellungen gegenüberstellen

Einige Vorstellungen, die Lernende mitbringen

- Zufällige Ereignisse sind selten oder außergewöhnlich.
- Zufällige Situationen und Konstellationen sind unstrukturiert.
- Zufällige Ereignisse müssen gleichmäßig verteilt sein.
- Zufällige Ereignisse treten unerwartet auf, sind unvorhersehbar.
- Für zufällige Ereignisse gibt es keine Ursache.
- Der Zufall lässt sich nicht beeinflussen, nicht verhindern, aber auch nicht erzwingen.

Beziehen Sie zu den Erklärungsansätze für Setzentscheidungen Stellung.

Möglichkeiten zählen: „Ich hab mich für die 7 entschieden, weil da sind sechs Möglichkeiten, und bei den anderen sind es immer nur fünf oder drei Möglichkeiten. Und die 7, die kann man gut würfeln."

Individuelle Bedeutsamkeit anführen: „Dann hab ich ja hier mehrmals im zweiten Spiel die 8 geworfen. Und ich weiß auch schon warum. […] Weil ich bin am 16. 8. geboren."

Auf „Erfahrungen" berufen: „Wenn wir ein Spiel oder so was spielen, hab ich mit der 5 immer schon sehr viel Glück gehabt."

Mit Erreichbarkeit begründen: „Für 6 kann man ne Fünf und ne Eins kriegen'. Und ne Eins ist schwerer […], wenn man Schwein gehabt hat, dann kann man zwei Dreien kriegen."

Beeinflussen: „Manchmal, hab ich ganz doll gedacht, oh man, jetzt brauch ich unbedingt ne 6, und es war ne 6."

Perspektivwechsel im Lernprozess

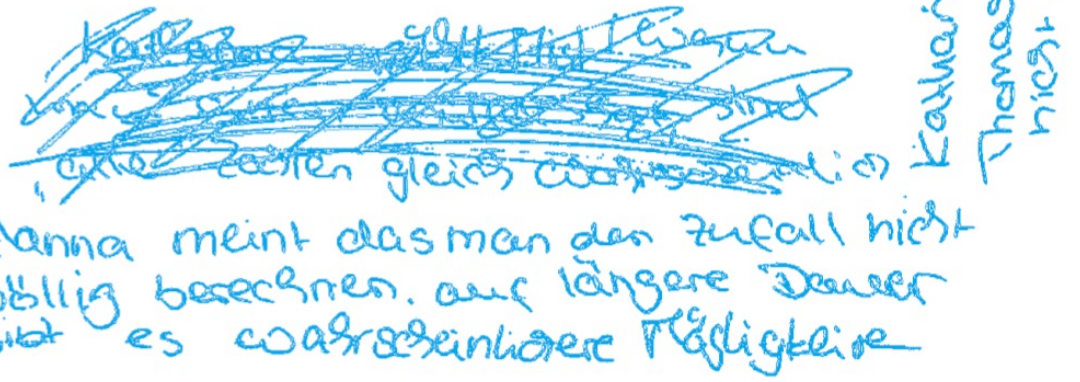
4) Wieso machen Überlegungen zur Wahrscheinlichkeit überhaupt Sinn?

Katharina: „Jetzt habe ich das ganze Spiel auf die wahrscheinlichste Zahl gesetzt, und habe doch verloren! Irgendwas muss ich falsch gemacht haben."

Thomas: „Was nutzt mir die ganze Rechnerei mit der Wahrscheinlichkeit. Davon kann ich auch nicht sagen, auf was ich in der nächsten Runde setzen soll, denn dann entscheidet ja doch der Zufall."

Hanna: „Aber langfristig hilft das ja schon, wenn man sich mit Wahrscheinlichkeiten auskennt, denn auf lange Sicht hat der Zufall eben doch Methode.

Was meinst Du zu dem, was Katharina und Thomas sagen? Was meint wohl Hanna mit ihrem Satz? Nimm Stellung!



IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Didaktische Leitideen für einen vorstellungsorientierten Stochastikunterricht

- Alltagsvorstellungen ernst nehmen und zum Ausgangspunkt des Lernens machen (erfordert Situationen, die diese Anknüpfung ermöglichen),
- breite Erfahrungsmöglichkeiten durch Experimente schaffen,
- Erlebnisse durch Experimente systematisch reflektieren, um mitgebrachte Vorstellungen zu überdenken,
- individuelle und fachliche Vorstellungen gezielt gegenüberstellen und Ursachen für Diskrepanzen finden und
- notwendige Perspektivwechsel explizit machen.

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Durchführung von Zufallsexperimenten

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Aktivität 6:
Verschiedene Zufallsexperimente

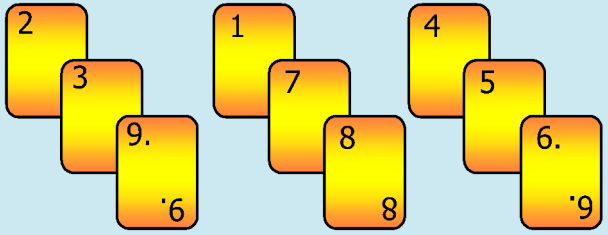
Black socks
Schweinchen würfeln
Riemer-Quader
Würfel
Glücksrad
Wettkönig
Finde deinen Weg
Drei Haufen Spiel

Jetzt geht’s los!!!

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Zweistufige Spiele

Gibt es eine sichere Wette?

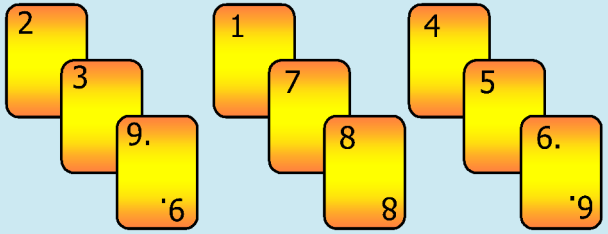


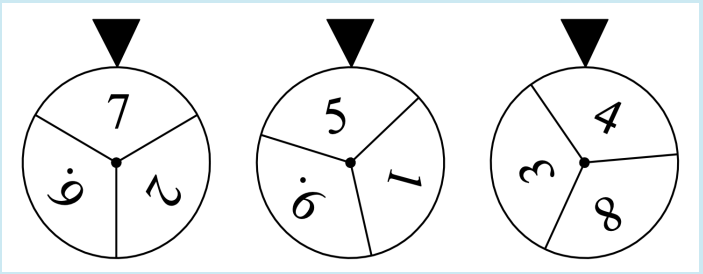
Neun Karten werden so ausgelegt wie in der Abbildung. Zwei Spieler wählen nacheinander einen Kartenstapel. Jeder Spieler mischt seinen Kartenstapel verdeckt und zieht daraus eine Karte. Gewonnen hat derjenige, dessen Karte eine höhere Zahl zeigt. Für ein neues Spiel wird die Karte in den jeweiligen Stapel zurückgelegt. Die Spieler wählen nacheinander einen Kartenstapel. Es wird erneut gemischt und eine Karte aus dem Stapel gezogen.

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Zweistufige Spiele

Gibt es eine sichere Wette?



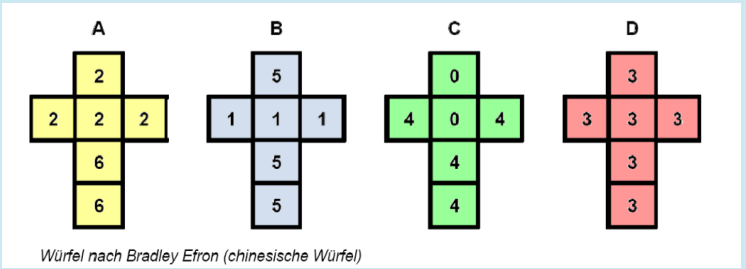


- **Bestimme die Gewinnchancen für Spieler 1 und Spieler 2.**

Nutzen du Tabellen als heuristisches Hilfsmittel.

Reflexion:
Variieren du die Aufgabenstellung.

Präsentieren du Ihre Ergebnisse.



Würfel nach Bradley Efron (chinesische Würfel)

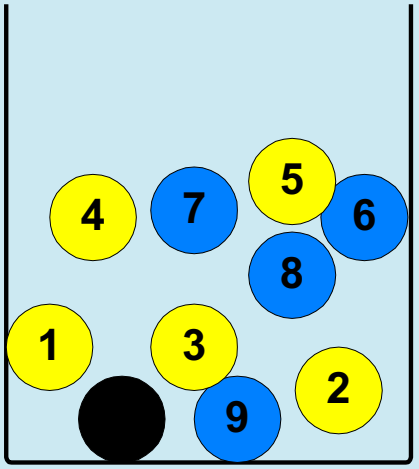
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Zweistufige Zufallsexperimente

Begründung der Pfadregel

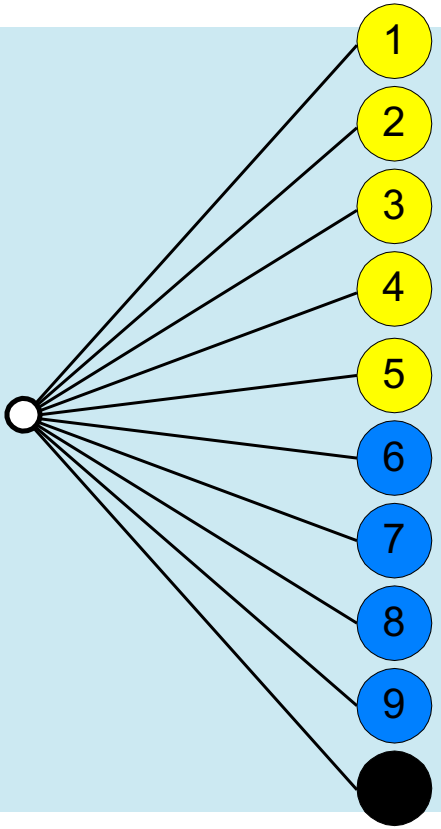
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Experiment: Begründung der Pfadregel



Naheliegend ist die Darstellung in einem Laplace-Baum (Abzähl-Baum).

Nur bei großen Anzahlen wird das etwas mühsam ...

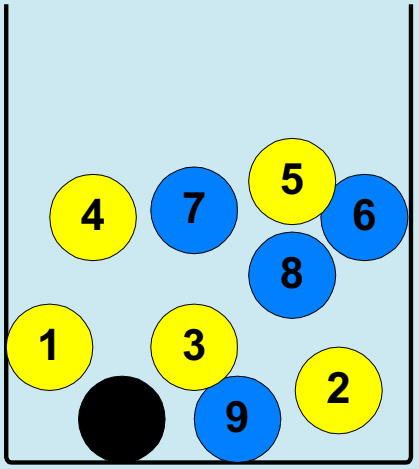


In einem Behälter befinden sich 5 gelbe Kugeln, 4 blaue und eine schwarze.

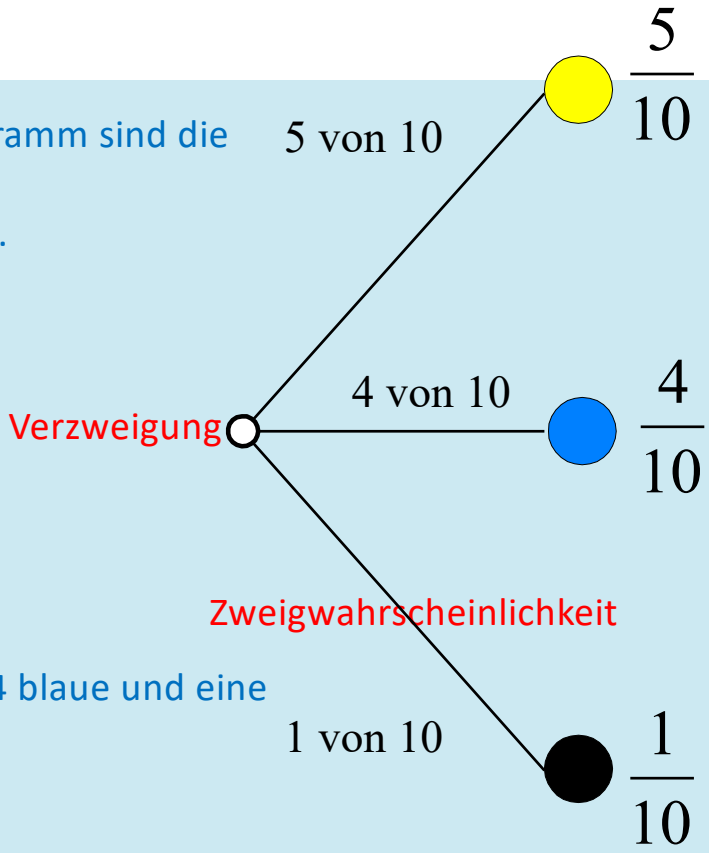
Ohne hinzusehen wird eine Kugel gezogen.

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Experiment: Begründung der Pfadregel



In diesem Baumdiagramm sind die Zweige nicht mehr gleichwahrscheinlich.

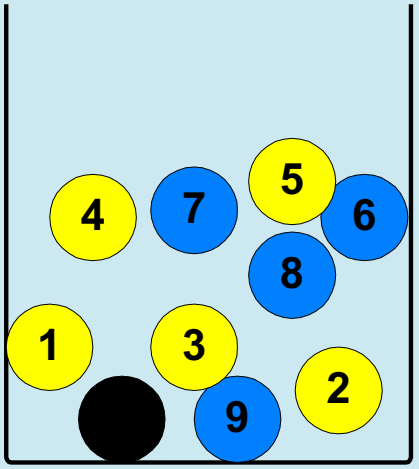


In einem Behälter befinden sich 5 gelbe Kugeln, 4 blaue und eine schwarze.

Ohne hinzusehen wird eine Kugel gezogen.

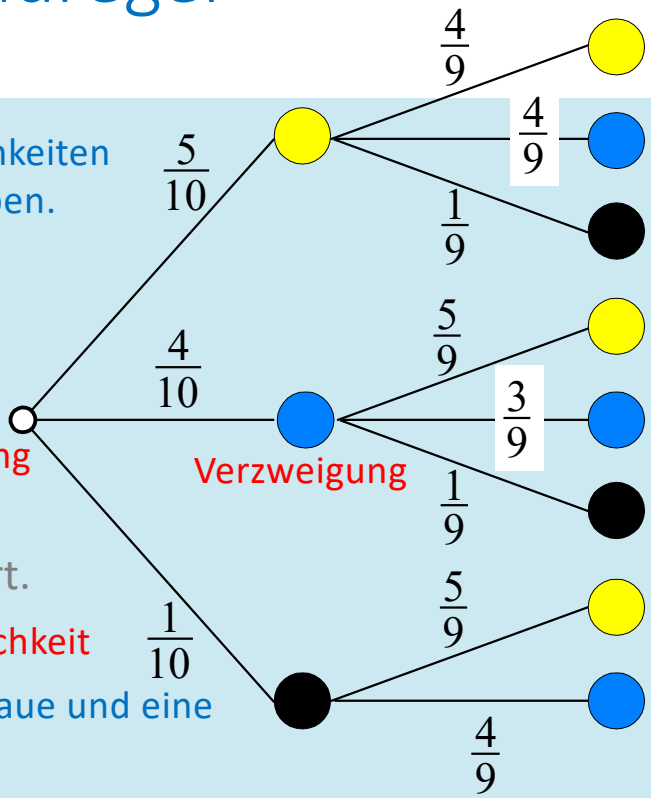
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Experiment: Begründung der Pfadregel



Die Zweigwahrscheinlichkeiten werden intuitiv angegeben.

Der Aspekt der bedingten Wahrscheinlichkeit wird nicht thematisiert.



Ver-zweigung

Verzweigung

Zweigwahrscheinlichkeit

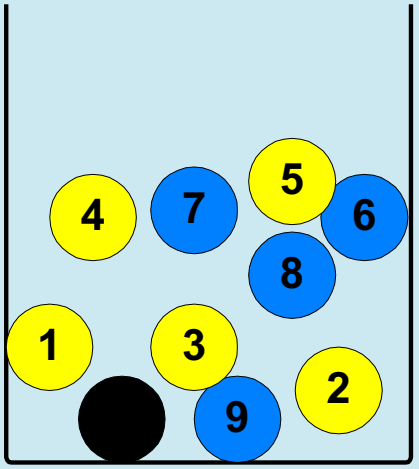
Zweigwahr-scheinlichkeit

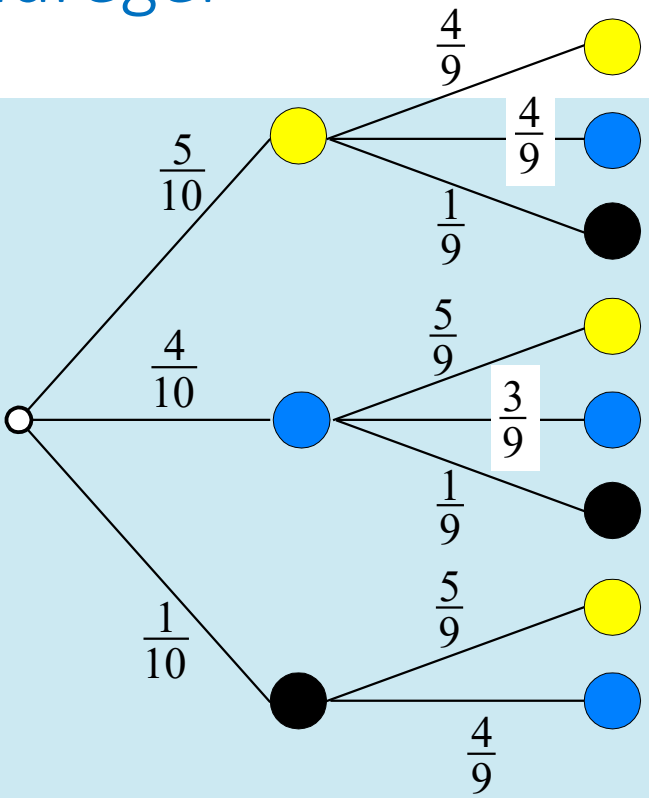
In einem Behälter befinden sich 5 gelbe Kugeln, 4 blaue und eine schwarze.

Nacheinander werden ohne hinzusehen und ohne Zurücklegen zwei Kugeln gezogen.

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

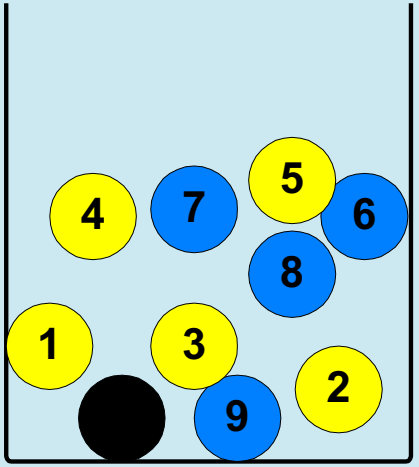
Experiment: Begründung der Pfadregel



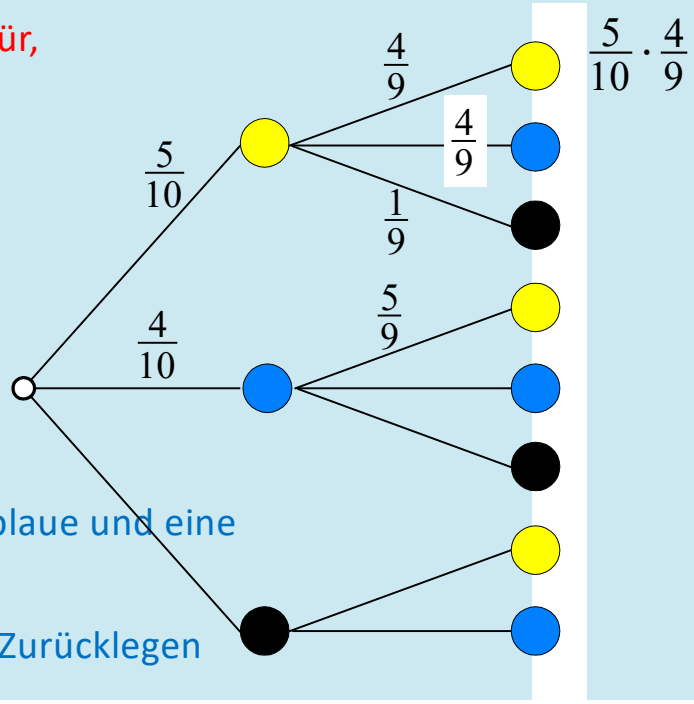


Wie entwickelt oder begründet man hieraus die Pfadregel?

Experiment: Begründung der Pfadregel



Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei gelbe Kugeln gezogen werden.



Warum

rechnet man $\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$

In einem Behälter befinden sich 5 gelbe Kugeln, 4 blaue und eine schwarze.

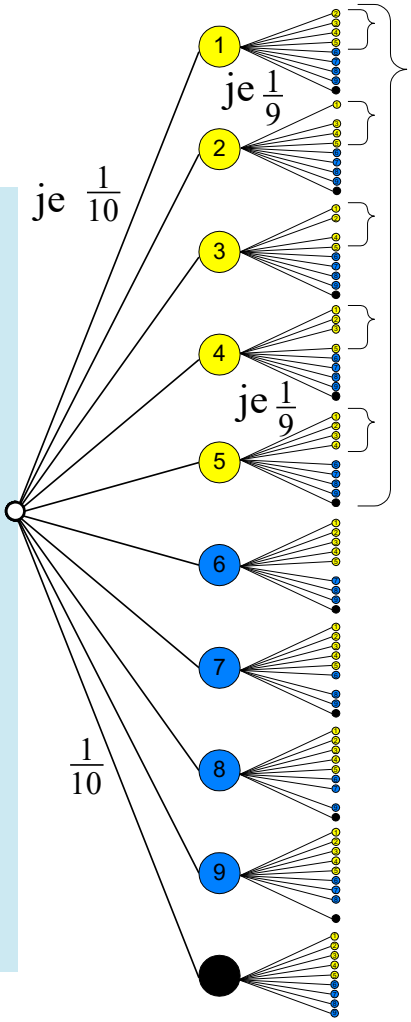
Nacheinander werden ohne hinzusehen und ohne Zurücklegen zwei Kugeln gezogen.

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Warum

rechnet man $\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$

In diesem Baumdiagramm sind alle Pfade gleich wahrscheinlich.



Nach der ersten Verzweigung beträgt der Anteil der Zweige, die zu einer gelben Kugel führen, $\frac{5}{10}$.

Nach der zweiten Verzweigung beträgt der Anteil der Zweige, die zu einer gelben Kugel führen, jeweils $\frac{4}{9}$.

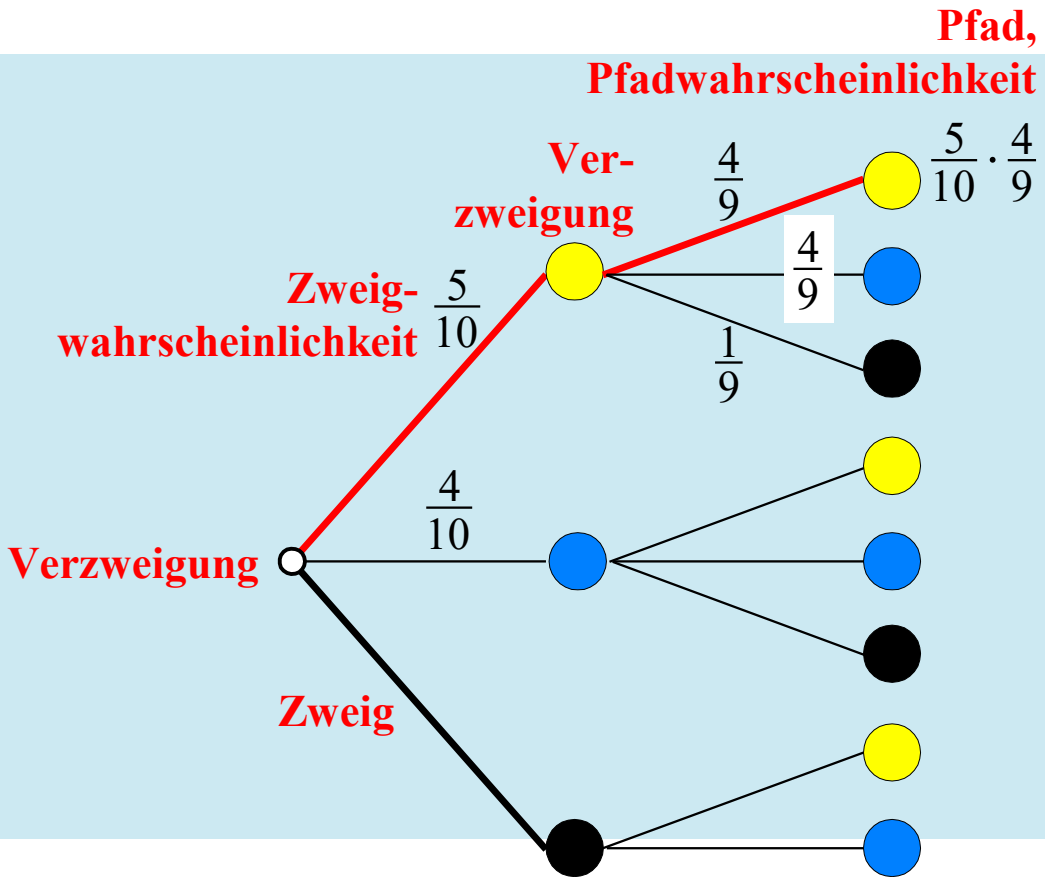
$\frac{4}{9}$ von $\frac{5}{10}$

wird übersetzt als

$\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{10}$ oder $\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$.

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Bezeichnungen in Baumdiagrammen



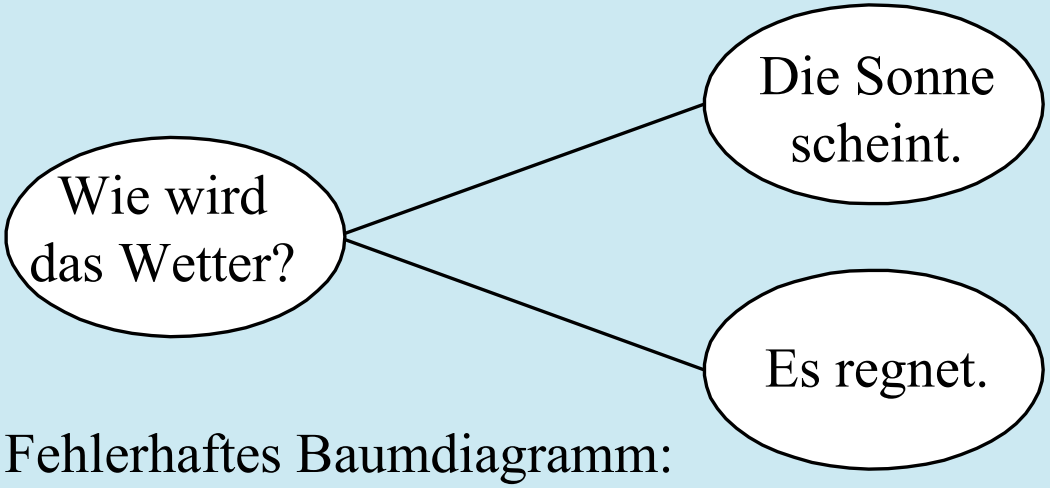
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Pfadregel

- Jeder Pfad im Baumdiagramm entspricht einem Ereignis.
- Multiplikationssatz (Pfadregel)
  Die Pfadwahrscheinlichkeit ist das Produkt der Zweigwahrscheinlichkeiten aller Zweige des Pfades.
- Additionssatz für unvereinbare Ereignisse
  Wenn ein Ereignis durch mehrere Pfade beschrieben wird, ist dessen Wahrscheinlichkeit die Summe der Pfadwahrscheinlichkeiten.
  (In einem korrekt erstellten Baumdiagramm beschreiben alle Pfade stets unvereinbare Ereignisse.)

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

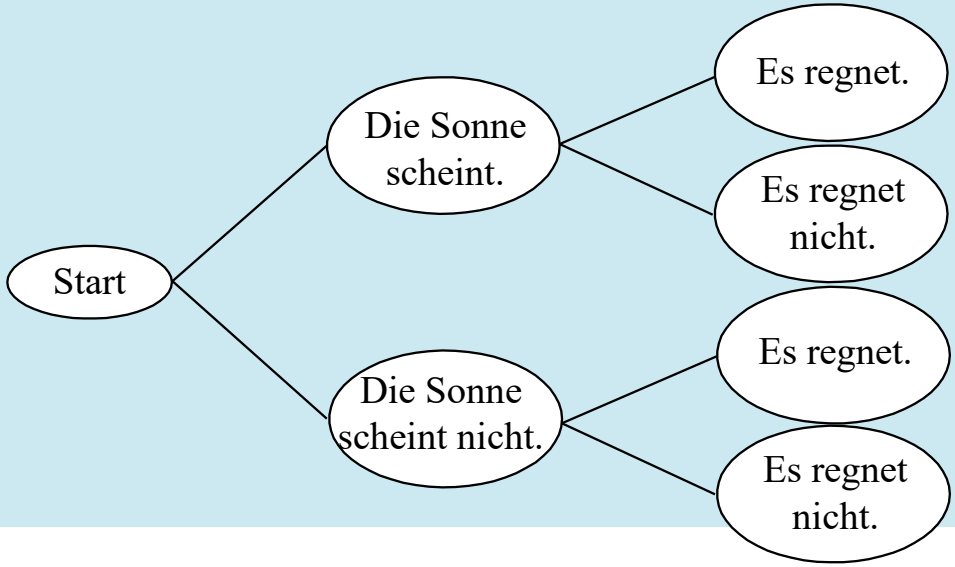
Regeln für Baumdiagramme



Fehlerhaftes Baumdiagramm:
Die beiden Ereignisse schließen sich nicht aus.

Regeln für Baumdiagramme

1. An einer Verzweigung müssen die Ereignisse sich ausschließen (unvereinbare Ereignisse).
2. An jeder Verzweigung muss die Summe aller Zweigwahrscheinlichkeiten 1 betragen.



IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Zufallsversuche in Baumdiagrammen dokumentieren

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Was ist im Strumpf?

Baumdiagramme und Pfadregeln

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

In einem Strumpf befinden sich 10 Steine. Davon sind fünf gelb, vier blau, einer schwarz.
Aus dem Strumpf werden nacheinander zwei Steine ohne Zurücklegen gezogen.
Bestimmen du die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- nacheinander zwei Steine derselben Farbe gezogen werden.
- nacheinander zwei Steine unterschiedlicher Farbe gezogen werden.

***Stellen** Sie die in einem Baumdiagramm geltenden Regeln zusammen.*

***Begründen** Sie den Multiplikationssatz : „ Die Wahrscheinlichkeit für einen Pfad (von Anfang bis Ende) erhält man durch Multiplikation der Zweigwahrscheinlichkeiten.“*

***Präsentieren** Sie Ihre Vorgehensweise.*

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Was ist im Strumpf?

Baumdiagramme und Pfadregeln

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

1. *An einer Verzweigung schließen sich die Ereignisse aus.*
2. *An jeder Verzweigung beträgt die Summe der Zweigwahrscheinlichkeiten 1.*
3. *Multiplikationssatz: Die Wahrscheinlichkeit für einen Pfad (von Anfang bis Ende) erhält man durch Multiplikation der Zweigwahrscheinlichkeiten,*
4. *Additionssatz: Gehören zu einem Ereignis mehrere Pfade, so werden diese addiert.*

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

(Un-) Abhängigkeiten im Baumdiagramm

REGELWERK

Reflexion:

Später wird beim "Ziehen mit Zurücklegen" von (stochastisch) unabhängigen Ereignissen, beim "Ziehen ohne Zurücklegen" von abhängigen Ereignissen gesprochen.

Recherchiert und erläutert, wie diese Eigenschaft schon in der Sekundarstufe I am Baumdiagramm erfahren werden kann.

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Mehrstufige Zufallsversuche

Modellieren einer Realsituation

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

In jedem siebten Ei!?

Nimm im Folgenden an, dass die Behauptung „In jedem 7. Ei …“ stimmt.

1. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, mit der man bei einer Stichprobe von 39 Eiern mindestens eine Figur findet.
   Tipp: Berechne die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass beim Kauf von 1, 2, 3, … Eiern immer noch keine Figur zu finden ist (Gegenereignis).
2. Wie viele Überraschungseier musst du kaufen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% oder mehr mindestens eine Figur zu finden?

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

In jedem siebten Ei!?

- Bearbeitet die Aufgaben.
- Bestätigt die Ergebnisse anhand eines Funktionsgraphen (GeoGebra).

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Die Bank gewinnt immer!?

Welchen Gewinn erwartest du?

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Spielen du mit mir?

Wer hat auf lange Sicht die besseren Chancen?

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Dein Einsatz beträgt ein Euro. Du darfst dreimal hintereinander eine Münze werfen.

Fällt dreimal Zahl bekommst du von mir 2 Euro ausgezahlt.

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Spielen du mit mir?

Wer hat auf lange Sicht die besseren Chancen?

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Dein Einsatz beträgt ein Euro. Du darfst dreimal hintereinander eine Münze werfen.

Fällt dreimal Zahl bekommst du von mir 2 Euro ausgezahlt.

1. **Wie entwickeln sich die Chancen „auf lange Sicht“?**
2. **Wie viel Geld wird auf lange Sicht gewonnen bzw. verloren?**
3. **Bei welchem Einsatz/Gewinn wäre das Spiel fair?**

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Die Bank gewinnt immer…

Gewinn- und Verlustbilanzen

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

***Achtung**: Voraussagen mit dem Erwartungswert sind nur möglich, wenn das Spiel sehr häufig gespielt wird. Über den Gewinn oder den Verlust des nächsten Spiels kann damit keine Aussage gemacht werden.*

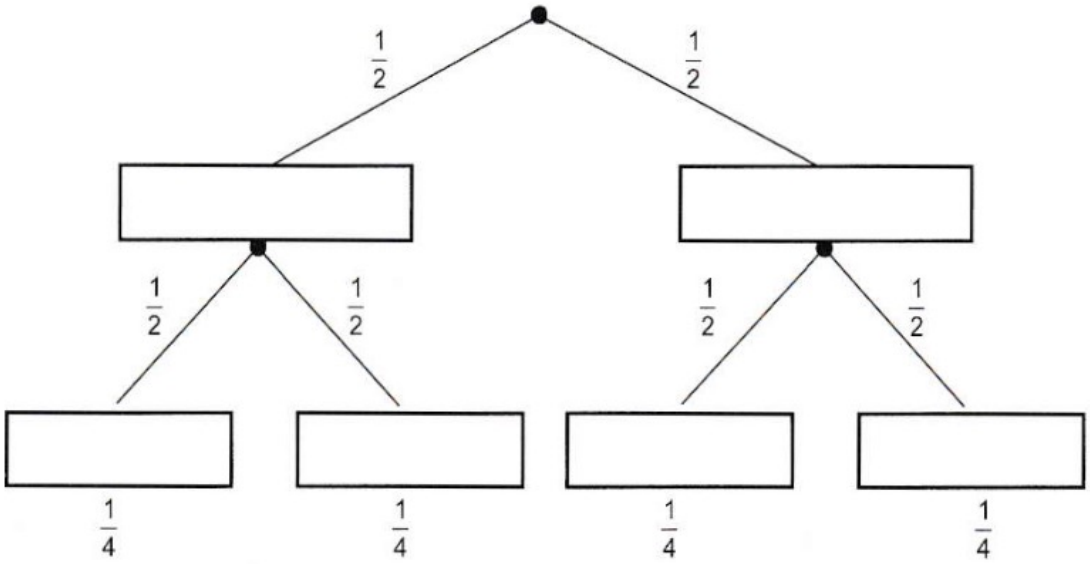
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Heute mal andersrum!

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Aktivität 7: Baumdiagramme interpretieren

Baumdiagramme interpretieren



Beispiele für (passende und unpassende) Sachsituationen als Interpretationsvorschläge (aus Arbeitsblatt 2) für das Baumdiagramm:

- Eine Münze wird zweimal geworfen.
- Nils wählt sein Outfit aus 3 Hosen und 3 T-Shirts.
- Ein Glücksrad mit 2 gleichen Feldern wird 3-mal gedreht.

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Tabellenkalkulationsprogramme

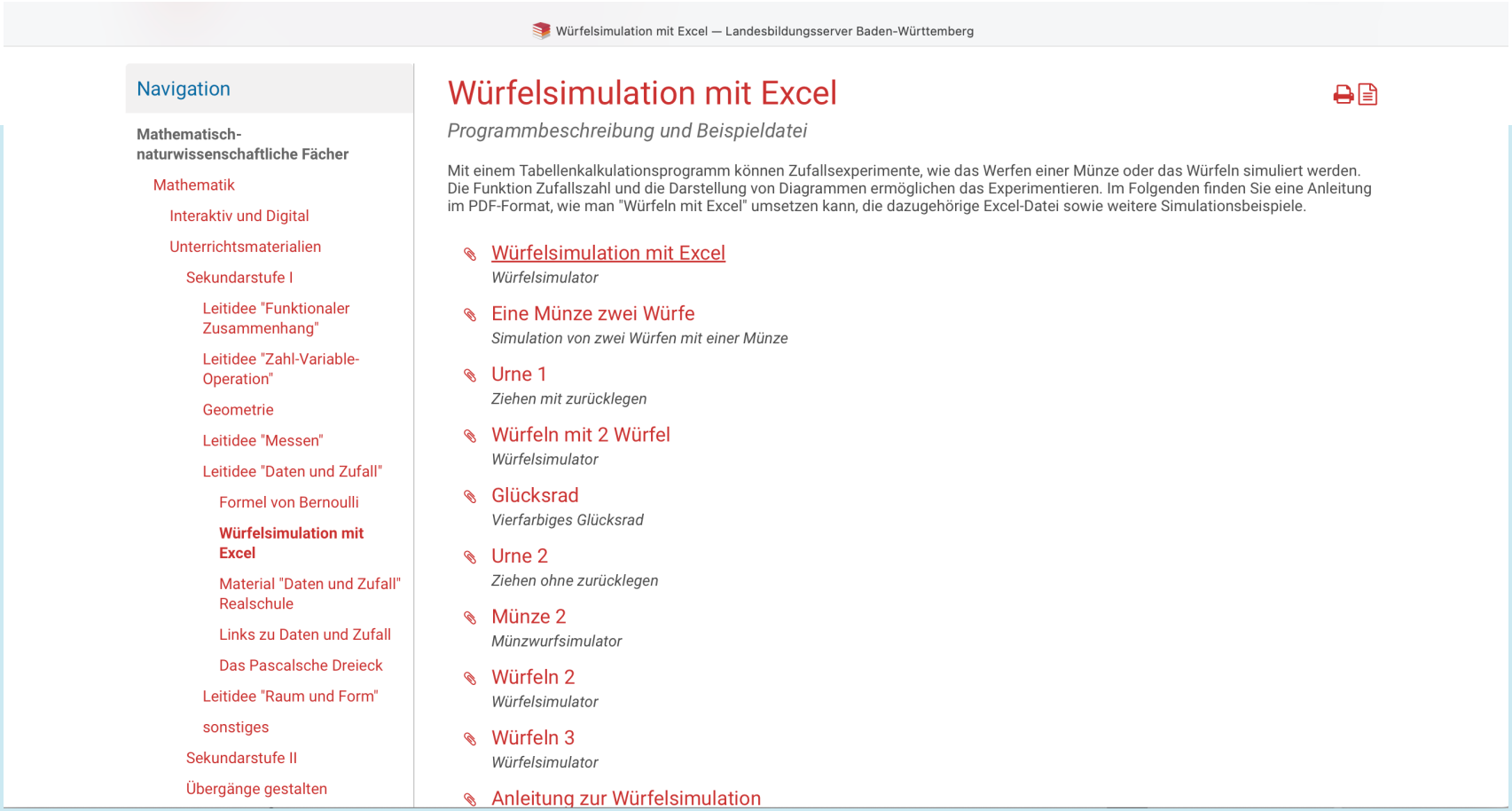
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Aktivität 8: Tabellenkalkulationsprogramme

Es gibt verschiedene Dateien, Beispiele, Erklärungen, … , die auf moodle in einem vorbereiteten Ordner bereit liegen.

Erkunden Sie das Material.

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein



https://www.schule-bw.de/faecher-und-schularten/mathematisch-naturwissenschaftliche-faecher/mathematik/unterrichtsmaterialien/sekundarstufe1/zufall/excelsimulation

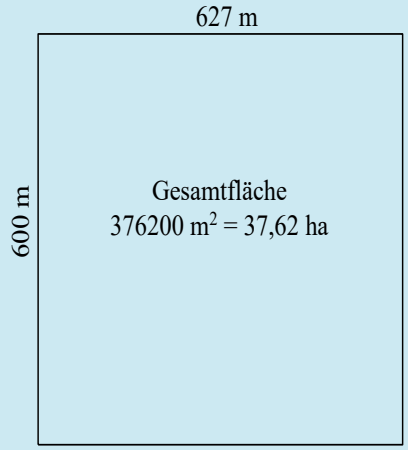
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Gerste und Roggen

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

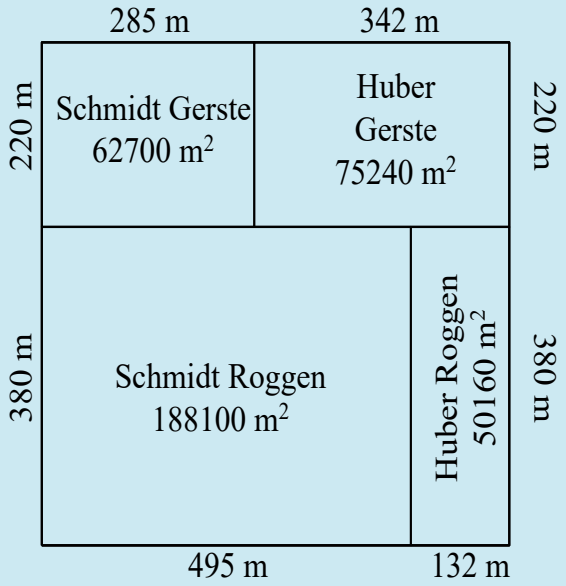
Schmidt und Huber, Gerste und Roggen

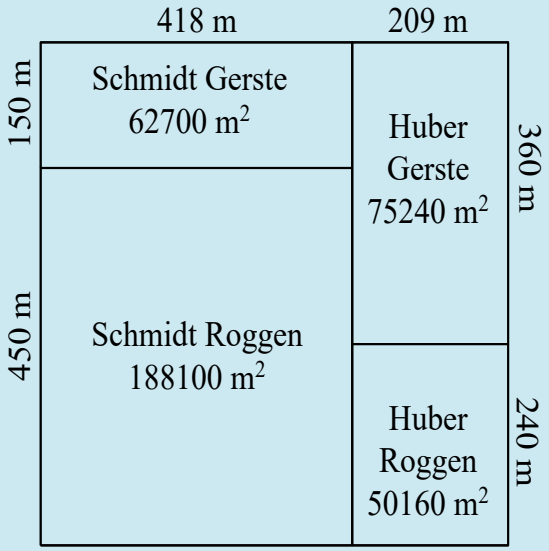
Ein landwirtschaftlich zum Getreideanbau (ausschließlich Roggen und Gerste) genutztes Gebiet wird zu einem Drittel von Bauer Huber bewirtschaftet, der auf drei Fünfteln seines Teils Gerste anbaut. Den Rest des Gebiets bewirtschaftet Bauer Schmidt, sein „Roggenanteil“ beträgt $\frac{3}{4}$.



- Welcher Anteil des zum Anbau von Gerste benutzten Gebietes wird von Bauer Huber bewirtschaftet?

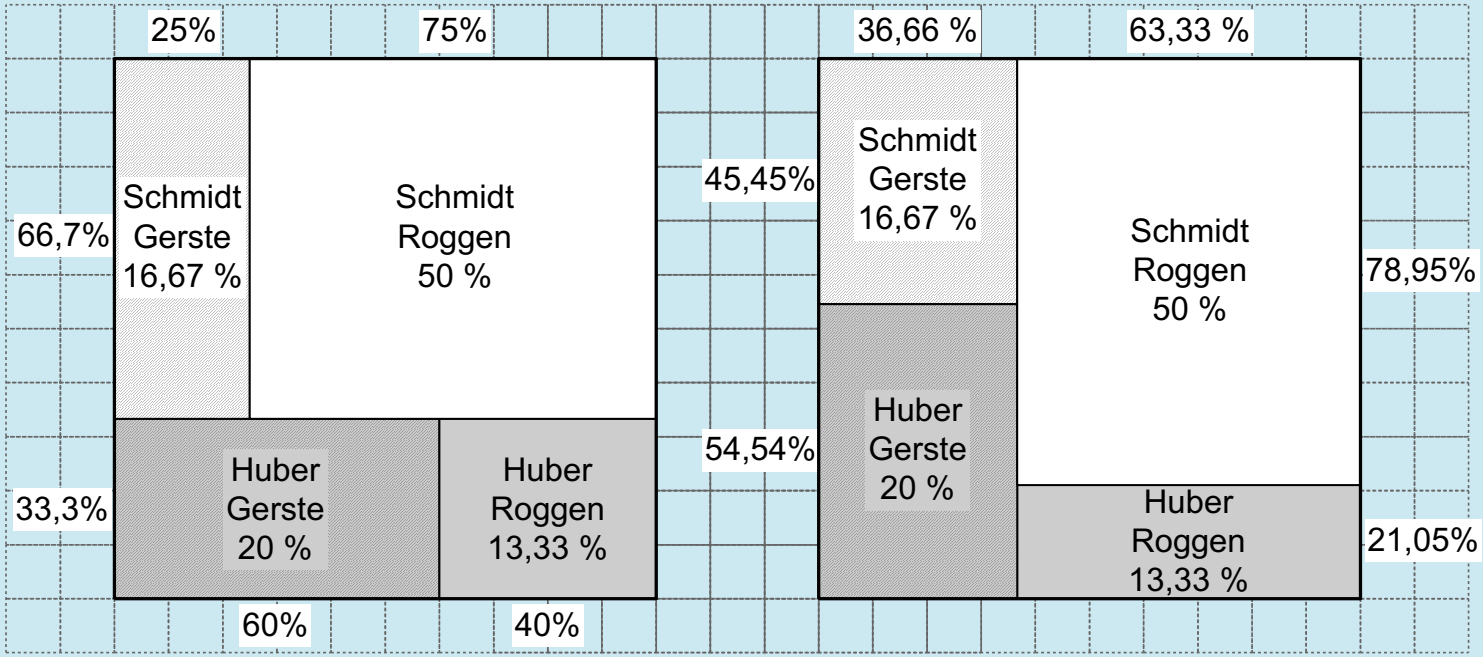
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein





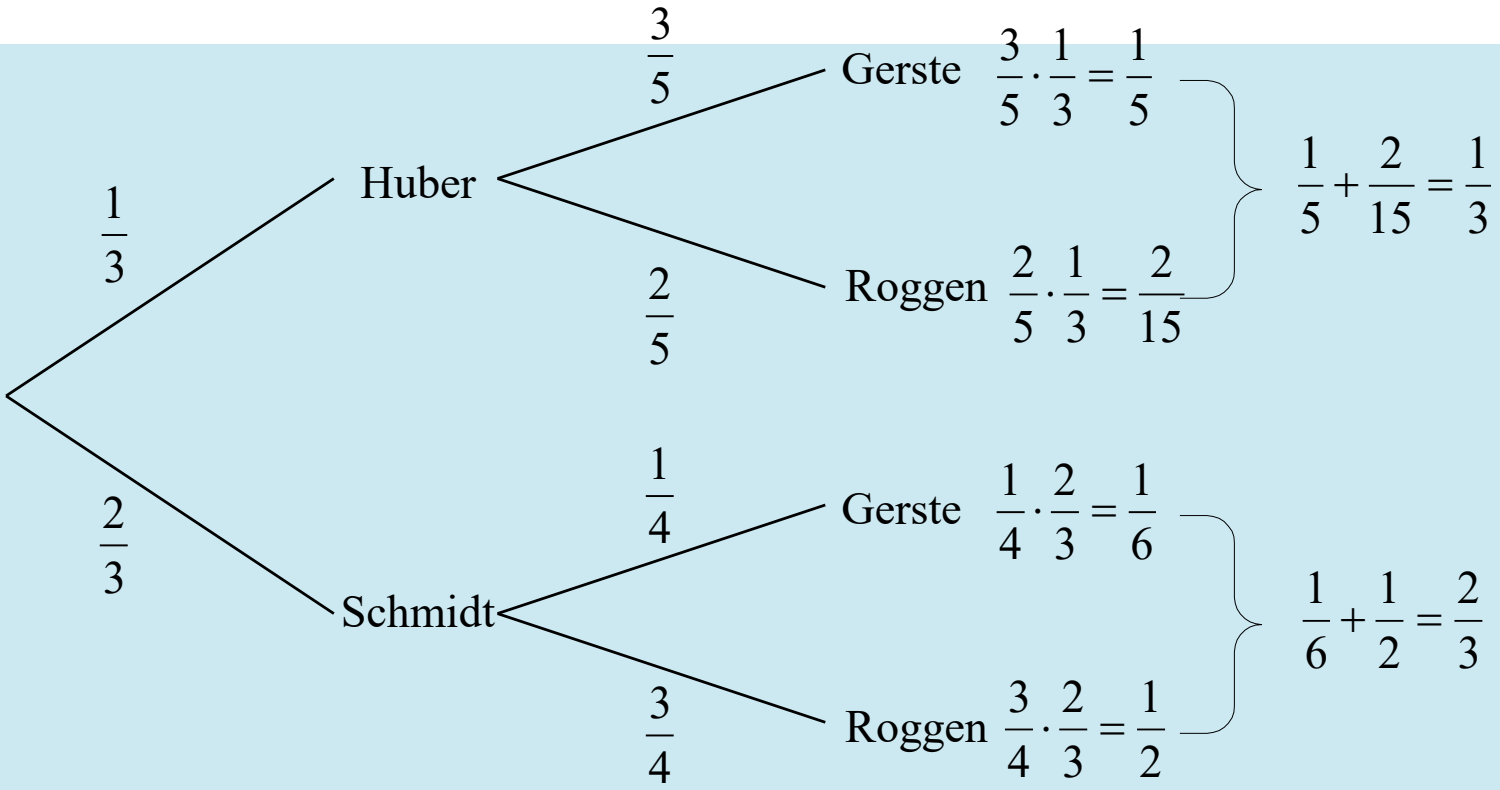
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Vertiefung: Anteile von Anteilen



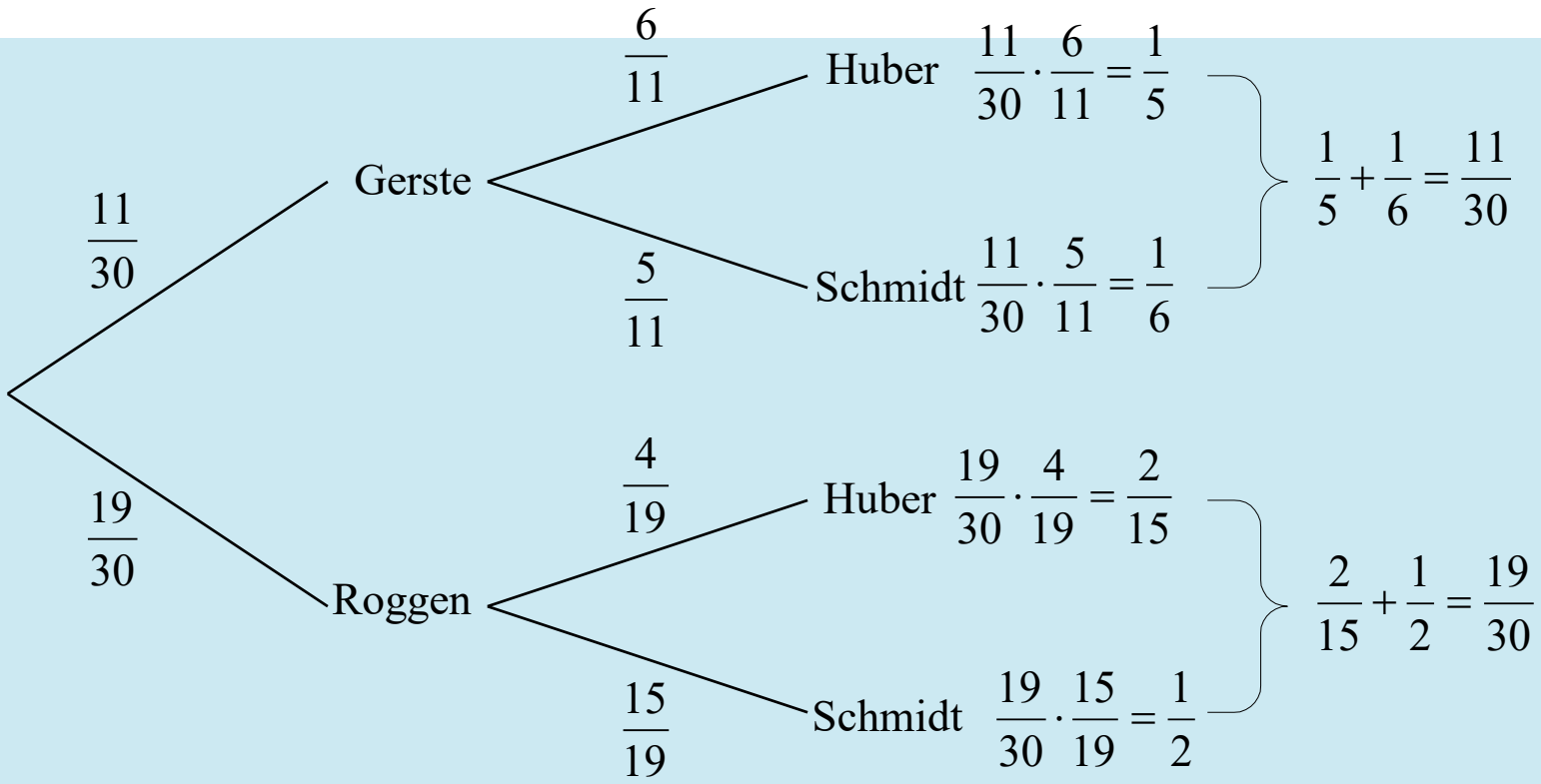
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Vertiefung: Anteile von Anteilen



IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Vertiefung: Anteile von Anteilen



Gesucht: $P_G(BH)=P(BH \text{ und } G)/P(G) = 1/5$

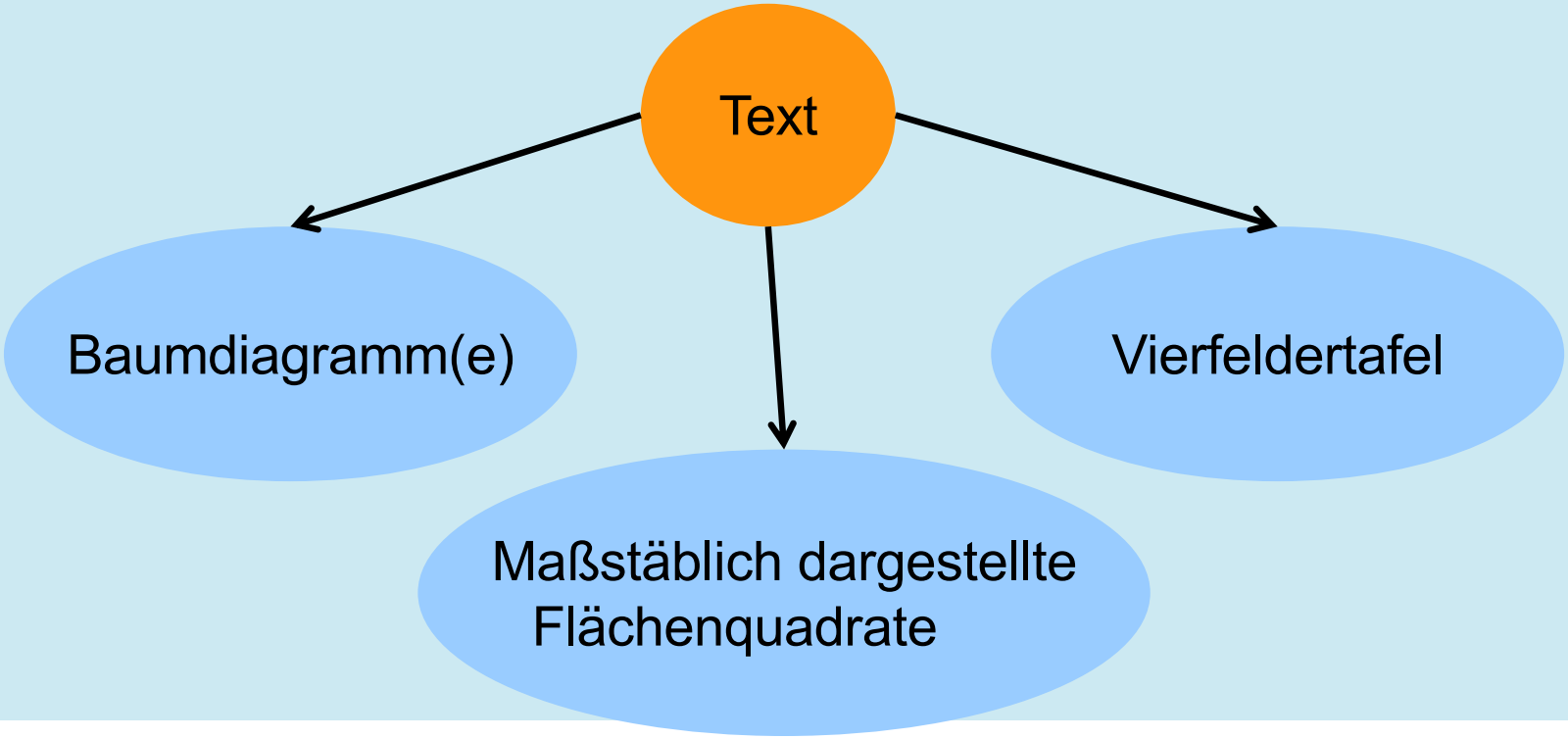
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Vertiefung: Anteile von Anteilen

Vierfeldertafel

	Gerste	Roggen	Summe
Huber	$\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}+\frac{2}{15}=\frac{3}{15}+\frac{2}{15}=\frac{1}{3}$
Schmidt	$\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$	$\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=\frac{2}{3}$
Summe	$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{6}{30}+\frac{5}{30}=\frac{11}{30}$	$\frac{2}{15}+\frac{1}{2}=\frac{4}{30}+\frac{15}{30}=\frac{19}{30}$	1

Darstellungswechsel bei Schmidt und Huber



IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Take – Home - Message

Folgendes will ich im Unterricht ausprobieren:

Das war neu für mich:

Das war für mich die zentrale Botschaft:

Das kam für mich heute zu kurz:

Feedback

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Ausblick

Das nächste Modul zum Thema
„Zahl (Terme und Gleichungen)“
findet statt
am **23.07.2025**
an der Wilhelm-Tanck-Schule (Neumünster)
bei **Lara Knop**

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Gute Heimfahrt!

Quellenverzeichnis

- Tobias Rolfes, Christian Phase: Zufallsphänomene erfassen, mathematiklehren (213), 2019
- Günther Malle, Sonja Malle: Was soll man sich nun unter Wahrscheinlichkeiten vorstellen?, mathematiklehren (118), Friedrich
- Markus Vogel, Andreas Eichler: „Das kann doch kein Zufall sein!“, PM (39), 2011, S. 2-8, Friedrich
- Michael Kleine, Nelli Schmelzer: Steck weg, die 6!: mathematiklehren (236), 2023, S. 24-28, Friedrich
- Werner Blum et al.: Bildungstandards Mathematik: konkret, 2006, S. 51 – 69, Cornelsen Scriptor
- Andreas Eichler, Hedwig Gasteiger: Daten und Zufall, in: Basiswissen Lehrerbildung: Mathematik unterrichten, S. 139 48
- Paper „Stochastik Grundbegriffe“, Björn Hansen, 2016
- Anna George: „Wer die höhere Zahl hat, gewinnt!“, PM (66), 2015, S. 10–14, Friedrich