Helmut Mallas,
Landesfachberater für Mathematik im IQSH

Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Korrekter Umgang mit Größen im Unterricht

1. Größen

Eine **Größe** ist das Produkt aus einer **Maßzahl** und einer **Maßeinheit**:

$$\textit{Größe} = \underbrace{\text{Maßzahl} \cdot \text{Maßeinheit}}_{\text{Produkt}}$$. So bedeutet die Angabe 7 m genaugenommen 7·1 m.

Regeln für die Schreibweise nach DIN und Duden:

l = 7 m	***Formelzeichen*** wie *l* in *kursiver Schrift*
t = 13,5 s	**Einheiten** wie s in Steilschrift
m = 14,25 kg	**Vorsilben** wie k in Steilschrift.
s = 7 km	Zwischen Maßzahl und Einheit ein Leerzeichen einfügen. Also nicht ~~7km~~, sondern 7 km. Beim Schreiben mit Word ein geschütztes Leerzeichen, damit Maßzahl und Maßeinheit trotz Umbruch stets in der gleichen Zeile stehen.
$b = 2{,}54\ \underbrace{\text{mm}}_{\updownarrow}$	Bei Zusammensetzungen wie 7 km-Strecke ein Leerzeichen, kein Bindestrich zwischen Maßzahl und Maßeinheit. Die Größe „7 km" ist also *ein* Wort, das mit dem Wort „Strecke" zusammengesetzt wird.

Vorsilbe und Einheitenzeichen bilden zusammen eine neue Einheit.

> Das **Gesetz über Einheiten im Messwesen** schreibt seit 1969 die Benutzung des SI-Systems (internationales Einheitensystem) und seiner formal korrekten Schreibweise verbindlich vor.

- **Einheiten** werden mit einem Buchstaben abgekürzt;
  Beispiele: m für Meter, s für Sekunde, V für Volt, A für Ampere, Ω für Ohm;

Ausnahmen u.a.	Pa	Pascal für den Druck	mit zwei Buchstaben abgekürzt
	min	Minute	mit drei Buchstaben abgekürzt
	Hz	Hertz für die Frequenz mit zwei Buchstaben abgekürzt (englisch c/s)	

- **Vorsilben** bestehen aus einem Buchstaben, Vergrößerungen groß, Verkleinerungen klein geschrieben; Beispiele: M für Mega, G für Giga, c für Centi, d für Dezi

Ausnahmen nur	k	kilo klein geschrieben, obwohl Vergrößerung
	da	Deka zwei Buchstaben und klein geschrieben, obwohl Vergrößerung

- Auch **Formelzeichen** sollen mit nur einem Buchstaben abgekürzt werden, anderenfalls besteht Verwechslungsgefahr mit einem Produkt. Zur Unterscheidung sind **Indices** zu verwenden. Diese dürfen nur an dem Formelzeichen stehen, nicht an der Einheit.

nicht $\cancel{RM}$ = 2,54 mm (Rastermaß von Elektronik-Platinen)
sondern b_{RM} = 2,54 mm

nicht U = 230 $\cancel{\text{V}}_{\text{eff}}$ (Effektivwert der Netzspannung)
sondern U_{eff} = 230 V

> **Vorteile des SI-Systems** sind
>
> - **nur glatte Zehnerpotenzen als Umrechnungszahlen** im Gegensatz zu den veralteten Einheiten wie Kalorie oder den englischen Einheiten wie Gallone.
> - eine **einheitliche**, mathematisch konsistente **Schreibweise** ohne jede Verwechslungsgefahr.

- **unzulässige Schreib- und Sprechweise**:

unzulässig	Grund	korrekt
~~ccm~~	Einheitenprodukt!	cm^3
~~qm~~	Einheitenprodukt!	m^2
~~cbm~~	Einheitenprodukt!	m^3
~~sec~~	*ein* Buchstabe	s
~~Kilo~~	nur Vorsilbe	Kilogramm
~~µ~~	nur Vorsilbe	µm
~~mµ~~	nur eine Vorsilbe	nm
~~µµF~~	nur eine Vorsilbe	pF

- **veraltete Einheiten**, die nicht zum SI-System gehören, ergeben **„krumme“ Umrechnungszahlen**, sind also beim Rechnen von Nachteil. Zudem besteht häufig **Verwechslungsgefahr**.

veraltet	Umrechnung
cal	1 cal ≈ 4,18 J
PS	1 PS = 0,736 kW

– So ist mit cal (oder manchmal auch Cal, verschämt, aber nicht genormt als „große Kalorie“ bezeichnet) häufig gar nicht 1 cal, sondern 1 kcal gemeint, also das Tausendfache! !

– Bei der Leistungsmessung von Motoren gibt es SAE-PS und andere Messverfahren, die größere Zahlenwerte für den gleichen Motor ergeben, z.B. wenn der Motor ohne Luftfilter oder ohne Lichtmaschine betrieben wird.

– Es gibt englische und amerikanische Gallonen, die unterschiedlich groß sind.

> Lehrkräfte haben eine Vorbildfunktion und sollten veraltete Einheiten konsequent vermeiden. Veraltete Einheiten sind Hindernisse im Geschäftsverkehr, im wissenschaftlichen Gedankenaustausch und in der Dokumentation von Technik. Das metrische System, das letztlich auf die französische Revolution zurückgeht, wollte Relikte des Feudalsystems und der Kleinstaaterei beseitigen und ein vernünftiges, einfaches und einheitliches Einheitensystem für alle Menschen etablieren. Mehr als 200 Jahre danach sollte auch der Mathematikunterricht konsequent moderne Größen verwenden, zumal es seit 1969 per Gesetz vorgeschrieben ist.

- Beispiele für **gesetzlich zulässige Einheiten neben dem SI-System**; **Übergangsregelungen**

– Neben der Sekunde sind selbstverständlich die Minute und die Stunde zulässig, womit sich aber „krumme“ Umrechnungszahlen ergeben.

– Zulässig ist neben der Einheit 1 Joule auch die Kilowattstunde, wobei 1 kWh = 1000 W · 1 h = 3,6 MJ.

- Die Pflicht, bei lose verkauften Waren und bei manchen verpackten Waren den Preis für 100 g oder für 1 kg anzugeben, ist als Fortschritt anzusehen, weil dadurch Preisvergleiche erleichtert werden. Der Preis für ein Pfund oder einen Zentner darf (für ältere Menschen) zusätzlich angegeben werden, muss aber an zweiter Stelle stehen.
- Das Pfund (1/2 kg) darf im Unterricht nebenbei erwähnt werden, die Lehrkräfte sollten aber auf keinen Fall Werbung für diese Einheit machen, weil das Rechnen mit Pfund, halben oder Viertelpfund (125 g) unpraktisch ist und in eine Sackgasse führt (62,5 g?).
- Der Zentner (50 kg) ist nicht mehr zulässig und aus der Umgangssprache praktisch vollkommen verschwunden. Insbesondere in der Landwirtschaft ist dies durch einen Trick unterstützt worden: Der Doppelzentner wurde durch die Einheit Dezitonne 1 dt = 100 kg ersetzt, was im SI-System formal völlig korrekt ist und elegant an eine Tradition anknüpft.
- Der gleiche Trick wie bei der Dezitonne: Die SI-Einheit für den Druck ist Pascal. Wird der Luftdruck in hPa (Hektopascal) angegeben, entsprechen die Maßzahlen der Luftdruckangaben nahezu unverändert den Erfahrungswerten älterer Menschen, die noch in mbar (Millibar) denken.

2. Korrekte Schreibweise

- Das Produkt aus Maßzahl und Maßeinheit ist invariant gegenüber einem Wechsel der Einheit.

richtig $0{,}75\ \text{m} = 75\ \text{cm}$ Die Maßzahl wird mit 100 multipliziert, die Einheit entsprechend verkleinert.

falsch $\cancel{0{,}75} = \cancel{75}$ Ohne Einheiten ist die Gleichung selbstverständlich nicht erfüllt.

- Einheiten müssen entweder in der Rechnung von Anfang an erscheinen oder man rechnet bei vorab definierter Bedeutung ausschließlich mit Maßzahlen (zugeschnittene Größengleichung).

2.1 konsequentes Rechnen mit Einheiten

- Sobald anstelle eines Formelzeichens Maßzahlen eingesetzt werden, müssen auch Maßeinheiten erscheinen. Diese Einheiten müssen konsequent „mitgeschleppt“ werden. Das spricht dafür, Gleichungen so lange wie möglich mit Buchstaben umzustellen und erst zum Schluss Maßzahlen mit Einheit einzusetzen.

Beispiel: 4000 Kubikmeter Wasser fallen auf einen Hektar. Wie hoch steht das Wasser? Im Beispiel wird erst zum Schluss eingesetzt.

$$V = a \cdot b \cdot c = A \cdot c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{V}{A}$$

$$c = \frac{4000\ \text{m}^3}{10000\ \text{m}^2} = 0{,}4\ \text{m}$$

falsch: $c = \dfrac{V}{A} = \dfrac{4000}{10000} = \cancel{0{,}4\ \text{m}}$

falsch: $V = a \cdot b \cdot c = 70 \cdot 35 \cdot 0{,}2 = \cancel{490\ l}$ (siehe Beispiel weiter unten)

In beiden Beispielen „fallen die Einheiten vom Himmel“. Die Gleichungen können nicht erfüllt sein, da links reine Zahlen stehen, rechts aber Größen.

- Konsequent Gleiches für Gleiches einsetzen, Einheiten „mitschleppen“

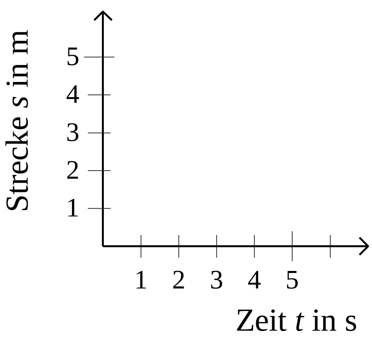
Beispiel Benzinpreis: $38\ l \cdot 1{,}54\ \dfrac{€}{l} = 58{,}52\ €$ Liter werden gekürzt

- Das Umrechnen von Volumenmaßen lässt sich meistens vermeiden, wenn vor dem Ausrechnen auf gleiche Längeneinheiten geachtet wird, siehe Beispiel rechts.

$$\begin{aligned} V &= a \cdot b \cdot c \\ &= 7\ \text{m} \cdot 35\ \text{dm} \cdot 2\ \text{cm} \\ &= 70\ \text{dm} \cdot 35\ \text{dm} \cdot 0{,}2\ \text{dm} \\ &= 490\ \text{dm}^3 \\ &= 490\ l \end{aligned}$$

2.1 konsequentes Rechnen ohne Einheiten

Vorbemerkung: Verwendet man für die Beschriftung von Koordinatenachsen beispielsweise die Festlegungen „Zeit t in s“ und „Strecke s in m“, erscheinen an den Achsen nur noch die entsprechenden Maßzahlen ohne Einheiten. Noch kürzer könnten die Achsenbeschriftungen sogar $\frac{t}{1\,\text{s}}$ bzw. $\frac{s}{1\,\text{m}}$ lauten.



Dividiert man die Zeitangabe t durch eine Sekunde, kürzt sich die Einheit, und es bleibt die Maßzahl übrig. Diese Bezeichnungsweise ist jedoch nicht selbsterklärend.

Das gleiche Prinzip wird bei der Zahlenwertgleichung („zugeschnittene Größengleichung“) angewendet, die für das Rechnen mit Größen nach DIN ebenfalls zulässig ist. Damit wird das oben erwähnte „Mitschleppen von Einheiten“ konsequent vermieden und zugleich formal völlig korrekt gearbeitet. Deshalb ist diese Schreibweise bei Ingenieuren sehr beliebt.

- **zugeschnittene Größengleichung nach DIN** Dabei wird das Formelzeichen der Größe durch die Einheit der jeweiligen Größe dividiert. Die Meta-Schreibweise mit G als Größe, $\{G\}$ als Maßzahl dieser Größe und $[G]$ als Einheit der Größe wird in diesem Papier nicht verwendet.

  Beispiel 1 Benzinpreis: $\frac{V}{1\,l}\cdot\frac{B}{1\,\frac{€}{l}}=\frac{P}{1\,€}$ bewirkt, dass mit der Maßzahl des Volumen in Litern und des Benzinpreises in € / Liter das Ergebnis P der Rechnung $38\cdot 1{,}54$ die Einheit € hat.

  Beispiel 2 Volumen eines Quaders: Die linke Gleichung ist so zugeschnitten, dass die Maßzahlen von a in Metern, von b in Dezimetern und von c in Zentimetern eingesetzt werden müssen, damit das Ergebnis in Litern erscheint. Die Umrechnungszahlen 10 und 0,1 haben das Produkt 1 und „heben sich auf". Die rechte Gleichung ist so zugeschnitten, dass beim Einsetzen der selben Maßzahlen das Volumen in m^3 erscheint.

$\frac{V}{1\,\text{dm}^3}=\frac{a}{1\,\text{m}}\cdot\frac{b}{1\,\text{dm}}\cdot\frac{c}{1\,\text{cm}}$ $=7\cdot 35\cdot 2$ $=490$	$\frac{V}{1\,\text{m}^3}=0{,}001\cdot\frac{a}{1\,\text{m}}\cdot\frac{b}{1\,\text{dm}}\cdot\frac{c}{1\,\text{cm}}$, *da* $\frac{V}{1\,\text{m}^3}=\frac{a}{1\,\text{m}}\cdot\frac{b}{1\,\text{m}}\cdot\frac{c}{1\,\text{m}}$ $=0{,}001\cdot 7\cdot 35\cdot 2$ $\quad=\frac{a}{1\,\text{m}}\cdot\frac{b}{10\,\text{dm}}\cdot\frac{c}{100\,\text{cm}}$ $=0{,}49$ $\quad=1\cdot\frac{a}{\text{m}}\cdot 0{,}1\cdot\frac{b}{\text{dm}}\cdot 0{,}01\cdot\frac{c}{\text{cm}}$

  Beispiel 2 soll lediglich das Prinzip zeigen. Wird die Größe mit Maßzahl und Maßeinheit eingesetzt, kürzt sich die Einheit heraus, so dass nur noch Maßzahlen ohne Einheit geschrieben werden müssen. Die rechte Gleichung zeigt jedoch, dass die zugeschnittene Größengleichung gegenüber einem Wechsel der Einheiten nur dadurch invariant ist, dass zusätzliche Umrechnungszahlen erscheinen, die völlig korrekt sind, aber scheinbar „vom Himmel fallen". Die Einheit des Ergebnisses lässt sich nur aus der ersten Zeile ablesen, nicht an den eingesetzten Zahlen, die ja keine Einheit mehr haben. Damit ist die zugeschnittene Größengleichung in dieser Form zu undurchsichtig für die Schulmathematik und lädt zu Fehlern förmlich ein. Aber die zugrundeliegende Idee lässt sich didaktisch nutzen:

2.3 didaktisch angepasstes, formal korrektes Rechnen ohne Einheiten

In der Schulmathematik sollte man nicht formal mit $\frac{a}{1\,\text{cm}}$, $\frac{c}{1\,\text{cm}}$ und $\frac{h}{1\,\text{cm}}$ rechnen, sondern die Bedeutung der Variablen in einem Text definieren, zum Beispiel

Bei einem Trapez ist $a = 20$, $c = 4$ und $h = 5$. Dabei werden alle Längen in cm angegeben.

Die Rechnung $A=\frac{1}{2}\cdot(20+4)\cdot 5=12\cdot 5=60$ erfolgt dann ohne Einheiten. Das Ergebnis der Rechnung wird erst im Antwortsatz als Flächeninhaltsangabe in cm² interpretiert.

Das Trapez hat einen Flächeninhalt von 60 cm².

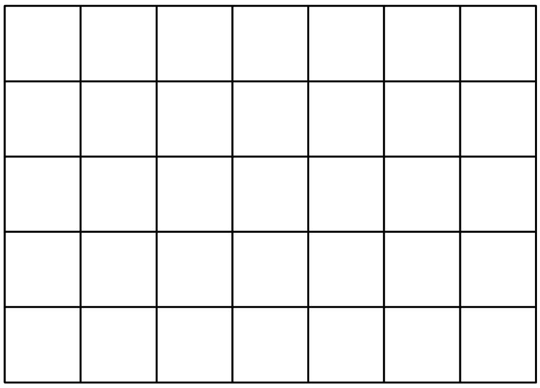
Entsprechend lautet das Benzinpreis-Beispiel

V ist die getankte Benzinmenge in Litern, B ist der Benzinpreis in Euro pro Liter. Rechnung: $P=V\cdot B=38\cdot 1{,}54=58{,}52$ Die Tankfüllung kostet 58,52 €.

Definiert man die Bedeutung der Größen in Textform, steht dies voll in Einklang mit DIN, und es gestattet übersichtliche Rechnungen ohne Einheiten. Die Einheit des Ergebnisses wird nachvollziehbar im Antwortsatz genannt. Dagegen ist es fachlich falsch, am Ende einer Rechnung ohne Einheiten die Maßeinheit in eckigen Klammer hinzufügen, im Beispiel [cm²], denn laut DIN 1313 dürfen „eckige Klammern […] nicht um Einheitenzeichen gesetzt werden".

3. Korrekter Umgang mit Einheiten – didaktisch angepasst

Flächeninhalt eines Rechtecks



$A = a \cdot b$ – was ist die Bedeutung von *a* und von *b*?

formale Schreibweise

a und *b* sind die Seitenlängen des Rechtecks

$$\begin{aligned} A &= a \cdot b \\ &= 5\,\text{cm} \cdot 7\,\text{cm} \\ &= 35\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Die formale Schreibweise geht davon aus, dass im SI-System der Flächeninhalt eine abgeleitete Größe ist. Aus didaktischen Gründen wird bei der Einführung der Flächenmaße in Klasse 5 und 6 der Flächeninhalt wie eine Grundgröße behandelt. Für das Verständnis der neuen Größe ist das Auslegen von Flächen mit Messquadraten oder Messrechtecken (wie viele Schulhefte passen auf die Tischfläche?) wichtig. Den Term $A = a \cdot b$ für den Flächeninhalt eines Rechtecks gewinnt man aus dem Abzählschema für Messquadrate:

b ist die Anzahl der Messquadrate in einem Streifen, *a* ist die Anzahl der Streifen

didaktisch angepasste Schreibweise – formal völlig korrekt

$$\begin{aligned} A &= a \cdot b \\ &= 5 \cdot 7 \cdot 1\,\text{cm}^2 \\ &= 35\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

oder kürzer: *b* ist der Flächeninhalt eines Streifens, *a* ist die Anzahl der Streifen

$$\begin{aligned} A &= a \cdot b \\ &= 5 \cdot 7\,\text{cm}^2 \\ &= 35\,\text{cm}^2 \end{aligned}$$

Diese Schreibweise entspricht dem Vorgehen „Anzahl der Streifen mal Anzahl der Messquadrate in einem Streifen“. Jüngere Schüler/innen verstehen häufig nicht, warum $\text{cm} \cdot \text{cm}$ Quadratzentimeter ergibt oder schreiben, obwohl sie „Länge mal Breite“ sagen, lediglich die Einheiten formal falsch, weil ihre Aufmerksamkeit dem Zahlenwert gilt. Die hier vorgeschlagene Schreibweise ist mathematisch äquivalent zum Produkt $\text{cm} \cdot \text{cm}$, sie ist also formal völlig korrekt. Durch die bereits ausgerechnete Maßeinheit cm^2 wird jedoch der formale Fehler $\text{cm} \cdot \text{cm} = \text{cm}$ vermieden und die Aufmerksamkeit auf das Abzählschema und den Zahlenwert konzentriert. Nach dem Festigen des Abzählschemas kann später „Länge mal Breite“ auch mit dem Einheitenprodukt berechnet werden, beispielsweise ab Klasse 7.

Quellen:

Das **Gesetz über die Einheiten im Messwesen und die Zeitbestimmung** (EinhZeitG) ermächtigt das Bundesministerium für Wirtschaft und Technologie, die gesetzlichen Einheiten festzulegen, und definiert einige Aufgaben der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt. Das alleinige Recht des Bundes, Gesetze über Maße und Gewichte zu erlassen, begründet sich aus Art. 73 Abs. 1 Nr. 4 GG,

siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Internationales_Einheitensystem

Die Norm **DIN 1302** legt allgemeine mathematische Zeichen und Begriffe fest,

siehe https://de.wikipedia.org/wiki/DIN_1302

Die Norm **DIN 1304** ("Formelzeichen) legt Formelzeichen für physikalische Größen fest,

siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Formelzeichen

Die Norm **DIN 1313** ("Größen") legt die Bezeichnung und die mathematische Beschreibung physikalischer Größen fest,

siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Physikalische_Größe

In der Norm DIN 1313 werden unter anderem die Größengleichung, die Zahlenwertgleichung und zugeschnittene Größengleichung formal definiert. Die Norm geht explizit auf den formalen Fehler ein, am Ende einer Rechnung ohne Einheiten dem Ergebnis ein Einheitenzeichen in eckigen Klammern hinzuzufügen: Laut DIN 1313 dürfen "eckige Klammern […] nicht um Einheitenzeichen gesetzt werden". Diese Schreibweise stammt aus der Zeit vor dem Gesetz über die Einheiten im Messwesen, ist also seit 50 Jahren veraltet und zudem formal falsch, da in einer Gleichung nicht auf der linken Seite eine Zahl stehen darf und rechts eine Größe. Die Angabe ist [m²] keine Maßeinheit. Richtig wäre $[A] = 1\ \mathrm{m}^2$ als formale Übersetzung der Aussage "Die Maßeinheit dieses Flächeninhalts ist Quadratmeter."

siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Zahlenwertgleichung

Die Norm **DIN 1338** legt Regeln für den typografischen Satz von mathematischen Formeln fest. Dort findet man unter anderem

– die Vorschrift, im Druck die Grundzeichen kursiv zu setzen,

– die Empfehlung, im Druck eine Schriftart mit Serifen zu verwenden (eine solche Schrift hilft beispielsweise der Verwechslung des Großbuchstaben I mit dem kleinen Buchstaben l vorzubeugen),

– Regeln für Satzzeichen nach mathematischen Formeln,

– Regeln für den Zeilenumbruch, wenn Rechnungen zu lang für eine Druckzeile sind,

siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Formelsatz