

anschaulich vorstellen soll. Bei der *Kleinerrelation* und bei den *Rechenoperationen* bietet eine *Parallelbehandlung* den Vorteil, daß so den Schülern klar wird, daß gemeine Brüche und Dezimalbrüche nur zwei verschiedene *Schreibweisen* für dieselben mathematischen Objekte sind. Bei der in der BR Deutschland weit verbreiteten getrennten Nacheinanderbehandlung besteht nämlich die große Gefahr, daß die Schüler die gemeinen Brüche und die Dezimalbrüche für zwei *verschiedene Arten von Zahlen* halten. Ein Beginn *jeweils* mit gemeinen Brüchen ermöglicht eine einheitliche *Begründung* der Rechenregeln für Dezimalbrüche durch Rückgriff auf die entsprechenden Rechenregeln für gemeine Brüche. Während bei der *Addition und Subtraktion* auch ein Beginn mit Dezimalbrüchen für uns gut vorstellbar ist, ist bei der *Multiplikation und Division* nach unserer Einschätzung ein Beginn mit gemeinen Brüchen gerade auch unter dem Gesichtspunkt einer Vermeidung typischer Schülerfehler (vgl. I.3 und V.) unbedingt notwendig. Allerdings sollte man generell bei der Bruchrechnung kompliziertere oder aufwendige Rechnungen mit gemeinen Brüchen vermeiden. Das Ziel ist nämlich eine anschaulich fundierte Einführung der Bruchzahlen sowie eine einsichtig begründete und gut verstandene Beherrschung der Rechenoperationen mit *einfachen* gemeinen Brüchen, um so fundierte *Grundlagen* für eine Behandlung der im täglichen Leben fast ausschließlich eingesetzten *Dezimalbrüche* zur Verfügung zu haben und um so auch gut gerüstet zu sein für die verschiedenen (schul)mathematischen Gebiete, in denen die Kenntnis gemeiner Brüche erforderlich ist (vgl. 2.).

Ein Blick in das Ausland zeigt, daß dort die Bruchrechnung vielfach auf *mehrere Jahre verteilt* wird, während in der BR Deutschland eine starke Massierung auf das 6. Schuljahr feststellbar ist. Eine Verteilung auf die 5. und 6. Klasse – im Hauptschulbereich auf die Klassen 5 bis 7 – ist auch bei uns unbedingt erstrebenswert, wobei schon in der Grundschule erste anschauliche Vorarbeiten erfolgen sollten (vgl. 1.).

aus: Padberg, Didaktik der Bruchrechnung, Spektrum Verlag Heidelberg 25

II. KONZEPTE ZUR BEHANDLUNG DER BRUCHRECHNUNG

Auf die Frage: Was ist eine Bruchzahl, kann man *insbesondere* die folgenden Antworten geben:

Eine Bruchzahl ist:

- Eine Größe
- Eine Äquivalenzklasse
- Die Lösung einer linearen Gleichung
- Eine Funktion (Operator)

Ein *weiterer* Ansatz, nämlich Bruchzahl- und *Verhältnisbegriff* gleichzusetzen, führt beim Erweitern/Kürzen und bei der Ordnung zu sinnvollen Ergebnissen, ist allerdings schon bei der Addition nicht mehr brauchbar und verursacht dort leicht typische Schülerfehler (vgl. III. 4.4). Wir unterscheiden daher idealtypisch folgende vier Konzepte:

- Das Größenkonzept
- Das Äquivalenzklassenkonzept
- Das Gleichungskonzept
- Das Operatorkonzept.

1. DAS GRÖSSENKONZEPT

Bei diesem Konzept geht man von konkreten Brüchen (vgl. III. 1) wie $\frac{1}{8}$ kg, $\frac{3}{4}$ Stunde oder $1\frac{1}{2}$ km aus, die den Schülern aus dem täglichen Leben vertraut sind. Durch Abstraktion gelangt man – ohne daß dies in den Lehrgängen meist so explizit thematisiert und formuliert wird – zu einer festen Größe als Bezugsgröße, genannt „das Ganze“ oder „die Einheit (schlechthin)“. Die Bruchzahl $\frac{m}{n}$ ist also hierbei eine Größe, nämlich die Größe $\frac{m}{n}E$, wenn wir „die Einheit“ mit E bezeichnen (vgl. Kirsch (1975)).

Das Konzept bietet den Vorteil der Nähe zu vielen Anwendungen der Bruchzahlen im täglichen Leben und damit gute Rückgriffsmöglichkeiten auf Vorkenntnisse der Schüler. Das Erweitern/Kürzen, die Anordnung, das Addieren und Subtrahieren sowie Sonderfälle der Multiplikation und Division lassen sich gut von alltäglichen Anwendungssituationen her motivieren und sehr anschaulich behandeln. Dagegen

kann man die Multiplikation – und auch die Division – nicht mehr generell im Sinne dieses Konzepts einführen, werden hier also *Grenzen* dieser Konzeption sichtbar. Bei einer *ausschließlichen* Deutung der Bruchzahlen als Größen wird nämlich – hierauf macht Kirsch (1975) zu Recht aufmerksam – ein „natürlicher Zugang“ zur Einführung der *Multiplikation* von Bruchzahlen verbaut, da „für Größen (ein und derselben Art) in natürlicher Weise keine Multiplikation erklärt werden kann“ (Kirsch (1975)). Bezeichnen wir – um die Problematik deutlich zu machen – die Einheit etwa mit „Torte“, so sehen wir unmittelbar: Im Gegensatz zur Addition ($\frac{1}{2}$ Torte + $\frac{1}{3}$ Torte) und Subtraktion ($\frac{1}{2}$ Torte – $\frac{1}{3}$ Torte) sind Produkte von Bruchzahlen bei diesem Ansatz im allgemeinen sinnlos, wie der Ausdruck „ $\frac{1}{2}$ Torte mal $\frac{1}{3}$ Torte“ einleuchtend belegt. Daher ist an dieser Stelle beim Größenkonzept das Prinzip der Methodenreinheit *nicht* durchzuhalten. Es ist vielmehr eine *Umdeutung* erforderlich, etwa im Sinne des Operatorkonzepts (vgl. 4.). Statt des sinnlosen Ausdrucks „ $\frac{1}{2}$ Torte mal $\frac{1}{3}$ Torte“ untersucht man beispielsweise „ $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{3}$ Torte“ und gibt so dem Produkt einen Sinn. Hierbei werden aber offensichtlich die beiden Bruchzahlen im Produkt unterschiedlich behandelt. Während die Bruchzahl im zweiten Faktor unverändert als Größe gedeutet wird, erfolgt beim ersten Faktor eine Umdeutung. Die Bruchzahl wird hier als Operator gedeutet.

Bei einer Einführung der *Division* als Umkehroperation der Multiplikation gelten offenbar auch hier die bei der Multiplikation genannten Probleme. Führt man die Division *eigenständig* im Sinne des *Messens* bzw. Enthaltenseins ein (Beispiel: $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ bedeutet: Wie oft ist $\frac{1}{4}$ in $\frac{1}{2}$ enthalten?), so treten spätestens, wenn der Divisor größer ist als der Dividend, Schwierigkeiten bei den anschaulichen Vorstellungen auf. Ferner ist das Ergebnis offenbar *keine* Größe, also keine Bruchzahl im Sinne dieses Konzepts. Unter dem Gesichtspunkt der *Methodenreinheit* treten auch bei den beiden Sonderfällen „natürliche Zahl mal Bruch“ und „Bruch durch natürliche Zahl“ Schwierigkeiten auf.

2. DAS ÄQUIVALENZKLASSENKONZEPT

Bei diesem Konzept definiert man zunächst in der Menge der geordneten Paare (a, b) natürlicher Zahlen eine Relation „ $\sim$ “ durch

$(a, b) \sim (c, d)$ genau dann, wenn $a \cdot d = b \cdot c$.

Diese Relation „ $\sim$ “ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv, also eine Äquivalenzrelation, und bewirkt daher in der Menge der geordneten Paare natürlicher Zahlen eine Klasseneinteilung. Die Äquivalenzklasse, in der beispielsweise $(3, 4)$ liegt, bezeichnen wir mit „ $\frac{3}{4}$ “. Bei diesem Konzept ist also die Bruchzahl $\frac{3}{4}$ die Äquivalenzklasse

$\frac{3}{4} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N} \text{ und } 3 \cdot b = 4 \cdot a\}$ bzw. die Bruchzahl $\frac{m}{n}$ die Äquivalenzklasse $\frac{m}{n} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N} \text{ und } m \cdot b = n \cdot a\}$.

Schreiben wir die so definierte Bruchzahl $\frac{3}{4}$ in aufzählender Mengenschreibweise, so erhalten wir:

$$\frac{3}{4} = \{(3, 4), (6, 8), (9, 12), (12, 16), \dots\}.$$

Da neben $(3, 4)$ beispielsweise auch $(6, 8)$ oder $(12, 16)$ in derselben Äquivalenzklasse liegen, können wir diese Äquivalenzklasse daher statt mit $\frac{3}{4}$ auch etwa mit $\frac{6}{8}$ und $\frac{12}{16}$ bezeichnen. Man bezeichnet diese Elemente auch als *Repräsentanten* der Äquivalenzklasse. Zwischen den Äquivalenzklassen (Bruchzahlen) definieren wir mit Hilfe der Repräsentanten eine Addition und Multiplikation durch die Festsetzung:

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q + n \cdot p}{n \cdot q} \text{ bzw. } \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}. \text{ („} \frac{m}{n} \text{“ bedeutet „definito-} \\ \text{risch gleich“), d.h. wir ordnen beispielsweise bei der Multiplikation} \\ \text{den Äquivalenzklassen } \frac{m}{n} \text{ und } \frac{p}{q} \text{ als Produkt die Äquivalenzklasse zu,} \\ \text{in der } \frac{m \cdot p}{n \cdot q} \text{ liegt. Damit diese Definition sinnvoll ist, muß man zuvor} \\ \text{noch nachweisen, daß die so definierte Addition und Multiplikation} \\ \text{unabhängig ist von den gewählten Repräsentanten (vgl. z.B. Strehl} \\ \text{(1976)).}$$

Der skizzierte Weg liegt auf den ersten Blick völlig abseits von der schulischen Wirklichkeit. Dabei durchzieht das Schema der Klassenbildung, also die Zusammenfassung gleichwertiger Brüche zu *einer* Bruchzahl, alle Schulbuchkonzepte zur Bruchrechnung, allerdings jeweils mehr oder weniger deutlich. Weit verbreitet ist der vorstehend skizzierte Weg bei der Einführung der rationalen Zahlen in der *Hochschulmathematik*. Allerdings betrachtet man hier – da man die rationalen Zahlen sofort insgesamt und nicht nur die *positiven* rationalen Zahlen (Bruchzahlen) einführt – Paare *ganzer* Zahlen, bei denen die zweite Komponente

von Null verschieden ist. Dieser Weg bietet im *Hochschulbereich* den Vorteil, daß man so zur Einführung der rationalen Zahlen *nur* auf die ganzen Zahlen und ihre Rechengesetze zurückgreifen muß. Insbesondere in den fünfziger Jahren und Anfang der sechziger Jahre wurde mit dem Argument der *Wissenschaftsorientierung* des Unterrichts für die Benutzung dieses Wegs im Mathematikunterricht der 6. Klasse etwa folgendermaßen geworben: „Ich habe die Bruchrechnung der Schule nie verstanden. Erst in den Vorlesungen zum Aufbau des Zahlensystems der Universität ist mir klargeworden, worum es geht. Man sollte doch den ganzen unmathematischen Kram [‘Pfannkuchenmethode bzw. Tortenmethode’] lassen und sich gefälligst an dem üblichen Standard der Hochschulmathematik orientieren“ (zitiert nach Griesel (1981 a)).

Der vorstehend skizzierte Weg weist bei einer Behandlung im *Unterricht* der 6. Klasse jedoch offenkundig *schwerwiegende Nachteile* auf:

- Sowohl die Definition der Bruchzahlen wie auch die der Rechenoperationen erfolgen für die Schüler *völlig unmotiviert* und *rein formal*. Die Genese der Begriffe und Definitionen wird völlig unterschlagen.
- Es gelingt kaum, Schülern eine anschauliche *Vorstellung* von den Bruchzahlen und besonders von den Verknüpfungen zu vermitteln (vgl. auch Klika/Wolpers (1978)).
- An das *Vorwissen* der Schüler wird nicht angeknüpft.
- Die Einführung der Addition wirkt künstlich. Eine *komponentenweise Addition* liegt bei diesem Ansatz viel näher. Hierdurch kann ein weit verbreiteter Schülerfehler noch gefördert werden (vgl. III. 4.4).
- Die Einführung der Addition und Multiplikation erfolgt *anwendungsfern* (vgl. auch Griesel (1981 a)), eine Verbindung zu den Anwendungen ist kaum herstellbar.

Daher urteilt Bigalke (1974) über diesen Weg zu Recht: „Der vom formalen Standpunkt aus extremste [Vorschlag] war wohl der, Bruchzahlen als Äquivalenzklassen von Paaren natürlicher Zahlen einzuführen.

Obwohl mathematisch einwandfrei, hat er sich in der Schulpraxis jedoch nicht bewährt.“

3. DAS GLEICHUNGSKONZEPT

Die Bruchzahl $\frac{m}{n}$ ist bei diesem Konzept *die* Lösung der linearen Gleichung $n \cdot x = m$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Da man für die Lösung dieser Gleichung auch $m : n$ schreibt, erhält man so leicht die Beziehung $m : n = \frac{m}{n}$. Das Erweitern und Kürzen ebenso wie die Rechenoperationen kann man – so Freudenthal (1973), ein Befürworter dieses Ansatzes – „nach übersichtlichen Schemata und gleichzeitig in sinnvollen Prozessen“ gut einführen. So benennen etwa $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$ und $\frac{15}{20}$ dieselbe Bruchzahl, da man die zugehörigen Gleichungen $8x = 6$ und $20x = 15$ aus der Ausgangsgleichung $4x = 3$ durch Multiplikation beider Seiten mit 2 bzw. 5 erhält. Die Addition zweier Bruchzahlen führt Freudenthal folgendermaßen ein: „Soll man zwei rationale Zahlen, etwa $\frac{7}{3}$ und $\frac{3}{5}$, addieren, so nenne man eine x und die anderen y und schreibe die Definitionsgleichungen

$$3x = 7, 5y = 3$$

auf. Man hat nun eine Gleichung für $x + y$ zu finden.

Dies geschieht durch

„Erweitern“: $15x = 35, 15y = 9$,

woraus folgt: $15(x + y) = 44$,

wir erhalten also: $x + y = \frac{44}{15}$,

also: $\frac{7}{3} + \frac{3}{5} = \frac{44}{15}$.

Von den übrigen Rechenoperationen sagt Freudenthal nur, daß man sie ähnlich behandeln kann. So kann man etwa z.B. die Multiplikationsaufgabe $\frac{7}{3} \cdot \frac{3}{5}$ folgendermaßen einführen:

Die zugehörigen Definitionsgleichungen lauten: $3x = 7$ und $5y = 3$.

Durch Multiplikation der beiden linken bzw. der beiden rechten Seiten der Gleichungen und implizite Anwendung des Assoziativ- und Kommutativgesetzes erhalten wir:

$$(3 \cdot 5) \cdot (x \cdot y) = 7 \cdot 3,$$

also

$$x \cdot y = \frac{21}{15},$$

daher: $\frac{7}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{15}$.

Analysiert man den vorgeschlagenen Weg kritisch, so fallen insbesondere folgende *Mängel* auf:

- Dieses Konzept belastet eine später erfolgende, systematische Behandlung der Gleichungslehre. Dort bemüht man sich nämlich gerade darum, den Schülern klar zu machen, daß Gleichungen keineswegs stets oder gar eindeutig lösbar sind. Hier hingegen wird naiv die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen der Gleichungen $n \cdot x = m$ vorausgesetzt. Auch deckt sich der hier benutzte Variablenbegriff nicht mit dem in der modernen Gleichungslehre verwandten Variablenbegriff.
- Bei diesem Weg sind Kenntnisse aus der Gleichungslehre erforderlich, die in dieser Form in der 6. Klasse noch nicht zur Verfügung stehen. So benötigen wir beim Kürzen und Erweitern zumindest implizit Kenntnisse über Äquivalenzumformungen.
- Dieser Weg ist ausgesprochen formal. Selbst Freudenthal räumt ein: „... dafür verlaufen die Rechnungen nach einem allgemeinen Schema – allerdings einem Schema, das man erst *nach beträchtlicher algebraischer Übung versteht*“. (Freudenthal (1973); Hervorhebung durch den Verfasser)
- Die Gültigkeit der Rechengesetze (wie etwa des Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetzes) in der umfassenden Menge der Bruchzahlen wird i.a. nicht problematisiert.
- Die Einführung der Division bereitet bei diesem Ansatz Schwierigkeiten.
- Eine Anwendung der Bruchzahlen als Maßzahlen von Größen ist von diesem Ansatz her nur schwer erklärbar.

4. DAS OPERATORKONZEPT

Wir gehen hier erst an *letzter* Stelle auf das Operatorkonzept ein, da wir es etwas *breiter* darstellen als die drei übrigen Konzepte. Das Operatorkonzept hat nämlich in den siebziger Jahren – und z.T. auch noch zu Beginn der achtziger Jahre – im Unterricht und auch in der didaktischen Diskussion eine große Rolle gespielt. So haben fast ausnahmslos alle in den siebziger Jahren neu konzipierten Schulbuchwerke das Operatorkonzept in weiten Teilen des Bruchrechnenlehrgangs eingesetzt und so in diesen Bereichen einen starken Einschnitt gegenüber der bisherigen Tradition vollzogen. Wir *skizzieren* im folgenden dieses Konzept. Für eine *ausführliche* Darstellung dieser Konzeption verweisen wir an dieser Stelle auf die entsprechenden Schulbuchwerke oder auf Padberg (1978).

Beim Operatorkonzept müssen wir verschiedene *Varianten* unterscheiden: In seiner „reinsten“ Form (Variante 1) werden Bruchzahlen und Bruchoperatoren *identifiziert*, so etwa bei Braunfeld (1968), einem der „Väter“ des Operatorkonzepts. Man kann aber auch die Bruchoperatoren als ein *Modell* für die Bruchzahlen auffassen und die Bruchzahlen hieraus durch *Abstraktion* gewinnen. Diese Variante (Variante 2) spielt in deutschen Schulbuchkonzepten in der *ersten* Hälfte der siebziger Jahre *die* entscheidende Rolle. Schülerschwierigkeiten infolge der *isolierten* Betrachtung der Bruchoperatoren führen allerdings dazu, daß bei Schulbuchwerken der *zweiten* „Operatorgeneration“ – also etwa seit Mitte der siebziger Jahre – die Bruchoperatoren *nicht* mehr isoliert, sondern *im Zusammenhang mit den Größen*, auf die sie wirken, gesehen werden (Variante 3).

Seither ist das Operatorkonzept in den Schulbüchern *sehr stark zurückgedrängt* worden und in den seit Mitte der achtziger Jahre neu konzipierten Schulbuchwerken *explizit in formalisierter Form* nur noch minimal bzw. überhaupt nicht mehr vorzufinden. Zum raschen Siegeszug des Operatorkonzepts in den *siebziger Jahren* hat neben der Tatsache, daß man durch eine so konzipierte Behandlung der Bruchrechnung gute Vorarbeiten für den mathematisch äußerst wichtigen *Funktionsbegriff* leisten konnte, gewiß auch beigetragen, daß man so mit

einem *einheitlichen* Ansatz – also methodenrein – die gesamte Bruchrechnung ohne Verfälschungen der *mathematischen* Struktur aufbauen konnte. Auf Gründe für die Zurückdrängung des Operatorkonzepts in den achtziger Jahren gehen wir am Ende dieses Abschnittes ein. Das Operatorkonzept insgesamt spielte allerdings – obwohl seine „Väter“ Braunfeld und Dienes (vgl. Dienes (1968)) in den USA bzw. Kanada lebten – ausschließlich im *deutschsprachigen Raum* eine *größere Rolle*, während es *ansonsten* unseres Wissens *höchstens lokal* oder nur für *sehr spezielle* Zielgruppen (lernschwache us-amerikanische Kinder, die die Bruchrechnung in einem zweiten Durchgang lernen sollten) für *sehr kurze Zeit* eine *geringe* Rolle spielte.

Der Ansatz des Operatorkonzepts, Bruchzahlen als Operatoren aufzufassen, scheint dabei auf den *ersten* Blick recht abwegig zu sein. Jedoch kann man die im täglichen Leben übliche Sprechweise „ $\frac{2}{3}$ von 6 kg sind 4 kg“ auch so deuten, daß durch „ $\frac{2}{3}$ von“ der Größe 6 kg die Größe 4 kg zugeordnet wird. In diesem Sinne kann man die Bruchzahl $\frac{2}{3}$ als Funktion oder – wie man im Mathematikunterricht dieser Klassen stets sagt – Operator auffassen, der den Größen g (etwa Gewichten, Längen, Flächeninhalten oder Zeitspannen) die Größe $\frac{2}{3}$ von g zuordnet (vgl. auch Kap. IV.).

Für den Einsatz dieser Konzeption im *Unterricht* ist es wichtig, die Funktionen zu *konkretisieren*, etwa mit Hilfe von „Maschinen“. So kann ein Schüler z.B. eine Maschine mit einer Eingabe x und einer Ausgabe $\frac{3}{4}x$ *vorstellungsmäßig* viel leichter erfassen als eine Funktion $x \rightarrow \frac{3}{4}x$, die abstrakt nur als Zuordnung erklärt wird, zumal der Zuordnungsbe-griff für Schüler ein „schwer zugänglicher, vorstellungsarmer Begriff“ ist (vgl. Griesel (1981 a)). „Hierbei spielt es“, so Griesel (1981 a) weiter, „keine Rolle, daß die Konkretisierung der Funktion als Maschine nur als ein schwarzer Kasten (black box) vorstellbar ist, in dessen Inneren sich irgendetwas, nicht näher überschaubares, vollzieht. Entscheidend ist, daß beim Gedanken an die Funktion f sich die Vorstellung der Maschine einstellt und damit überhaupt ein vorstellungsmäßiges Substrat vorhanden ist, mit dem man gedanklich operieren kann“.

Wir *skizzieren* im folgenden die Behandlung der Bruchrechnung nach

dem Operatorkonzept im Sinne der Variante 2 (und z.T. auch der Variante 3) und führen *exemplarisch* das Erweitern/Kürzen, die Multiplikation und die Division etwas näher aus, da in diesen Bereichen die besonderen *Stärken* des Operatorkonzepts – nach in den siebziger Jahren vorherrschender Einschätzung – liegen sollten. Der Abschnitt endet mit kritischen Anmerkungen zum Operatorkonzept und knappen Hinweisen zum Zusammenhang zwischen den hier idealtypisch vorgestellten Konzeptionen und der im Kapitel III dargestellten Behandlung der Bruchrechnung.

Das Operatorkonzept im Sinne der Variante 2 beginnt mit der Behandlung von sogenannten *Multiplikations-* und *Divisionsoperatoren*. *Mathematisch* gesehen ist ein *Multiplikationsoperator* $(\cdot n)$ jeweils eine Abbildung eines Größenbereichs (vgl. Kap. IV) G in sich, bei der jeder Größe a aus G die Größe $a \cdot n$ aus G (mit $n \in \mathbb{N}$) zugeordnet wird, also: $(\cdot n) : G \rightarrow G$ mit $a \rightarrow a \cdot n$, ist ein *Divisionsoperator* $(: n)$ jeweils eine Abbildung eines sogenannten divisiblen Größenbereichs G in sich, die jeder Größe a aus G die Größe $a : n$ (mit $n \in \mathbb{N}$) zuordnet, also: $(: n) : G \rightarrow G$ mit $a \rightarrow a : n$. Definitions- und Wertebereiche dieser Abbildungen oder Funktionen sind also jeweils ein Größenbereich G , wobei faktisch im Unterricht wegen der leichteren Veranschaulichungsmöglichkeiten der Größenbereich der *Längen* im Vordergrund steht. Die *Konkretisierung* der *Multiplikationsoperatoren* erfolgt im Unterricht durch *Maschinen*, die z.B. jeden eingegebenen Stab auf die n -fache Länge kontinuierlich strecken oder – eine andere, letztlich tragfähigere Grundvorstellung – für jeden eingegebenen Stab aus ihrem Vorrat n gleichlange Stäbe zu *einem* neuen Stab n -facher Länge zusammensetzen, die *Konkretisierung* der *Divisionsoperatoren* erfolgt durch die Vorstellung, daß die Maschine den eingegebenen Stab in n gleichlange Teilstäbe zerlegt und davon *einen* Teilstab ausgibt. Durch das *Hintereinanderschalten* von Maschinen läßt sich eine Verkettung von Multiplikationsoperatoren und auch eine Verkettung von Divisionsoperatoren einführen. Das Ergebnis ist jeweils wieder ein Multiplikations- bzw. Divisionsoperator.

Für die Verkettung von Multiplikations- und Divisionsoperatoren weist

man nach, daß für alle Operatoren $(\cdot m)$ und $(: n)$ gilt:

$(\cdot m) \circ (: n) = (: n) \circ (\cdot m)$. Diese Aussage über die *Vertauschbarkeit* ist für viele Bereiche der Bruchrechnung wichtig, insbesondere für eine fundierte Erarbeitung des Bruchzahlbegriffs (beide Grundvorstellungen; vgl. III) sowie für die Einführung der Multiplikation von Bruchzahlen. Den Bruchoperator $(\cdot \frac{m}{n})$ kann man jetzt definieren durch $(\cdot \frac{m}{n}) \stackrel{Df}{=} (: n) \circ (\cdot m)$. Wegen der Vertauschbarkeit gilt aber zugleich auch $(\cdot \frac{m}{n}) = (\cdot m) \circ (: n)$. Wenden wir also einen Bruchoperator $(\cdot \frac{m}{n})$ auf eine Größe g (eines divisiblen Größenbereichs) an, so gilt: $(\cdot \frac{m}{n})(g) = (g : n) \cdot m$ und auch $(\cdot \frac{m}{n})(g) = (g \cdot m) : n$.

Legt man – wie Dienes – bei Bruchoperatoren statt der divisiblen Größenbereiche *Teilmengen der natürlichen Zahlen* als Definitionsbereiche zugrunde, so führt dies rasch zu Problemen (vgl. Padberg (1978)).

Im Anschluß an die Behandlung der Bruchoperatoren erfolgt die Behandlung von *Gegenoperatoren*, d.h. von Operatoren, die die Wirkung der ursprünglichen Operatoren aufheben. So entdeckt man zunächst, daß der Multiplikationsoperator $(\cdot n)$ durch den Divisionsoperator $(: n)$ in seiner Wirkung aufgehoben wird und daß es auch zu Bruchoperatoren $(\cdot \frac{m}{n})$ jeweils Gegenoperatoren $(\cdot \frac{n}{m})$ gibt.

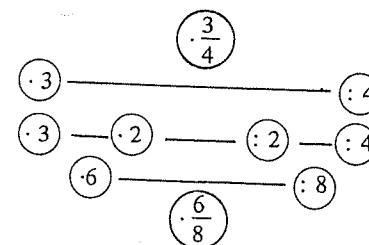
Auf dieser Grundlage kann jetzt das *Erweitern* und *Kürzen* sowie die *Kleinerrelation* bei Bruchoperatoren eingeführt werden.

So läßt sich das *Kürzen* als das *Herausnehmen*, das *Erweitern* als das *Einfügen* insgesamt wirkungsloser Operatorpaare (Operator – Gegenoperator) beschreiben, wie die folgenden beiden Beispiele in unterschiedlicher Notationsform zeigen:

Kürzen

$$\begin{aligned} (\cdot \frac{6}{8}) &= (\cdot 6) \circ (: 8) = (\cdot 3) \circ (\cdot 2) \circ (: 2) \circ (: 4) \\ &= (\cdot 3) \circ (: 4) = (\cdot \frac{3}{4}) \end{aligned}$$

Erweitern



Während man bei der *Variante 3* des Operatorkonzepts von *vorher* eine Verbindung zwischen dem *Vorwissen* der Schüler (Brüche dienen als sogenannte „konkrete Brüche“ (vgl. III) zur Bezeichnung von Größen; Beispiel: $\frac{1}{2}$ Stunde, $\frac{3}{4}m$) und den Bruchoperatoren herstellt, erfolgt dies bei der *Variante 2* erst an dieser *relativ späten* Stelle des Lehrgangs, und zwar über folgenden – im Unterricht natürlich konkret ausgestalteten – Ansatz: Ist e eine Größeneinheit, $(\cdot \frac{m}{n})$ ein Bruchoperator, so bezeichnen wir mit $\frac{m}{n}e$ das Ergebnis der Anwendung des Bruchoperators $(\cdot \frac{m}{n})$ auf die Größe $1e$; also:

$$1e \xrightarrow{(\cdot \frac{m}{n})} \frac{m}{n}e$$

Beim Operatorkonzept liegt es von der *mathematischen Struktur* her offensichtlich nahe, zunächst die *Multiplikation* und die *Division* zu behandeln. Bei der *Variante 2* wird die *Multiplikation* über die Verkettung von Bruchoperatoren eingeführt:

$$\begin{aligned} \left(\cdot \frac{m}{n} \right) \circ \left(\cdot \frac{p}{q} \right) &\stackrel{(1)}{=} [(\cdot m) \circ (: n)] \circ [(\cdot p) \circ (: q)] \stackrel{(2)}{=} (\cdot m) \circ (\cdot p) \circ (: n) \circ (: q) \stackrel{(3)}{=} \\ &(\cdot (m \cdot p)) \circ (: (n \cdot q)) \stackrel{(1)}{=} \left(\cdot \frac{m \cdot p}{n \cdot q} \right) \end{aligned}$$

Hierbei benötigt man an den beiden Stellen (1) die Definition von Bruchoperatoren, an der Stelle (2) die Assoziativität von Operatoren und die Vertauschbarkeit von Multiplikations- und Divisionsoperatoren sowie an der Stelle (3) Aussagen über die Verkettung von Multiplikations- bzw. Divisionsoperatoren. Durch Übergang von den Bruchoperatoren zu den *Bruchzahlen* gewinnt man so die Multiplikationsregel für Bruchzahlen. Hierbei wird dieser Übergang von den Bruchoperatoren zu den Bruchzahlen mit den Argumenten motiviert, daß man Bruchoperatoren der Größe nach ordnen, sie zur Benennung von Größen benutzen und mit ihnen rechnen kann wie mit natürlichen Zahlen (vgl. auch III.).

Grundlage für die Einführung der *Division* bei der Variante 2 als Umkehroperation der Multiplikation bildet der folgende Satz:

Jede lineare Gleichung der Form

$$\left(\cdot \frac{m}{n} \right) \circ x = \left(\cdot \frac{p}{q} \right) \text{ besitzt genau eine Lösung, nämlich}$$

$$\left(\cdot \frac{n}{m} \right) \circ \left(\cdot \frac{p}{q} \right) \text{ bzw. } \left(\cdot \frac{n \cdot p}{m \cdot q} \right).$$

Bei der Begründung – die im Unterricht an konkreten Beispielen mittels einer verallgemeinerungsfähigen Beweisstrategie erfolgt – wird die vorher erarbeitete Kenntnis von Gegenoperatoren eingesetzt.

Bei der *Variante 3* wird bei der Multiplikation und Division *nicht* isoliert auf der Operatorebene argumentiert. Vielmehr deutet man die *Multiplikation* $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}$ so, daß auf $\frac{m}{n}$ bzw. auf die Größe $\frac{m}{n}$ der Bruchoperator $(\cdot \frac{p}{q})$ einwirkt. Den Bruchoperator $(\cdot \frac{p}{q})$ zerlegt man in die beiden Teilkomponenten $(\cdot p)$ und $(: q)$. Nach einer *vorhergehenden* Behandlung des Vervielfachens und des Teilens von Größen in dieser

Terminologie bedeutet die Multiplikation nur noch die Hintereinanderausführung dieser beiden Operationen. Man notiert dies bei dieser Variante häufig in Form folgenden Diagramms:

$$\frac{m}{n} \xrightarrow{\cdot p} \frac{m \cdot p}{n} \xrightarrow{: q} \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$$

Mit Ausnahme der Notationsform, der Sprechweise und der Position des Multiplikators und Multiplikanden entspricht dieser Weg vom Grundgedanken her dem in III.6.2 und III.6.3.1 genauer beschriebenen Einführungsweg der Multiplikation nach dem dortigen Von-Ansatz.

Von den verschiedenen Wegen zur Ableitung der *Divisionsregel* im Sinne der Variante 3 skizzieren wir hier die sogenannte *Gegenoperatormethode* (vgl. auch III.7.5.7) anhand folgenden Beispiels: $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$ bezeichnet die Zahl x , die mit $\frac{4}{5}$ multipliziert $\frac{2}{3}$ ergibt. Dies notiert man in Form des folgenden Diagramms:

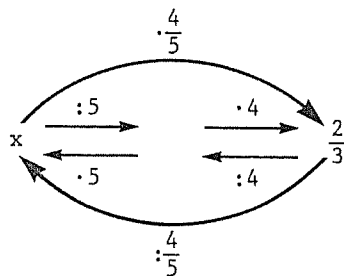
$$x \xrightarrow{\cdot \frac{4}{5}} \frac{2}{3}$$

Formal gelangt man zur Zahl x auf folgende Art:

$$\begin{array}{c} \cdot \frac{4}{5} \\ x \xrightarrow{\quad} \frac{2}{3} \\ \cdot \frac{4}{5} \end{array}$$

Die Zerlegung von $(\cdot \frac{4}{5})$ in die beiden Teilkomponenten $(\cdot 4)$ und $(: 5)$, die durch die *Gegenoperatoren* $(: 4)$ und $(\cdot 5)$, also insgesamt durch den

Gegenoperator ($\cdot \frac{5}{4}$), in ihrer Wirkung aufgehoben werden, notiert man folgendermaßen:



Man entnimmt diesem Diagramm:

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$$

Erst nach der Multiplikation und Division behandelt man bei dem Operatorkonzept i.a. die *Addition* und *Subtraktion*. Beide Rechenoperationen lassen sich *theoretisch* auch im Sinne des Operatorkonzepts einführen (für Details vgl. Padberg (1978)). Wegen der Kompliziertheit und Anwendungsferne der entsprechenden Wege wurden sie aber selbst zu Beginn der siebziger Jahre nur äußerst selten von Schulbuchautoren besprochen. Vielmehr führte man die Addition und Subtraktion im Prinzip so ein, wie wir es näher in den Abschnitten III.4. und III.5. ausführen.

Neben diesen Problemen bei der *Addition* und *Subtraktion* haben folgende *weiteren Problembereiche* bewirkt, daß das Operatorkonzept zunächst durch Übergang von der Variante 2 zur Variante 3 *modifiziert* und daß es in *formalisierter Form* in den seit Mitte der achtziger Jahre neukonzipierten Schulbuchkonzepten sogar *eliminiert* wurde.

- Die Abfolge „zunächst Multiplikation, dann Addition“ – wie sie zumindest bei der Variante 2 des Operatorkonzepts üblich ist – weist *viele Nachteile* auf. Für genauere Details vergleiche man III. 8.5
- Zu Beginn des Lehrgangs erfolgt *keine Anknüpfung an die Vorerfahrungen* der Schüler mit Bruchzahlen. (Variante 2)

- Die Behandlung des *Erweiterns* und *Kürzens* durch das Einschieben bzw. Herausnehmen insgesamt wirkungsloser Operatorpaare vermittelt den Schülern *keine anschauliche Vorstellung* davon, warum zwei gegebene Brüche gleichwertig sind (vgl. auch Fricke (1983)).
- Die Definition der *Kleinerrelation* bei Bruchoperatoren ist relativ aufwendig (vgl. Padberg (1978)). Der Vergleich von Bruchoperatoren kann *nur* innerhalb des Maschinenmodells, *nicht* aber von praktischen Anwendungen her motiviert werden.
- Bei der Behandlung der *Multiplikation* im Sinne der Variante 2 handelt es sich um ein Rechnen mit Abbildungen. Hierbei wird oft übersehen – wie Schwartz (1978) zu Recht betont –, daß „es zwar technisch leicht ist, Operatoren miteinander zu verketteten, daß aber gerade die *Vorstellung* und der *Anwendungsbezug* bei diesem Modell größere Schwierigkeiten bereiten“. Auch kommt man kaum ohne ein Bewußtmachen des *Verkettungsbegriffs* (einschließlich des Symbols „o“) aus.
- Das Operatorkonzept trägt *nicht* zu einer Lösung des alten Problems im Bereich der *Multiplikation* bei, den Schülern einsichtig zu machen, *warum* man die durch die Verkettung von Bruchoperatoren eingeführte Verknüpfung als *Produkt* bezeichnet (vgl. Schwartz (1978)).
- Die Behandlung der *Multiplikation* im Sinne des Operatorkonzepts verdrängt nach den Erfahrungen von Brüning / Spallek (1981) beim Schüler die wichtigen *inhaltlichen Vorstellungen* bei der Multiplikation, denen gerade bei *anwendungsbezogenen Fragestellungen* eine besondere Bedeutung zukommt (vgl. III.6.5.7), zugunsten eines *mehr formalen Umgehens* mit Operatoren. Kaum ein Schüler ist – so Brüning / Spallek (1981) – in der Lage, die „relativ aufwendige, allenfalls vielleicht formal elegante Einführung der Multiplikation“ über die Verkettung von Operatoren zu *erklären*.
- Offensichtlich ist das Operatorkonzept in Deutschland *nicht* primär unter *pädagogischen*, sondern überwiegend unter *mathematischen* Aspekten eingeführt worden. So hat nach Schwartz (1978)

„primär die *strukturelle Betrachtungsweise* [die Bruchoperatoren bilden unter der Verkettung als Verknüpfung eine kommutative Gruppe] die Operatorverkettung in der Schule motiviert“.

- Bei der Einführung der *Multiplikation* im Sinne der Variante 3 können wir gegenüber dem Von-Ansatz (vgl. III.6.2, III.6.3.1) *keine* Vorteile, sondern nur Nachteile (stärker formal, weniger inhaltliche Vorstellungen) erkennen.
- Die für die Multiplikation genannten Argumente treffen auch weiterhin für die *Division* zu. So moniert Fricke (1983), daß die Schüler beim Operatorkonzept „nichts, aber auch gar nichts, davon erfahren, was denn eine Division eines Bruches durch einen Bruch bedeuten könne. D.h. *es fehlt jeder Bezug zu irgendeiner Anwendung oder anschaulichen Vorstellung*. Es ist nur ein artifizielles Hantieren mit Operatoren“. [Heraushebung durch den Verfasser.] Diese Argumente treffen sowohl für die Variante 2 wie die Variante 3 zu.
- Beim Operatorkonzept – insbesondere in der Variante 2 – ist die Gefahr groß, daß man für die Bruchrechnung *mehr Zeit* investieren muß als sonst üblich. So übt und erklärt man in entsprechenden Klassen des 6. Schuljahres nach Lörcher (1982) *zunächst* durchschnittlich 8 Stunden lang Operatoren, um *danach* fast genau so viel Zeit für die Bruchrechnung zu benötigen wie Klassen, die sie *ohne* Operatoren kennenlernen. Ein erhöhter Zeitaufwand resultiert beim Operatorkonzept allein schon daher, daß die Bruchrechnung in Teilen *sowohl* mit Operatoren *wie auch* mit Bruchzahlen behandelt wird (vgl. auch Griesel (1981 b)).
- Ein erhöhter Zeitaufwand ist gerechtfertigt, wenn hieraus *größere Erfolge* in der Behandlung der Bruchrechnung resultieren. Dies ist jedoch *nicht* der Fall, wie eigene umfangreiche empirische *Untersuchungen* belegen (vgl. Padberg (1986) und III. 8.6).

Wir beenden dieses Kapitel mit Hinweisen auf den Zusammenhang zwischen den vier hier idealtypisch vorgestellten Konzeptionen und der Darstellung der Bruchrechnung im nächsten Kapitel. Die Ausführungen in den Abschnitten 2 und 3 zeigen, daß eine Behandlung der Bruch-

rechnung im Sinne dieser beiden Konzeptionen im *Unterricht* von 6. Klassen *nicht* sinnvoll ist. Aber auch das Operatorkonzept ist in seiner *formalisierten* Form offenkundig mit schweren Mängeln behaftet. Wir werden daher die Bruchrechnung im nächsten Kapitel in Anbetracht der Vorteile weithin im Sinne des Größenkonzepts – also unter Betonung des *Maßzahlaspekts* der Bruchzahlen (vgl. III. 1.) – darstellen. Daneben werden wir aber auch – insbesondere im Bereich der Multiplikation – von der Deutung der Bruchzahlen als *Operatoren* Gebrauch machen, jedoch *nicht* im Sinne der im 4. Abschnitt dargestellten sehr formalen Terminologie, sondern im Sinne des anwendungsnahen Von-Ansatzes (vgl. u.a. III. 6.3.1).