

Daten und Zufall - Gemeinsames Lernen

4. Daten und Zufall - gemeinsames Lernen

Ziel: Die LiV kennen Zugänge zum Wahrscheinlichkeitsbegriff, die gemeinsames Lernen auf allen Anforderungsebenen und in allen Anforderungsbereichen ermöglichen.

Die LiV...

- ...betrachten die Leitidee Daten und Zufall unter dem Punkt des gemeinsamen Lernens.
- ... erarbeiten sich den Einsatz und Umgang mit Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln unter Berücksichtigung von problemorientierten Aufgaben.
- ... erproben verschiedene Zugänge (sowohl enaktiv als auch ikonisch) zur Leitidee Daten und Zufall.
- ... wenden Tabellenkalkulationsprogramme für das Erstellen von Zufallsexperimenten, Diagrammen, Dateneingabe und –analyse an.

Ablauf

1. Rückblick
2. Gemeinsames Lernen
3. Daten und Zufall – eine reichhaltige Lernumgebung
4. Stochastische Vorstellungen
5. Zufallsexperimente
6. Tabellenkalkulationsprogramm

Rückblick: Daten und Zufall – mathematisch kommunizieren

Wahrscheinlichkeit

Summenregel

Gibt man zu einem Ereignis mehrere Pfade, muss die Wahrscheinlichkeit entlang des Pfades aufaddiert werden.

Wie groß ist die Chance, die Zahl oder nur Kopf zu werfen?

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$



Pfadregel

Für die Wahrscheinlichkeit eines Pfades muss die Wahrscheinlichkeit entlang des Pfades multipliziert werden.

Wie groß ist die Chance, maximal Zahl zu werfen?

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$



Baumdiagramm

Es zeigt alle Ergebnisse eines mehrstufigen Zufallsversuchs und deren Wahrscheinlichkeiten.



Gesetz der Großen Zahl

Je mehr Versuche du machst, desto besser passt die Wahrscheinlichkeit der relativen Häufigkeit dem Gesetz.



1000-mal werfen
Ergebnis: Zahl 100 (10%)
Relative Häufigkeit: $\frac{100}{1000} = 0,1$



1000-mal werfen
Ergebnis: Zahl 100 (10%)
Relative Häufigkeit: $\frac{100}{1000} = 0,1$

Absolute Häufigkeit

Wie oft kommt ein bestimmtes Ergebnis vor?

Relative Häufigkeit

Welches Anteil hat ein bestimmtes Ergebnis?



Absolute Häufigkeit für eine Zahl: 1
Relative Häufigkeit für eine Zahl: $\frac{1}{1000} = 0,001 = 0,1\%$

Absolute Häufigkeit für eine Zahl: 1
Relative Häufigkeit für eine Zahl: $\frac{1}{1000} = 0,001 = 0,1\%$

Mehrstufige Zufallsversuche

Der Zufallsversuch besteht aus mehreren Schritten. Du kannst die Wahrscheinlichkeit oder gleichzeitige Resultate berechnen.



Laplace-Versuche

Wie Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich. Du kannst die Wahrscheinlichkeit eines oder aller Resultate berechnen.

Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses = Anzahl der günstigen Ergebnisse / Anzahl der möglichen Ergebnisse



Nicht-Laplace-Versuche

Die Anzahl der Ergebnisse ist nicht gleich. Du kannst die Wahrscheinlichkeit eines oder aller Resultate berechnen.



Zufallsversuche

Für jeden Zufallsversuch brauchst du ein Zufallsgerät. Wie der Versuch ausfällt, hängt vom Zufall und nicht von deinem Geschick ab.



Aktivität 1:

Zentrale Begriffe der Stochastik

Zufallsexperiment

Ergebnis

Ergebnismenge

Relative Häufigkeit

Absolute Häufigkeit

Wahrscheinlichkeit

Laplace-Experiment

Ereignis

Gegenereignis

Sicheres Ereignis

Unmögliches Ereignis

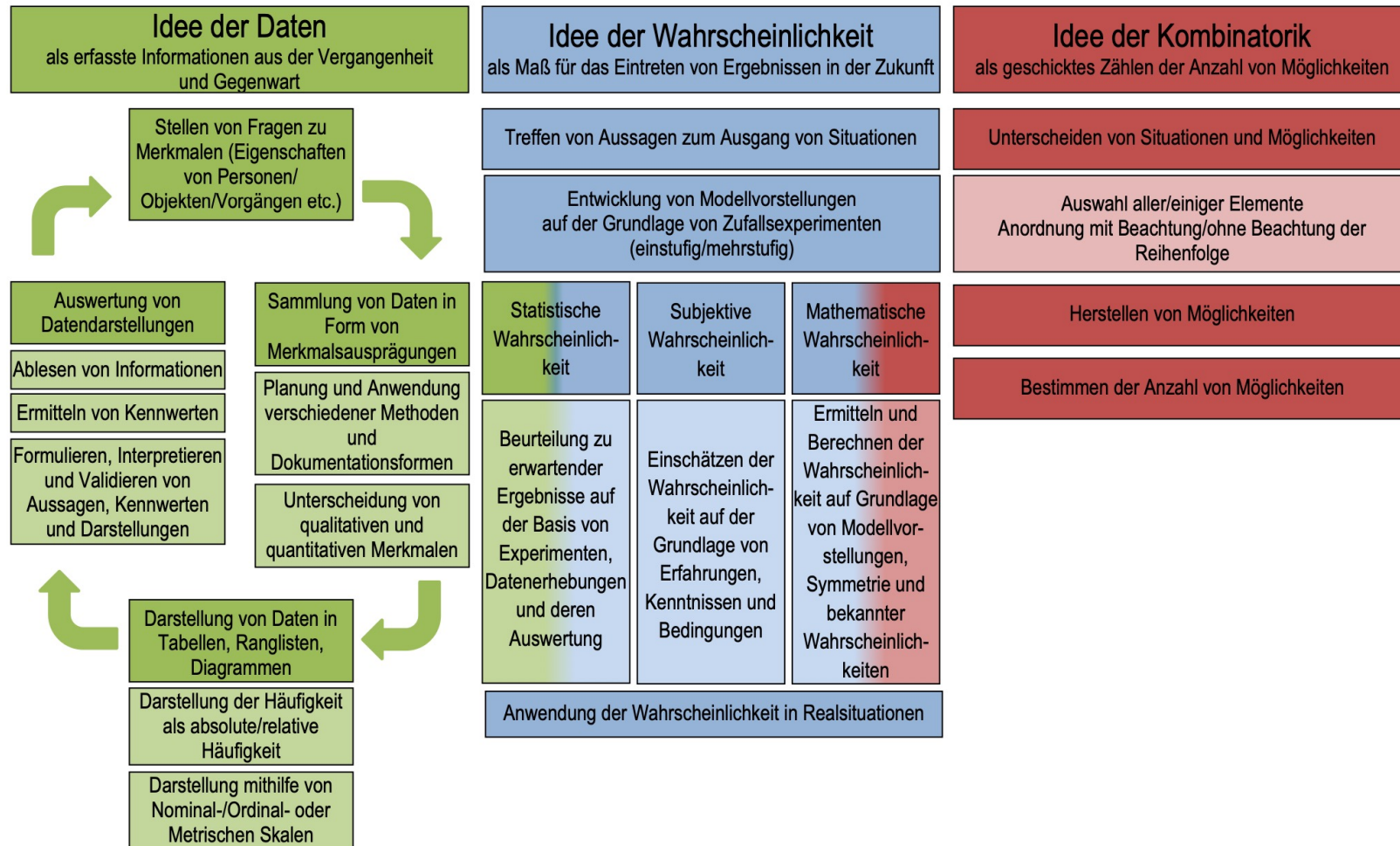
Lernumgebung Bingo

2	8
12	10

Aktivität 2:

Zentrale Begriffe Abschlüsse

1. Sichtet die Stochastikaufgaben aus den Abschlüssaufgaben (ESA und MSA).
2. Welche zentralen Begriffe werden für die Abschlüsse benötigt?



LISUM, CC-BY-SA 4.0

Aktivität 3:

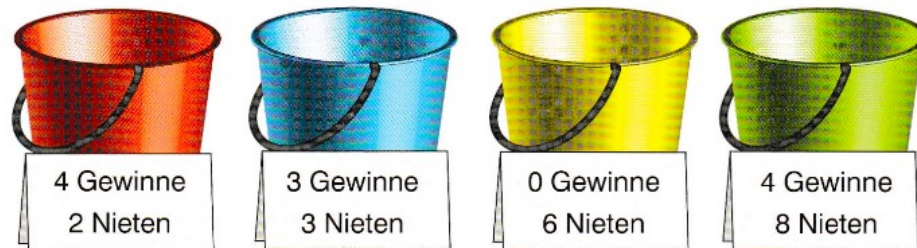
Der Wahrscheinlichkeitsstreifen



Ihr braucht:

1 Wahrscheinlichkeitsstreifen, 4 Buntstifte (rot/blau/gelb/grün)

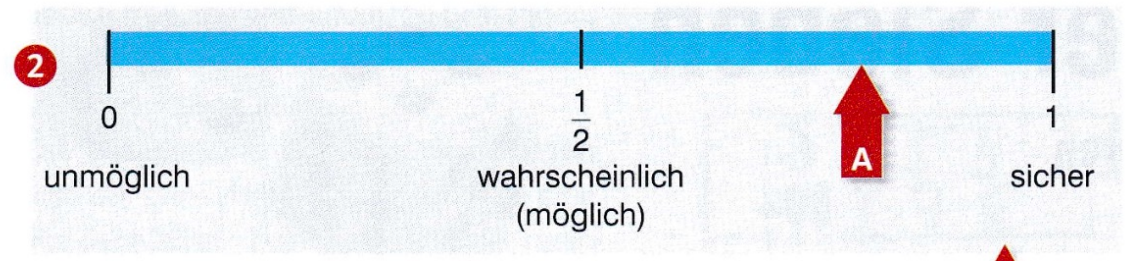
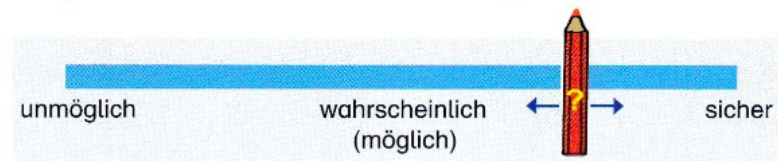
Aus jedem Eimer wird ein Los gezogen.



Vergleicht die Wahrscheinlichkeiten, einen Gewinn zu ziehen.

Legt dazu für jede Eimerfarbe einen Buntstift auf den Wahrscheinlichkeitsstreifen.

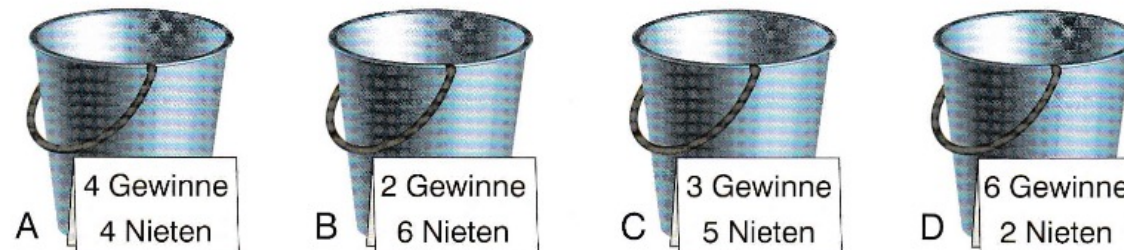
Vergleicht mit einer anderen Gruppe.



Ihr braucht:

4 Eimer, Gewinne und Nieten

Füllt 4 Eimer (wie auf dem Bild) mit Gewinnen und Nieten.
Nun deckt ihr Tücher über die Eimer und vertauscht die Eimer so oft,
dass ihr nicht mehr wisst, in welchem Eimer welche Lose sind.



Zufallsexperiment für 4 Kinder:

Jeder zieht aus einem Eimer 50-mal (mit Zurücklegen)
und notiert seine Ergebnisse in einer Strichliste.

Vergleicht die 4 Strichlisten. Vermutet, wer aus welchem Eimer
(A, B, C oder D) gezogen hat. Begründet eure Meinung.

Für das Schulfest haben die Kinder in 4 Eimer Gewinne und Nieten gelegt.
Die Verteilung der Gewinne und Nieten ist nicht bekannt, aber diese Aussagen
passen zu den Eimern.



a) Beim roten Eimer ist die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn und für eine Niete gleich hoch.

b) Beim grünen Eimer ist die Gewinnchance am höchsten.

c) Beim gelben Eimer ist es nicht sehr wahrscheinlich, einen Gewinn zu ziehen.

d) Bei einem Eimer ist es unmöglich, einen Gewinn zu ziehen.

Zeichnet passende Eimer, sodass alle Aussagen stimmen.
Findet mehrere Möglichkeiten. Vergleicht mit einer anderen Gruppe.

Unterrichtsbesuch

Verteilung der
Beobachtungsschwerpunkte

Unterrichtsstunde

Reflexion

Beobachtungsbogen der Prüfungsstunde als Grundlage für Hospitationsstunden

Übergeordnete Punkte:

1. Hat die LK sachlich und fachlich korrekt unterrichtet?
2. Hat die LK die Selbstständigkeit der Lernenden unter anderem durch schüleraktivierende Unterrichtsformen gefördert?
3. Hat die LK die unterschiedlichen Voraussetzungen und Kompetenzen der Lernenden berücksichtigt?
4. Hat die LK den Unterricht sinnvoll strukturiert und flexibel auf sich verändernde Situationen reagiert?
5. Hat die LK präzise und verständlich formuliert?
6. Ist die LK mit den Lernenden respektvoll und wertschätzend umgegangen?
7. Ist die LK überzeugend und als Vorbild aufgetreten?
8. Konnte die LK ihr didaktisches Konzept und dessen Realisierung angemessen reflektieren?

Reflexion der Stunde

1. Eigenreflexion:	LiV reflektiert ihre Unterrichtsstunde (Hilfe
2. Positivblitzlicht:	Jede LiV nennt einen Punkt (Bitte keine Dopplungen).
3. Beobachtungsaufträge:	Jede Gruppe stellt ihre Beobachtungen vor.
4. Tipps und Fragen:	LiV wählt ein bis zwei Tipps/Fragen aus, über die sie sprechen möchte.

Daten und Zufall – gemeinsames Lernen

Aktivität 4:

Gemeinsames Lernen

Was verstehen wir unter: **Gemeinsames Lernen**?

Nähern Sie sich dieser Fragestellung unter zu Hilfenahme der Fachanforderungen und dem Leitfaden für die Sekundarstufe.

Stellen Sie Ihre Ergebnisse übersichtlich dar.

Sammeln Sie Ihre Ergebnisse auf der Pinnwand.



Kompetenzen – zwei Bereiche fließen zusammen

Wissensbegriff
„Ich weiß etwas!“

Ich kenne und verstehe
Sachverhalte, ich kann sie
erklären, wiedergeben.

Handlungsbegriff
„Ich tue etwas!“

Ich gehe Zielen nach oder
bearbeite Aufgaben.

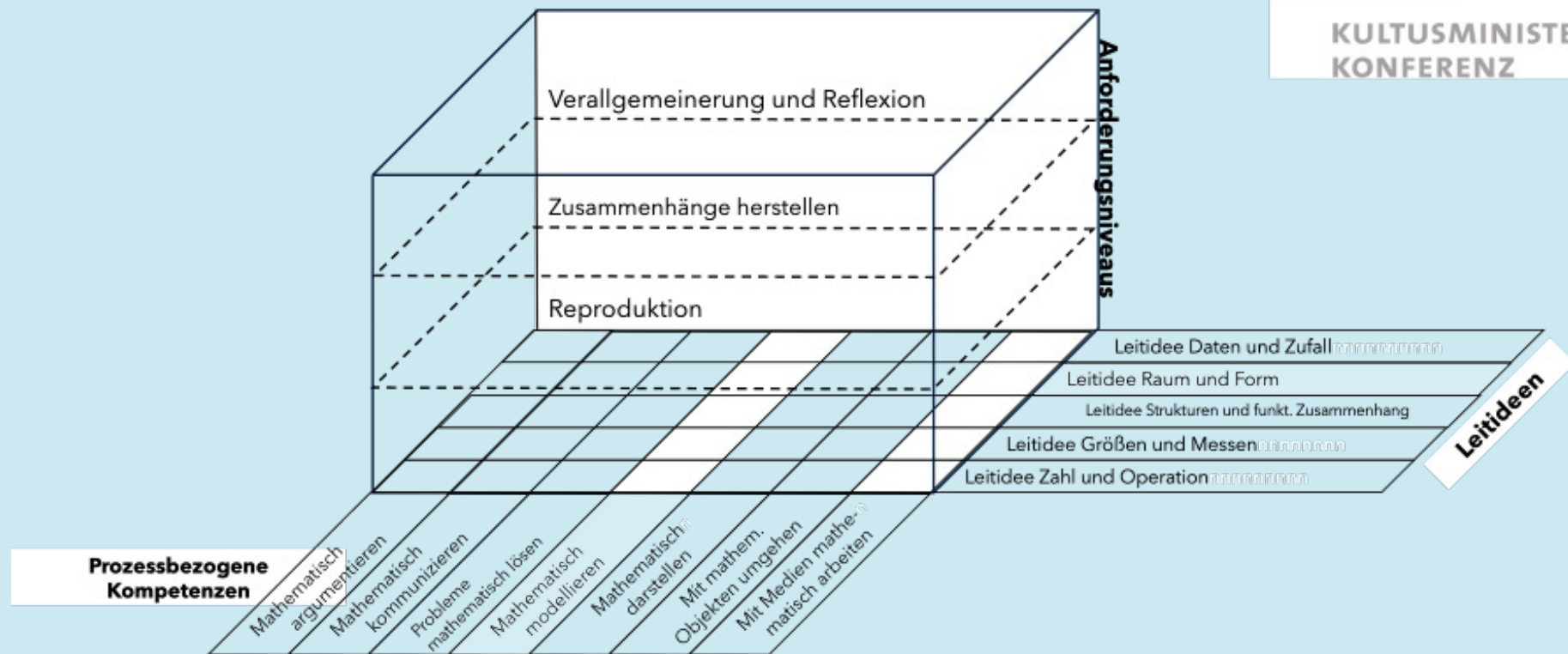
Kompetenzbegriff
„Ich kann etwas!“

Ich wende mein Wissen an, um handelnd problemhaltige
Situationen oder Aufgaben zu bewältigen.

Matrix des gemeinsamen Lernens

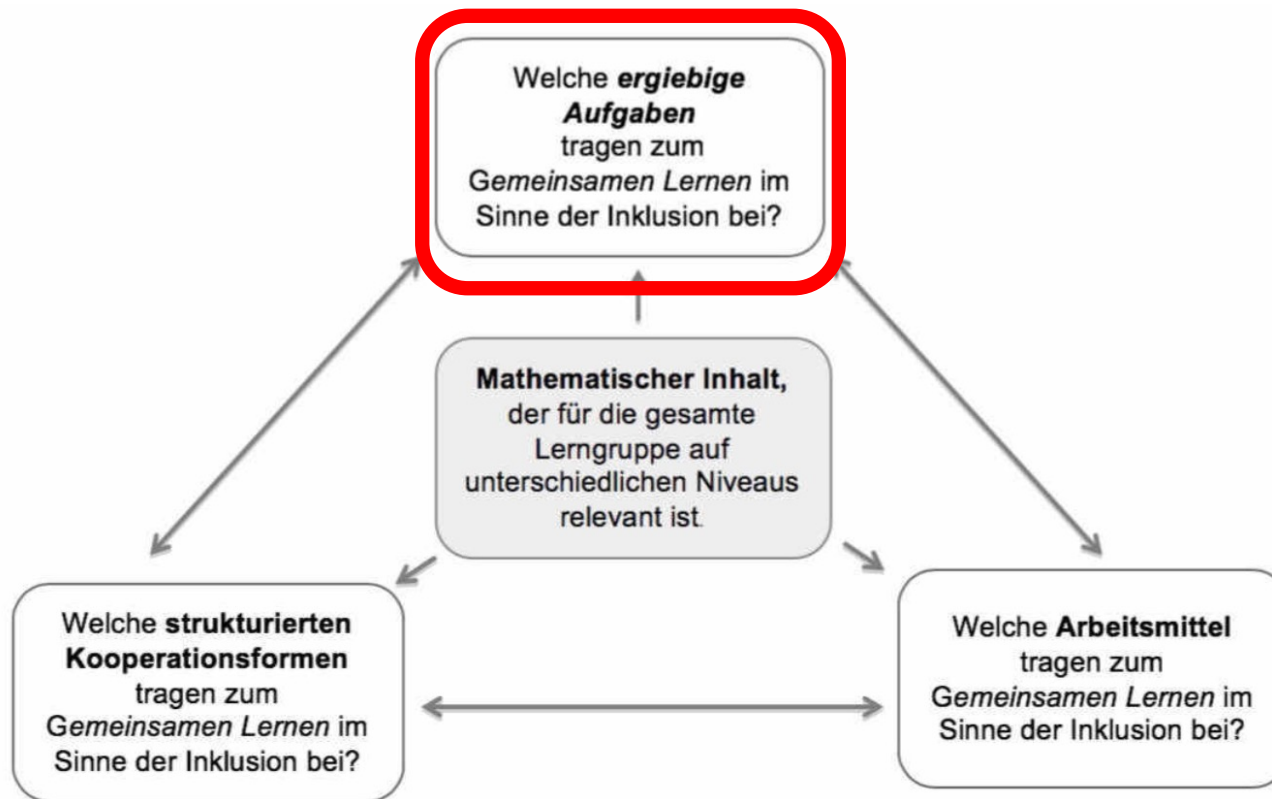
	Anforderungsebene ESA	Anforderungsebene MSA	Anforderungsebene ÜOS
Anforderungsbereich I			
Anforderungsbereich II			
Anforderungsbereich III			

Kompetenzmodell der Bildungsstandards



Kultusministerkonferenz (Hrsg.) (2022) Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards im Fach Mathematik
Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA) . Beschluss vom 14.10.2004 i.d.F. vom 23.06.2022.

Gemeinsam Lernen (nach Pikas)



Planungsfelder für das *Gemeinsame Lernen* im Mathematikunterricht (Planungsraster)

Ergiebige Aufgaben...

... sind Voraussetzung für die Arbeit am selben Inhalt/Gegenstand auf verschiedenen Niveau-Stufen:

- a) **Komplexe Aufgaben** mit differenzierten Teilaufgaben (Differenzierung durch verschiedene Anforderungsbereiche)
- b) **Offene Aufgaben** (Selbstdifferenzierung im Hinblick auf Auswahl, Komplexität/Anspruchsniveau, Lösungswege...)
- c) **Parallele Aufgaben** (Differenzierung durch zueinander gehörige Inhalte im Sinne des Spiralprinzips)
- d) **Substanzielle Aufgaben**, die auf unterschiedlichem Niveau zu bearbeiten sind (Differenzierung im Hinblick auf Lösungswege, auch konkretes Handeln möglich)

Ergiebige Aufgaben: Eisaufgabe

Situation: **Gefäß:** Becher oder Waffel
 Eissorte: Zitrone oder Erdbeer
 Soße: Karamell oder Himbeer



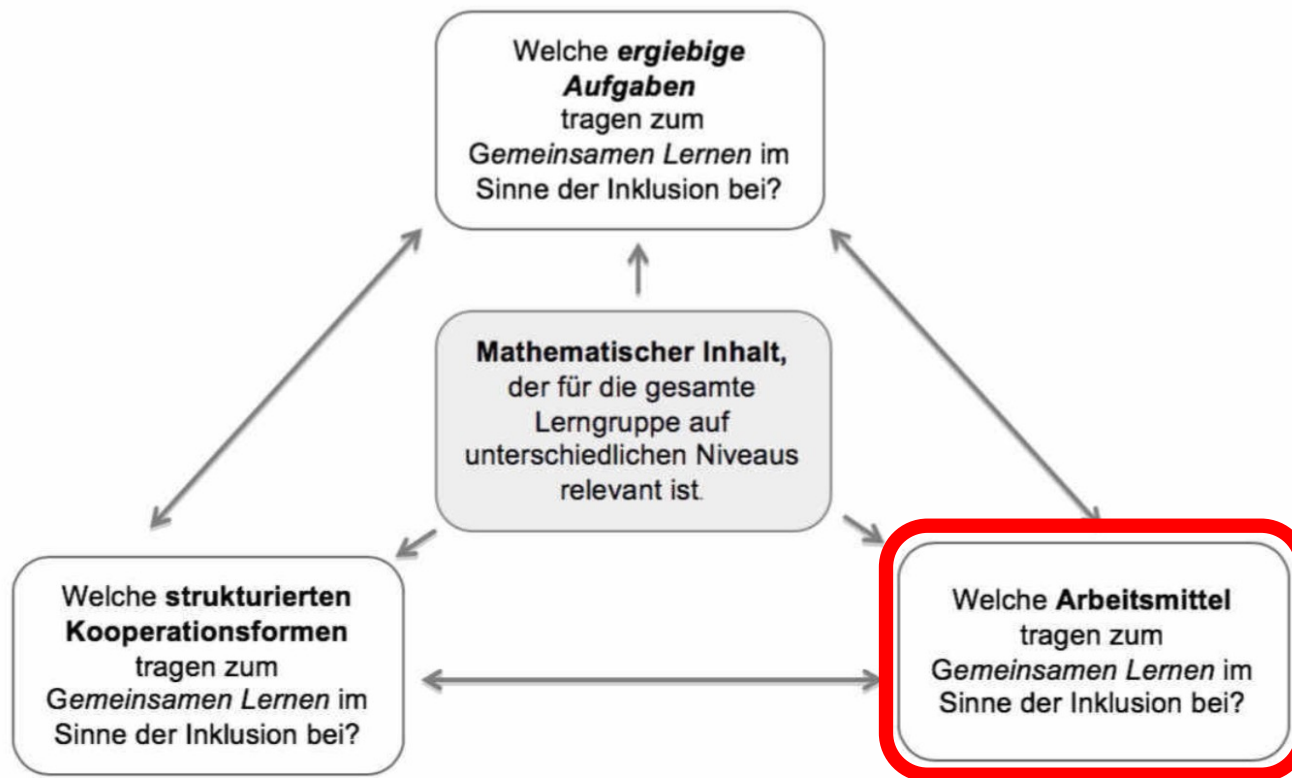
Aufgabe: Finde viele verschiedene Möglichkeiten ein Eis zu kaufen.

Aktivität: ☺ → ☺☺ → ☺☺☺☺
 8 min → 15 min → 10 min



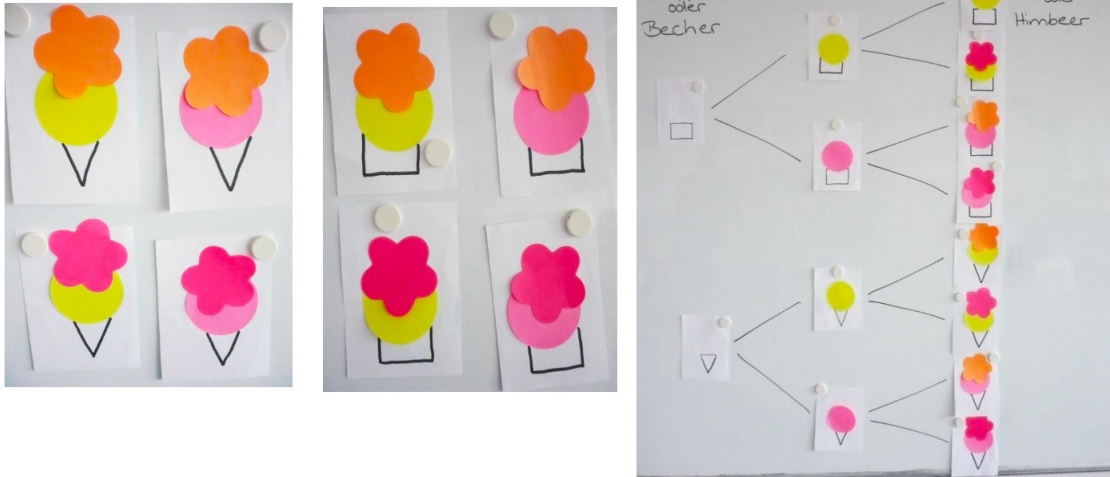
1. Finden Sie alle *Möglichkeiten* ein Eis zu kaufen. Welche *verschiedenen Lösungswege* könnten die Kinder wählen?
2. Finden Sie möglichst viele *verschieden Kompetenzerwartungen*, die mit dieser Aufgabe erreicht werden können.

Gemeinsam Lernen (nach Pikas)



Arbeitsmittel als **Lernmittel**:

- **Beispiel:** Aufbau von Grundvorstellungen zu mathematischen Inhalten (Kombinatorischer Aspekt der Multiplikation)



August 2015 © PIK AS (<http://www.pikas.dzlm.de>)

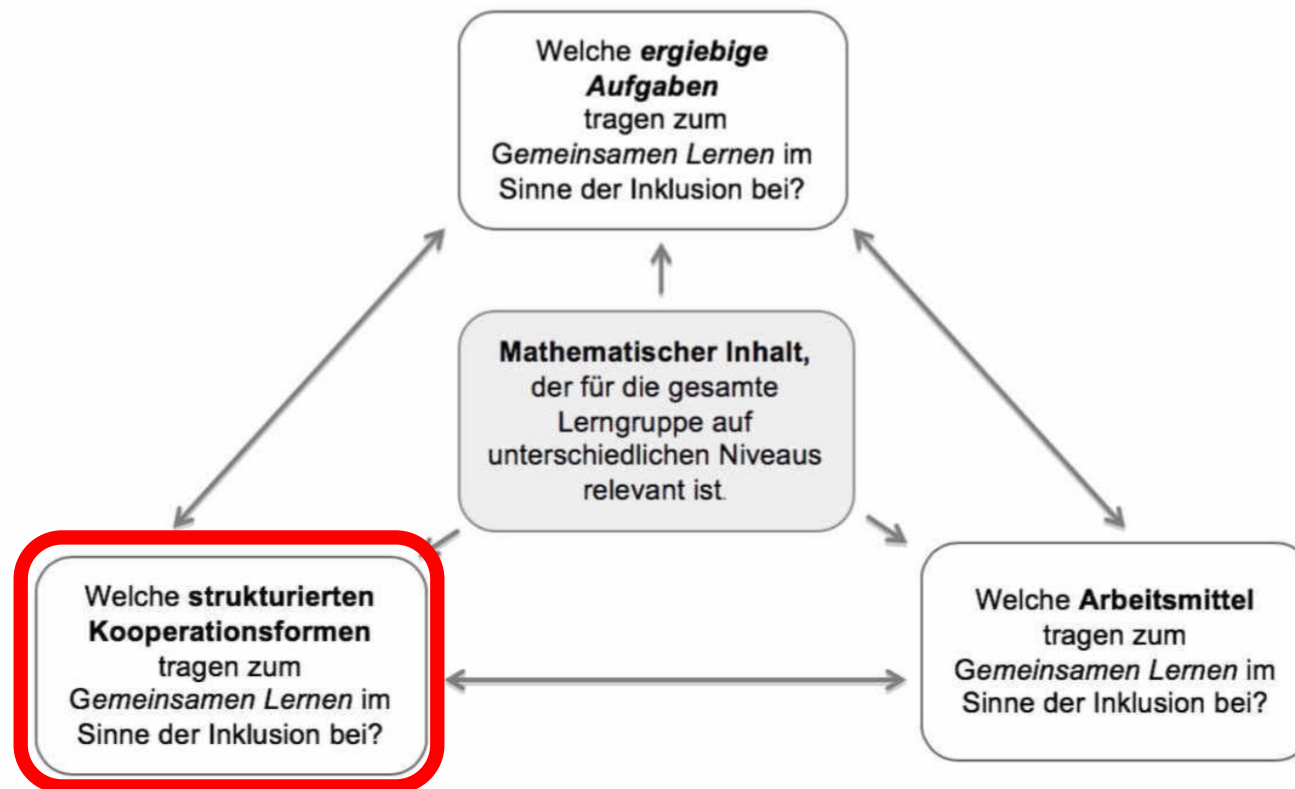
Arbeitsmittel als **Kommunikations-** und **Argumentations-** und **Beweismittel**:

- **Beispiele:** *Bewusstmachung, Beweis* von Gedankengängen
Welche fehlen? Warum?



August 2015 © PIK AS (<http://www.pikas.dzlm.de>)

Gemeinsam Lernen (nach Pikas)



Think – pair – share

Strukturierung der Lernumgebung und der Rhythmisierung des Lernens in drei aufeinanderfolgenden Schritten:

think – pair – share oder **ich - du - wir**



1. ICH setze mich mit meinem Arbeitsauftrag auseinander.



2. Wir tauschen uns aus.
Ggf. arbeiten wir zusammen weiter.



3. Wir präsentieren und diskutieren unsere Ergebnisse im Plenum.

Kooperatives Lernen

Ziel einer kooperativen Lernumgebung im Fach Mathematik **ist nicht**, dass einzelne Kinder eine Aufgabe für die anderen Mitglieder besonders schnell lösen.



Ziel einer kooperativen Lernumgebung im Mathematikunterricht **ist es**, dass **jedes Mitglied** einer Gruppe auf seinem **individuellen Niveau** durch einen am **gemeinsamen Ziel orientierten Austausch**, und besonders den damit verbundenen, fortwährenden **Perspektivwechsel**, zu einem **tieferen Verständnis** mathematischer Inhalte gelangt.

Gemeinsames Lernen *individuell* und gleichzeitig *kooperativ* gestalten:

Alle Kinder lernen erfolgreich...

- an einem **gemeinsamen Gegenstand/ Inhalt/ Thema**,
- in **Kooperation** miteinander,
- auf ihrem **individuellen Entwicklungsniveau** und
- mittels ihrer momentanen **individuellen Denk- und Handlungskompetenzen**.

(in Anlehnung an FEUSER 1996)

Rechnen im Team: “Gemeinsam Mathelernen muss stärker betont werden.”

Christoph Selter (Quamath)

Basiskompetenzen stärken: Mathematik ist hierarchisch strukturiert. Ohne solide Grundlagen ist das Weiterlernen nicht möglich. Lehrkräfte benötigen Unterstützung, um diagnosegeleitet fördern zu können. Dabei geht es nicht darum, Kinder einfach mehr üben zu lassen, sondern passgenaue Förderangebote zu entwickeln. Das erfordert gute Aufgaben, klare Interpretationshilfen und gezielte Materialien.

Leistungsstarke Schülerinnen und Schüler fördern: Diese Kinder fallen oft nicht auf, weil sie das Standardprogramm problemlos bewältigen. Hier brauchen Lehrkräfte Unterstützung, um anspruchsvollere Aufgaben zu entwickeln, die auch für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler eine Herausforderung darstellen und sie nicht bloß beschäftigen.

Rechnen im Team: “Gemeinsam Mathelernen muss stärker betont werden.”

Christoph Selter (Quamath)

QuaMath

QuaMath (Unterrichts- und Fortbildungs-Qualität in Mathematik entwickeln) ist ein von der Kultusministerkonferenz (KMK) initiiertes Programm, das die Qualität des Mathematikunterrichts in Deutschland nachhaltig verbessern soll. Im Zentrum von *QuaMath* stehen fünf zentrale Prinzipien, die einen modernen Mathematikunterricht prägen:

1. Kognitive Aktivierung
2. Verstehensorientierung
3. Durchgängigkeit
4. Lernendenorientierung und Adaptivität
5. Kommunikationsförderung

Rechnen im Team: “Gemeinsam Mathelernen muss stärker betont werden.”

Christoph Selter (Quamath)

Redaktion: *Ist dieser Austausch etwas, das in Zeiten eigenständiger, individueller Arbeitsweisen der Lernenden auf der Strecke bleibt?*

Selter: Ja, gemeinsames Lernen muss wieder stärker betont werden. In vielen Schulen gibt es eine Tendenz zur individuellen Förderung, bei der Schülerinnen und Schüler Lernpakete eigenständig bearbeiten. Dadurch kann jedoch schnell der essenzielle Austausch mit der Lehrkraft und den Mitschülerinnen und Mitschülern verloren gehen. Gemeinsames Sprechen, Verstehen und Arbeiten sind gerade im Mathematikunterricht entscheidend, um komplexe Inhalte nachhaltig zu verstehen. Es ist unverzichtbar, den Mathematikunterricht langfristig wieder stärker auf Gemeinschaft und Interaktion auszurichten, um sowohl leistungsschwächere als auch leistungsstarke Schülerinnen und Schüler besser zu fördern.

Rechnen im Team: “Gemeinsam Mathelernen muss stärker betont werden.”

Christoph Selter (Quamath)

In *QuaMath* möchten

wir deutlich machen, dass viele mathematische Aufgaben das Potenzial haben, auf unterschiedlichen Niveaus bearbeitet zu werden, während sie gleichzeitig einen gemeinsamen Kern aufweisen. Eine Aufgabe kann etwa so gestaltet sein, dass manche Kinder sie mit Material bearbeiten, andere im kleineren Zahlenraum bis 20 oder im größeren Zahlenraum bis 100. Unsere Grundprinzipien – insbesondere Lernenden-Orientierung und Adaptivität – unterstützen die Lehrkräfte dabei, solche Konzepte umzusetzen. Das Ziel ist, den Unterricht fachlich zu rahmen und einen gemeinsamen Kern herauszustellen, statt jedes Kind isoliert an individuellen Lernpaketen arbeiten zu lassen.

Zusammenfassung: Gemeinsames Lernen im Mathematikunterricht

-

Daten und Zufall – eine reichhaltige Lernumgebung

Themen für die Leitidee Daten und Zufall

Auszug aus den Fachanforderungen:

- Strichlisten, absolute Häufigkeit, Tabelle, Säulendiagramme
- Baumdiagramme
- Zufallsexperimente, Ergebnis
- Median, arithmetischer Mittelwert
- Relative Häufigkeit
- Wahrscheinlichkeit, Empirisches Gesetz der großen Zahl, Ereignis, Gegenereignis
- Laplace-Experimente
- Zwei- bzw. mehrstufige Zufallsexperimente

Beispiele für die Öffnung von Aufgaben – Wiederholung aus der AV „Aufgabenkultur und Lernumgebung“

- Blütenaufgaben
- Produktives Üben
- Strategien nach Schupp
- Inner- und außermathematische Öffnung
- Intelligentes Üben (5)

Denkt an die verschiedenen Aufgabentypen

Formen des intelligenten Übens

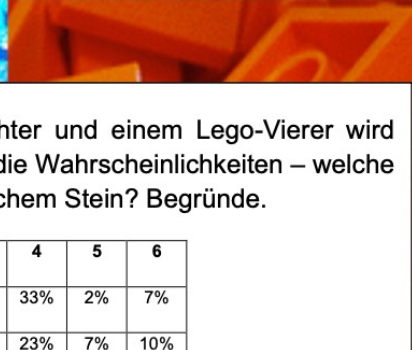
Fünf Formen des intelligenten Übens (nach Leuders)

1. Reflektierendes Üben
2. Strukturierte Aufgaben
3. Entdeckendes Üben
4. Produktives Spielen
5. Fermiaufgaben

Beispiel: Blütenaufgabe







♥ Mit einem Lego-Achter und einem Lego-Vierer wird gewürfelt. Ronja schätzt die Wahrscheinlichkeiten – welche Schätzung gehört zu welchem Stein? Begründe.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Lego-?	11%	2%	45%	33%	2%	7%
Lego-?	10%	13%	37%	23%	7%	10%

♠ Gib eine Schätzung für die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Augenzahlen bei einem Lego-Sechser an. Würfel anschließend mit einem Lego-Sechser und prüfe deine Schätzung.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Lego-Sechser						



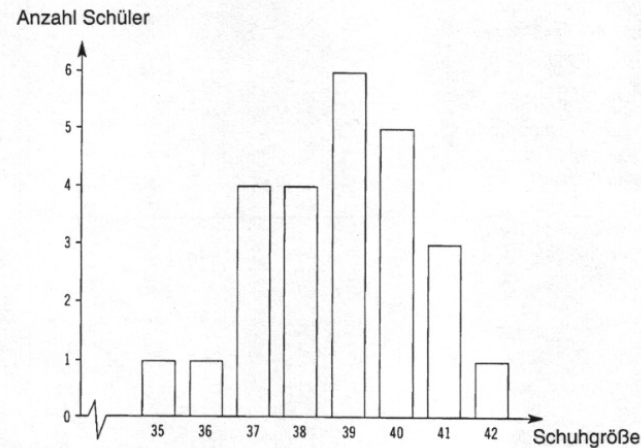

♦ Ein Lego-Achter wurde 500mal geworfen. Die einzelnen Augenzahlen traten dabei wie folgt auf:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Gewürfelte Anzahl	60	3	233	147	1	56

♣ Mit einem Lego-Achter wird einmal gewürfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dabei eine Zahl unter vier zu würfeln? Beschreibe dein Vorgehen ausführlich.

Gib mithilfe der angegebenen Würfelergebnisse eine Annäherung für die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Augenzahlen an.

Beispiel: Blütenaufgabe



Tina hat ein Diagramm über die Schuhgrößen der Schülerinnen und Schüler ihrer Klasse angefertigt.

♣ Wie viele Kinder haben die Schuhgröße 41?

♠ Formuliere selbst eine Aufgabe zu diesem Diagramm, die deine Mitschüler und Mitschülerinnen lösen sollen.

♥ Jeweils vier Kinder haben die gleiche Schuhgröße. Welche ist das?

♦ Wie viele Schüler gehen in Tinas Klasse? Erkläre, wie Du das berechnet hast.



Aktivität 5:

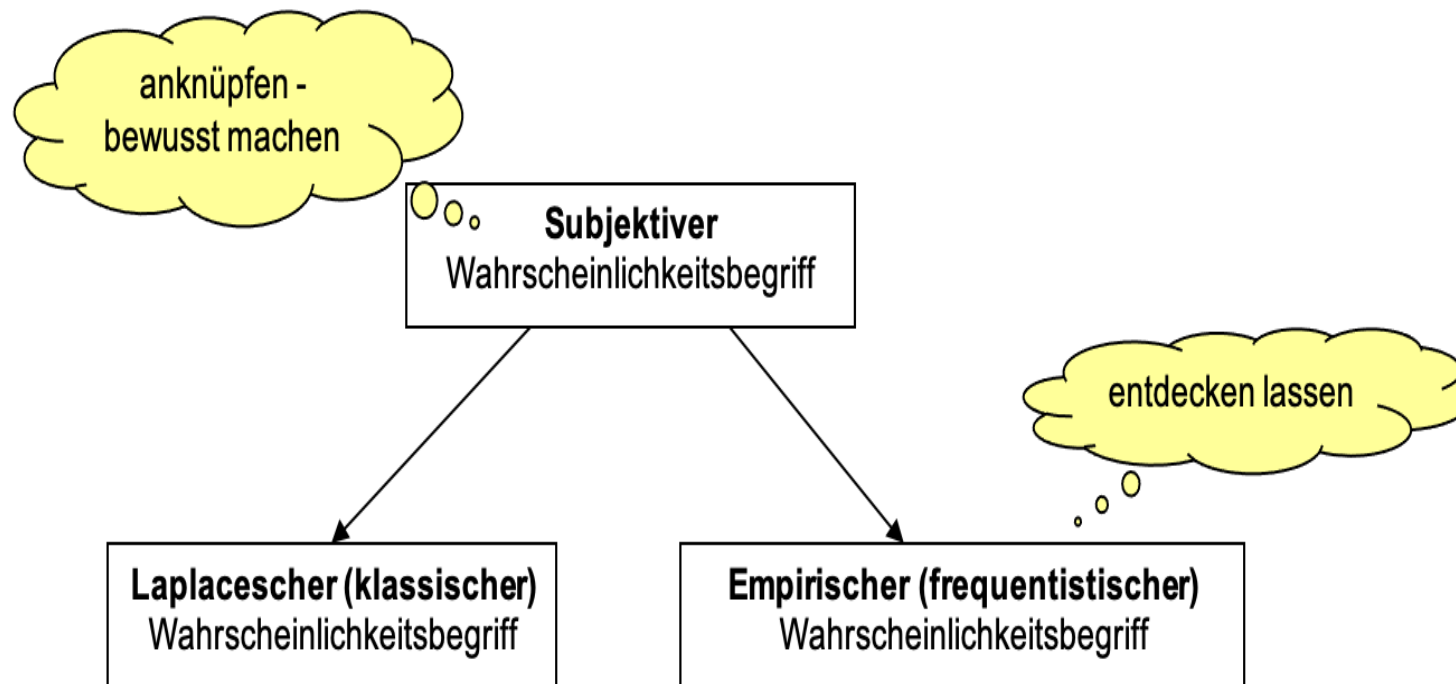
Daten und Zufall unter dem Aspekt des gemeinsamen Lernens

Erstellen Sie eine „reichhaltige Lernumgebung“ zur Leitidee Daten und Zufall unter dem Aspekt des gemeinsamen Lernens.

- Nutzen Sie gerne mitgebrachte Schulbücher bzw. Arbeitshefte.
- Wählen Sie ein Thema und die Klassenstufe nach Belieben aus.
- Beschreiben Sie anhand Ihres Beispiels die Berücksichtigung des gemeinsamen Lernens.

Stochastische Vorstellungen entwickeln

Didaktisches Vorgehen





Schwerpunkte des Bereichs Wahrscheinlichkeiten

- Kinder (müssen) lernen, „ihr subjektives Empfinden [...] zunehmend in den Hintergrund“ zu stellen (Hasemann & Mirwald 2008, S. 141)
- Schülerinnen und Schüler kommen zu der Einsicht, „dass der Zufall kalkulierbar ist und dass zufällige Ereignisse mit mathematischen Mitteln modelliert werden können“ (Hasemann & Mirwald 2008, S. 141)
- Reflektierter Umgang mit Wahrscheinlichkeiten im Schulkontext und auch im Alltag

Differenz trifft...

Stochastische Modelle entwickeln

Spieler: 2 bis 4

Alter: ab Klasse 7

Benötigt werden: 2 Würfel,
ein Spielblatt für jeden Spieler,
18 Chips pro Spieler

Spielblatt					
0	1	2	3	4	5

9

Spielanleitung:

Jeder Spieler verteilt seine 18 Chips auf die Spalten nach seiner Wahl. Es wird reihum jeweils mit 2 Würfeln gewürfelt. Der jüngste Spieler beginnt.

Das Ergebnis eines Wurfes ist die Differenz der Augenzahlen. Wenn die Differenz z.B. 3 beträgt, so wird ein Chip aus der Spalte „3“ entfernt. Befindet sich dort kein Chip, dann hat man Pech.

Gewonnen hat, wer zuerst alle Chips abgeräumt hat.

(Fehl-) Vorstellungen „Differenz trifft“ Wie (re-)agierst du?

Anna: „Ich lege alle Chips per Zufall. Beim Würfeln entscheidet es ja auch der Zufall.“

Max: „Einen Pasch zu würfeln, ist am schwersten. Deshalb lege ich keinen Chip auf die 0.“

Afra: „Alle Differenzen kommen gleich oft vor. Man könnte auch mit einem Würfel spielen.“

Bennet: „Die Wahrscheinlichkeiten helfen mir bei der Verteilung der Chips gar nicht! Der Zufall entscheidet es immer anders.“

Fehlvorstellung oder berechnete Perspektiven? Wie fachliche Sicht und Lerner Sicht auseinandergehen können

Fachliche
Perspektive:

**Aufmerksamkeit
auf lange Sicht**

Bspl. Möglichkeiten
zählen

Ich hab mich für die 7 entschieden, weil da sind sechs Möglichkeiten, und bei den anderen sind es immer nur fünf oder drei Möglichkeiten ... (Je mehr Möglichkeiten, desto größer die Wahrscheinlichkeit)

Lerner-
perspektive:

**Aufmerksamkeit
auf Einzel-Ergebnis**

Bspl. Bedeutsamkeitsansatz

Dann hab ich ja hier mehrmals im zweiten Spiel die 8 geworfen. Und ich weiß auch schon warum. [...] Weil ich bin am 16. 8. geboren

Vorstellungen gegenüberstellen

Einige Vorstellungen, die Lernende mitbringen

- Zufällige Ereignisse sind selten oder außergewöhnlich.
- Zufällige Situationen und Konstellationen sind unstrukturiert.
- Zufällige Ereignisse müssen gleichmäßig verteilt sein.
- Zufällige Ereignisse treten unerwartet auf, sind unvorhersehbar.
- Für zufällige Ereignisse gibt es keine Ursache.
- Der Zufall lässt sich nicht beeinflussen, nicht verhindern, aber auch nicht erzwingen.

Beziehen Sie zu den Erklärungsansätze für Setzentscheidungen Stellung.

Möglichkeiten zählen: „Ich hab mich für die 7 entschieden, weil da sind sechs Möglichkeiten, und bei den anderen sind es immer nur fünf oder drei Möglichkeiten. Und die 7, die kann man gut würfeln.“

Individuelle Bedeutsamkeit anführen: „Dann hab ich ja hier mehrmals im zweiten Spiel die 8 geworfen. Und ich weiß auch schon warum. [...] Weil ich bin am 16. 8. geboren.“

Auf „Erfahrungen“ berufen:

„Wenn wir ein Spiel oder so was spielen, hab ich mit der 5 immer schon sehr viel Glück gehabt.“

Mit Erreichbarkeit begründen:

„Für 6 kann man ne Fünf und ne Eins kriegen'. Und ne Eins ist schwerer [...], wenn man Schwein gehabt hat, dann kann man zwei Dreien kriegen.“

Beeinflussen: „Manchmal, hab ich ganz doll gedacht, oh man, jetzt brauch ich unbedingt ne 6, und es war ne 6.“

Perspektivwechsel im Lernprozess

4) Wieso machen Überlegungen zur Wahrscheinlichkeit überhaupt Sinn?

Katharina: „Jetzt habe ich das ganze Spiel auf die wahrscheinlichste Zahl gesetzt, und habe doch verloren! Irgendwas muss ich falsch gemacht haben.“

Thomas: „Was nutzt mir die ganze Rechnerei mit der Wahrscheinlichkeit. Davon kann ich auch nicht sagen, auf was ich in der nächsten Runde setzen soll, denn dann entscheidet ja doch der Zufall.“

Hanna: „Aber langfristig hilft das ja schon, wenn man sich mit Wahrscheinlichkeiten auskennt, denn auf lange Sicht hat der Zufall eben doch Methode.“

Was meinst Du zu dem, was Katharina und Thomas sagen? Was meint wohl Hanna mit ihrem Satz? Nimm Stellung!

~~Katharina und Thomas haben auch nicht ganz Unrecht!!!~~
~~Thomas hat recht, denn der Zufall ist unvorhersagbar.~~
~~Man kann nicht berechnen, was der Zufall macht.~~
~~Man kann nur die Wahrscheinlichkeit berechnen.~~
~~Man kann nicht sagen, auf was man setzen soll.~~
~~Man kann nur die Wahrscheinlichkeit berechnen.~~
Hanna meint das man den Zufall nicht
völlig berechnen. auf längere Dauer
Sind es wahrscheinlichere Möglichkeiten

Katharina +
Thomas haben auch
nicht ganz Unrecht!!!

Didaktische Leitideen für einen vorstellungsorientierten Stochastikunterricht

- Alltagsvorstellungen ernst nehmen und zum Ausgangspunkt des Lernens machen (erfordert Situationen, die diese Anknüpfung ermöglichen),
- breite Erfahrungsmöglichkeiten durch Experimente schaffen,
- Erlebnisse durch Experimente systematisch reflektieren, um mitgebrachte Vorstellungen zu überdenken,
- individuelle und fachliche Vorstellungen gezielt gegenüberstellen und Ursachen für Diskrepanzen finden und
- notwendige Perspektivwechsel explizit machen.

Durchführung von Zufallsexperimenten

Aktivität 6:

Verschiedene Zufallsexperimente

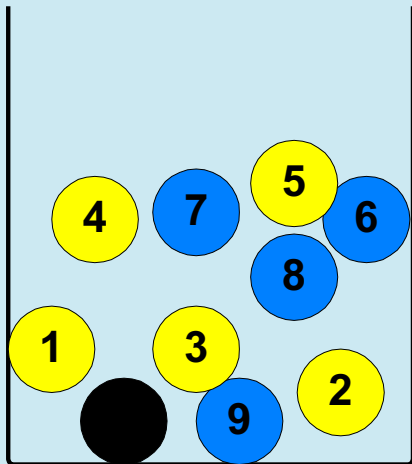
Black socks
Schweinchen würfeln
Riemer-Quader
Würfel
Glücksrad
Wettkönig
Finde deinen Weg
Drei Haufen Spiel

Jetzt geht's los!!!

Zweistufige Zufallsexperimente

Begründung der Pfadregel

Experiment: Begründung der Pfadregel

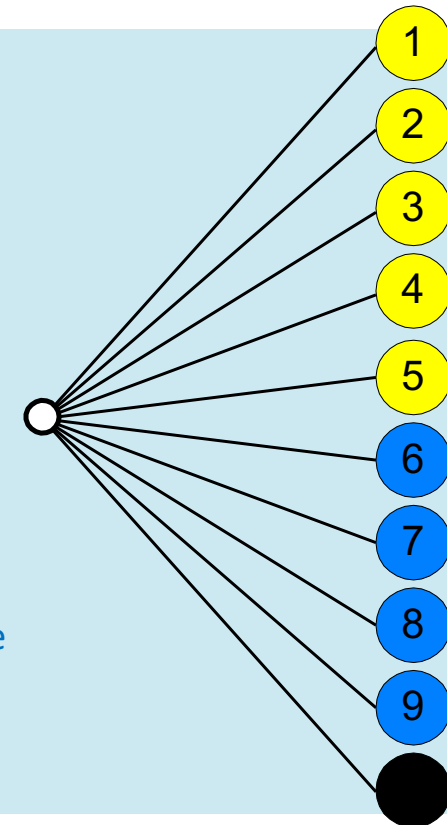


Naheliegender ist die Darstellung in einem Laplace-Baum (Abzähl-Baum).

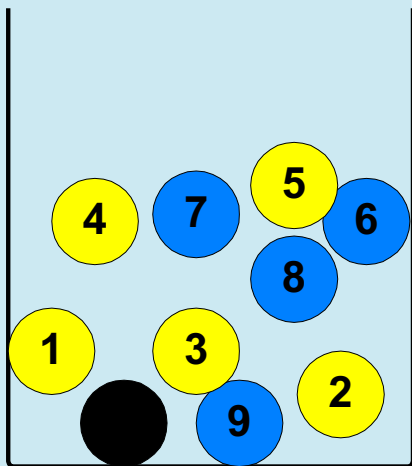
Nur bei großen Anzahlen wird das etwas mühsam ...

In einem Behälter befinden sich 5 gelbe Kugeln, 4 blaue und eine schwarze.

Ohne hinzusehen wird eine Kugel gezogen.



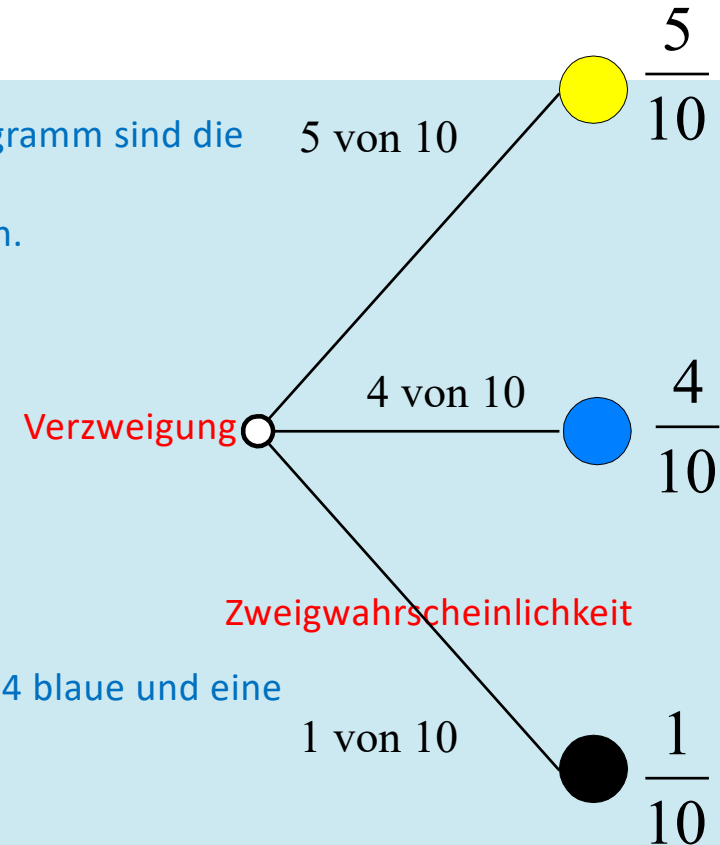
Experiment: Begründung der Pfadregel



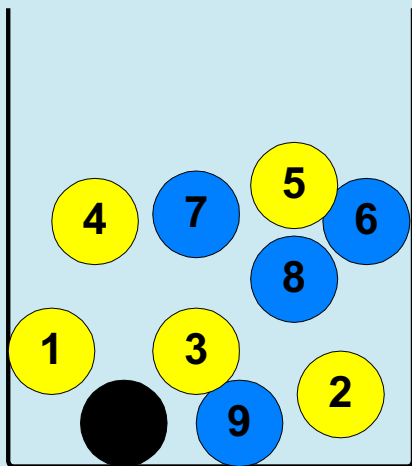
In diesem Baumdiagramm sind die Zweige nicht mehr gleichwahrscheinlich.

In einem Behälter befinden sich 5 gelbe Kugeln, 4 blaue und eine schwarze.

Ohne hinzusehen wird eine Kugel gezogen.



Experiment: Begründung der Pfadregel



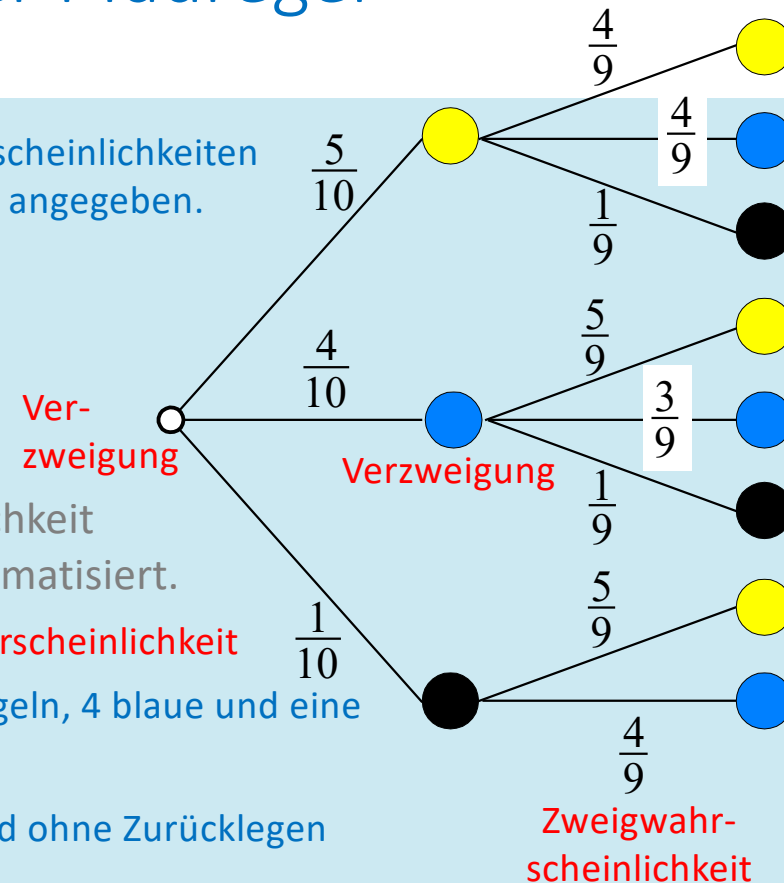
Die Zweigwahrscheinlichkeiten werden intuitiv angegeben.

Der Aspekt der bedingten Wahrscheinlichkeit wird nicht thematisiert.

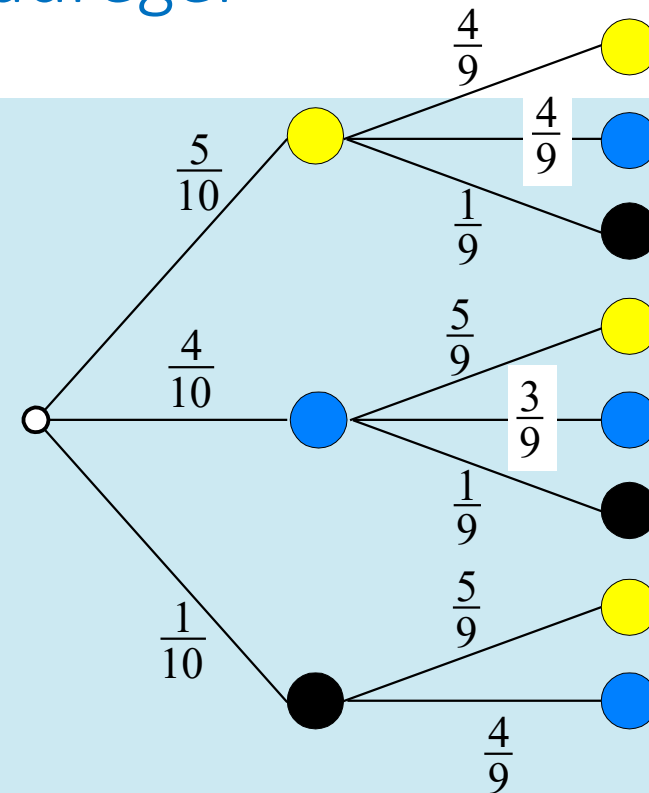
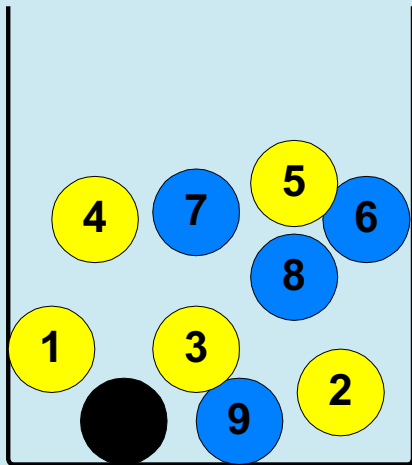
Zweigwahrscheinlichkeit

In einem Behälter befinden sich 5 gelbe Kugeln, 4 blaue und eine schwarze.

Nacheinander werden ohne hinzusehen und ohne Zurücklegen zwei Kugeln gezogen.

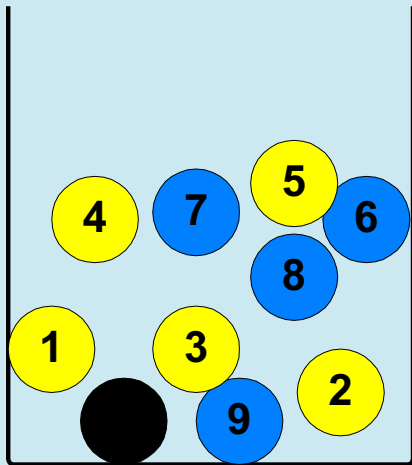


Experiment: Begründung der Pfadregel



Wie entwickelt oder begründet man hieraus die Pfadregel?

Experiment: Begründung der Pfadregel

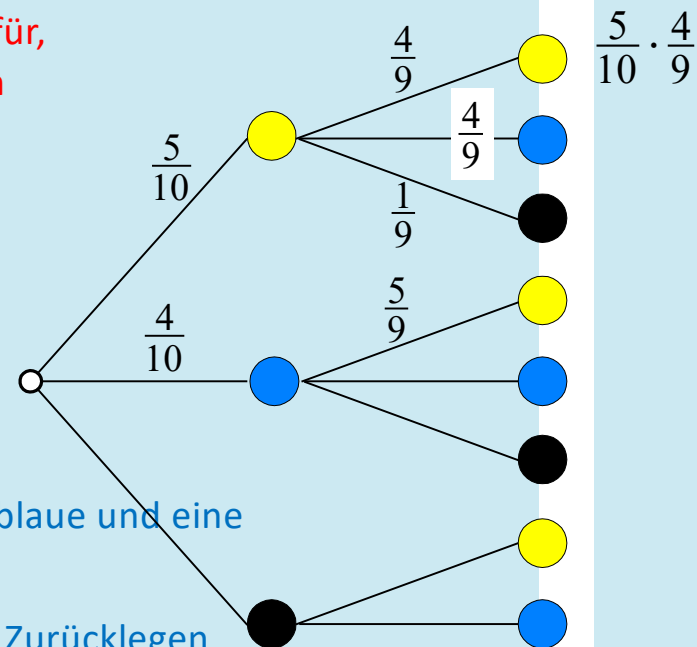


Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei gelbe Kugeln gezogen werden.

Warum rechnet man $\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$

In einem Behälter befinden sich 5 gelbe Kugeln, 4 blaue und eine schwarze.

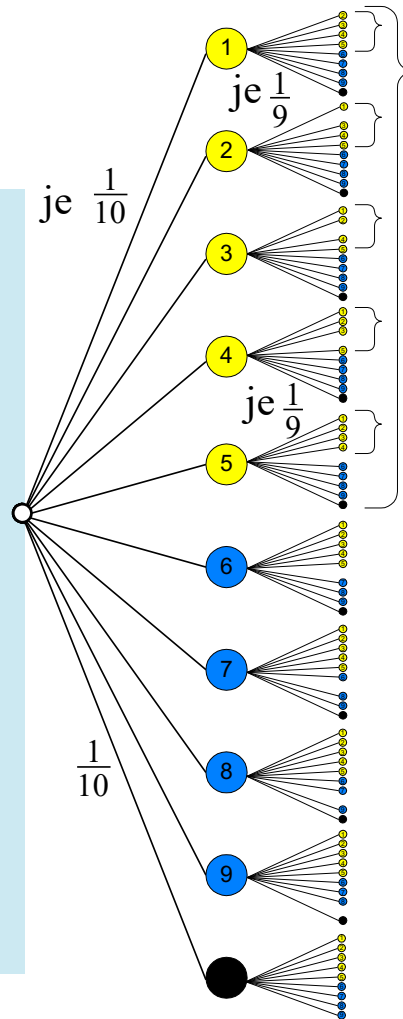
Nacheinander werden ohne hinzusehen und ohne Zurücklegen zwei Kugeln gezogen.



Warum

rechnet man $\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$

In diesem Baumdiagramm
sind alle Pfade
gleich wahrscheinlich.



Nach der ersten
Verzweigung beträgt
der Anteil der Zweige,
die zu einer gelben
Kugel führen, $\frac{5}{10}$.

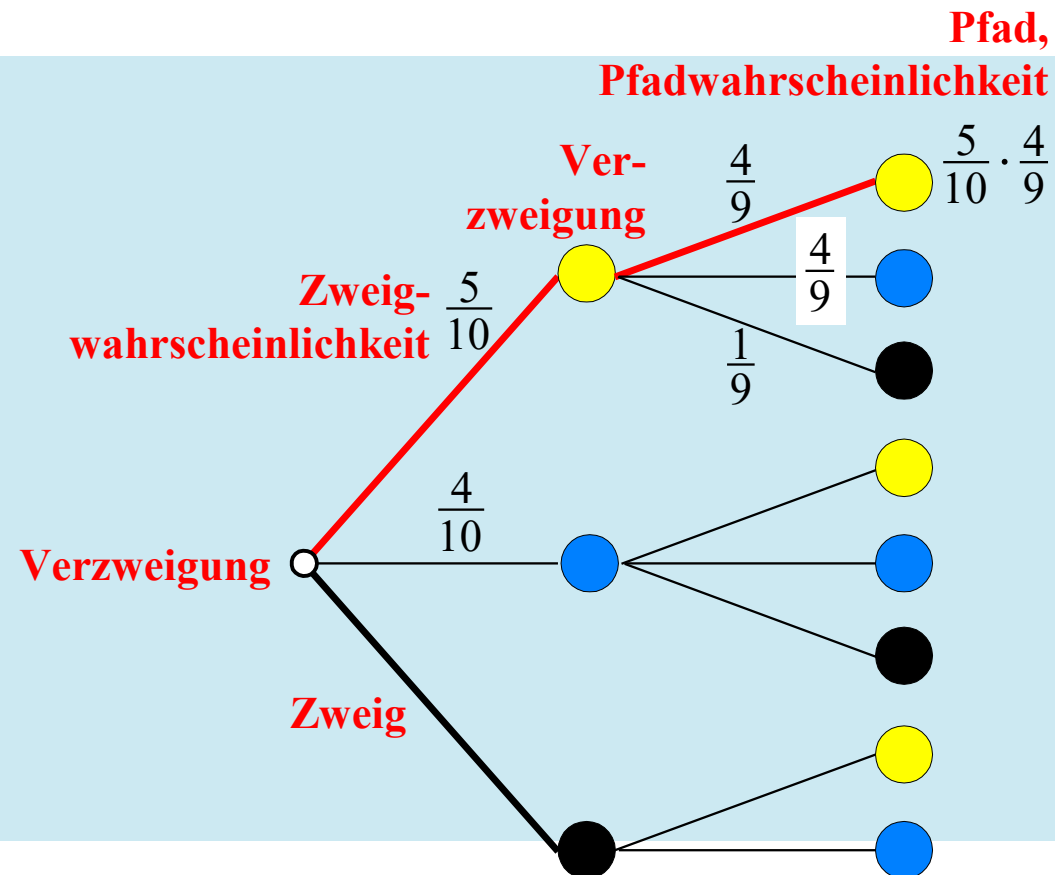
Nach der zweiten
Verzweigung beträgt
der Anteil der Zweige,
die zu einer gelben
Kugel führen, jeweils $\frac{4}{9}$.

$\frac{4}{9}$ von $\frac{5}{10}$

wird übersetzt als

$\frac{4}{9} \cdot \frac{5}{10}$ oder $\frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9}$.

Bezeichnungen in Baumdiagrammen



Pfadregel

- Jeder Pfad im Baumdiagramm entspricht einem Ereignis.

- Multiplikationssatz (Pfadregel)

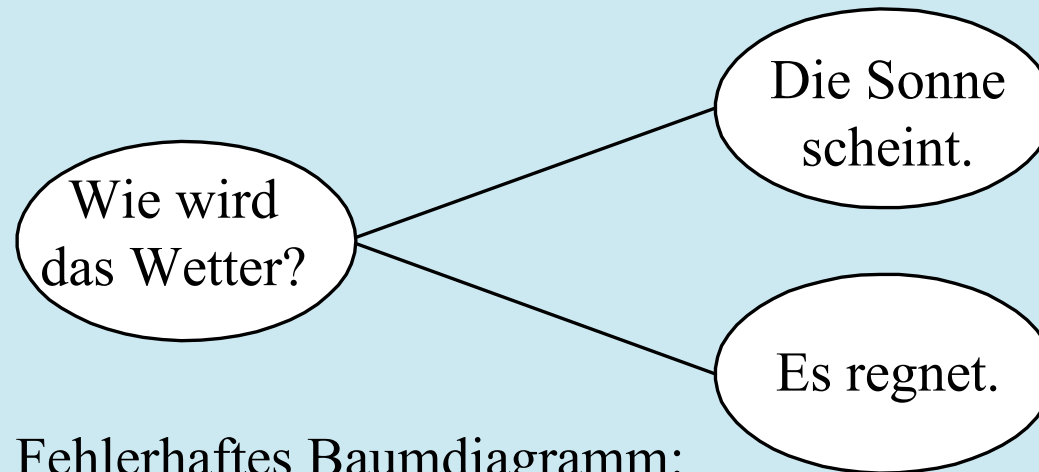
Die Pfadwahrscheinlichkeit ist das Produkt der
Zweigwahrscheinlichkeiten aller Zweige des Pfades.

- Additionssatz für unvereinbare Ereignisse

Wenn ein Ereignis durch mehrere Pfade beschrieben wird, ist
dessen Wahrscheinlichkeit die Summe der
Pfadwahrscheinlichkeiten.

(In einem korrekt erstellten Baumdiagramm beschreiben alle Pfade stets
unvereinbare Ereignisse.)

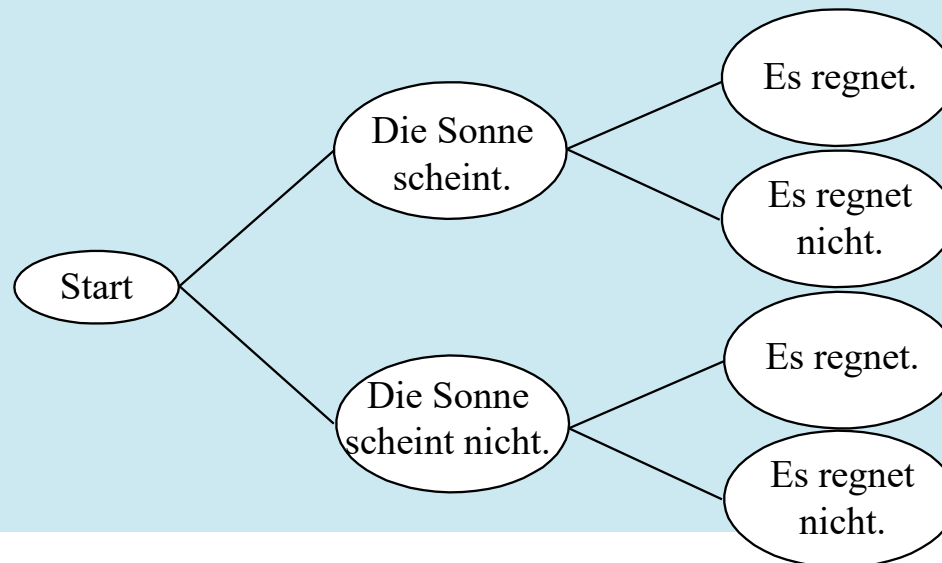
Regeln für Baumdiagramme



Fehlerhaftes Baumdiagramm:
Die beiden Ereignisse schließen sich nicht aus.

Regeln für Baumdiagramme

1. An einer Verzweigung müssen die Ereignisse sich ausschließen (unvereinbare Ereignisse).
2. An jeder Verzweigung muss die Summe aller Zweigwahrscheinlichkeiten 1 betragen.



Zufallsversuche in Baumdiagrammen dokumentieren

Was ist im Strumpf?

Baumdiagramme und Pfadregeln

In einem Strumpf befinden sich 10 Steine. Davon sind fünf gelb, vier blau, einer schwarz. Aus dem Strumpf werden nacheinander zwei Steine ohne Zurücklegen gezogen.

Bestimmen du die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- nacheinander zwei Steine derselben Farbe gezogen werden.
- nacheinander zwei Steine unterschiedlicher Farbe gezogen werden.

Stellen Sie die in einem Baumdiagramm geltenden Regeln zusammen.

Begründen Sie den Multiplikationssatz : „ Die Wahrscheinlichkeit für einen Pfad (von Anfang bis Ende) erhält man durch Multiplikation der Zweigwahrscheinlichkeiten.“

Präsentieren Sie Ihre Vorgehensweise.

Was ist im Strumpf?

Baumdiagramme und Pfadregeln

- 1. An einer Verzweigung schließen sich die Ereignisse aus.*
- 2. An jeder Verzweigung beträgt die Summe der Zweigwahrscheinlichkeiten 1.*
- 3. Multiplikationssatz: Die Wahrscheinlichkeit für einen Pfad (von Anfang bis Ende) erhält man durch Multiplikation der Zweigwahrscheinlichkeiten,*
- 4. Additionssatz: Gehören zu einem Ereignis mehrere Pfade, so werden diese addiert.*

Die Bank gewinnt immer!?

Welchen Gewinn erwartest du?

Spielen du mit mir?

Wer hat auf lange Sicht die besseren Chancen?

Dein Einsatz beträgt ein Euro. Du darfst dreimal hintereinander eine Münze werfen.

Fällt dreimal Zahl bekommst du von mir 2 Euro ausgezahlt.

Spielest du mit mir?

Wer hat auf lange Sicht die besseren Chancen?

Dein Einsatz beträgt ein Euro. Du darfst dreimal hintereinander eine Münze werfen.

Fällt dreimal Zahl bekommst du von mir 2 Euro ausgezahlt.

1. Wie entwickeln sich die Chancen „auf lange Sicht“?
2. Wie viel Geld wird auf lange Sicht gewonnen bzw. verloren?
3. Bei welchem Einsatz/Gewinn wäre das Spiel fair?

Die Bank gewinnt immer...

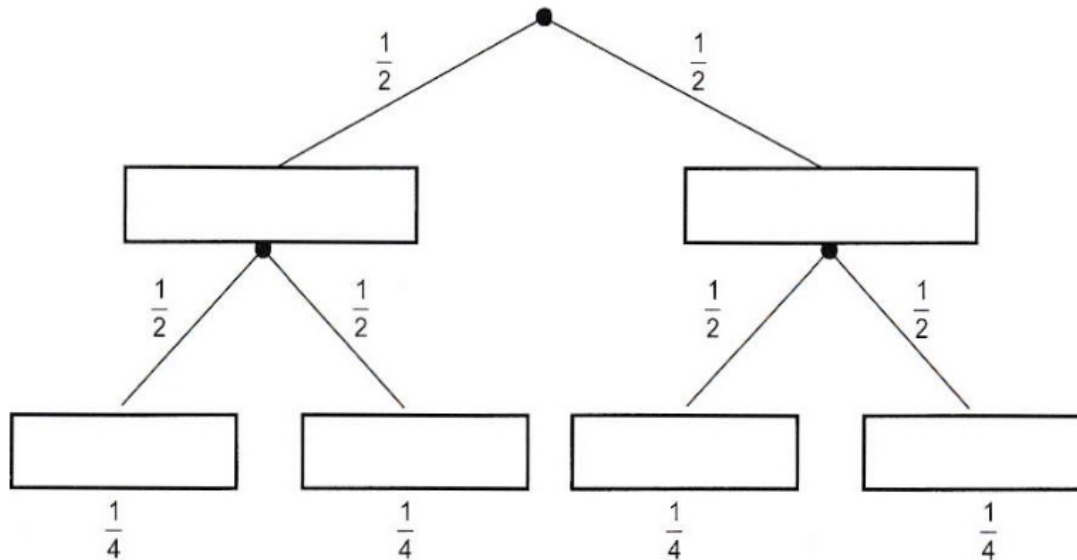
Gewinn- und Verlustbilanzen

Achtung: Voraussagen mit dem Erwartungswert sind nur möglich, wenn das Spiel sehr häufig gespielt wird. Über den Gewinn oder den Verlust des nächsten Spiels kann damit keine Aussage gemacht werden.

Heute mal andersrum!

Aktivität 7: Baumdiagramme interpretieren

Baumdiagramme interpretieren



Beispiele für (passende und unpassende) Sachsituationen als Interpretationsvorschläge (aus Arbeitsblatt 2) für das Baumdiagramm:

- Eine Münze wird zweimal geworfen.
- Nils wählt sein Outfit aus 3 Hosen und 3 T-Shirts.
- Ein Glücksrad mit 2 gleichen Feldern wird 3-mal gedreht.

Tabellenkalkulationsprogramme

Aktivität 8: Tabellenkalkulationsprogramme

Es gibt verschiedene Dateien, Beispiele, Erklärungen, ... , die auf moodle in einem vorbereiteten Ordner bereit liegen.

Erkunden Sie das Material.

Navigation

Mathematisch-naturwissenschaftliche Fächer

Mathematik

Interaktiv und Digital

Unterrichtsmaterialien

Sekundarstufe I

Leitidee "Funktionaler Zusammenhang"

Leitidee "Zahl-Variable-Operation"

Geometrie

Leitidee "Messen"

Leitidee "Daten und Zufall"

Formel von Bernoulli

Würfelsimulation mit Excel

Material "Daten und Zufall" Realschule

Links zu Daten und Zufall

Das Pascalsche Dreieck

Leitidee "Raum und Form"

sonstiges

Sekundarstufe II

Übergänge gestalten

Würfelsimulation mit Excel



Programmbeschreibung und Beispieldatei

Mit einem Tabellenkalkulationsprogramm können Zufallsexperimente, wie das Werfen einer Münze oder das Würfeln simuliert werden. Die Funktion Zufallszahl und die Darstellung von Diagrammen ermöglichen das Experimentieren. Im Folgenden finden Sie eine Anleitung im PDF-Format, wie man "Würfeln mit Excel" umsetzen kann, die dazugehörige Excel-Datei sowie weitere Simulationsbeispiele.

[Würfelsimulation mit Excel](#)

Würfelsimulator

[Eine Münze zwei Würfe](#)

Simulation von zwei Würfeln mit einer Münze

[Urne 1](#)

Ziehen mit zurücklegen

[Würfeln mit 2 Würfeln](#)

Würfelsimulator

[Glücksrad](#)

Vierfarbiges Glücksrad

[Urne 2](#)

Ziehen ohne zurücklegen

[Münze 2](#)

Münzwurfsimulator

[Würfeln 2](#)

Würfelsimulator

[Würfeln 3](#)

Würfelsimulator

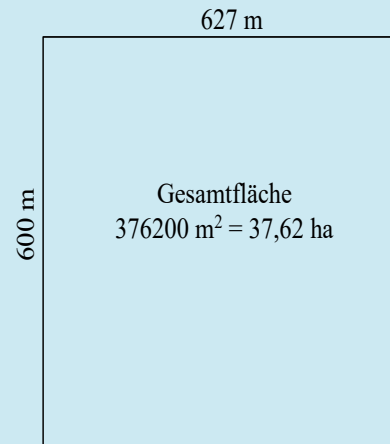
[Anleitung zur Würfelsimulation](#)

<https://www.schule-bw.de/faecher-und-schularten/mathematisch-naturwissenschaftliche-faecher/mathematik/unterrichtsmaterialien/sekundarstufe1/zufall/excelsimulation>

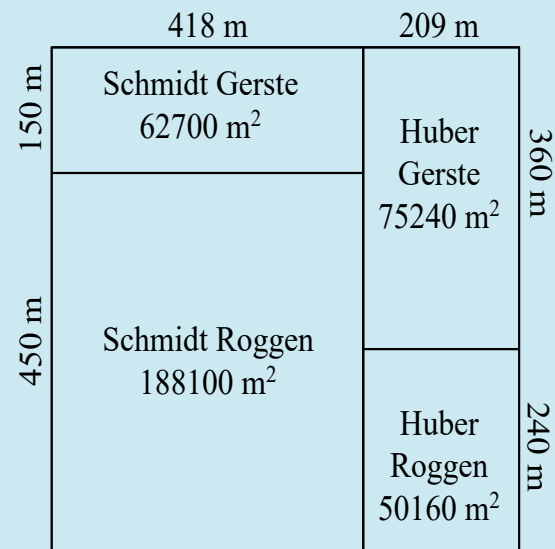
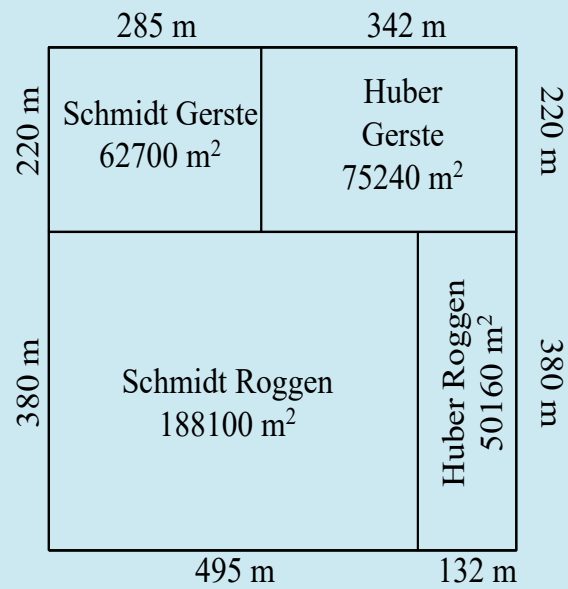
Gerste und Roggen

Schmidt und Huber, Gerste und Roggen

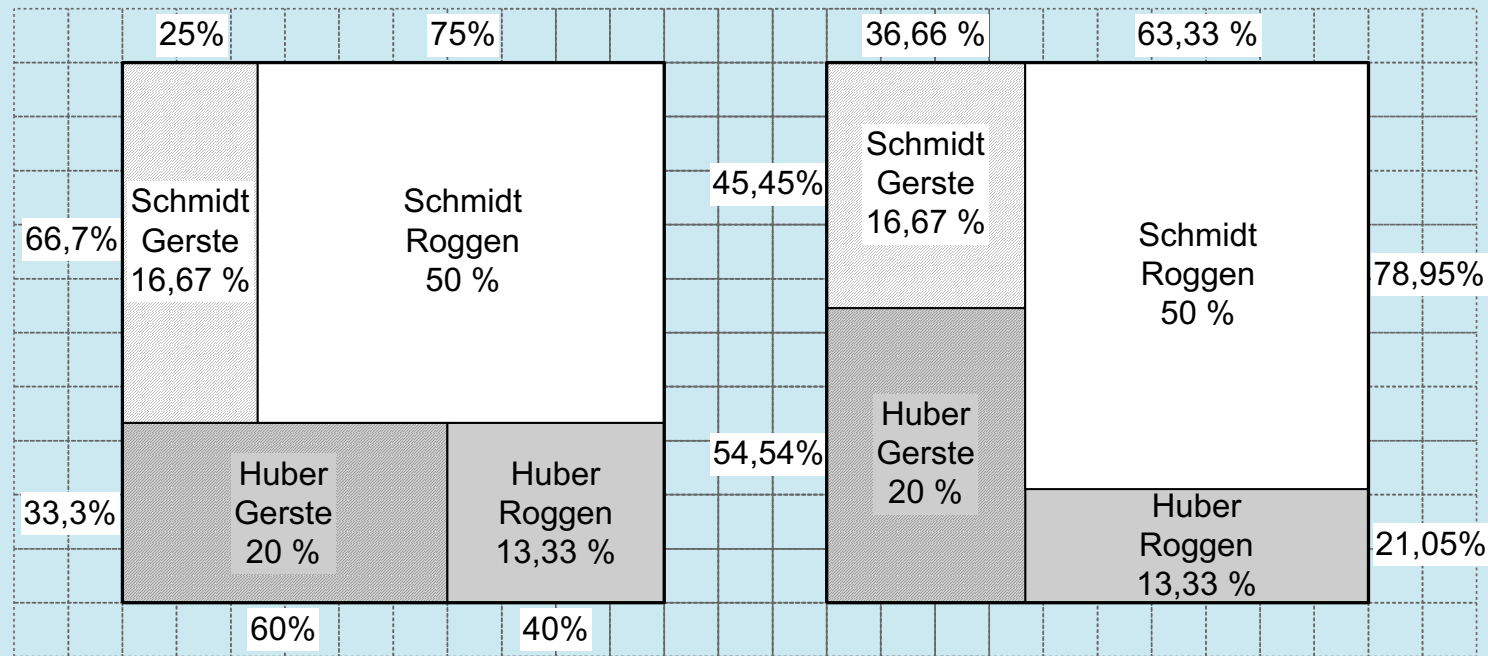
Ein landwirtschaftlich zum Getreideanbau (ausschließlich Roggen und Gerste) genutztes Gebiet wird zu einem Drittel von Bauer Huber bewirtschaftet, der auf drei Fünfteln seines Teils Gerste anbaut. Den Rest des Gebiets bewirtschaftet Bauer Schmidt, sein „Roggenanteil“ beträgt $\frac{3}{4}$.



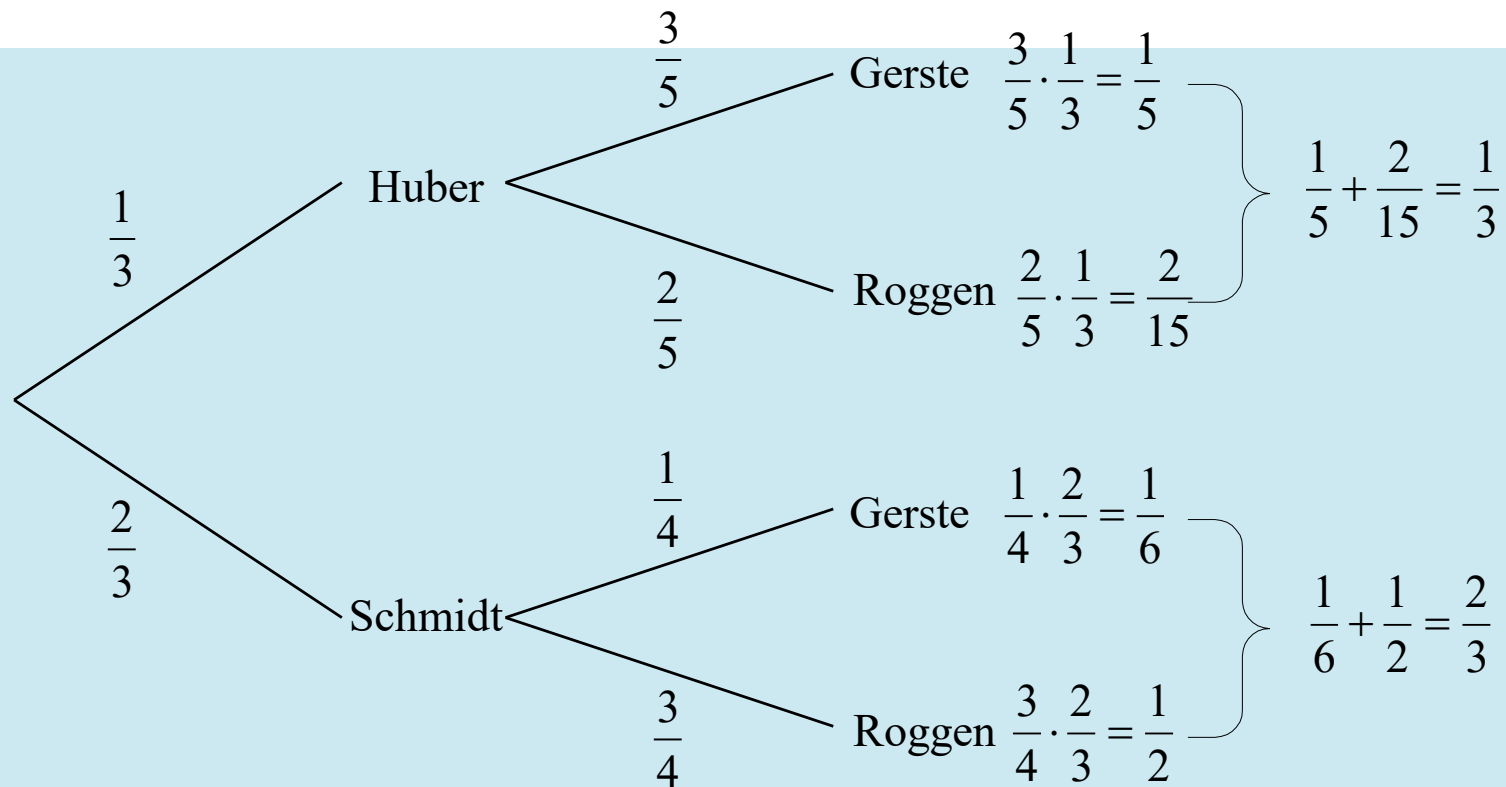
- Welcher Anteil des zum Anbau von Gerste benutzten Gebietes wird von Bauer Huber bewirtschaftet?



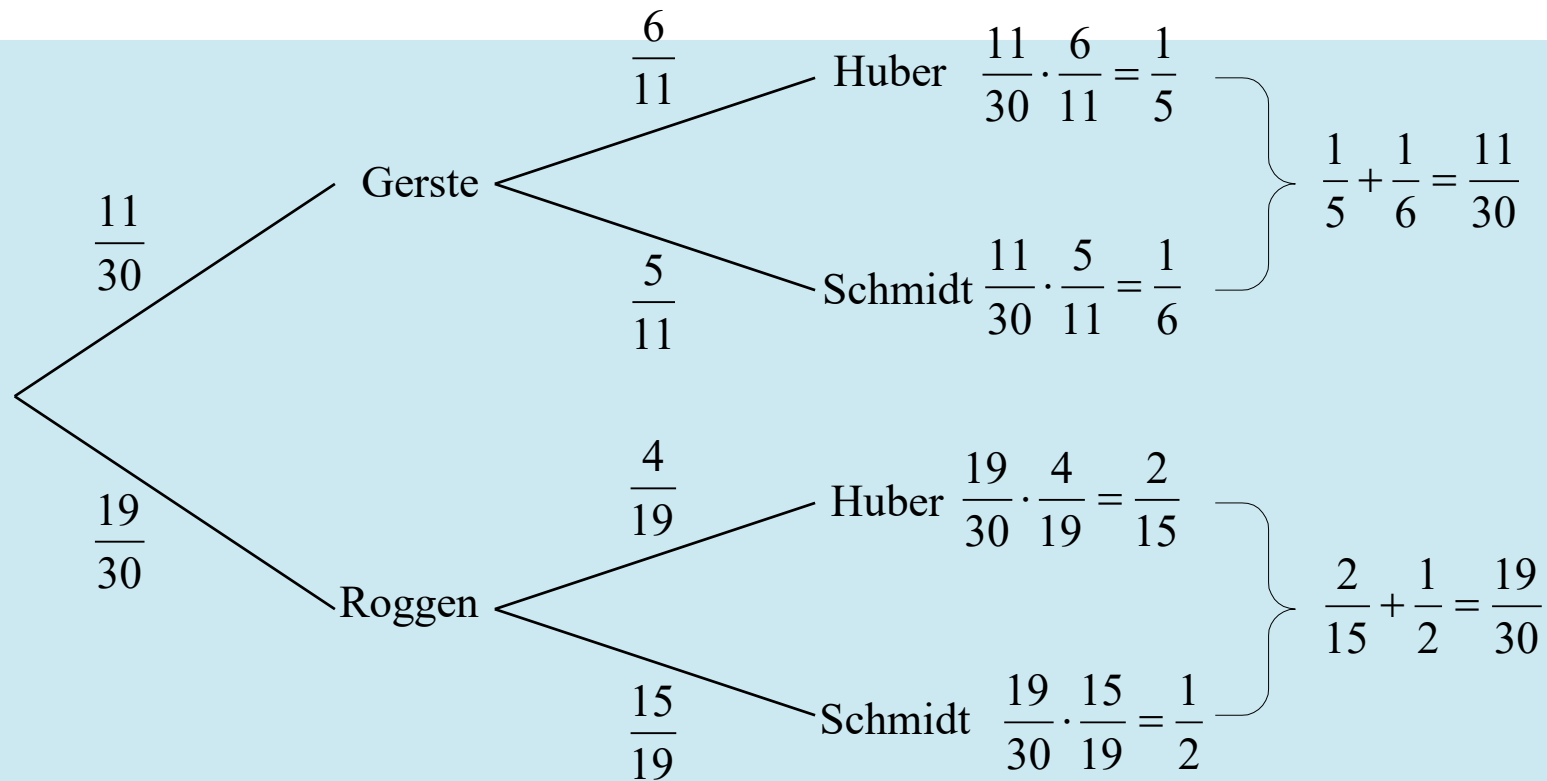
Vertiefung: Anteile von Anteilen



Vertiefung: Anteile von Anteilen



Vertiefung: Anteile von Anteilen



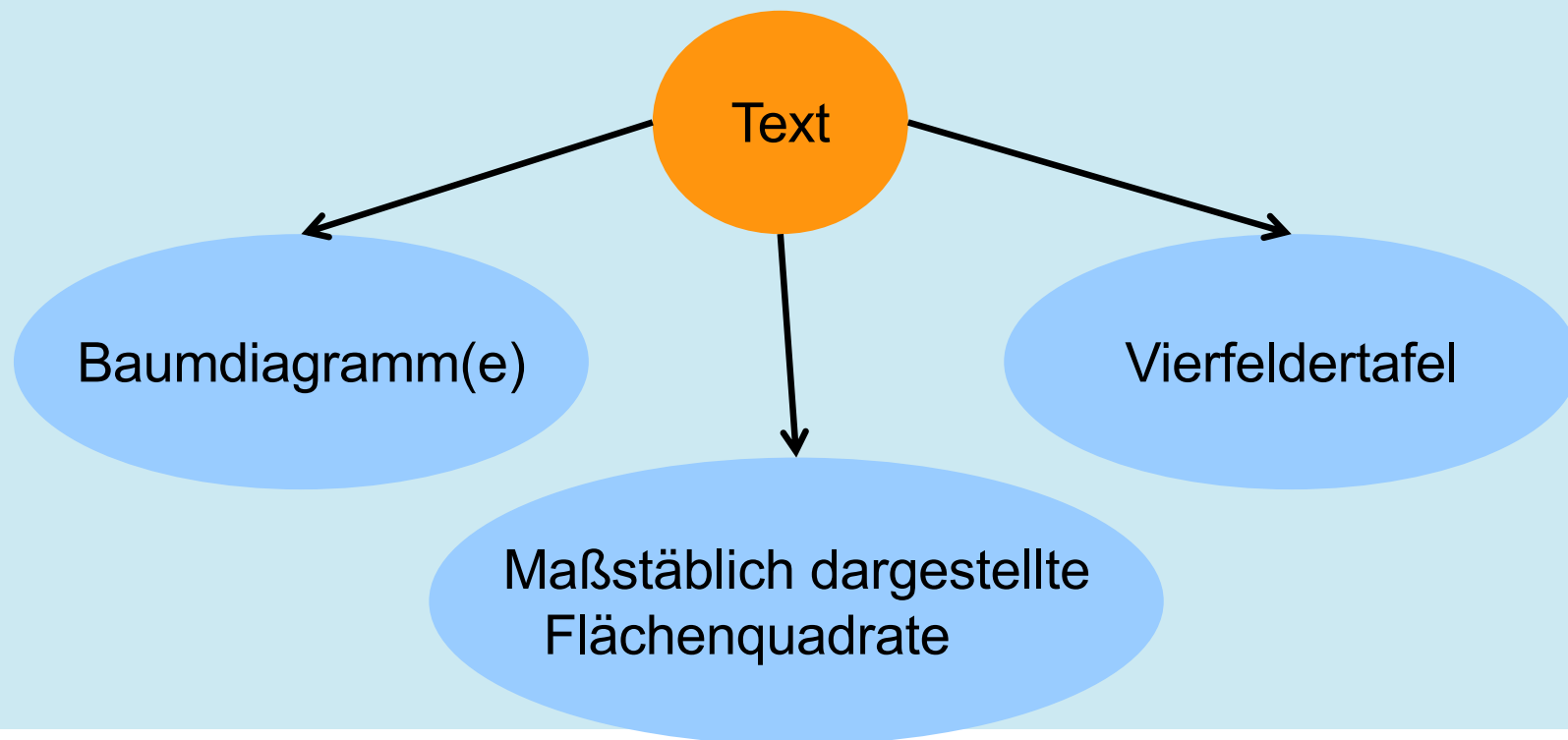
Gesucht: $P_G(BH) = P(BH \text{ und } G) / P(G) = 1/5$

Vertiefung: Anteile von Anteilen

Vierfeldertafel

	Gerste	Roggen	Summe
Huber	$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$	$\frac{1}{5} + \frac{2}{15} = \frac{3}{15} + \frac{2}{15} = \frac{1}{3}$
Schmidt	$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2}{3}$
Summe	$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{6}{30} + \frac{5}{30} = \frac{11}{30}$	$\frac{2}{15} + \frac{1}{2} = \frac{4}{30} + \frac{15}{30} = \frac{19}{30}$	1

Darstellungswechsel bei Schmidt und Huber



Take – Home - Message

Folgendes will ich im Unterricht ausprobieren:

Das war neu für mich:

Das war für mich die zentrale Botschaft:

Das kam für mich heute zu kurz:

Feedback



Los geht's!

Ausblick

Das nächste Modul zum Thema
„Zahl (Terme und Gleichungen)“

findet statt

am **23.07.2025**

an der Wilhelm-Tanck-Schule (Neumünster)

bei Lara Knop

Gute Heimfahrt!

Quellenverzeichnis

- Tobias Rolfes, Christian Phase: Zufallsphänomene erfassen, mathematiklehren (213), 2019
- Günther Malle, Sonja Malle: Was soll man sich nun unter Wahrscheinlichkeiten vorstellen?, mathematiklehren (118), Friedrich
- Markus Vogel, Andreas Eichler: „Das kann doch kein Zufall sein!“, PM (39), 2011, S. 2-8, Friedrich
- Michael Kleine, Nelli Schmelzer: Steck weg, die 6!: mathematiklehren (236), 2023, S. 24-28, Friedrich
- Werner Blum et al.: Bildungsstandards Mathematik: konkret, 2006, S. 51 – 69, Cornelsen Scriptor
- Andreas Eichler, Hedwig Gasteiger: Daten und Zufall, in: Basiswissen Lehrerbildung: Mathematik unterrichten, S. 139 48
- Paper „Stochastik Grundbegriffe“, Björn Hansen, 2016
- Anna George: „Wer die höhere Zahl hat, gewinnt!“, PM (66), 2015, S. 10–14, Friedrich
-