Den Zufall im Griff?

– Stochastische Vorstellungen fördern

von Andreas Büchter, Stephan Hußmann, Timo Leuders und Susanne Prediger

Jeder kennt Alltagssituationen, in denen der Zufall eine Rolle spielt und in denen alle Beteiligten ihre eigenen Vorstellungen vom Wirken des Zufalls haben. Der Stochastikunterricht scheint auf diese Alltagsvorstellungen nur begrenzt Einfluss nehmen zu können – woran liegt das eigentlich? In dem Artikel werden Erklärungen angeboten und Hintergründe beschrieben. Anhand konkreter Beispiele werden Hinweise gegeben, wie der Aufbau tragfähiger stochastischer Vorstellungen konsequenter gelingen kann. Dabei wird vor Allem für einen experimentier- und reflektionsintensiven Unterricht plädiert.

Stochastische Vorstellungen im Alltag

Jan, Kathrin und Tom sind beim „Mensch-Ärgere-Dich-Nicht“ in der heissen Phase: Tom steht direkt vor dem Ziel, Jan und Kathrin dagegen müssen ihre gerade geschlagenen letzten Figuren erst wieder ins Spiel und dann noch ins Ziel bringen, dann haben sie gewonnen.

Jan wirft dreimal: Keine Sechs! Er muss weiter darauf warten, dass er seine letzte Figur ins Spiel bringen darf. „Das ist ja typisch – wieder mal keine Sechs! Sechsen kommen einfach nicht so oft.“

Tom benötigt nur noch eine Eins, dann könnte er seine letzte Figur ins Ziel setzen und hätte gewonnen. Stattdessen wirft er eine Sechs – immerhin darf er noch einmal würfeln. Aber er bekommt eine Drei und darf immer noch nicht ins Ziel ziehen. „Sechsen kann ich super, aber ich kriege nie eine Eins, wenn ich sie brauche.“

Kathrin resigniert schon vor ihren drei Versuchen, eine Sechs zu werfen: „Sonst kann ich Sechsen immer gut, aber heute habe ich kein Glück!“

Jeder kennt Alltagssituationen wie diese, in denen der Zufall eine Rolle spielt und in denen alle Beteiligten ihre eigenen Vorstellungen vom Wirken des Zufalls haben. Dieses Phänomen ist keinesfalls auf Kinder beschränkt:

Viele Erwachsene studieren Woche für Woche Lottostatistiken (z. B. unter http://www.dielottozahlen.de/statistiksa.html) und leiten daraus ihre nächsten Tipps ab. Dass die „Vierzig“ im Jahr 2004 schon 13-mal gezogen wurde, die „Acht“dagegen nur 3-mal, ist für einige Anlass, die bewährte „Vierzig“ zu bevorzugen. Andere tippen nun eher die „Acht“, denn die ist ja mal wieder an der Reihe. Für solche Überlegungen erscheint es irrelevant, dass die Lottokugeln dies alles nur wenig interes-

Stochastische Vorstellungen entwickeln sich beim Mensch-Ärgere-Dich-Nicht

siert. Das Mysterium um die Möglichkeit, beim Lotto den Zufall vorherzusagen, hat wieder Nahrung erhalten, seit professionelle Tippgemeinschaften höhere Gewinne versprechen. Dass sie nur häufig getippte Zahlenkombinationen vermeiden und so zwar nicht die Gewinnwahrscheinlichkeit, dafür aber die zu erwartende Gewinnhöhe verändern, hat sich noch nicht bei allen Spielern herumgesprochen.

Wer mit seiner stochastischen Bildung gegen all diese Lottospielenden einwendet, dass jede Strategie auf lange Sicht gegen Vater Staat nur verlieren kann, verkennt, dass der stochastisch zu erwartende „mittlere“ Gewinn offensichtlich gar nicht ausschlaggebend ist für die Entscheidung, Lotto zu spielen.

Stochastische Vorstellungen weiter entwickeln

Trotzdem fragt man sich, wieso Erwachsene wie Kinder solche Vorstellungen über das Wirken des Zufalls haben und diese auch tagtäglich anwenden. Haben sie im Stochastikunterricht etwa nichts gelernt? Haben sie zu wenig oder zu schlechten Stochastikunterricht genossen? Oder betrachten sie die Situationen vielleicht durch eine ganz andere Brille, durch die ihre Überlegungen so falsch doch nicht sind?

Stochastische Prozesse sind ein typischer Bereich, in dem Menschen vorrangig ihre vorunterrichtlichen intuitiven Vorstellungen nutzen, um außerschulische Situationen zu beurteilen, während die im Mathematikunterricht angestrebten Vorstellungen wenig aktiviert werden (vgl. Fischbein 1987). Dabei verstehen wir hier unter Vorstellungen individuelle Gedanken, „Bilder“, Meinungen oder Verständnisse über mathematische Inhalte oder bestimmte mathematisierbare Situationen. Solche Vorstellungen können nicht einfach weitergegeben werden und sind auch nicht etwas, das man besitzt wie man z. B. eine Stereoanlage besitzt. Vielmehr werden sie schrittweise in einem langwierigen Prozess aufgebaut und permanent modifiziert.

In der Stochastik scheint die Bedeutung der vorunterrichtlichen Vorstellungen besonders ausgeprägt zu sein, weil die subjektiven Erfahrungen beim Spielen („Ich bekomme nie eine Sechs.“) sehr prägend sein können, lange bevor im Unterricht systematisch über die Gesetzmäßigkeiten des Zufalls reflektiert wird. Dabei können sich Vorstellungen und Strategien entwickeln, die sich aus fachlicher Sicht nur partiell als tragfähig erweisen (vgl. Fischbein 1975, Wolpers/Götz 2002, S. 137 ff). Natürlich könnte der Stochastikunterricht diese Vorerfahrungen ausklammern und „einfach noch mal von vorne anfangen“, z. B. indem als Ausgangssituation für die Entwicklung fachlicher Begriffe nicht vertraute Spiele genommen werden, sondern „unbelastete“ Situationen, wie das didaktisch auf wenige Aspekte reduzierte, aber in der Realität so kaum auftretende Urnenmodell. Sollen die Schülerinnen und Schüler mithilfe ihres in der Schule erworbenen Wissens jedoch auch alltägliche Zufallssituationen besser bewältigen können, darf man den Alltag nicht aussperren (vgl. Borovcnik 1992, für andere mathematische Themengebiete vgl. Lengnink/Peschek 2001). Man muss vielmehr dafür sorgen, dass die im Unterricht entwickelten Vorstellungen auch im Alltag aktivierbar sind:

In der Tageszeitung steht am Montagmorgen: „Festzelt vom Blitz getroffen. Besucher kamen mit dem Schrecken davon.“

Mark meint: „Da gehe ich heute Abend nicht mehr hin. Das ist mir zu gefährlich!“

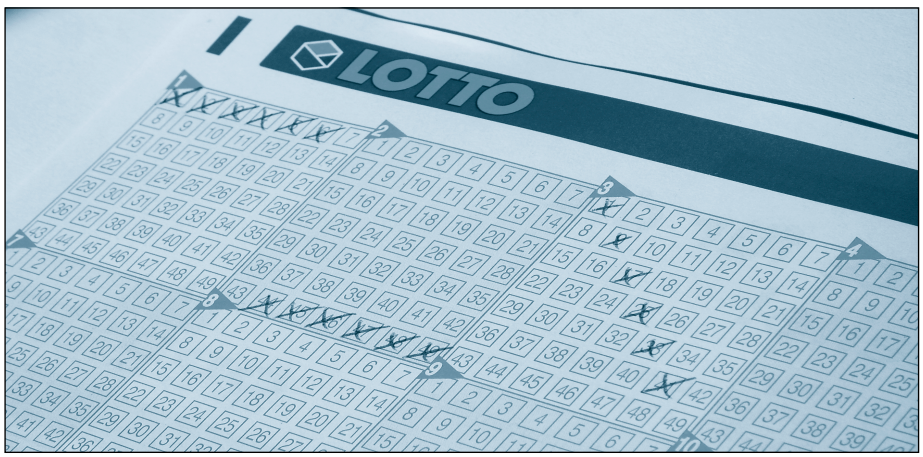
Verena ist überzeugt: „Da bist du doch jetzt ganz sicher! Dass es an derselben Stelle noch mal passiert, ist doch extrem unwahrscheinlich“

Peter erinnert sich an die Stochastikstunde: „Das ist doch unabhängig! Der Blitz schlägt genauso unwahrscheinlich ein, wie vorher!“

Während Peter auf das fachliche Konzept „stochastische Unabhängigkeit“ zurückgreift, scheinen Marks und Verenas Äußerungen Beispiele für das Phänomen zu sein, dass die im Unterricht entwickelten Vorstellungen häufig nur im Unterricht gut funktionieren, während die im Alltag entwickelten Vorstellungen weiterhin im Alltag angewendet werden - beide bestehen nebeneinander, ohne dass man bei ihrer Verwendung den Eindruck hat, widersprüchlich zu handeln.

Will man im Unterricht beide Vorstellungswelten konsequenter aufeinander beziehen, so sollte man typische Vorstellungen kennen, die Lernende mitbringen.

Guter Tipp? Schlechter Tipp? Egal?



Welche Vorstellungen bringen die Lernenden mit?

Typische stochastische Vorstellungen, die die Schüler und Schülerinnen aus ihrer Alltagswelt mitbringen, basieren auf einem reichhaltigen Schatz an Erfahrungen. Die nachfolgende Beschreibung (vgl. zusammenfassend auch Kasten 1) ist

nicht ansatzweise vollständig (vgl. dazu Döhrmann 2005), sie zeigt aber häufig beobachtbare Aspekte auf.

Im Alltag wird ein Ereignis auch als zufällig bezeichnet, wenn es sehr selten auftritt oder das Auftreten als außergewöhnlich erlebt wird. Wir greifen auf den Zufall als Erklärung zurück, wenn wir ein Ereignis nicht voraussagen bzw. sein Eintreten nicht erklären können. In vielen Bereichen des täglichen Lebens ist es nützlich, in Ursachen und Wirkungen zu denken. Dadurch hat sich das Bild einer kausalen Ordnung der Welt sozusagen in das Denken eingebrannt. Dieses wird sogar zur Erklärung herangezogen, wenn alltägliche Situationen beurteilt werden sollen, die eigentlich stochastisches Denken verlangen, wie z. B. zur Einschätzung von Wählerbefragungen oder Spielverläufen (vgl. Borovcnik 1992). Fallen bei einem Würfelspiel beispielsweise hintereinander immer wieder Sechsen, so vermuten viele, dass mit jeder weiteren Sechs auch die Wahrscheinlichkeit wächst, dass im nächsten Zug eine andere Zahl fällt. Mit dieser Einschätzung wird unterstellt, dass es eine Gesetzmäßigkeit zwischen den einzelnen Würfelereignissen gibt, die dafür sorgt, dass alle Ergebnis „letztendlich“ gleich häufig auftreten. Noch offensichtlicher findet man kausale Erklärungsmuster, wenn stochastische Abhängigkeit und bedingte Wahrscheinlichkeiten problematisiert werden.

Neben diesem Bedürfnis, in Ursache und Wirkung zu denken, hat der Mensch ebenfalls eine besondere Vorliebe für regelmäßige Strukturen. Demgemäß werden unregelmäßige Muster eher dem Zufall zugeschrieben als dies bei solchen Mustern geschieht, bei denen eine gewisse Struktur erkannt wird. Dass die Wurffolge 23412314 für wahrscheinlicher gehalten wird als beispielsweise die Folge 1122 3344, ist nur ein Beispiel unter vielen. Umgekehrt wird man aber auch miss-trauisch, wenn man bei vorgeblich zufälligen Prozessen auf Muster trifft. Wie viel Regelmäßigkeit kann der Zufall überhaupt „zufällig“ erzeugen? Intuitiv neigen wir dazu, zufällige Muster eher als gleichmäßig (wenn auch nicht regelmäßig) verteilt vorzustellen. Das Beispiel in Kasten 2 und 3 zeigt: Der Mensch hat keinen Zufallssinn. Wie man dennoch eine rationale Einschätzung von solchen zufälligen Verteilungen gewinnen kann, zeigt Strick in seinem Beitrag in diesem Heft am Beispiel von Ereigniswiederholungen.

Einige Vorstellungen, die Lernende mitbringen

- Zufällige Ereignisse sind selten oder außergewöhnlich.
- Zufällige Situationen und Konstellationen sind unstrukturiert.
- Zufällige Ereignisse müssen gleichmäßig verteilt sein.
- Zufällige Ereignisse treten unerwartet auf, sind unvorhersehbar.
- Für zufällige Ereignisse gibt es keine Ursache.
- Der Zufall lässt sich nicht beeinflussen, nicht verhindern, aber auch nicht erzwingen.

Kasten 1: Stochastische Vorstellungen, die Lernende mitbringen

Wie gut ist Ihr Zufallssinn?

Können Sie Mustern auf Anhieb ansehen, ob sie durch einen Zufall zustande gekommen sind, oder ob ein irgendwie geplantes Muster vorliegt? Im Selbsttest können Sie einmal selbst die Rolle des Zufalls einnehmen. Füllen Sie im abgebildeten 7×7 Raster auf möglichst zufällige Weise 6 Kästchen aus. Lesen Sie dann weiter in Kasten 3.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

Kasten 2: Wie gut ist Ihr Zufallssinn? (nach Leuders 2004)

Ein zentraler Aspekt beim alltäglichen Umgang mit Zufall ist die Bedeutung, die bestimmte Ausgänge in einer stochastischen Situation für das Individuum besitzen, was schon in den ersten Beispielen in diesem Beitrag sichtbar wurde. Die Überschätzung von Ereignissen wie Flugzeugabstürzen oder terroristischen Anschlägen ist hier zu nennen. Je bedeutungsvoller, desto präsenter ist ein Ereignis im Denken des Individuums. Aber auch Ereignisse, die häufig erlebt wurden, können sehr präsent sein. Dies kann dazu führen, dass die Wahrscheinlichkeit ihres Eintretens zu hoch eingeschätzt wird, weil Erlebnisse aus speziellen Situationen auf andere Situationen übertragen werden. Die Erfahrung, dass man auf einer bestimmten Strecke mehrmals in einem unpünktlichen Zug saß, kann dazu führen, dass man der Bahn generell Unpünktlichkeit zuschreibt.

Ansatz für den Unterricht: Erfahrung durch reflektierte Experimente

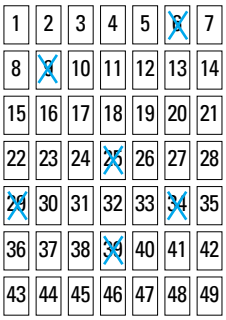
Die angeführten Aspekte lassen sich nicht sinnvoll isoliert betrachten, sie zeigen zum Teil sogar enorme Wechselwirkungen. Da viele von ihnen auf unreflektierte Alltagserfahrungen zurückgehen, muss dies im Unterricht berücksichtigt werden. Eine Konsequenz für die unterrichtlichen Zielsetzungen hat Herget (1997) plastisch beschrieben:

„Wenn ich erfolgreich unterrichten will, muss ich diese Vor-Einstellungen meiner Schülerinnen und Schüler ernst nehmen. … Da greifen die üblichen geometrischen Symmetrie-Argumente allein viel zu kurz. … Das ist so, als würde man einen alten, verwitterten, von Wind und Wetter gezeichneten Fensterrahmen einfach nur oberflächlich mit Farbe überstreichen: Schnell ist der Lack ab. Es gilt hier wie dort, zunächst eine tragfähige, dauerhafte Unterlage zu sorgen.

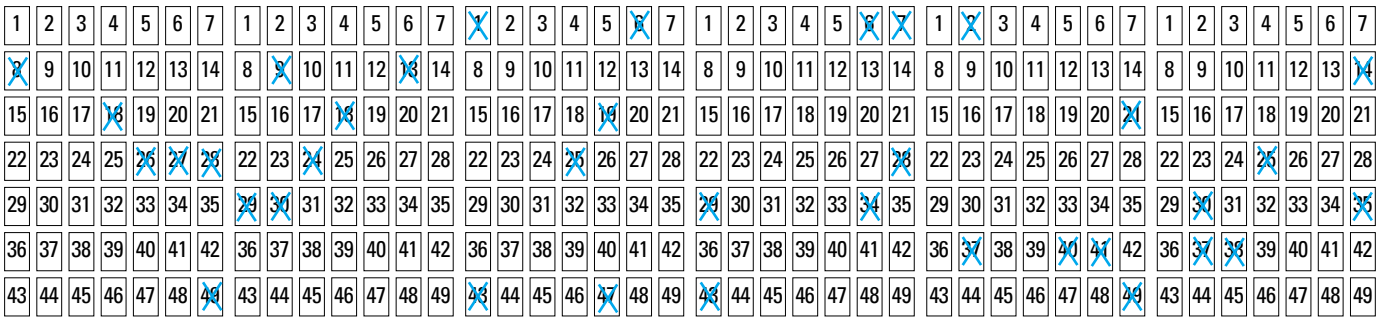
Eine solide Grundlage sind eigene, sorgfältig und bewusst registrierte, ausgewer-

Wie gut ist Ihr Zufallssinn? (Fortsetzung)

Wahrscheinlich haben Sie eine Konfiguration, wie diese erzeugt. Dabei haben Sie darauf geachtet, möglichst keine Regelmäßigkeiten zu erzeugen und die Kreuze gut über das Feld zu verteilen.



Tatsächlich gezogene „zufällige“ Lottozahlen sehen in der Regel anders aus. Dies sind die Lottozahlen der Samstage zwischen dem 14.05.2005 und 18.06.2005



Sie sehen: Bei zufälligen Anordnungen sind Häufungen eher die Regel als die Ausnahme! Diese Selbsterfahrung kann zum Ausgangspunkt für eine unterrichtliche Erkundung werden.

Kasten 3:

tete und reflektierte Untersuchungen (Experimente). ... Ich muss ... den Schülerinnen und Schülern Zeit lassen, neue, andere, bewusste Erfahrungen mit dem Zufall zu machen. Nur so sind die emotional geprägten und damit tief verwurzelten, unbewussten Vor-Einstellungen aufzuweichen“ (Herget 1997, S. 4f)

Ziel des Stochastikunterrichts muss es also sein, die vielfältigen Alltagserfahrungen im Unterricht durch kontrollierte Erfahrungen zu ergänzen und dadurch einige vorunterrichtliche Vorstellungen in Frage zu stellen: Wer nach (natürlich arbeitsteiligem) 10.000-maligem Würfeln darüber nachdenkt, ob die Sechs vielleicht doch keine Sonderolle spielt, lässt sich leichter von dem Symmetrieargument überzeugen. Deswegen gelten breite experimentelle Erfahrungen als zentrale Forderung an den frühen Stochastikunterricht (am besten bereits in der Grundschule, vgl. Winter 1976). Dies ist ein Weg, wie fachlich nicht tragfähige „primäre Intuitionen“ durch fachlich tragfähigere „sekundäre Intuitionen“ überformt werden können (vgl. z. B. Fischbein 1975, Borovcnik 1992). Dabei sollte aber berücksichtigt werden, dass solche Experimente die Lernenden zwar davon überzeugen können, dass es lohnenswert ist, sich mit einer anderen Sichtweise auseinander zu setzen, sie können die erzeugten Phänomene aber nicht erklären.

Gerade in dem Vergleich von hochsymmetrischen Zufallgeräten (z. B. Würfel) und weniger symmetrischen Zufallsgeräten (z. B. Reißzwecken oder Riemerquader) liegt eine viel versprechende Möglichkeit, die individuellen Vorstellungen zu hinterfragen. Wenn die Schülerinnen und Schüler in einer Spielsituation zwischen verschiedenen Zufallsgeräten das Beste für ihren nächsten Wurf auswählen sollen, dann müssen sie die mit dem jeweiligen Zufallsgerät verbundenen Gewinnchancen einschätzen. Stehen verschiedene Zufallsgeräte zur Auswahl, dann sind längere Versuchsreihen notwendig, die den Erfahrungsraum hinsichtlich der ‚Sechs’ vergrößern (vgl. z. B. das Cubus-Spiel in Hußmann 2003 oder Riemer 1991). In diesem Heft zeigt Jan Müller am Beispiel der Augensumme zweier Würfel in sehr anschaulicher Weise, was für ein langer Prozess des Ringens dies sein kann, und wie erst durch diese intensive Beschäftigung tatsächlich Verständnis für die fachlich adäquate Sicht aufgebaut wird.

Ansatz für den Unterricht: Vorstellungen gegenüber stellen

Die Stochastik steht den empirisch ausgerichteten Naturwissenschaften sehr nahe. Bei beiden geht es vornehmlich darum, reale Situationen zu modellieren, und Experimente, Simulationen und Stichproben zu nutzen, um Modellierungen und Hypothesen auf die Probe zu stellen. Insofern können wir aus den naturwissenschaftsdidaktischen Ansätzen zur tragfähigen Verknüpfung von Alltagsvorstellungen und fachlichen Vorstellungen Einiges lernen (vgl. z. B. Duit 1993).

Es tut dem Mathematikunterricht – insbesondere im Bereich der Stochastik – gut, der naturwissenschaftlichen Experimentierfreude maßvoll nachzueifern, doch zeigt uns die Naturwissenschaftsdidaktik

ebenfalls, dass es mit dem Experimentieren *allein* oft nicht getan ist. Zwar reicht in einigen Fällen das Herbeiführen eines kognitiven Konflikts aus, um vertraute Vorstellungen abzulösen, in vielen anderen Fällen bleiben diese aber trotz der Einsicht in ihre Begrenztheit neben den fachlichen Vorstellungen bestehen. Es ist daher kein realistisches Ziel des Unterrichts, die im Alltag durchaus bewährten vorunterrichtlichen Vorstellungen vollständig „ausmerzen" zu wollen. Stattdessen sollten beide in einer nützlichen Koexistenz miteinander verknüpft werden. Ziel ist es, die tragfähigen intuitiven Argumente durch schlüssige fachliche Sichtweisen zu bereichern.

Um dies zu erreichen, müssen *fachliche und alltägliche Vorstellungen explizit gegenübergestellt* und die *Ursachen der Diskrepanzen* thematisiert werden. Betrachten wir dazu ein Beispiel:

Selbst am Ende einer Stochastikvorlesung argumentieren Studierende häufig wie Anja:

„Ich weiß ja, dass es beim Roulette nach zehnmal Rot gleich wahrscheinlich ist, dass danach rot oder schwarz fällt - das ist ja stochastisch unabhängig. Aber trotzdem würde ich auf schwarz setzen, das scheint mir einfach sicherer, schließlich muss ja langfristig rot und schwarz gleich häufig sein."

Anja befindet sich in der durchaus typischen Situation, dass alltägliche Intuition und erworbenes Fachwissen auseinander klaffen. Selbst routinierten Stochastikerinnen und Stochastikern legt die Intuition zuweilen wider besseres Wissen nahe, beim zehnmaligen Werfen einer Münze den konkreten Ausgang KZZKKKZKKZ zunächst für wahrscheinlicher zu halten als KKKKKKKKKK. Sie wissen, wenn sie den Vorgang fachlich reflektieren, dass alle Ausgänge gleich wahrscheinlich sind. Dennoch neigen auch sie dazu, den ersten Ausgang als typischer und damit als häufiger anzusehen, also prototypisch zu denken, wie es im Alltag häufig und nützlich ist.

Auch bei gut ausgebildeten fachlichen Vorstellungen existieren Alltagsvorstellungen weiter, wie eine Schicht unter ihnen. Sie können auch nach langjähriger und eingehender Auseinandersetzung mit dem Fach hervorschimmern und uns verunsichern, vielleicht sogar aufs Glatteis führen. Eine explizite Gegenüberstellung wird fruchtbar, wenn sie die Reflexion der Diskrepanzen ins Zentrum rückt und kann beim obigen Beispiel so aussehen:

„Nun ja, natürlich haben beide konkreten Ausgänge die gleiche Wahrscheinlichkeit. Jeder konkrete Ausgang hat ja die Wahrscheinlichkeit 2^{-10}.
Warum glaube ich trotzdem, dass der erste dargestellte Ausgang wahrscheinlicher ist? Er sieht einfach „zufälliger" aus. Wenn man fragt, ob zehnmal Kopf oder sechsmal Kopf wahrscheinlicher ist, so wäre sechsmal Kopf die richtige Antwort. Vielleicht habe ich gar nicht den konkreten Ausgang angeschaut, sondern nur gesehen, dass sechsmal Zahl gefallen ist. Es gibt ja noch viel mehr Ausgänge mit sechsmal Zahl. Und an all diese habe ich gedacht statt nur an den einzelnen.

Auf diese Weise entsteht ein Wechselspiel zwischen vorunterrichtlichen Alltagsvorstellungen und fachwissenschaftlich angemessenen Vorstellungen. Sicherlich wird es nicht gelingen, Alltagsvorstellungen generell durch fachlich haltbare Vorstellungen zu modifizieren. Die kritische Auseinandersetzung mit verschiedenen Vorstellungen und ihren Widersprüchen kann aber dazu beitragen, dass Vorstellungen auf jedem Niveau weiter entwickelt werden.

„Fehl"-Vorstellungen oder berechtigte Perspektiven? – Ein Beispiel

Wer dieses Gegenüberstellen von fachlichen und individuellen Vorstellungen und die Suche nach Ursachen für Diskrepanzen wirklich ernst nimmt, wird oft bemerken, dass hinter den vermeintlichen „Fehl"-Vorstellungen der Lernenden durchaus plausible Perspektiven stehen können. Betrachten wir das folgende Beispiel aus einem Forschungsprojekt zu Argumentationsstrategien beim Spiel „Die Siedler von Catan", bei dem die Augensumme von zwei Würfeln gesetzt werden muss (vgl. Prediger 2005):

„Auch wenn die 8 wahrscheinlicher ist, sie kommt ja trotzdem nicht, guck!
Dann nehme ich lieber gleich meine Glückszahl 12."

Wieso ist es im Stochastikunterricht so wenig gelungen, das Konzept der Wahrscheinlichkeit als strategische Hilfe für Auswahlentscheidungen in außerschulischen Zufallssituationen zu vermitteln? In einem dazu untersuchten Unterricht konnten diese grundsätzlichen Zweifel an der Sinnhaftigkeit von Wahrscheinlichkeits-Aussagen sehr leicht beiseite geräumt werden und alle Lernenden schienen zu wissen, dass hier Wahrscheinlichkeitsüberlegungen anzustellen sind. Woher also kommt diese Diskrepanz zwischen der Selbstverständlichkeit, mit der Wahrschein-lichkeitskonzepte *im* Stochastikunterricht nach nur we-

Abb. 1: Verschiedene Erklärungsansätze für Setzentscheidungen und Würfelergebnisse

Möglichkeiten zählen: „Ich hab mich für die 7 entschieden, weil da sind sechs Möglichkeiten, und bei den anderen sind es immer nur fünf oder drei Möglichkeiten. Und die 7, die kann man gut würfeln."

Auf „Erfahrungen" berufen: „Wenn wir ein Spiel oder so was spielen, hab ich mit der 5 immer schon sehr viel Glück gehabt."

Mit Erreichbarkeit begründen: „Für 6 kann man ne Fünf und ne Eins kriegen'. Und ne Eins ist schwerer […], wenn man Schwein gehabt hat, dann kann man zwei Dreien kriegen."

Individuelle Bedeutsamkeit anführen: „Dann hab ich ja hier mehrmals im zweiten Spiel die 8 geworfen. Und ich weiß auch schon warum. […] Weil ich bin am 16. 8. geboren."

Beeinflussen: „Manchmal, hab ich ganz doll gedacht, oh man, jetzt brauch ich unbedingt ne 6, und es war ne 6."

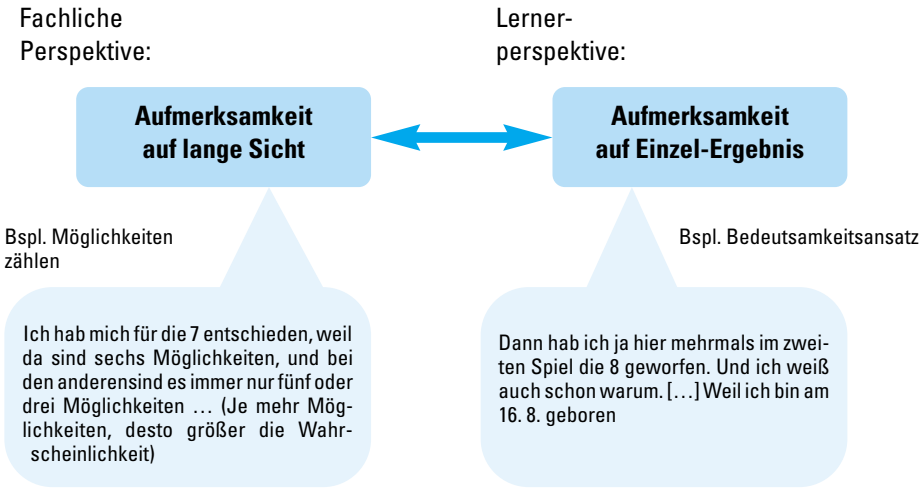


Abb. 2: Fehlvorstellung oder berechtigte Perspektiven? Wie fachliche Sicht und Lernersicht auseinandergehen können.

nig Vorlauf aktiviert werden und der Entschiedenheit, mit denen sie z. T. *außerhalb* des Unterrichts abgelehnt werden?

Um dieser Frage näher zu kommen, wurden Spielinterviews mit Kindern aus Klasse 5 geführt mit dem Ziel herauszufinden, wie die Kinder wohl ihre Würfelergebnisse und ihre Setzentscheidungen in Spielsituationen außerhalb des Mathematikunterrichts erklären würden.

Die Kinder äußerten innerhalb eines Interviews sehr unterschiedliche Erklärungsansätze für die Würfelergebnisse und ihre Setzentscheidungen (vgl. *Abb. 1*), in denen sich die oben genannten Alltagsvorstellungen wieder finden. Insbesondere Erklärungen, nach denen die Situation beeinflusst werden kann und einzelne Zahlen besondere Bedeutung besitzen, wurden immer wieder angebracht (ähnlich bei Malle/Malle 2003, Wollring 1994).

Häufig werden einige dieser Ansätze als schnell zu überwindende Fehlvorstellungen betrachtet. Nimmt man sie jedoch als Teil des individuellen Erfahrungsfeldes der Schülerinnen und Schüler ernst, so muss man wenigstens nach der Berechtigung dieser Perspektiven fragen.

Betrachtet man die Aussagen derjenigen Kinder genauer, für die die individuelle Bedeutsamkeit des Würfelergebnisses im Vordergrund steht, so fällt auf, dass diese Kinder ihre Aufmerksamkeit auf die Prognose des Einzelergebnisses richten. Zwar gibt auch hier der von der Laplace-Wahrscheinlichkeit geleitete Ansatz des Möglichkeiten-Zählens das rein mathematisch besser begründbare Maß der Erwartung an, doch erhält dieser Ansatz seine eigentliche prognostische Kraft mit größerer Sicherheit erst auf längere Sicht. Der Bedeutsamkeitsansatz dagegen liefert für das Einzelergebnis einen geeigneteren subjektiven Erwartungswert, wenn man die unterschiedliche lebensweltliche Bedeutung der einzelnen Ausfälle mit einbezieht. In dieser breiteren Perspektive ist der Bedeutsamkeitsansatz *nicht weniger angemessen* als der Ansatz des Möglichkeiten-Zählens. Auch die zu Beginn des Abschnitts zitierte Einschätzung zur Bedeutung der Glückszahl 12 ist durchaus schlüssig, wenn Kinder ihre Aufmerksamkeit auf die Prognose des Einzelergebnisses richten.

Eine stochastische Betrachtung der Situation gewinnt also vor allem auf lange Sicht ihre Kraft, und nur wer den Unterschied zwischen kurzfristiger und langfristiger Perspektive explizit begreift und die Grenzen der rein mathematischen Sicht im Blick hat, wird verständig mit Wahrscheinlichkeitskonzepten, z. B. in Spielsituationen, umgehen können. Hefendehl-Hebeker hat dieses wesentliche Charakteristikum der Stochastik so auf den Punkt gebracht:

„Der Zufall ist im Einzelfall nicht kalkulierbar. Auf lange Sicht hat er jedoch in gewissem Sinn Methode. Diese Einschätzung zu präzisieren gehört zu den Aufgaben einer Einführung in die Stochastik."
(Hefendehl-Hebeker 2003, S. 13)

Es ist letztlich das empirische Gesetz der großen Zahlen, das erklärt, wieso wir überhaupt sinnvoll stochastische Betrachtungen anstellen können in Situationen, die im Einzelfall nicht kalkulierbar sind. Es beschreibt den Sinn und die Voraussetzung, aber auch die Grenzen stochastischer Betrachtungsweisen. Dieses kann in reflektierten Experimenten erfahrbar gemacht werden (s. o.), doch muss darüber hinaus der Perspektivwechsel auch explizit thematisiert werden.

Perspektivwechsel im Lernprozess explizieren

Was lernen wir aus diesem Beispiel? Eine Kernbedingung für die Aktivierung stochastischer Überlegungen in außerschulischen Kontexten scheint also zu sein, den Perspektivwechsel von der

Abb. 3: Aufgabe zur Thematisierung des notwendigen Perspektivwechsels und ihre Bearbeitung durch eine Siebtklässlerin

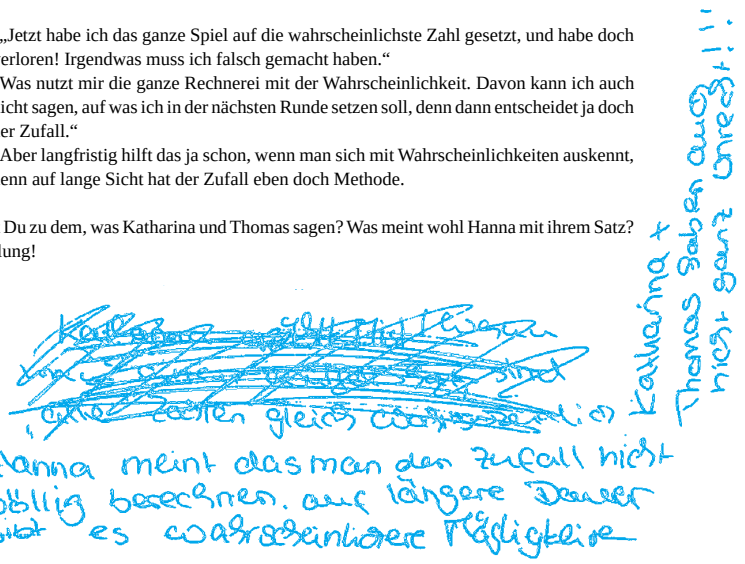
4) Wieso machen Überlegungen zur Wahrscheinlichkeit überhaupt Sinn?

Katharina: „Jetzt habe ich das ganze Spiel auf die wahrscheinlichste Zahl gesetzt, und habe doch verloren! Irgendwas muss ich falsch gemacht haben."

Thomas: „Was nutzt mir die ganze Rechnerei mit der Wahrscheinlichkeit. Davon kann ich auch nicht sagen, auf was ich in der nächsten Runde setzen soll, denn dann entscheidet ja doch der Zufall."

Hanna: „Aber langfristig hilft das ja schon, wenn man sich mit Wahrscheinlichkeiten auskennt, denn auf lange Sicht hat der Zufall eben doch Methode.

Was meinst Du zu dem, was Katharina und Thomas sagen? Was meint wohl Hanna mit ihrem Satz? Nimm Stellung!



Prognose des Einzel-Ergebnisses zur langen Sicht zu vollziehen. Das ist notwendig, wenn Schülerinnen und Schüler tragfähige Vorstellungen aufbauen sollen.

Zu erleben und zu verstehen, dass und wie der Zufall auf lange Sicht Methode hat (s. o.), ist also ein wichtiger Lerngegenstand für eine Einführung in die Stochastik. Dies erscheint auf der einen Seite selbstverständlich, andererseits zeigt ein Blick in die gängigen Schulbücher, dass er an vielen Stellen keine hinreichend explizite Rolle zu spielen scheint.

Als konkreten Vorschlag für die Initiierung von Reflexion über den notwendigen Perspektivwechsel in der Unterrichtspraxis ist eine mögliche Aufgabe (und die Antwort einer Siebtklässlerin) in *Abb. 3* abgedruckt (vgl. Prediger 2005). Im Anschluss an eine Unterrichtsphase mit vielen Experimenten, Spielen und Reflexion von Strategieentscheidungen wurden hier die gegensätzlichen Perspektiven als Positionen unterschiedlicher Kinder greifbar gemacht und somit kommunizierbar, ohne auf einer Meta-Ebene abstrakt darüber sprechen zu müssen.

Die in drei Etappen geschriebene Antwort einer Siebtklässlerin zeigt, dass solche Aufgaben (*Abb. 3*) einen guten Anlass liefern können, über diese Aspekte nachzudenken. Zunächst hat sie ähnlich wie viele ihrer Klassenkameraden der kurzfristigen Perspektive recht gegeben, doch dann im Bearbeitungsprozess selbst ihre Gedanken weiter entwickeln können, die erste Antwort durchgestrichen und weiter geschrieben. Im dritten Zugriff ist der letzte Satz entstanden, der eine gewisse Bewusstheit für die Widersprüchlichkeit der Problematik dokumentiert. Somit hat die Schülerin im Zuge der Auseinandersetzung mit dieser Aufgabe situationsbezogen den gesamten Perspektivwechsel samt der Reflexion seiner Ambivalenz einmal durchlaufen.

Fazit

Was bedeutet all dies für die Unterrichts-praxis? Wie sollten Lernarrangements gestaltet sein, die den Aufbau stochastischer Vorstellungen unterstützen? Darauf lassen sich natürlich keine rezeptartigen Antworten geben, denn ebenso vielschichtig wie das Feld der Vorstellungen sind die Strategien zu ihrer Weiterentwicklung, Lernarrangements sollten aber in jedem Fall die in Kasten 4 zusammengefassten folgen.

Didaktische Leitideen für einen vorstellungsorientierten Stochastikunterricht

- Alltagsvorstellungen ernst nehmen und zum Ausgangspunkt des Lernens machen (erfordert Situationen, die diese Anknüpfung ermöglichen),
- breite Erfahrungsmöglichkeiten durch Experimente schaffen,
- Erlebnisse durch Experimente systematisch reflektieren, um mitgebrachte Vorstellungen zu überdenken,
- individuelle und fachliche Vorstellungen gezielt gegenüberstellen und Ursachen für Diskrepanzen finden und
- notwendige Perspektivwechsel explizit machen.

Kasten 4

Als Beispiele für solche Lernarrangements enthält dieses Heft zum einen *experimentierintensiven Unterricht*. Dazu zählen auch Spiele mit stochastischem Gehalt, wie z. B. das Spiel, das als Beilage in der Heftmitte abgedruckt ist. Zum anderen braucht es einen *reflektionsintensiven Unterricht*, in dem Schülerinnen und Schüler ihre Vorstellungen aktiv einbringen und miteinander darüber ins Gespräch kommen können. Alle Beiträge im Thementeil dieses Heftes weisen diese beiden Merkmale auf, jeweils mit unterschiedlicher Schwerpunktsetzung.

In diesen Beispielen stehen Phänomene im Vordergrund, die zunächst keine große lebensweltliche Bedeutsamkeit haben, sondern mit klassischen Objekten der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie Würfeln oder Münzen, auskommen. Dies war jeweils eine bewusste Wahl, da so direkt die Wahrscheinlichkeitsphänomene in den Blick genommen werden können und keine Aufmerksamkeit auf Fragen des Kontextes verwendet wird.

Literatur

Borovcnik, Manfred (1992): Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik, BI Wissenschaftsverlag Mannheim.

Döhrmann, Martina (2005): Zufall, Aktien und Mathematik. Vorschläge für einen aktuellen und realitätsbezogenen Stochastikunterricht, Franzbecker, Hildesheim.

Duit, Reinders (1993): Schülervorstellungen - von Lerndefiziten zu neuen Unterrichtsansätzen, in: Naturwissenschaft im Unterricht - Physik 4 (16), 4-10.

Fischbein, Efraim (1975): The intuitive sources of probabilistic thinking in children, Reidel, Dordrecht.

Fischbein, Efraim (1987): Intuition in science and mathematics: An educational approach. Reidel, Dordrecht.

Hefendehl-Hebeker, Lisa (2003): Didaktik der Stochastik I: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Vorlesungsausarbeitung, Duisburg.

Herget, Wilfried (1997): Wahrscheinlich? Zufall? Wahrscheinlich Zufall ..., in: Mathematik lehren 85, 4-8.

Hußmann, Stephan (2003): Das Cubus-Spiel, in: Hußmann, Stephan: Mathematik entdecken und erforschen, Cornelsen, Berlin.

Lengnink, Katja / Peschek, Werner (2001): Das Verhältnis von Alltagsdenken und mathematischem Denken als Inhalt mathematischer Bildung, in: Lengnink, Katja u. a. (Hrsg.): Mathematik und Mensch, Verlag Allgemeine Wissenschaft, Mühltal, 65-81

Leuders, Timo (2004): Der Mensch hat keinen Zufallssinn, in: Eikenbusch, Gerd / Leuders, Timo: Lehrer-Kursbuch Statistik, Cornelsen Scriptor, Berlin.

Malle, Günther / Malle, Sonja (2003): Was soll man sich unter einer Wahrscheinlichkeit vorstellen?, in: Mathematik lehren 118, S. 52-56.

Prediger, Susanne (2005): „Auch will ich Lernprozesse beobachten, um besser Mathematik zu verstehen." Didaktische Rekonstruktion als mathematikdidaktischer Forschungsansatz zur Restrukturierung von Mathematik, unveröffentlichtes Manuskript, Universität Bremen.

Riemer, Wolfgang (1991): Stochastische Probleme aus elementarer Sicht. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim.

Winter, Heinrich (1976): Erfahrungen zur Stochastik in der Grundschule (Klasse 1-6), in: Didaktik der Mathematik 1, 22-37.

Wollring, Bernd (1994): Animistische Vorstellungen von Vor- und Grundschulkindern in stochastischen Situationen, in: Journal für Mathematikdidaktik 15(1-2), S.3-34.Wolpers, Hans / Götz, Stefan (2002): Didaktik der Stochastik, Bd. 3 der Reihe Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Vieweg, Braunschweig.

Andreas Büchter,
Universität Dortmund
andreas@buechter.net
Stephan Hußmann,
Pädagogische Hochschule Karlsruhe
hussmann@ph-karlsruhe.de
Timo Leuders,
Pädagogische Hochschule Freiburg
leuders@ph-freiburg.de
Susanne Prediger,
Universität Bremen
prediger@math.uni-bremen.de