Funktionaler Zusammenhang –
Darstellungen verwenden

Herzlich Willkommen

mathe.sh

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Curriculum

Ziel: Die LiV können die **Einführung von neuen Funktionsklassen** unter Berücksichtigung der **Darstellungsformen** Text, Term, Tabelle und Graph planen.

Verschiedene handlungsorientierte Zugänge zur Einführung von Funktionen werden vorgestellt und mindestens einer von den LiV ausprobiert. Anhand verschiedener Beispiele wird der Wechsel der Darstellungsformen (Text, Tabelle, Graph, Term) thematisiert und auf die Grundvorstellungen des funktionalen Zusammenhangs (Zuordnung, Kovariation, Funktion als Ganzes) eingegangen. Die Erweiterung einer Funktionsklasse wird exemplarisch besprochen und der Einfluss der einzelnen Parameter in der Funktionsgleichung mithilfe von GeoGebra von den LiV animiert.

- Ein dynamisches Geometrie-System (DGS) (GeoGebra) wird zur Lösung ausgewählter Probleme herangezogen.

mathe.sh

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Ablaufplan

- Bezug zu mathe.sh
- Grundvorstellungen
- Funktionaler Zusammenhang - Aspekte
- Stunde hospitieren und reflektieren
- Fachanforderungen
- Darstellungen verwenden
- Fehlvorstellungen
- Funktionsklassen
- Abschluss

Terminplanung – Module – 1. Halbjahr 2025/2026 - Vorschläge

Modul	Datum	Tagungsort	Veranstalter/in
Funktionaler Zusammenhang – Darstellungen verwenden	12.11.2025	Flensburg	Michael
Funktionaler Zusammenhang – Darstellungen wechseln	10.12.2025	Online BBB Raum	Lara Knop
Leistungsüber-prüfung	21.01.2026	Gettorf	Boris

mathe.sh

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur
des Landes Schleswig-Holstein

Spieleliste im Mathematikunterricht

Aktuelles aus den Schulen

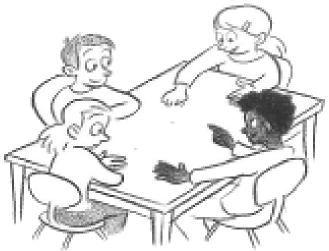
Wo drückt der Schuh?

mathe.sh

IQ.SH

Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Aktuelles



Mathematik – GemS „Bewertungskriterien zur Prüfungsstunde“

I. Hat die Lehrkraft sachlich und fachlich korrekt unterrichtet?	
Fachliche Fehler unterlaufen	
Grundvorstellungen aufgebaut und weiterentwickelt (Darstellungswechsel)	
Förderung fachlicher Kompetenzen nach SIC/Fachanforderungen/Abgrenzung zu Fertigkeiten	
Förderung prozessbezogener Kompetenzen der Bildungsstandards	
Angemessener Einsatz von Anschauungsmaterial	
Rum für individuelle Lösungsansätze und individuelle Denkweisen	

II. Hat die Lehrkraft die Selbstständigkeit der Lernenden unter anderem durch schüleraktivierende Unterrichtsformen gefördert?	
Unterstützung bei der Entwicklung eigener Strategien und Lösungsansätze	
Did. sinnvolle Impulssetzung in selbstverantwortlichen Arbeitsphasen (möglichst keine Inhalte vorgeben)	
Intelligentes Üben (sinnvolle Übungsphasen)	
Lernumgebung sinnvoll (praktikabel) gestaltet	

III. Hat die Lehrkraft die unterschiedlichen Voraussetzungen und Kompetenzen der Lernenden berücksichtigt?	
Kognitiv aktivierende Unterrichtsgespräche geplant und moderiert	
Kognitiv aktivierende Aufgabenstellungen niveaugerecht	
Vorunterrichtliche Vorstellungen berücksichtigen (Vorwissen/Alltagswissen)	
Förderung/Unterstützung zum Verbalisieren/Darstellen von Lösungswegen u. Strategien	
Differenzierungsstrategien effektiv eingesetzt, trotzdem einen gemeinsamen inhaltlichen Austausch ermöglicht	
Zieldifferent unterrichten	
Unterstützung bei dem Erwerb und der Anwendung von Fachsprache	

Selbstreflexion einer Unterrichtsstunde

1. Reflexion der Stundenschwerpunkte a. Aufgabenstellung b. Durchführung	2. Besonders positiv und gelungen hinsichtlich eines effektiven Lernens…
3. Schwierigkeiten ergaben sich… a. …in den einzelnen Unterrichtsphasen b. …speziell in den selbstverantwortlichen Arbeitsphasen der Lernenden	4. Didaktische Alternativen wären… In folgenden Bereichen fand eine differenzierte Kompetenzerweiterung statt a. inhaltsbezogen b. prozessbezogen
5. Schwierigkeiten ergaben sich… a. …in den einzelnen Unterrichtsphasen b. …speziell in den selbstverantwortlichen Arbeitsphasen der Lernenden	6. Die unterschiedlichen Lernvoraussetzungen wurden berücksichtigt durch…
7. Konsequenzen / Schlussfolgerungen für die Weiterarbeit sind…	

Ihr findet beide Unterlagen in unserem Moodle - Raum

Bitte weitergeben:

Einladung

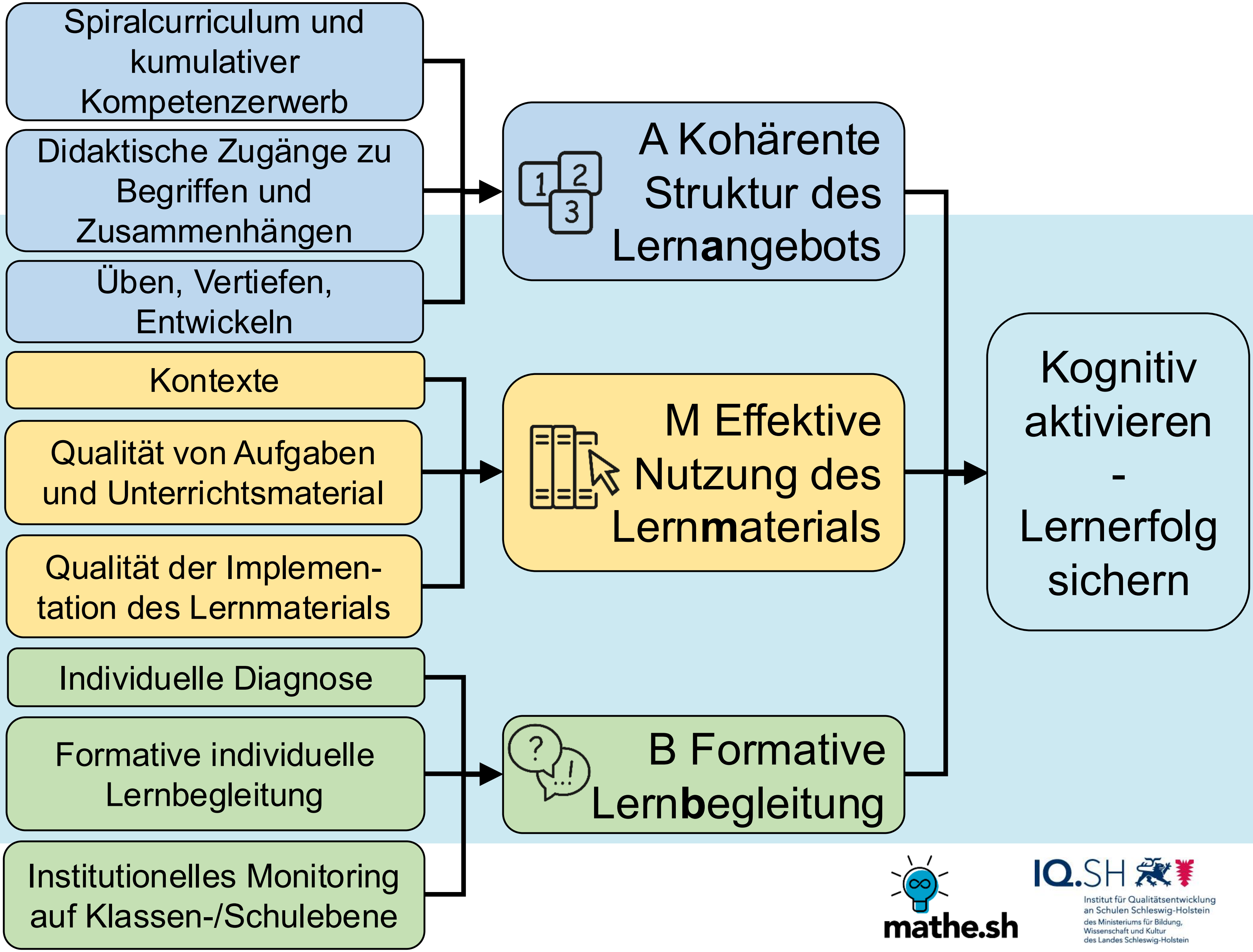
zur Veranstaltung AUS0601
„Gemeinsam ausbilden im Fach Mathematik“
(Lehramt an GemS)
für Ausbildungslehrkräfte
am 03.12.2025
16:00 – 18:00 Uhr
Online

„Das Ziel der Veranstaltung ist es, die Arbeit, die die Ausbilderinnen und Ausbilder an den Schulen und am IQSH leisten, weiter aufeinander abzustimmen und dadurch denen, die ausgebildet und qualifiziert werden, eine noch bessere Unterstützung zu ermöglichen.“

Anmeldung erfolgt über Formix (AUS0601)

mathe.sh

IQ.SH


Spiralcurriculum und kumulativer Kompetenzerwerb
Didaktische Zugänge zu Begriffen und Zusammenhängen
Üben, Vertiefen, Entwickeln
A Kohärente Struktur des Lernangebots
Kontexte
Qualität von Aufgaben und Unterrichtsmaterial
Qualität der Implementation des Lernmaterials
M Effektive Nutzung des Lernmaterials
Individuelle Diagnose
Formative individuelle Lernbegleitung
Institutionelles Monitoring auf Klassen-/Schulebene
B Formative Lernbegleitung
Kognitiv aktivieren - Lernerfolg sichern
mathe.sh
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Rückblick
Leitidee: Zahl - Zahlbereichserweiterungen

Aktivität 1

Stellen Sie die folgenden Zahlen auf einem geeigneten Zahlenstrahl dar.

2,3 | -1,2 | -0,2 | 0,7 | Brüche

Notieren Sie Ihre Lösung sehr ausführlich.
Welche Schritte sind notwendig, damit Sie die Aufgabe korrekt ausführen können.
Wann haben die Lernenden diese Schritte gelernt?

Welche Schwierigkeiten (Fehlvorstellungen) erwarten Sie in einer 7. und/oder 8. Klasse?

Wie gehen Sie damit um? (Differenzierung, Strukturhilfen…)

Zahlbereichserweiterung

- Aus der Grundschule bekannt:

  N (begrenzter Zahlenraum!)
- Klasse 6: Einführung der positiven Bruchzahlen

  B
- Klasse 7: Einführung von Z (und Q)
- Klasse 9: Einführung von R

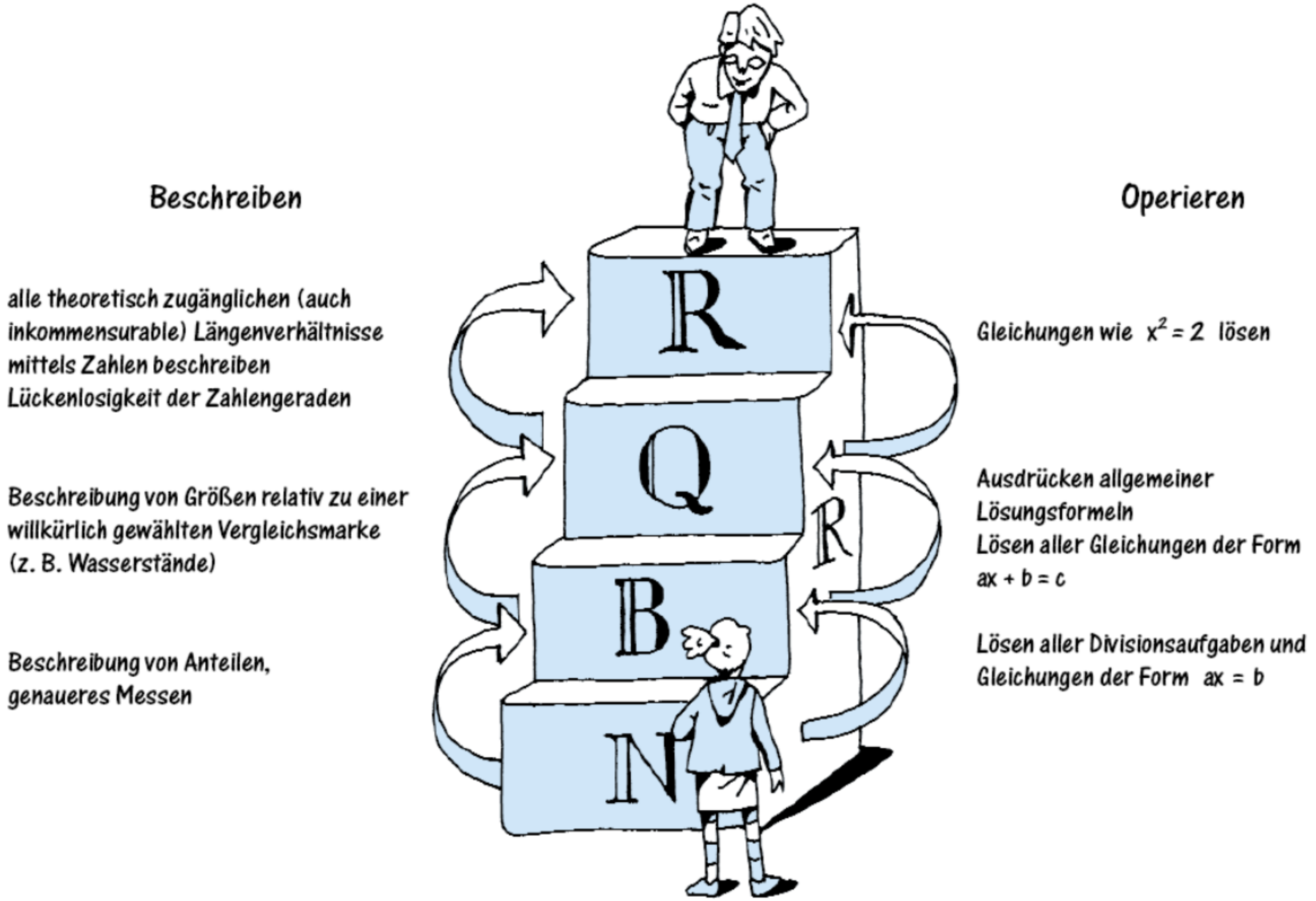


***Abb. 1**: Zahlbereichstreppe: Anlässe für Zahlbereichserweiterungen*

Quelle: Hefendehl-Hebeke, Lisa und Prediger, Susanne (2006): Unzählig viele Zahlen: Zahlbereiche erweitern –
Zahlvorstellungen wandeln ; Praxis der Mathematik in der Schule 48, S. 1-7.

Vor dem Unterricht zu klären – 6 Fragen

- Warum ist die angestrebte Zahlbereichserweiterung notwendig?
  (fachliche Motivation - Motivation der Schüler)

- Wie wird diese in der Fachwissenschaft durchgeführt? Was lässt sich davon für den Unterricht nutzen, was nicht?

- Welche sinnstiftenden Vorstellungen von Zahlen und Rechenoperationen gibt es, wofür gibt es keine sinnstiftenden Vorstellungen? Wo sind die Grenzen einer sinnvollen Veranschaulichung?

Vor dem Unterricht zu klären – 6 Fragen

- Wie rechnet man mit den neuen Zahlen? Wie erweitert man die Regeln für die Grundrechenarten so, dass man in dem erweiterten Zahlbereich rechnen kann?

- Welche Veränderungen (insbesondere bei den Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler) bringen die jeweilige Zahlbereichserweiterung mit sich?

- Was sind typische Schülerfehler?

Funktionales Denken

Funktionales Denken

Beschreiben Sie in eigenen Worten, was Sie unter funktionalem Denken verstehen!

Funktionales Denken beginnt in der Sekundarstufe?

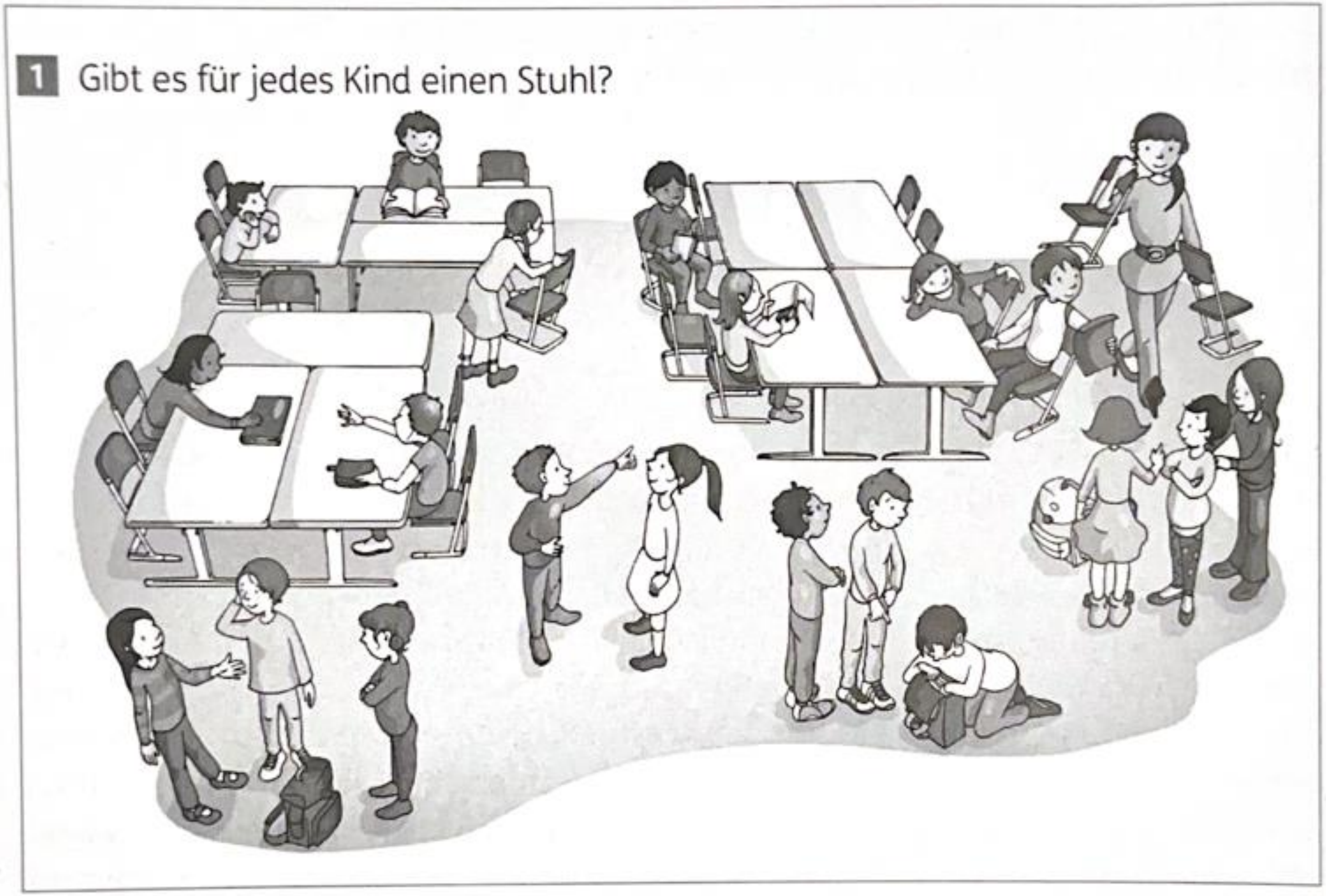


Abb. 2: Anzahlvergleich (aus Wittmann & Müller 2012, S. 14)

Quelle: Hußmann, Stephan und Schwarzkopf, Ralph „ Funktionaler Zusammenhang“ in Abshagen u.a. (2021), S. 116

Aktivität 2
Fachanforderungen der Primarstufe

a) Sichten Sie in Partnerarbeit die Fachanforderungen für die Primarstufe.

Link: Fachanforderungen Mathematik - IQSH Fachportal

https://fachportal.lernnetz.de/sh/faecher/mathematik/fachanforderungen.html

b) Beschreiben Sie, wie der Inhaltsbereich „Muster, Strukturen und funktionaler Zusammenhang" in der Grundschule ausgestaltet wird.

Funktionales Denken beginnt nicht erst mit der Einführung des Funktionsterms, sondern schon **in der Grundschule** mit dem **Erkennen, Analysieren , Beschreiben und Begründen von Mustern und Zusammenhängen**.
Dabei werden Beziehungen zwischen Objekten entdeckt und beschrieben.

Quelle: Mathematik 5-10, Heft 49, 4.Quartal 2019, Friedrich Verlag, „Das hängt ganz davon ab – Funktionales Denken entwickeln“, Artikel „Zusammenhänge erkennen und verschieden darstellen“ von Bicker und Maitzen, S. 4-5.

Funktionales Denken in der Primarstufe

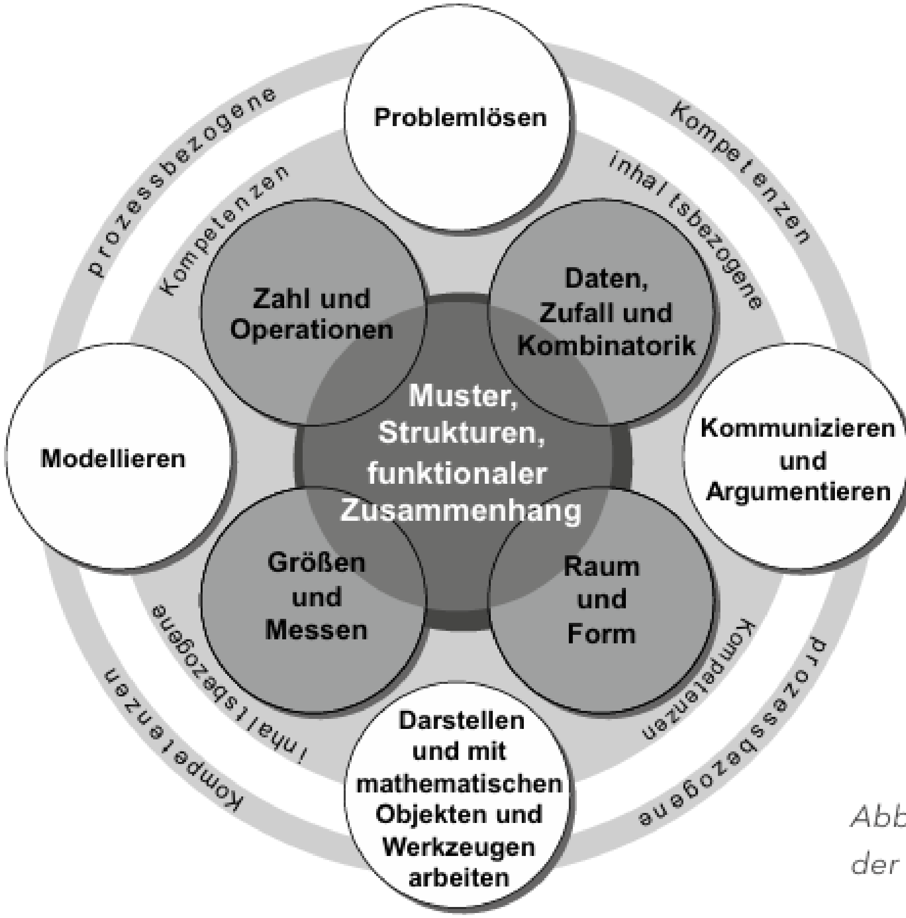


Abbildung: Kompetenz-Modell der Fachanforderungen

FACHANFORDERUNGEN MATHEMATIK (2024)

Unterrichtshospitation

Ablauf Unterrichtshospitation

Bildquelle: BertelsmannStiftung/Simone Ott

Zu Hause

Unterrichtsvorbereitung vorab lesen

Vor der Stunde

Beobachtungsschwerpunkte festlegen / verteilen

Während der Stunde

- Beobachtungsschwerpunkte im Blick behalten (Notizen!)
- möglichst keine Gespräche unter Erwachsenen

Basisdimensionen guten Unterrichts
(gemeinsames Nachdenken über Unterricht)

Bildquelle: BertelsmannStiftung/Simone Ott

Unterrichtsqualität: Drei Dimensionen

I. Klassenführung und Strukturierung
1. Störungspräventive Unterrichtsführung
2. Effektive Zeitnutzung
3. Monitoring der Lerngruppe
4. Zielorientierung, strukturierte und kohärente Unterrichtsepisoden

II. Kognitive Aktivität

5. Auswahl und Sequenzierung kognitiv herausfordernder Aufgaben
6. Kognitiv aktivierendes Unterrichtsgespräch
7. Kognitiv herausforderndes Üben und Metakognition

III. Individuelle Unterstützung

8. Umgang mit Heterogenität
9. Konstruktiver Umgang mit Fehlern
10. Respekt und Geduld bei Verständigungsproblemen

Holzberger, Kunter, 2016 in: „Schule und Unterricht, Lehren und Lernen“, S. 39 -51

mathe.sh

IQ.SH

Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Prinzip der minimale Hilfe/gestufte Hilfe

Bildquelle: BertelsmannStiftung/Simone Ott

1. Allgemeine Motivation
2. Positive oder negative Rückmeldungen zu Zwischenergebnissen
3. Allgemein-strategische Hilfen
4. Inhaltlich-strategische Hilfen
5. Inhaltliche Hilfen

Zech, Friedrich (1996): Grundkurs Mathematikdidaktik. 8. Weinheim: Beltz Verlag.

Unterrichtsbesuch

Verteilung der Beobachtungsschwerpunkte

Unterrichtsstunde

Reflexion

Beobachtungsbogen der Prüfungsstunde als Grundlage für Hospitationsstunden

Übergeordnete Punkte:

1. Hat die LK sachlich und fachlich korrekt unterrichtet?
2. Hat die LK die Selbstständigkeit der Lernenden unter anderem durch schüleraktivierende Unterrichtsformen gefördert?
3. Hat die LK die unterschiedlichen Voraussetzungen und Kompetenzen der Lernenden berücksichtigt?
4. Hat die LK den Unterricht sinnvoll strukturiert und flexibel auf sich verändernde Situationen reagiert?
5. Hat die LK präzise und verständlich formuliert?
6. Ist die LK mit den Lernenden respektvoll und wertschätzend umgegangen?
7. Ist die LK überzeugend und als Vorbild aufgetreten?
8. Konnte die LK ihr didaktisches Konzept und dessen Realisierung angemessen reflektieren?

Beobachtungsaufträge

Den Beobachtungsbogen finden Sie in der Moodle – Gruppe oder unter IBBW_Unterrichtsfeedbackbogen.

Kognitive Aktivierung

Konstruktive Unterstützung

Strukturierte Klassenführung

Tiefenstruktur

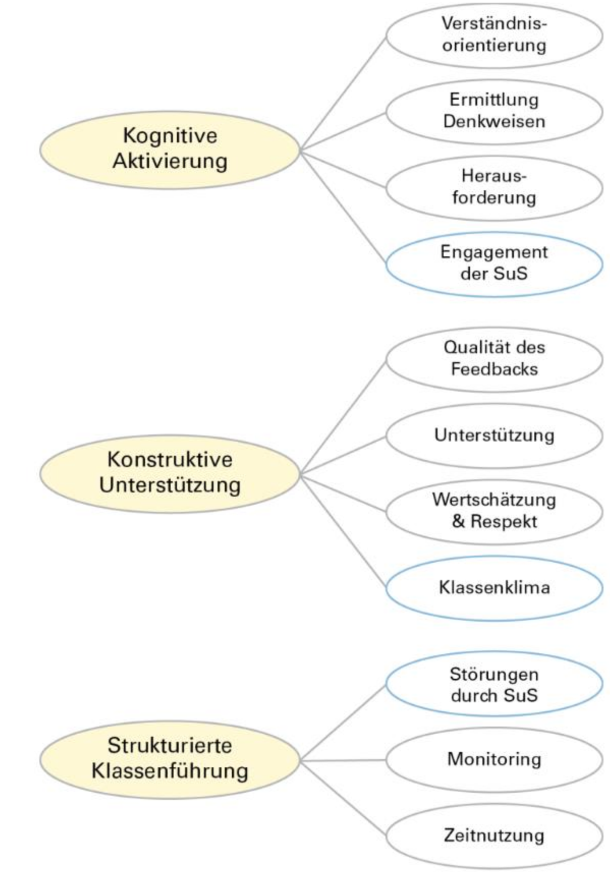
Manual zum Fragebogen

(1) Zu welchem Grad werden die Lernenden angeregt, sich aktiv mit den Lerngegenständen auseinanderzusetzen und sich dabei vertieft mit den Inhalten zu beschäftigen? (Kognitive Aktivierung)

(2) Wie gut unterstützt die Lehrkraft die Lernenden beim Wissenserwerb und wie sehr ist die Interaktion zwischen Lehrkraft und Lernenden durch Wertschätzung und Respekt geprägt? (Konstruktive Unterstützung)

(3) Wie gut gelingt es, den Unterricht so zu steuern, dass möglichst wenige Störungen auftreten, alle Schülerinnen und Schüler beim Lernen beteiligt sind und Unterrichtszeit somit effektiv genutzt werden kann? (Strukturierte Klassenführung)

Übersicht über die mit dem *Unterrichtsfeedbackbogen Tiefenstrukturen* erfassbaren Unterrichtsqualitätsmerkmale:



mathe.sh

IQ.SH Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Kognitive Aktivierung

1. Kognitive Aktivierung	trifft nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft völlig zu
1.1 Der Unterricht hat einen klaren Fokus auf die zentralen Inhalte, die von den Schülerinnen und Schülern verstanden werden sollen.	☐	☐	☐	☐
1.2 Die Lehrkraft ermittelt das aktuelle Verständnis der Schülerinnen und Schüler.	☐	☐	☐	☐
1.3 Im Unterricht wird mit Fragen und Aufgaben gearbeitet, die die Schülerinnen und Schüler zur vertieften Auseinandersetzung mit den Inhalten herausfordern.	☐	☐	☐	☐
1.4 Die Schülerinnen und Schüler sind engagiert am Unterrichtsgeschehen beteiligt.	☐	☐	☐	☐

Konstruktive Unterstützung

2. Konstruktive Unterstützung	trifft nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft völlig zu
2.1 Das Feedback, das die Lehrkraft den Schülerinnen und Schülern gibt, ist zum Weiterlernen hilfreich.	☐	☐	☐	☐
2.2 Die Lehrkraft unterstützt die Schülerinnen und Schüler individuell in ihrem Lernprozess.	☐	☐	☐	☐
2.3 Die Lehrkraft begegnet den Schülerinnen und Schülern mit Wertschätzung und Respekt.	☐	☐	☐	☐
2.4 Die Schülerinnen und Schüler begegnen einander und der Lehrkraft mit Wertschätzung und Respekt.	☐	☐	☐	☐

Strukturierte Klassenführung

3. Strukturierte Klassenführung	trifft nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft völlig zu
3.1 Der Unterricht verläuft weitgehend störungsfrei.	☐	☐	☐	☐
3.2 Die Lehrkraft hat einen guten Überblick über das Geschehen im Unterricht.	☐	☐	☐	☐
3.3 Die zur Verfügung stehende Unterrichtszeit wird für die Auseinandersetzung mit den Lerninhalten genutzt.	☐	☐	☐	☐

Selbstreflexion einer Unterrichtsstunde

1. Reflexion der Stundenschwerpunkte a. Aufgabenstellung b. Durchführung	2. Besonders positiv und gelungen hinsichtlich eines effektiven Lernens...
3. Schwierigkeiten ergaben sich... a. ...in den einzelnen Unterrichtsphasen b. ...speziell in den selbstverantwortlichen Arbeitsphasen der Lernenden	4. Didaktische Alternativen wären... a.
5. In folgenden Bereichen fand eine differenzierte Kompetenzerweiterung statt a. inhaltsbezogen b. prozessbezogen	6. Die unterschiedlichen Lernvoraussetzungen wurden berücksichtigt durch...

Reflexion der Stunde

1. Eigenreflexion:	LiV reflektiert ihre Unterrichtsstunde (Hilfe
2. Positivblitzlicht:	Jede LiV nennt einen Punkt (Bitte keine Dopplungen).
3. Beobachtungsaufträge:	Jede Gruppe stellt ihre Beobachtungen vor.
4. Tipps und Fragen:	LiV wählt ein bis zwei Tipps/Fragen aus, über die sie sprechen möchte.

Funktionaler Zusammenhang: Grundvorstellungen

Grundvorstellungen in der Mathematik

Tragfähige mathematische Vorstellungen nennen wir *Grundvorstellungen*; abgekürzt GV.

(vom Hofe/Blum 2016)

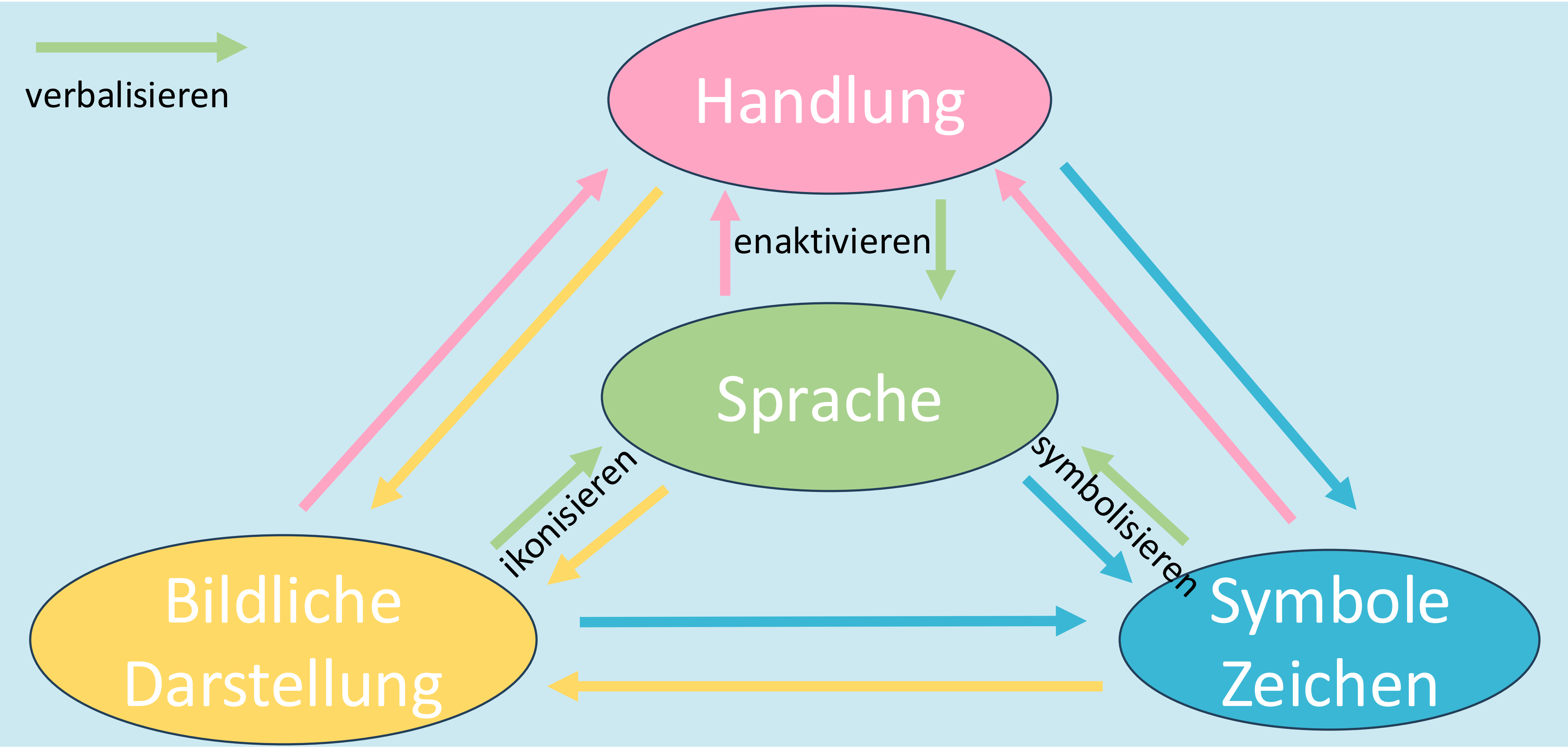
Grundvorstellungen
sind anschauliche Deutungen eines mathematischen Begriffs, die diesem Sinn geben und Verständnis ermöglichen.

Aus vom Hofe, Rudolf und Roth, Jürgen (2023): „Grundvorstellungen aufbauen" in mathematik lehren, Heft 236, S. 2-7, Velber, Friedrich Verlag

Aufbau von Grundvorstellungen

- Knetgummi nutzen (konkretes, strukturiertes Material nutzen)
- Konkrete Bilder im Kopf erzeugen
- In das gedankliche Netzwerk die Bilder einfügen
- Vorstellungen entwickeln
- Vorstellungen zielgerichtet und flexibel einsetzen
- Ständige Verfügbarkeit

Übergänge zwischen den Darstellungsebenen



Funktionaler Zusammenhang: Alltagsbezug

Funktionen bieten Darstellungsmittel, um Abhängigkeiten/Zuordnungen aus dem Alltag der Lernenden zu beschreiben.

5 Min
Murmelphase/Austausch

Welche Abhängigkeiten könnten das sein?
Finden Sie Beispiele aus dem Leben.

Einstiegsbeispiel: Realschule, 9. Klasse

Schreibe eine Textaufgabe zu einem der beiden Funktionsterme:
$y = 0{,}2x + 5$
$y = 3x + 1$

10 Minuten kosten bei einem Telefonat von einem Handy $y = 10 + 0{,}2 = 10{,}20$€
Wie viel kosten bei einem Telefonat von einem Handy 5min:
$y = 0{,}2x + 5 = 5{,}20$€

Fabienne

Ein Freund von dir braucht Hilfe beim Umzug... Er bringt ein 5m langes Brett, dann sägt er alle 5min 0,2m ab.

Nach wie vielen Minuten ist das Brett auseinander gesägt?

Sven

... 1€ Grundgebühr auf dem Handy
3€ pro minute (Anruf)
wie viel zahle ich, wenn ich 2St Telefoniert habe?
$y = 3x + 1$

$y = 3x + 1$
$y = 3 \cdot 120 + 1$
$\underline{y = 361€}$

Paul

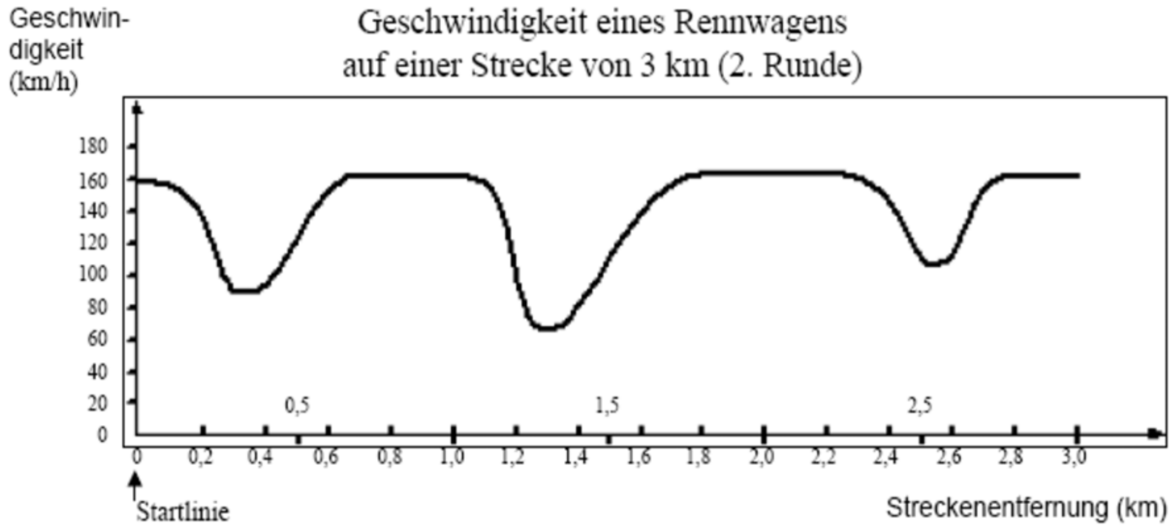
Ich möchte 3 Tomaten kaufen, und Kriege 1 Gratis dazu.

Klara

Diagnoseaktivität 1 (Kleingruppenarbeit)

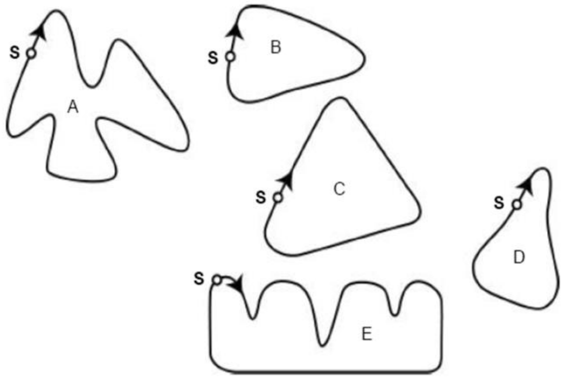
Was haben die Lernenden jeweils gut verstanden und wo gibt es noch Probleme?

Ein Graph sagt mehr als 1000 Worte?



Das Diagramm beschreibt die Fahrt eines Rennwagens über eine geschlossene Rennstrecke.

Auf welcher dieser fünf möglichen Rennstrecken fuhr der Wagen, so dass der obige Geschwindigkeitsgraph entsteht?



Quelle: Barzel, B. et al., 2021, Algebra und Funktionen, Springer Spektrum

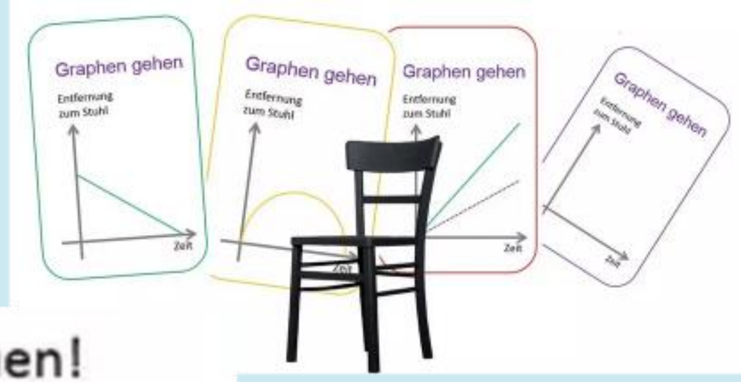
mathe.sh

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur
des Landes Schleswig-Holstein

Aktivität 3
Stuhltanz

Aufbau von Grundvorstellungen
Stuhltanz (Anleitung)

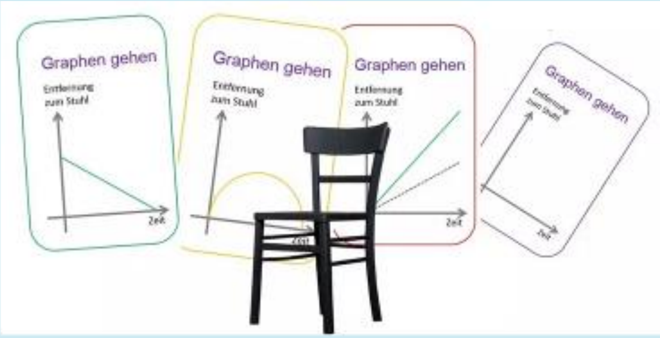
Material: Stuhl, Funktionskarten, Blanko-Graphen.
Bilden Sie zwei Gruppen.



- Ziehe eine Karte – nur du darfst sie anschauen!
- Deine Entfernung vom Stuhl soll so sein, wie auf der Karte abgebildet. Stelle dich in die Ausgangsposition.
- Sage „Start“ und „Stopp“ um den anderen so Anfang und Ende deines „Graphen gehen“ mitzuteilen.
- Beobachter: Skizziert die gesehenen Graphen.

Quelle:
https://www.friedrich-verlag.de/friedrich-plus/sekundarstufe/mathematik/funktionen/graphen-gehen-funktionale-zusammenhaenge-vermitteln/
(zuletzt aufgerufen: 10.04.2024)

Stuhltanz
(Didaktische und fachliche Beratung)



Quelle:
https://www.friedrich-verlag.de/friedrich-plus/sekundarstufe/mathematik/funktionen/graphen-gehen-funktionale-zusammenhaenge-vermitteln/
(zuletzt aufgerufen: 10.04.2024)

Notieren Sie bitte:

- Welche Beobachtungen haben Sie gemacht?

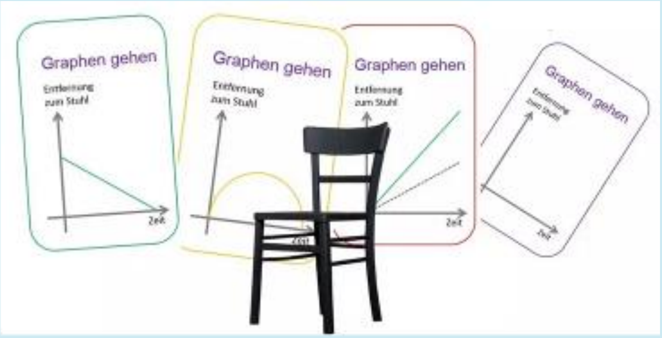
- Welche Schwierigkeiten gab es bei der Aufgabenumsetzung?

- Formulieren Sie inhaltliche Kompetenzen, die bei den Lernenden erweitert werden.

Stuhltanz
Aufgaben im kognitiv aktivierenden Unterricht

Gehaltvolle Aufgaben als Fundament eines kognitiv aktivierenden Unterrichts
(Reusser, Lipowsky, Pauli, 2021, „Eine kognitiv aktivierende Lernumgebung gestalten", in: Pädagogik 11/21, Beltz)

1) Kognitiv aktivierende Aufgaben … … ermöglichen Zugänge zu fachspezifischem Wissen, Denken und Können.	2) Kognitiv aktivierende Aufgaben … … gehen über die Anwendungen von Routinen hinaus.
3) Kognitiv aktivierende Aufgaben … … wecken – durch Alltagsnähe, Spielcharakter, Überraschungsmomente, oder Erzeugung einer kognitiven Dissonanz – Neugier und motivieren sich auf den Gegenstand einzulassen.	4) Kognitiv aktivierende Aufgaben … … lassen mehrere Lösungswege zu beziehungsweise lassen sich auf unterschiedlichen Niveaus und Denkpfaden bearbeiten und eignen sich damit für lernschwächere und -stärke Schülerinnen und Schüler.
5) Kognitiv aktivierende Aufgaben … … laden zum problemlösenden Denken ein und ermöglichen den Aufbau von lernmethodischen und personalen Kompetenzen.	6) Kognitiv aktivierende Aufgaben … … ermöglichen, sich sprachlich differenziert zu Beobachtungen, Erfahrungen und Überlegungen auszudrücken.



Quelle:
https://www.friedrich-verlag.de/friedrich-plus/sekundarstufe/mathematik/funktionen/graphen-gehen-funktionale-zusammenhaenge-vermitteln/
(zuletzt aufgerufen: 10.04.2024

mathe.sh

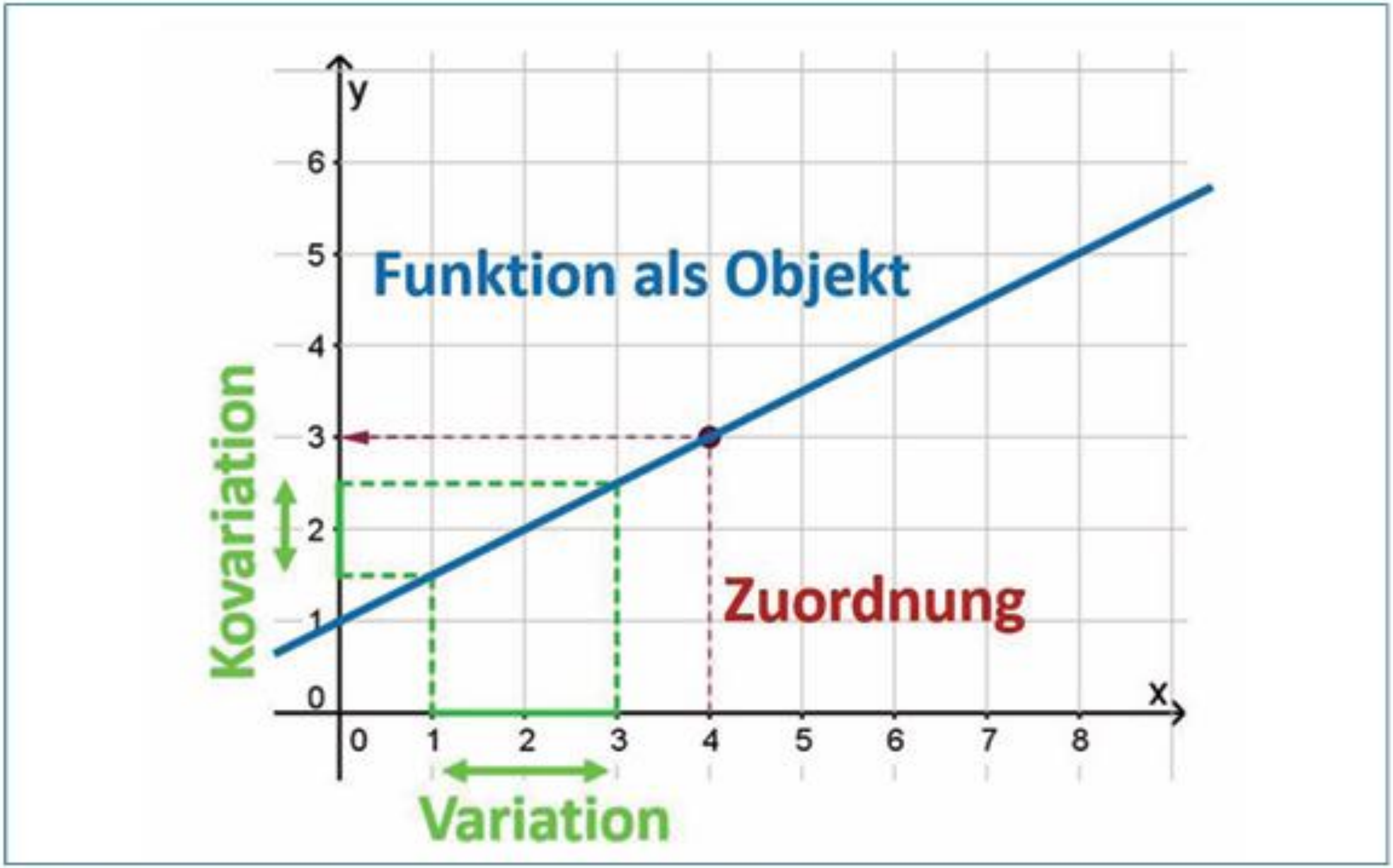
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Grundvorstellungen – Funktionaler Zusammenhang

Es werden drei wesentliche Grundvorstellungen (Aspekte)

unterschieden:

- Zuordnungsvorstellung
- Kovariationsvorstellung
- Objektvorstellung



1 | Die drei Grundvorstellungen Funktionalen Denkens

Drei verschiedene Grundvorstellungen einer Funktionen:

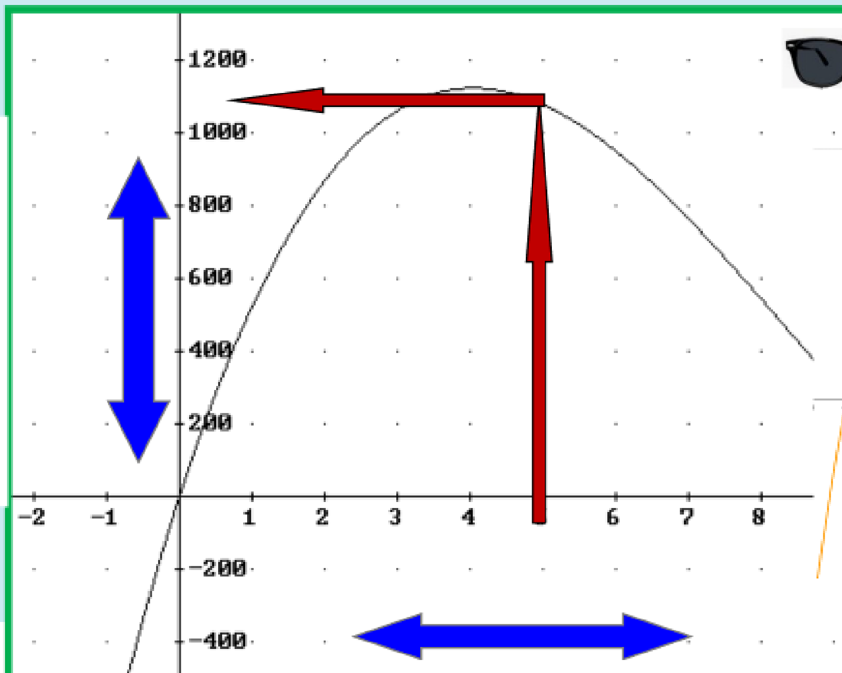
KOVARIATION

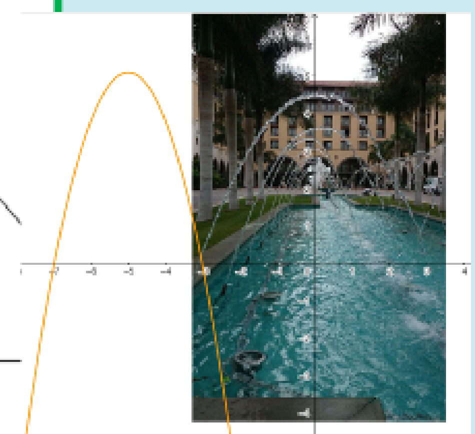
Man betrachtet, wie sich die Veränderung (Kovariation) der unabhängigen Größe auf die abhängige auswirkt.

Man betrachtet die Zuordnung einzelner Werte.

Man betrachtet die Funktion als Ganzes, als eigenständiges Objekt

3.5	1107.4
3.7	1117.104
3.9	1122.264
4.1	1123.072
4.3	1119.72
4.5	1112.4





mathe.sh

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur
des Landes Schleswig-Holstein

Drei verschiedene Grundvorstellungen einer Funktionen:

KOVARIATION	ZUORDNUNG	OBJEKT
Man betrachtet, wie sich die Veränderung (Kovariation) der unabhängigen Größe auf die abhängige auswirkt.	Man betrachtet die Zuordnung einzelner Werte.	Man betrachtet die Funktion als Ganzes, als eigenständiges Objekt.
Global - dynamisch	**Lokal** - statisch	**Global** -statisch

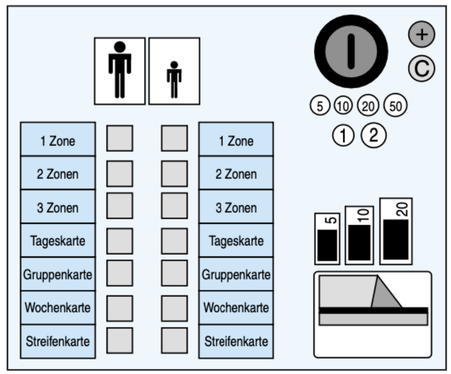
Typische Fragen, z.B.

Wie ändert sich f(x), wenn sich x ändert? Wie muss sich x ändern, damit f(x) fällt?	Welches f(x) zu einem x? Welches x zu einem f(x)?	Was ist die typische Form? Was macht die Form aus?

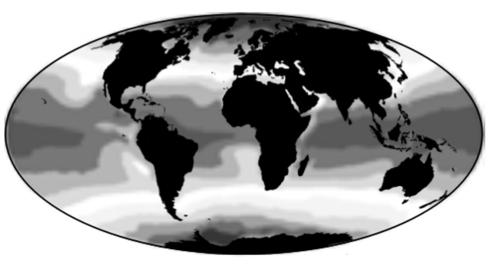
„…fehlen diese Aspekte, wird jede Weiterarbeit in einer abstrakten Funktionenlehre ab der 9. Klasse nur ein sinnleeres Gerede ohne intuitiven Hintergrund` “.

Zuordnungsvorstellung

Fahrkartenkauf
Am Fahrkartenautomat erhält man für jede Tastenkombination eine bestimmte Fahrkarte (auch wenn für den Benutzer nicht immer klar ist, welche …).
Zuordnungsvorstellung



Temperaturkarte
Für jeden Ort auf der Weltkugel gibt es einen Längen- und Breitengrad, zu jedem Zeitpunkt lässt sich an diesem Ort eine eindeutige Temperatur feststellen (zumindest im Prinzip).
Zuordnungsvorstellung



Kovariationsvorstellung

Höhenmessung
Temperatur und Luftdruck in den Bergen hängen mit der Höhe zusammen, auf der man sich befindet. Das wird zur Höhenmessung benutzt.
Zuordnungs- und Kovariationsvorstellung

Einkauf
Der Preis einer Ware ist abhängig von der Menge, und es gilt: Je größer die Menge, desto höher der Preis. (Bei näherem Hinsehen ist dieser Zusammenhang aber nicht unbedingt proportional …)
Zuordnungs- und Kovariationsvorstellung

Pause

Mittagspause und Frische Luft schnappen

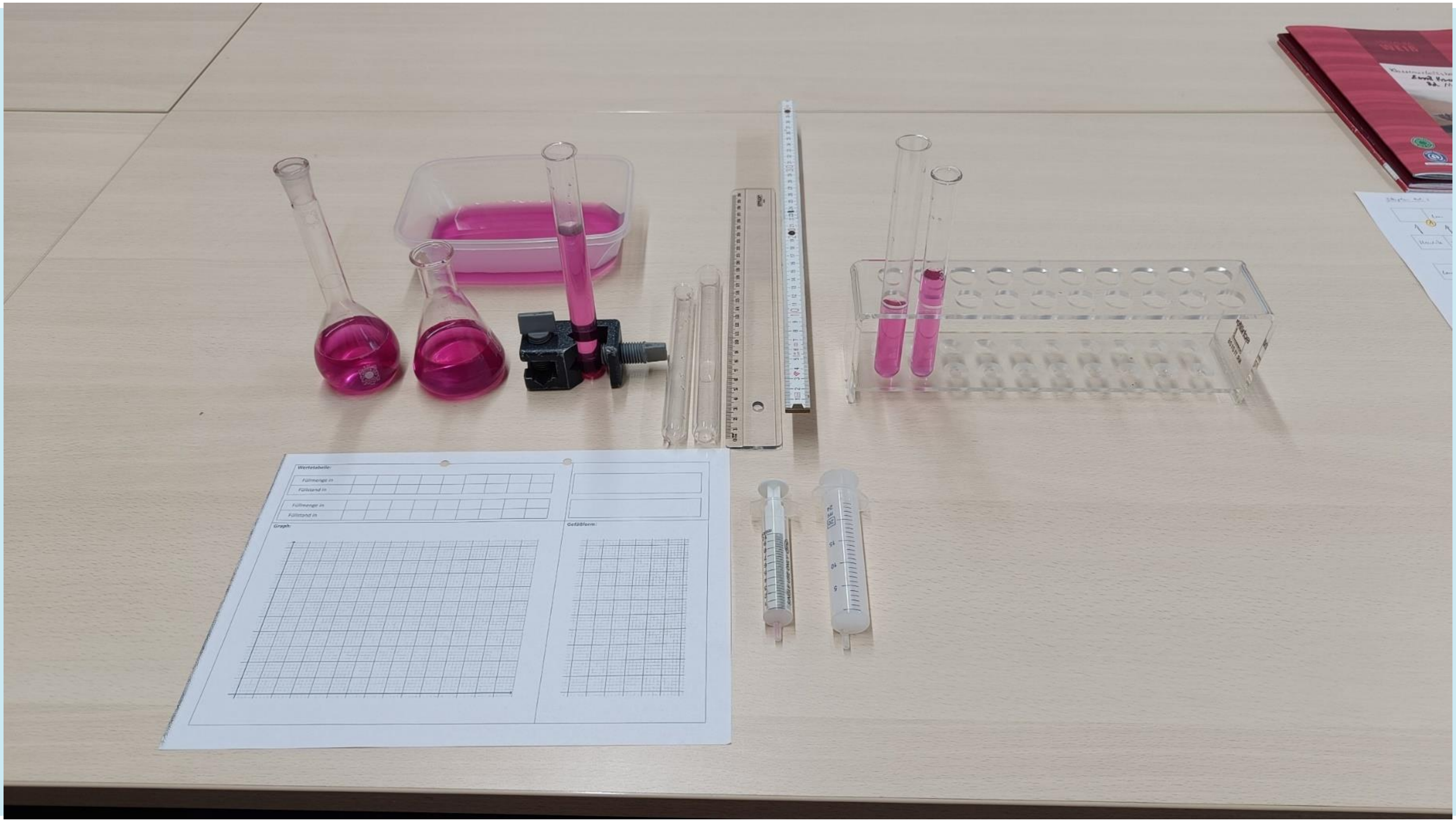
Handlungsorientierte Zugänge zum funktionalen Denken
(im kognitiv aktivierenden Unterricht)

„Als kognitiv aktivierender Unterricht kann ein Unterricht bezeichnet werden, der zum vertieften Nachdenken (…) über den Unterrichtsgegenstand anregt.“

(Quelle: Lipowsky, F. (2020). Unterricht. In E. Wild & J. Möller (Hrsg.), Pädagogische Psychologie (3. Aufl., S. 69–118). Springer VS.)

Aktivität 4
Füllstandsgraphen

Handlungsorientierter Zugang: Füllstandsgraphen



Handlungsorientierung: Funktionaler Zusammenhang

Bestimmung des Zusammenhangs zwischen Füllmenge und Füllhöhe

In ein Gefäß wird immer das gleiche Volumen an Wasser gefüllt. Erstellt wird ein Füllgraph, der je nach eingefüllter Menge Wasser die Füllstandsgraphen in dem Gefäß darstellt.

Arbeitsauftrag:

1. Wählen Sie jeweils eines der Gefäße und skizzieren Sie zunächst den Prognosegraphen auf der Folie/Blankographen/Millimeterpapier.
2. Bestimmen Sie den Zusammenhang nun experimentell und zeichnen den zugehörigen Graphen.
3. Vergleichen Sie diesen mit Ihrem Prognosegraphen.
4. Wiederholen Sie das Vorgehen für mind. ein weiteres Gefäß.

mathe.sh

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Handlungsorientierter Zugang:
Füllstandsgraphen im kognitiv aktivierenden Unterricht

- Beschreiben Sie den Zusammenhang von Gefäßform und Graph.
- Untersuchen Sie, welche Grundvorstellungen/Kompetenzen hier geschult werden.
- Nennen Sie Einsatzmöglichkeiten für diese Aufgabe:
  Welche Vorgaben braucht Ihre Lerngruppe?

„Füllstandsgraphen“ im kognitiv aktivierenden Mathematikunterricht

Unterrichtsqualität: Drei Dimensionen
I. Klassenführung und Strukturierung
1. Störungspräventive Unterrichtsführung
2. Effektive Zeitnutzung
3. Monitoring der Lerngruppe
4. Zielorientierung, strukturierte und kohärente Unterrichtsepisoden
II. Kognitive Aktivität
5. Auswahl und Sequenzierung kognitiv herausfordernder Aufgaben
6. Kognitiv aktivierendes Unterrichtsgespräch
7. Kognitiv herausforderndes Üben und Metakognition
III. Individuelle Unterstützung
8. Umgang mit Heterogenität
9. Konstruktiver Umgang mit Fehlern
10. Respekt und Geduld bei Verständigungsproblemen

Didaktische Aufarbeitung der „Füllststandsgraphen“ für einen kognitiv aktivierenden Unterricht erfordert …

… kognitiv aktivierende Aufgabenstellungen “Füllstandsgraphen“ (als Fundament)

… kognitiv aktivierendes Handeln der Lehrkraft (vgl. Laminat: Ausgewählte Maßnahmen zur kognitiven Aktvierung der Lernenden oder Unterrichtsbeobachtungen)

Formulieren Sie Fragen und Aufgabenstellungen für Ihre Lernenden im Sinne eines kognitiv aktivierenden Unterrichts.

mathe.sh

IQ.SH Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Handlungsorientierung: Funktionaler Zusammenhang
Maßnahmen zur kognitiven Aktivierung

Anspruchsvolle Aufgaben, die sich auf verschiedenen Wegen bearbeiten lassen	Bezüge herstellen zwischen den Konzepten, Vorstellungen, Ideen und Positionen der Lernenden	Bewusstmachen von Widersprüchen und Herbeiführen kognitiver Konflikte
Insistieren auf Erklärungen und Begründungen	Kognitiv anregende Fragen und Aufgaben	Aufgaben stellen, die über die Anwendung von Routinen hinausgehen
Systematische Variation von Aufgaben(teilen) und Anregung zur Entdeckung von Regelmäßigkeiten	Anregung der Lernenden, (sich gegenseitig) Fragen zu stellen	Anregung der Lernenden, Vermutungen zu formulieren und Sachverhalte zu erklären
Feedback, das nicht zu viel vorwegnimmt, sondern Hinweise enthält	Metakognitive Förderung durch Anregung der Lernenden zur Anwendung von Lernstrategien	Metakognitive Förderung durch Anregung zur Reflexion des Lernprozesses

Außerdem kognitive Aktivierung durch Kontrastieren und Vergleichen!

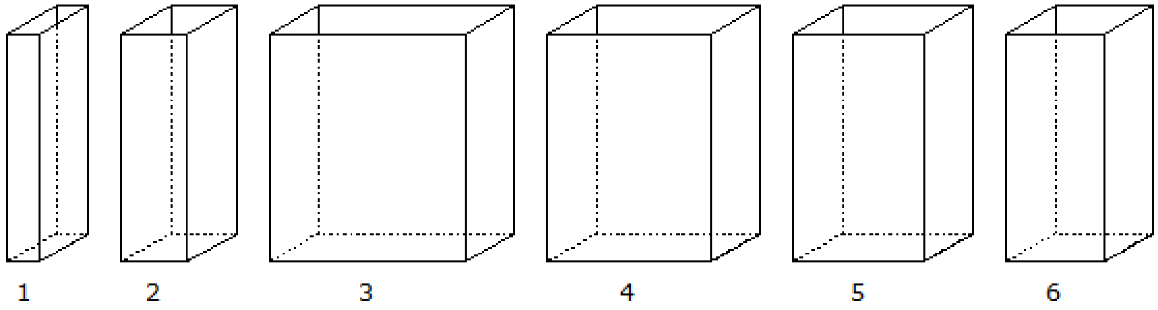
Handlungsorientierter Zugang: Füllstandsgraphen

Kognitiv aktivierender Mathematikunterricht beinhaltet ein Aufgabenangebot, das zur vertieften Auseinandersetzung mit Lerninhalten anregt. (Das alleine reicht allerdings nicht aus!)

Allerdings: Das Aufgabenangebot alleine macht noch keinen kognitiv aktivierenden Mathematikunterricht aus

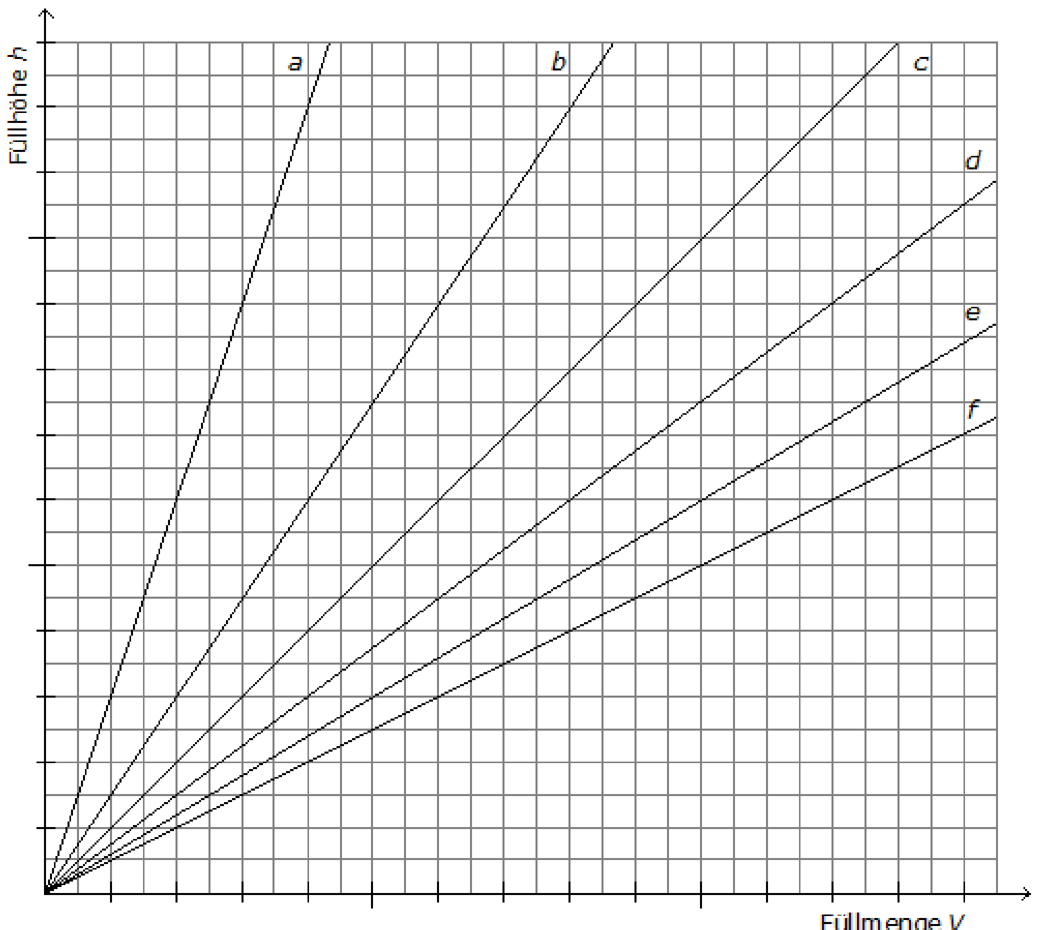
Handeln von Lehrkräften und unterrichtliche Maßnahmen können zur kognitiven Aktivierung beitragen (vgl. Lipowsky/Hess, 2019

Welche Maßnahmen sind das denn? Z. B. gestellte Fragen der Lehrkräfte und das Einfordern von Begründungen, Adaptivität



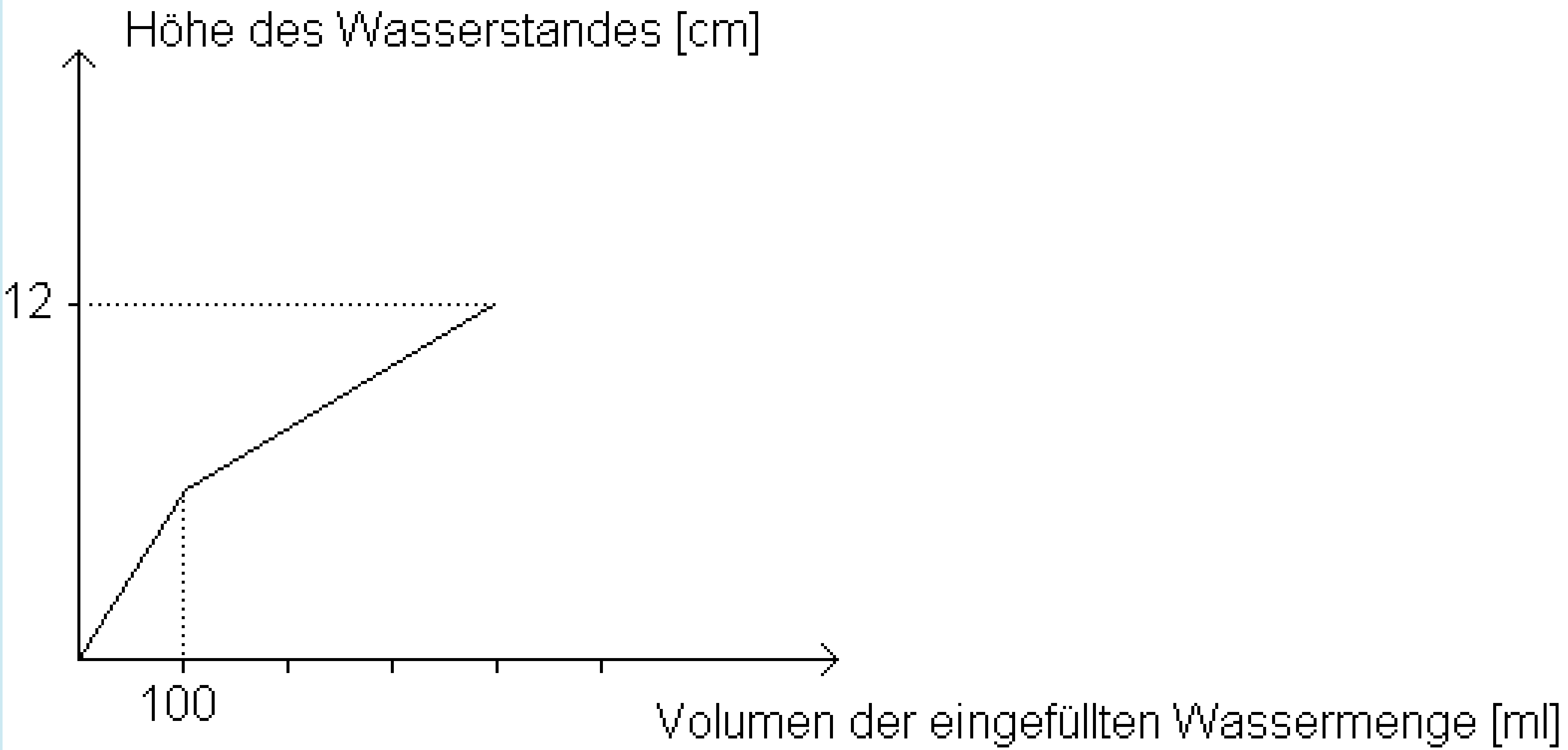
Die Gefäße werden mit Wasser gefüllt. Für jedes Gefäß werden jeweils die eingefüllte Wassermenge und die Füllhöhe gemessen.

Ordne jedem Gefäß den zugehörigen Füllstandsgraphen zu.



IQSH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur
des Landes Schleswig-Holstein

Lernende formulieren Fragen:



Weitere handlungsorientierte Zugänge

https://www.geogebra.org/m/fyvuvfst, 6.11.25, 10:07

https://www.youtube.com/watch?v=-yVc6uEndRI, 6.11.25, 10:10

Darstellungen

mathe.sh

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Aktivität 5
Darstellungswechsel

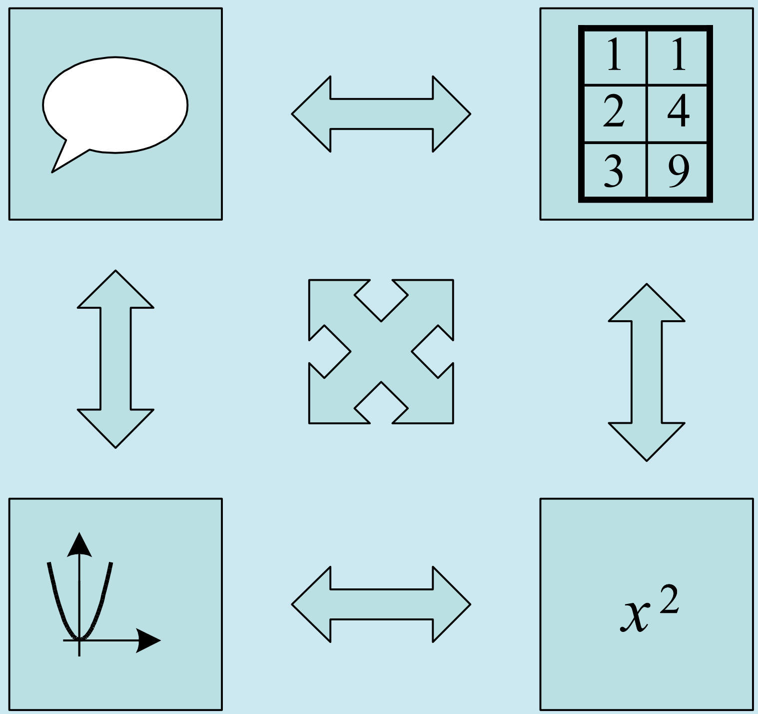
Funktionen: Darstellungen

Welche Darstellungen von Funktionen sind Ihnen bekannt?

Die vier Darstellungsformen

Sprache

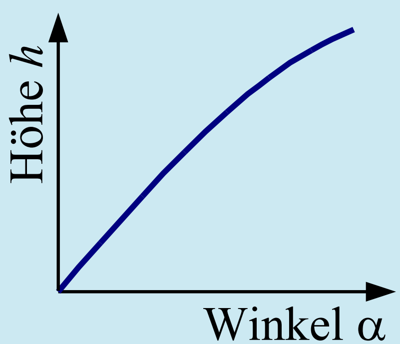
Die über eine Drehleiter der Feuerwehr erreichbare Höhe hängt vom Anstellwinkel ab.



Tabelle

Winkel	Höhe
50	26,8
60	30,3
70	32,9

Graph



Term

$$h(\alpha) = 35 \cdot \sin \alpha$$

Aktivität 5
Darstellungswechsel

Darstellungen wechseln

Lesen, Wertepaare suchen, interpretieren

	Sprache Situation	Tabelle	Graph	Symbol/ Term
Sprache/ Situation	Umformu- lieren			
Tabelle				
Graph				
Symbol/ Term				

Neue Werte ergänzen

Umformen

Punkte einzeichnen

Algebraisch beschreiben

Variablen interpretieren

Beschreiben, Interpretieren

Werte (er)finden

Wechsel der Skalierung

Skizzieren, zeichnen

Berechnen

Werte Ablesen

Skizzieren, evtl. zeichnen

Lesen, ggf. interpretieren

Beschreiben, Interpretieren

mathe.sh

IQ.SH Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Aktivität 5
Darstellungswechsel

Wechsel der Darstellungsformen

mathematische Tätigkeiten beim Wechsel der Darstellungsform				
	Sprache, Situation	Tabelle	Graph	Symbol / Term
Sprache, Situation	Umformulieren	Werte (er)finden	Skizzieren, Zeichnen	Situation algebraisch beschreiben
Tabelle	Lesen, Wertepaare suchen, interpretieren	neue Werte ergänzen	Punkte einzeichnen	Term aufstellen: gezieltes Probieren, Werte bestimmen
Graph	Beschreiben, Interpretieren	Werte ablesen	Wechsel der Skalierung	Term aufstellen: gezieltes Probieren, Werte bestimmen
Symbol / Term	Variablen und Terme interpretieren	Werte berechnen	Skizzieren, evtl. Zeichnen	Umformen

mathe.sh

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Konkretisierung für lineare Funktionen (Hußmann, Laakman)

Wechsel von / nach	Verbal	Grafisch	Tabellarisch	Symbolisch
Verbal	Umformu-lieren	Anhand von Punkten und/ oder der Steigung einen Graphen skizzieren	Werte finden	Steigung und y-Achsenabschnitt entnehmen oder algebraisch ermitteln
Grafisch	Interpretieren	Verschieben oder Drehen	Punkte systematisch ablesen und in eine Tabelle eintragen	y-Achsenabschnitt und Steigung oder zwei Punkte ablesen, dann einen Funk-tionsterm aufstellen
Tabellarisch	Zahlenwerte hinsichtlich charakteristi-scher Eigen-schaften in-terpretieren	Zwei Punkte einzeichnen und eine Gerade hindurchlegen	Weitere Tabel-lenzeilen erzeu-gen (mithilfe von Differenzen- oder Quotien-tengleichheit)	Aus Punkten die Steigung ermitteln oder an Einer-schritten erfassen
Symbolisch	Bedeutung der Steigung und des y-Achsenab-schnitts in-terpretieren	Kenngrößen als y-Achsenabschnitt und Steigung ein-zeichnen, dann die Gerade zeichnen	Wertepaare systematisch berechnen	Term umformen

Zusammenspiel zwischen Darstellung und Grundvorstellung

Darstellung/ Grundvorstellung	**grafisch**	**tabellarisch**	**symbolisch**	**sprachlich**
Zuordnung Tätigkeit	Einem Wert auf der ersten Achse wird ein Wert auf der zweiten Achse zugeordnet.	Einem Wert in der ersten Spalte wird ein Wert in der zweiten Spalte zugeordnet. 30 ↔ 2,70 € 60 ↔ 5,40 €	Aus einem Wert des Definitionsbereichs wird der abhängige Wert berechnet.	Dekodieren von Informationen zu Zuordnungen
vorrangiger Zweck	markante Punkte erfassen	Ablesen oder Eintragen konkreter Zuordnungen	Bestimmung einzelner Werte	Erfassen einzelner Werte
Kovariation Tätigkeit	Unterteilung in Abschnitte mit unterschiedlichem Änderungsverhalten	paarweiser Vergleich hinsichtlich der Art der Änderung 2 · (30 → 60) · 2 (2,70 € → 5,40 €) 30 | 2,70 € 60 | 5,40 € 150 | 13,50 € 300 | 27,00 € 2 · (150 → 300) · 2 (13,50 € → 27,00 €)	Ablesen bzw. Bestimmen der entsprechenden Kenngrößen	Dekodieren der Informationen zum Änderungsverhalten
vorrangiger Zweck	Änderungsverhalten qualitativ erfassen	Änderungsverhalten quantifizieren	Änderungsverhalten quantifizieren	Änderungsverhalten qualitativ bzw. quantitativ erfassen
Funktion als Ganzes Tätigkeit	mit grafischen Merkmalen die Funktion als Ganzes oder für Teilbereiche typisieren	Differenzen-, Quotienten-, Produktgleichheit o. ä. aus Wertepaaren bestimmen	mit Kenngrößen die Funktion als Ganzes typisieren	Dekodieren der Informationen zum Gesamttypus
vorrangiger Zweck	charakteristischen Verlauf erfassen	quantifizierbare Regelmäßigkeiten erfassen	Charakteristika quantitativ erfassen	Charakteristika qualitativ bzw. quantitativ erfassen

Kasten 2: Darstellungsformen und Grundvorstellungen in Beziehung setzen

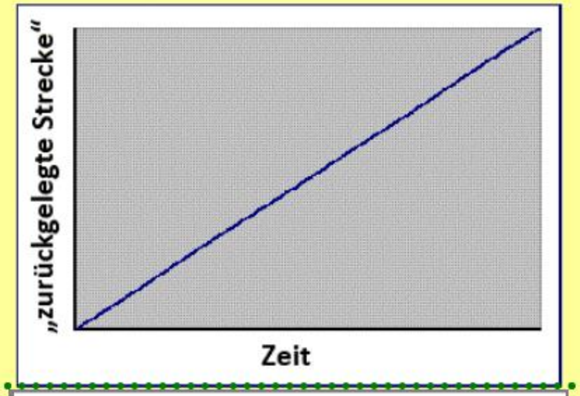
Aktivität 6
Schulbuchanalyse

1. Wählen Sie Aufgaben aus Ihrem Lehrwerk zum Thema Funktionen aus.
2. Ordnen Sie die Aufgaben ein: Darstellungswechsel/Aufbau von Grundvorstellungen

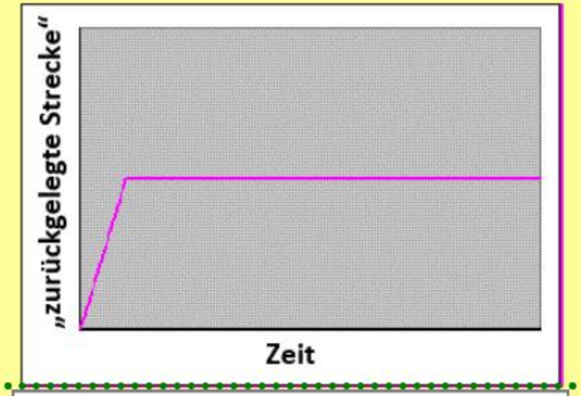
Diagnose und Fehlvorstellungen

Welche GV und DW werden getestet?

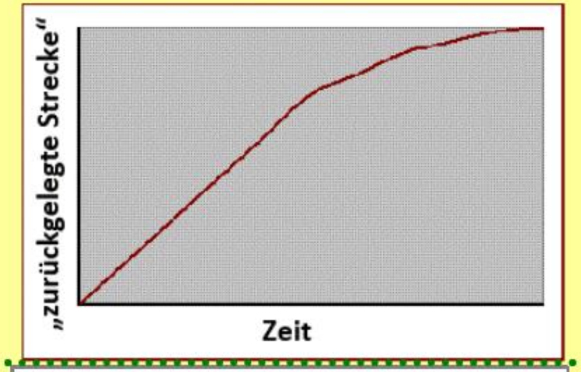
Jens trägt Zeitungen in einer langen, geraden und flachen Straße aus.
Die Graphen zeigen seine zurückgelegte Strecke in Abhängigkeit von der Zeit an vier Tagen.



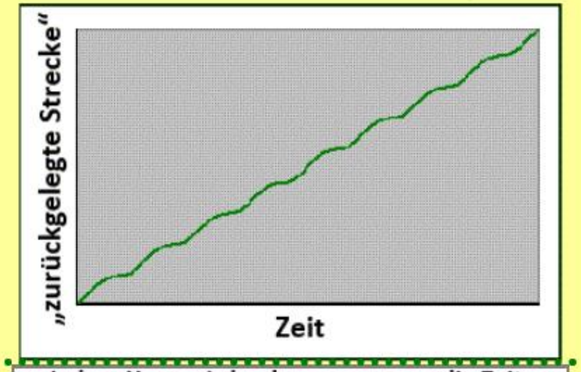
Er geht gleichmäßig und wirft die Zeitungen.



Er guckt stattdessen TV bei einem Freund.



Am Ende der Straße wird er müde.



an jedem Haus wird er langsamer, um die Zeitung einzuwerfen.

Am Ende der Straße wird er schneller.

Er bewegt sich auf der Straße nach Nordosten.

Sein Weg führt von Osten nach Westen.

Er geht einen Berg hoch oder runter.

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

SMART Test

Was sind SMART-Tests?

- SMART steht für „Specific Mathematics Assessments that Reveal Thinking" – ein verstehensorientiertes Online-Instrument für Diagnose und Förderung.
- SMART hilft, das mathematische Denken sichtbar werden zu lassen.
- SMART besteht aus innovativen 5- bis 15-minütigen Online-Tests, mit denen das konzeptuelle Verständnis von Schüler*innen diagnostiziert werden kann. Direkt im Anschluss an den Test stehen Lehrer*innen die forschungsbasierte Diagnose sowie Hinweise zur individuellen Förderung zur Verfügung.
- SMART-Tests wurden ursprünglich in einem Projekt an der Universität Melbourne von Kaye Stacey, Vicki Steinle, Beth Price und Eugene Gvozdenko entwickelt und erforscht. Unter smartvic.com stehen etwa 130 Tests zu Themen der Sekundarstufe I in englischer Sprache zur Verfügung, die wir ab sofort sukzessive übersetzen.

Detaillierte Erläuterung der Stadien und typische Fehlvorstellungen

Stufe 0 Lernende befinden sich unterhalb von Stufe 1. Diese Lernenden können noch keine Informationen bezogen auf eine Achse aus einem Graphen entnehmen und interpretieren.

Stufe 1 Lernende können Informationen bezogen auf eine Achse aus einem Graphen ablesen und interpretieren, aber sie schaffen es noch nicht, über die Größen beider Achsen gleichzeitig nachzudenken.

Stufe 2 Lernende können gleichzeitig über Informationen bezogen auf beide Achsen nachdenken und diese koordinieren. Sie interpretieren die konstante Steigung eines linearen Graphen als konstante Änderungsrate.

Stufe 3 Lernende können Informationen bezogen auf die Geschwindigkeit aus den Steigungen linearer und nicht linearer Zeit-Weg-Graphen interpretieren.

Stufe 4 Lernende können zusätzlich Informationen aus den Steigungen linearer und nicht linearer Graphen, die keine Zeit-Weg-Graphen sind, interpretieren. Zum Beispiel können sie Graphen interpretieren, die die Füllstandshöhe von Gefäßen in Abhängigkeit von der Zeit beschreiben.

Stufe 5 Lernende können Informationen zur Änderungsrate aus der Steigung selbstständig finden und nutzen, um Probleme zu lösen, die mit der Änderungsrate in Zusammenhang stehen, ohne diese explizit zu benennen.

Fehlvorstellungen und Fördertipps

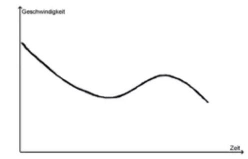
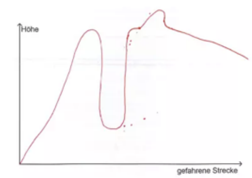
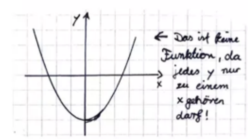
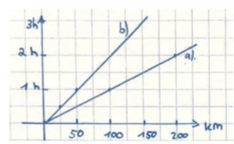
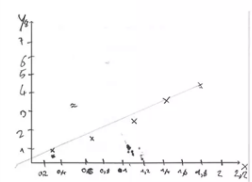
GAB Graph-Bild-Fehler: Die Lernenden interpretieren den Graphen als Bild. Zum Beispiel würden sie einen Zeit-Weg-Graphen als Weg über Hügel und Täler interpretieren oder sie sehen ihn als Landkarte an, auf der Norden oben ist und geben die Richtungen des Weges an.

Unterrichtsvorschläge

Aktivitäten, bei denen die Lernenden beginnen über den Zusammenhang zwischen der Steigung des Graphen und der Änderungsrate nachzudenken, helfen ihnen die Graphen zu interpretieren. Dies gibt ihnen eine sichere Basis später auch das Kalkül zu verstehen.

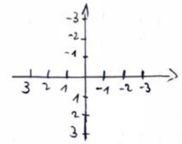
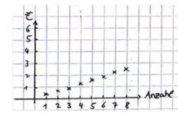
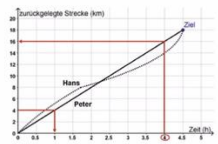
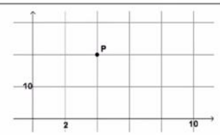
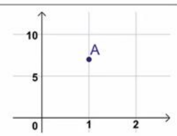
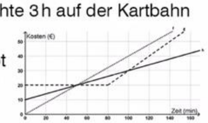
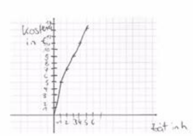
Aufgaben, in denen Schaubildgeschichten zu gegebenen Graphen erzählt werden sollen, findet man inzwischen in einigen Schulbüchern, aber auch in „Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht der SI“ von Wilfried Herget u.a. oder dem Artikel „Funktioniert´s?“ von T. Leuders und S. Prediger in PM2 Heft 2. Die Aufgabe „Peters Stuhlgang“ thematisiert sie ebenfalls.

<table>
<tr><th></th><th>typischer Fehler</th><th>Aufgabenbeispiel</th><th>Schülerbearbeitung</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Eindeutige Zuordnung erfassen</td><td>1. Graph-als-Bild-Fehler
Ein Graph wird nicht als Darstellung eines funktionalen Zusammenhangs gesehen, bei dem einer Größe (auf der x-Achse) eine andere Größe (auf der y-Achse) zugeordnet wird, sondern als fotografisches Abbild der Realität.</td><td>Ein Skifahrer fährt, wie im Bild dargestellt, eine Piste hinunter.

Wie sieht das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm zu der gegebenen Situation aus? Wähle aus.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2. Eindeutige Zuordnung missachten
Einem x-Wert werden mehrere y-Werte zugeordnet.</td><td>Bei einer Achterbahnfahrt kommen neben dem Aufstieg eine Schlucht (hier geht es erst steil hinunter und dann gleich wieder hoch), ein Looping und eine Spirale abwärts vor.
Zeichne einen Graphen, der der gefahrenen Strecke jeweils die Höhe des Wagens auf der Achterbahn zuordnet.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3. Von eindeutiger Zuordnung auf Injektivität schließen
Die Aussage „Jedem x wird genau ein y zugeordnet“ wird fälschlich interpretiert als „Auch jedes y darf nur einmal vorkommen“.</td><td>Handelt es sich bei dem gezeichneten Graphen um einen Funktionsgraphen?</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Abhängige und unabhängige Größe erfassen</td><td>4. Abhängige und unabhängige Größe vertauschen
Die unabhängige und die abhängige Größe werden vertauscht. Es wird nicht erfasst, welche Größe variiert wird und welche sich dadurch aus dem funktionalen Zusammenhang ergibt.</td><td>Sven betrachtet die Durchschnittsgeschwindigkeit zweier Boote.
a. Je Stunde können mit dem Boot Ahoi bis zu 100 km gefahren werden.
b. In einer halben Stunde legt das Boot Poseidon bis zu 25 km zurück.
Zeichne Graphen zu den beiden gegebenen funktionalen Zusammenhängen.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>5. x- und y-Koordinate vertauschen
Beim Eintragen von Zahlenpaaren in ein Koordinatensystem werden die x- und die y-Koordinate vertauscht.</td><td>Erstelle zu der Tabelle einen Funktionsgraphen.
<table><tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr><tr><td>1</td><td>0,35</td></tr><tr><td>2</td><td>0,70</td></tr><tr><td>3</td><td>1,15</td></tr><tr><td>4</td><td>1,50</td></tr><tr><td>5</td><td>1,85</td></tr></table></td><td></td></tr>
</table>

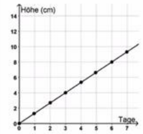
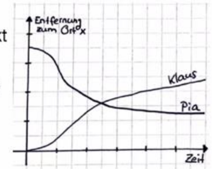
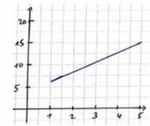
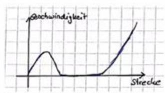
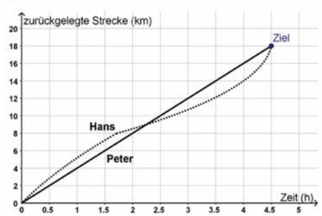
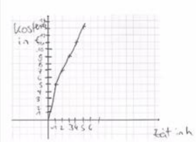
mathe.sh

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

	typischer Fehler	Aufgabenbeispiel	Schülerbearbeitung
Koordinatensystem erstellen	**6. Positive und negative Bereiche der Achse(n) vertauschen** Unter anderem wird der positive Bereich der *x*-Achse nicht nach Konvention rechts vom Koordinatenursprung angetragen, sondern links davon, der negative Bereich dagegen rechts.	Erstelle ein Koordinatensystem mit vier Quadranten.	
	7. Achsen skalieren Dies ist häufig mit der Annahme verbunden, die Achsen müssten identisch skaliert sein.	Ein Bonbon kostet 30 Cent. Zeichne zu dem funktionalen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Bonbons und dem zu zahlenden Preis einen Funktionsgraphen in ein Koordinatensystem.	
Punkte einzeichnen und Werte ablesen	**8. *x*-Wert zu einem *y*-Wert ablesen** Hierbei handelt es sich um die umgekehrte Vorgehensweise: Zu einem gegebenen Funktionswert muss der zugrunde liegende *x*-Wert ermittelt werden. Wird dies nicht erkannt, wird ein falsches Ergebnis ermittelt.	Lies am Graphen ab: Wann hat Peter 4 km zurückgelegt? 	Nach 16 km
	9. Achsenskalierung missachten Die vorhandene Achsenskalierung wird nicht beachtet. Stattdessen wird eine intuitive (z. B. Schrittweite eins) oder eigene Skalierung herangezogen.	Bestimme die Koordinaten des Punktes P. 	P(3,2)
	10. Negative Koordinaten verorten Die Probleme mit negativen Zahlen und deren Verortung am Zahlenstrahl finden sich auch im Umgang mit Koordinatensystemen.	Zeichne die Punkte P(3,5|0) und Q(-6|2) in ein Koordinatensystem.	
	11. Interpolieren Liegen Punkte nicht auf dem Koordinatengitter, werden zur Bestimmung bzw. zum Einzeichnen der Koordinaten Abschätzungen (Interpolationen) benötigt, die häufig misslingen.	Notiere die Koordinaten des Punktes A. 	A(1,8)
	12. Sichtbaren Graphen als vollständige Funktion auffassen Es wird fälschlicherweise davon ausgegangen, dass der dargestellte Funktionsgraph die gesamte Funktion abbildet.	Dargestellt sind drei Angebote einer Kartbahn. Jonasmöchte 3 h auf der Kartbahn verbringen. Welches Angebot sollte er wählen? 	Es können immer nur maximal 160 min am Stück gefahren werden.
Bezug zur Situation herstellen	**13. Alles ist linear oder proportional** Es gibt die Tendenz, funktionale Zusammenhänge unabhängig von der zugrunde liegenden Situation grundsätzlich als linear oder proportional anzunehmen.	Wie verändert sich der Flächeninhalt eines Quadrats, wenn man die Seitenlänge des Quadrats verdoppelt?	Die Fläche verdoppelt sich.
	14. Punkte verbinden?! Unsicherheit, ob das Verbinden von Punkten erlaubt bzw. sinnvoll ist. Wie müssen in der Situation Punkte ggf. verbunden werden (Typ des funkt. Zusammenhangs)? Oft wird fälschlich (stückweise) linear verbunden.	In einem Park werden Fahrräder vermietet. Die erste Stunde kostet 5 € und jede weitere angefangene Stunde kostet zusätzlich 2 €. Zeichne einen Graphen zu der gegebenen Situation!	

mathe.sh

IQ.SH Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

	typischer Fehler	Aufgabenbeispiel	Schülerbearbeitung
Bezug zur Situation herstellen	**15. Linien durch Punkte interpretieren** Unsicherheit, wie eine Linie durch Punkte des Graphen zu interpretieren ist (Funktionsgraph; Interpolations- bzw. Ausgleichsgerade; Visualisierung von Veränderungen)	Drei Mädchen betrachten das Wachstum ihrer Pflanzen und messen täglich deren Höhe. Sie stellen ihre Ergebnisse in einem Koordinatensystem dar. Um die Veränderungen zu vergleichen, hat jede eine Linie durch die Punkte gezogen. Stellt die Linie das Wachstum der Pflanzen realistisch dar?	 Ja
	16. Punkte bzgl. Situation interpretieren Unsicherheit bei der Interpretation von Punkten des Graphen bzgl. der Situation. Hier kann auch eine Unsicherheit bzgl. der betrachteten Größen bestehen oder ein falscher Zusammenhang angenommen werden.	Erkläre, was der Schnittpunkt der beiden Graphen für die Situation bedeutet. 	Der Schnittpunkt bedeutet, dass beide die gleiche Geschwindigkeit haben
	17. Achsenabschnitte ↔ Situation Wie sind Achsenabschnitte bzgl. einer Situation zu interpretieren? Welcher *y*-Achsenabschnitt ergibt sich aus der Situation? Wo ist dieser im Koordinatensystem zu verorten?	Lars hat von seinem Bruder das alte Handy für 6 € bekommen. Er hat keine Flatrate, sondern bezahlt im Durchschnitt pro Woche 2,50 €. Entscheide, ob sich eine Flatrate von 12,99 € im Monat für ihn lohnen würde.	
	18. Konstante Graphenabschnitte Wie sind konstante Graphenabschnitte (parallel zur *x*-Achse) zu interpretieren?	Ein Radfahrer fährt nach dem Start einen Berg hinauf. Oben angekommen fährt er eine Zeit lang mit konstanter Geschwindigkeit, bevor es wieder den Berg hinuntergeht. Zeichne einen Graphen, welcher die Geschwindigkeit des Radfahrers über die gefahrene Strecke darstellt.	
	19. Keine Änderung ↔ *y*-Wert 0 Annahme: Keine Änderung entspricht dem Funktionswert 0.		
	20. Steigungen interpretieren Wie ist die Steigung des Graphen insgesamt/in versch. Abschnitten zu interpretieren? Schwierigkeit beim Vergleich der Steigungen an verschiedenen Stellen bzw. Graphen.	Welcher der beiden Wanderer ist in der letzten halben Stunde schneller gelaufen? 	Peter war schneller, weil er sein Tempo gehalten hat
Bestand & Änderung	**21. Änderung und Bestand verwechseln** Wird nach der Änderung an einer Stelle bzw. in einem Bereich gefragt, dann wird statt der Änderung häufig der Bestand (der *y*-Wert an der Stwelle bzw. die *y*-Werte im Bereich) betrachtet. Oder umgekehrt.		Peter weil seine Linie höher ist.
Abgleich: Vorstellungen & Definition	**22. Vorstellungen ↔ Definition** Ungewohnt aussehende Graphen, die nicht zu eigenen Vorstellungen passen, werden nicht als Funktionsgraphen akzeptiert, obwohl sie es definitionsgemäß sind. Häufig nicht als „richtige" Funktionen angesehenen werden u. a. Funktionen, • die abschnittsweise definiert sind, • die unstetig oder diskret sind, • die konstant sind oder • deren Graphen nicht im Ursprung beginnen.	In einem Park werden Fahrräder vermietet. Die erste Stunde kostet 5 € und jede weitere angefangene Stunde kostet zusätzlich 2 €. Zeichne einen Graphen zu der gegebenen Situation!	

mathe.sh

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Typische Schülerfehler

Zusammenstellung: Julia Busch, ProMatNat-Kolleg, Busch 2015

Typische Schülerfehler	Mögliche Fehlkonzepte/ Ursachen
1) Graph-als-Bild-Fehler	Graph wird als (geometrische) Abbildung der Situation dargestellt
2) Eindeutigkeit der Funktion fehlt	Validierung in Bezug auf Eigenschaft der „Eindeutigkeit“ bleibt aus
3) Falsche Achsenbezeichnung	Fehlendes Verständnis von abhängiger und unabhängiger Variable
4) Fehler beim Umgang mit Skala	Tendenz zu prototypischer Einteilung, Wahl der Abstände fällt in Bezug auf Kontext schwer
5) Fehlinterpretation bei zeitabhängigen Variablen	Hohe Komplexität, Abstraktion; Reduktion auf einen Teilaspekt
6) Steigung-Höhe-Verwechslung	Steigungskonzept nur unvollständig entwickelt
7) Interpretation von Realsituationen	Verharren in der eigenen Wahrnehmung der Realsituation, Nicht-Wahrnehmung der Aufgabenstellung
8) Unvollständige Modellierung	Rückfall auf Bekanntes bei mangelndem Verstehen der Aufgabe

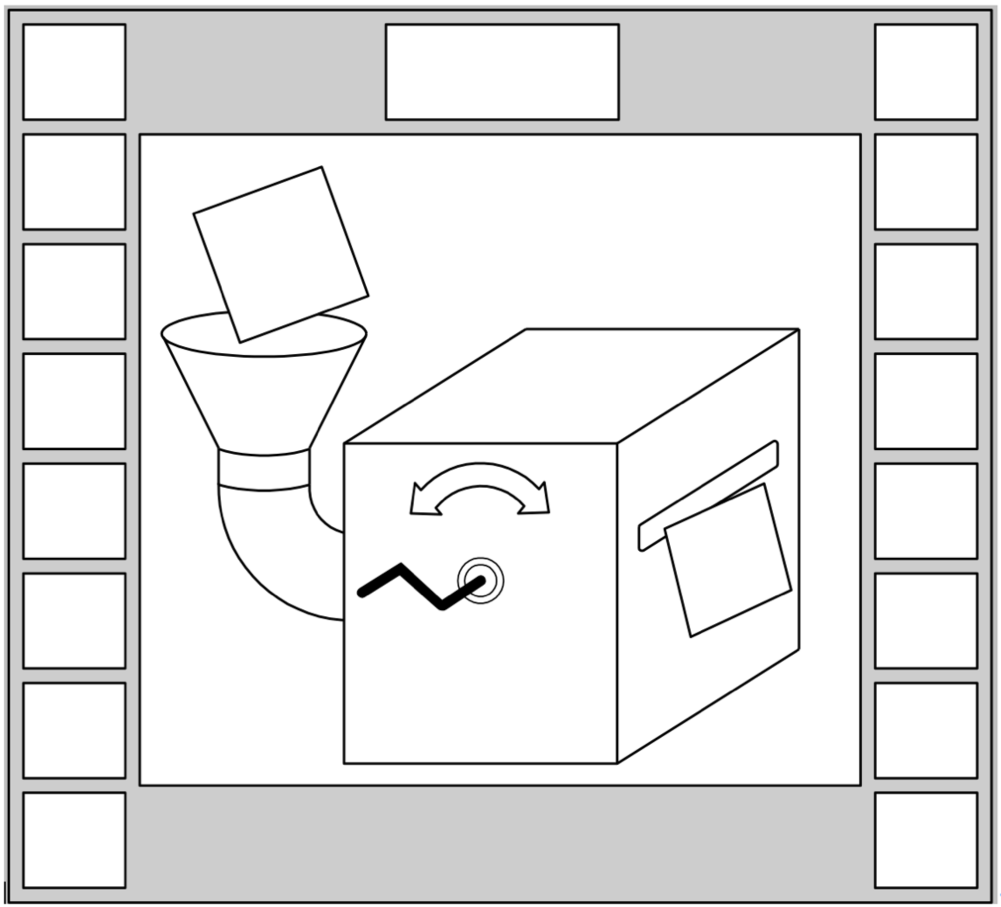
Funktion als Zuordnung von Wertepaaren

mathe.sh

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

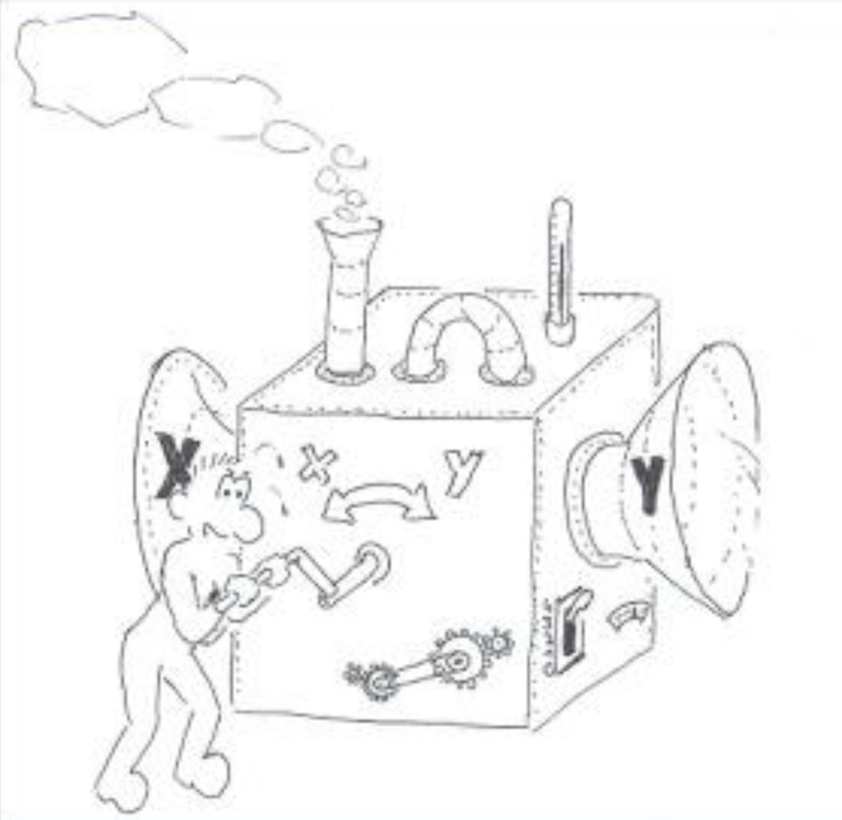
Aktivität 7
Funktionsmaschine

Funktionsmaschine



Verdopple die Zahl und addiere anschließend vier.

x	y
4	
6	
12	
24	
7	
5	



Dies ist eine Darstellung von $f(x) = 2x + 4$.

Verdreifache die Zahl und subtrahiere anschließend sechs.

x	y
	0
	12
	18
	9
	24
	294

Dies ist eine Darstellung von $f(x) = 3x - 6$.

Funktionsklassen

Aktivität 6
Funktionsklassen

Funktionen im Curriculum

Bei der Planung zur Einführung einer neuen Funktionsklasse sind die folgenden Vorüberlegungen hilfreich:

1. Welche Realsituationen gibt es, die sich durch die Funktionsklasse beschreiben lassen?
2. Wie sieht der einfachste Vertreter dieser Klasse aus?
3. Wie sieht der Funktionsterm einer Funktion dieser Klasse aus?
4. Kann er in verschiedenen Formen geschrieben werden?
5. Wenn ja, welche Vor- und Nachteile haben diese verschiedenen Formen?
6. Welche Bedeutung haben die Parameter im Funktionsterm?
7. Wie können die Bedeutungen dieser Parameter veranschaulicht / begründet werden?
8. Wie sieht der typische Graph einer Funktion der Klasse aus?
9. Welche charakteristischen Eigenschaften haben die Funktionen dieser Klasse?
10. Wie kann man diese Eigenschaften an Funktionsterm, Tabelle und Graph veranschaulichen / erkennen?
11. Wo liegt der grundsätzliche Unterschied zu schon vorher behandelten Funktionsklassen?
12. Wie kann man aus einem „Prototypen“ einer Funktion dieser Klasse andere Vertreter gewinnen?
13. Welche Bedeutung haben Kenntnisse dieser Funktionsklasse für das Lösen von bestimmten Gleichungen?

Quelle: Oliver Thomsen, IQSH

Aktivität 6
Funktionsklassen

Funktionen im Curriculum

Zuordnungen

Proportionale (Antiproportionale) Zuordnungen

Lineare Funktionen

Quadratische Funktionen

Trigonometrische Funktionen

Exponentialfunktionen

Wählen Sie sich eine Funktionsklasse aus und beantworten Sie die Fragen zu den Vorüberlegungen.

mathe.sh
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Übergang linearer zu quadratischen Funktionen

- Differenzen beschreiben
- Gemeinsamkeiten benennen
- Übergänge schaffen
- Merkmale eines typischen Graphen einer solchen Funktion
- Repräsentanten der Funktionsklassen.....
- *s. Wichtige Vorüberlegungen vor dem Unterricht... (Thomsen)*

Abschlussrunde

Feedback

1. Folgendes will ich im Unterricht ausprobieren…

2. Das war für mich neu…

3. Das war für mich die zentrale Botschaft…

4. Das kam für mich heute zu kurz…

Feedback

Los geht's!

mathe.sh

IQ.SH

Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Ausblick

Das nächste Modul zum Thema:

„Funktionaler Zusammenhang – Darstellungen wechseln“

findet am 10.12.2025

online

statt.

Gute Heimfahrt!

Quellenverzeichnis – Hinweis Verweise/Quellen – Internetseiten finden Sie auf den Folien

Abshagen, Maike u.a. (2021): Basiswissen Lehrerbildung: Mathematik unterrichten, 2. Auflage, Hannover, Klett – Verlag.

BLK- Modellversuch: Materialien zum Modellversuch: Vorschläge und Anregungen zu einer veränderten Aufgabenkultur

Barzel, Bärbel u.a. (2012): Mathematik Methodik – Handbuch für die Sekundarstufe I und II, 6. Auflage, Berlin, Cornelsen Scriptor

Barzel, Hußmann, Leuders, Prediger (2013):mathewerkstatt 5 und 9, Schulbuch, Cornelsen Verlag, Berlin

Fauth, Benjamin (u.a.) (2021): Beobachtungsmanual zum Unterrichtsfeedbackbogen Tiefenstruktur, Institut für Bildungsanalysen Baden – Württemberg , Stuttgart.

Leuders, Timo u.a. (2013): Mathematik Didaktik – Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II, 8.Auflage, Berlin, Cornelsen Scriptor

Mathematik 5-10, Heft 8, Friedrich Verlag,3. Quartal 2009 „ Was heißt hier abhängig? Funktionen verstehen".

Mathematik 5-10, Heft 19,Friedrich Verlag,2. Quartal 2012; „Kannst du mir das erklären? Vom Entdecken zum Verstehen"

Mathematik 5-10, Heft 30, Friedrich Verlag,1. Quartal 2015 - „So funktioniert's! Funktionale Zusammenhänge im Alltag nutzen"

Mathematik 5-10, Heft 49, 4.Quartal 2019, Friedrich Verlag, „Das hängt ganz davon ab – Funktionales Denken entwickeln"

Mathematik lehren, Heft 103, Friedrich Verlag, Dezember 2000 „Funktionen untersuchen"

Mathematik lehren, Heft 162, Friedrich Verlag, Oktober 2010, hier enthalten: Mathewelt „Funktionen wiederholen",

Mathematik lehren, Heft 170, Friedrich Verlag, Februar 2012, „Beurteilen und Bewerten"

Mathematik lehren, Heft 187, Friedrich Verlag, Dezember 2014, „Funktionen analysieren"

Ministerium für Allgemeine und Berufliche Bildung, Wissenschaft, Forschung und Kultur (2024): Fachanforderungen Mathematik, 2.Auflage, Kiel

Ministerium für Schule und Berufsbildung des Landes Schleswig – Holstein (2015): Leitfaden zu den Fachanforderungen - Allgemein bildende Schulen Sekundarstufe I, 1. Auflage, Kiel

Weitere (nicht mehr verfügbare) Zeitschriften: Praxis der Mathematik erschien bis 2017 im Aulisverlag:

PM, Heft 2, Funktioniert's? Denken in Funktionen, April 2005

PM, Heft 31, Qualitativ und diskret-Funktionen verstehen, Februar 2010

PM, Heft 38, Eine Funktion – viele Gesichter, Darstellen und Darstellungen wechseln, April 2011

PM, Heft 50, Das verbindet, **Geo**metrie, Tabellen, Al**gebra**, April 2013

PM, Heft 51, Basiskompetenzen, Sicheres Wissen und Können, Juni 2013

PM, Heft 60, Mathematik in der Hand, GTR und mehr, Dezember 2014

PM, Heft 67, Erfolg mit Üben – Üben mit Erfolg, Februar 2016

IQ.SH Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein