TERME UND GLEICHUNGEN

K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

mathe.sh

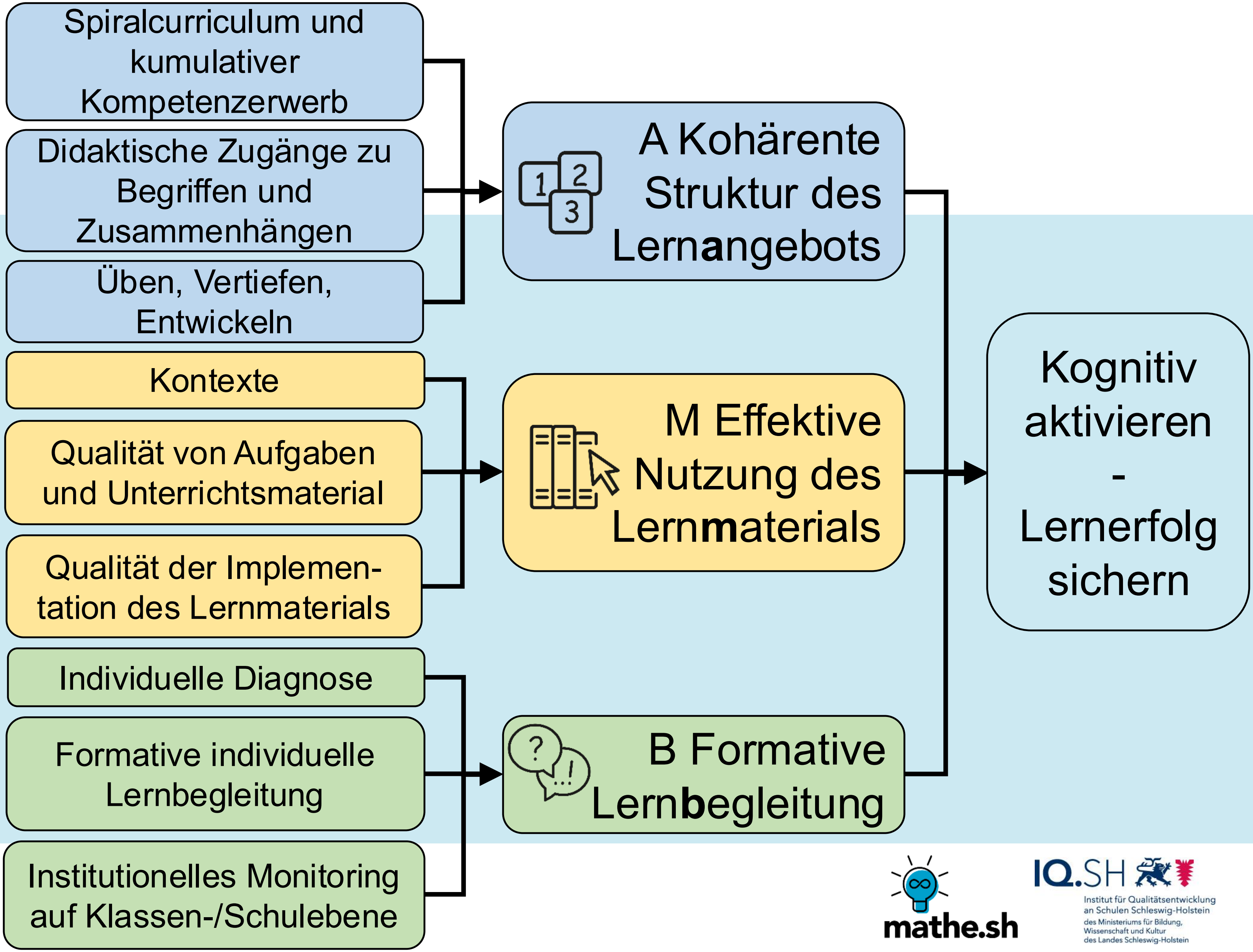
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Ablaufplan

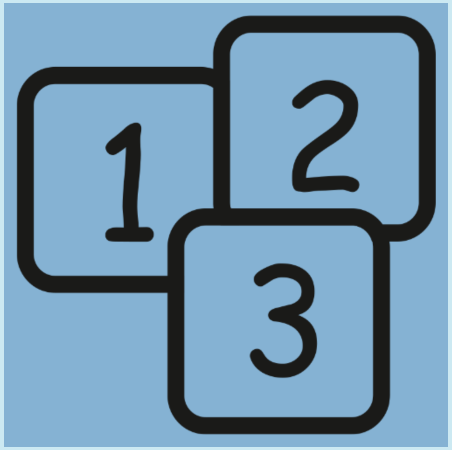
- Bezug zu mathe.sh
- Wiederholung Grundvorstellungen
- Stunde hospitieren und reflektieren
- Roter Faden durch die Algebra
- Fehlvorstellungen
- Variablen und Terme
- Vorstellungen aufgreifen und entwickeln
- E-I-S Prinzip – Knack die Box
- Abschluss

Curriculum

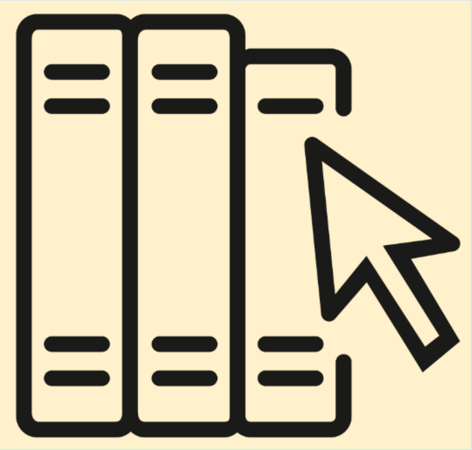
Ziel: Die LiV kennen die **verschiedenen Rollen, die Variablen haben können**, kennen typische Schülerfehler und können Gegenmaßnahmen einleiten. Als roter Faden ziehen sich die verschiedenen Rollen von Variablen (allgemeine Zahl (Unbestimmte), Unbekannte und Veränderliche) durch den Tag, für die jeweils repräsentative Aufgaben und Übungen vorgestellt werden, mit deren Hilfe **tragfähige Grundvorstellungen** aufgebaut werden sollen. Dabei ist an die Vorerfahrungen aus der Grundschule anzuknüpfen. Im Fokus stehen auch die Fachsprache sowie die Notation von Äquivalenzumformungen.


Spiralcurriculum und kumulativer Kompetenzerwerb
Didaktische Zugänge zu Begriffen und Zusammenhängen
Üben, Vertiefen, Entwickeln
A Kohärente Struktur des Lernangebots
Kontexte
Qualität von Aufgaben und Unterrichtsmaterial
Qualität der Implementation des Lernmaterials
M Effektive Nutzung des Lernmaterials
Individuelle Diagnose
Formative individuelle Lernbegleitung
Institutionelles Monitoring auf Klassen-/Schulebene
B Formative Lernbegleitung
Kognitiv aktivieren - Lernerfolg sichern
mathe.sh
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Bezüge zu mathe.sh



A2: Didaktische Zugänge zu Begriffen und Zusammenhängen



M3: Qualität der Implementation des Lernmaterials

Grundvorstellungen

Aktivität 1

Grundvorstellungen beim Erlernen von Mathematik

- *Lesen Sie bitte vom Hofe (S. 10 bis 13)*
- *Was verstehen Sie unter Grundvorstellungen allgemein?*
- *Welche Rolle spielen Grundvorstellungen beim Lernen in der Mathematik?*

Welche Rolle spielt der Aufbau von Grundvorstellungen bei Ihrer Unterrichtsplanung für ein Thema?

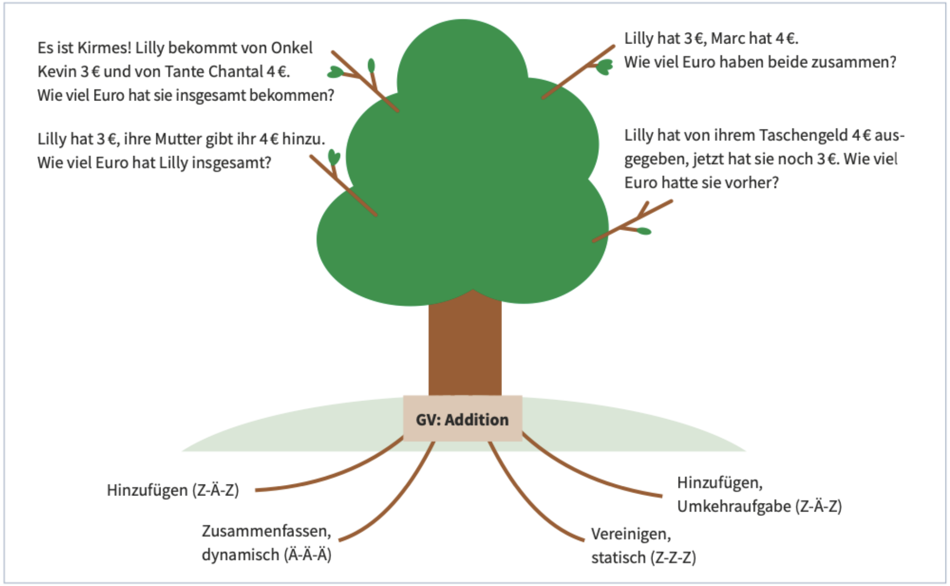
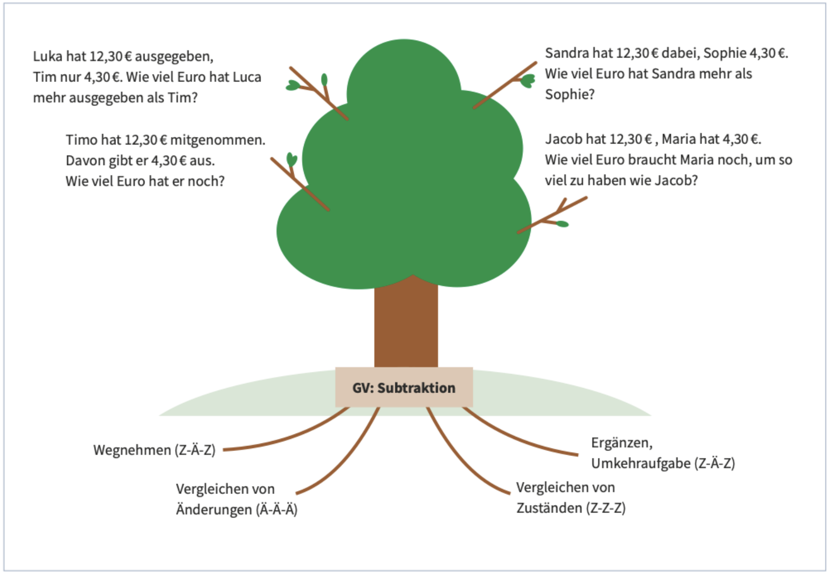


Abb. 5: Grundvorstellungen zur Addition (mit Z = Zustand, Ä = Änderung) und entsprechende Aufgaben

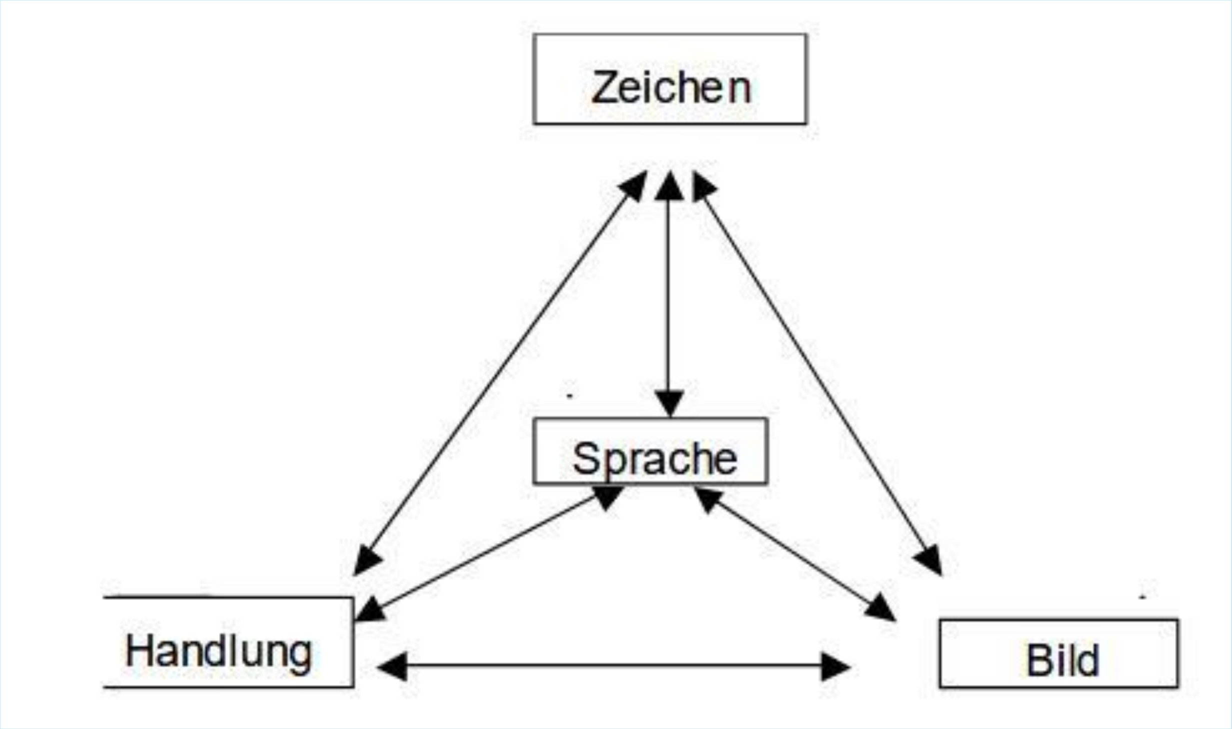


Grafik: © Friedrich Verlag GmbH

Abb. 6: Grundvorstellungen zur Subtraktion (mit Z = Zustand, Ä = Änderung) und entsprechende Aufgaben

mathe.sh
IQ.SH Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Grundvorstellungen beim Erlernen von Mathematik



mathe.sh
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

EIS-Prinzip-Theorie 1

Jerome Bruner

Ein mathematischer Sachverhalt kann nach J. Bruner auf drei verschiedene Arten dargestellt werden

- **enaktiv, d.h. handelnd**
- **ikonisch, d.h. bildlich**
- **symbolisch, d.h. verbal oder formal**

Grundvorstellungen

Rudolf vom Hofe

Grundvorstellungen als Brücke zwischen den individuellen Vorstellungen und der konsolidierten Mathematik (1992).

Die Variable **als allgemeine Zahl, als Unbekannte, als Veränderliche.**

Günter Malle

Grundvorstellungen verdeutlichen nicht nur die Rolle einer Variablen, sondern auch, in welcher Weise man mit ihr umgehen kann (1986).

Einsetzungsaspekt, Kalkülaspekt, Gegenstandsaspekt einer Variablen**.**

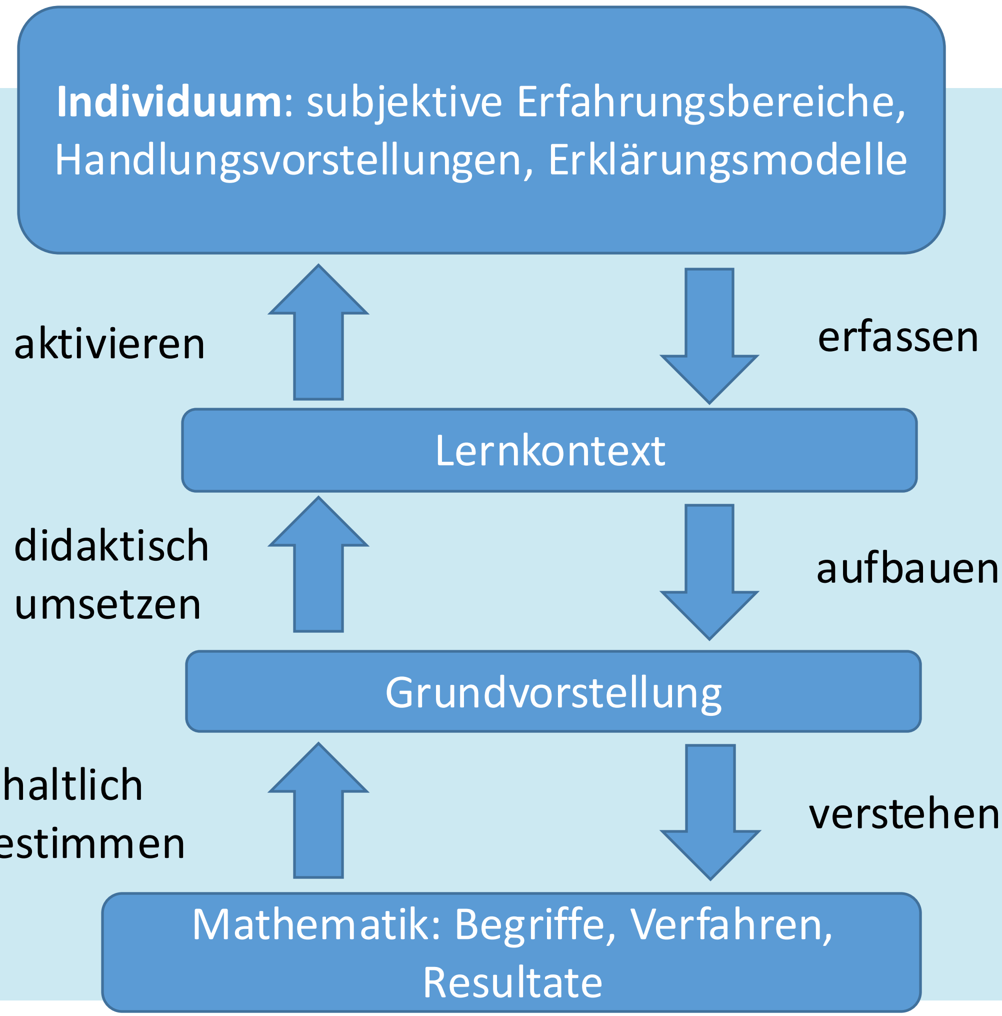
Aktivität 2

Aufbau von Grundvorstellungen

- Knetgummi nutzen (konkretes, strukturiertes Material nutzen)
- Konkrete Bilder im Kopf erzeugen
- In das gedankliche Netzwerk die Bilder einfügen
- Vorstellungen entwickeln
- Vorstellungen zielgerichtet und flexibel einsetzen
- Ständige Verfügbarkeit

Grundvorstellungen

- Subjektive Vorerfahrungen
- Subjektiver Erfahrungsbereich (SEB)
- (normative) Grundvorstellungen



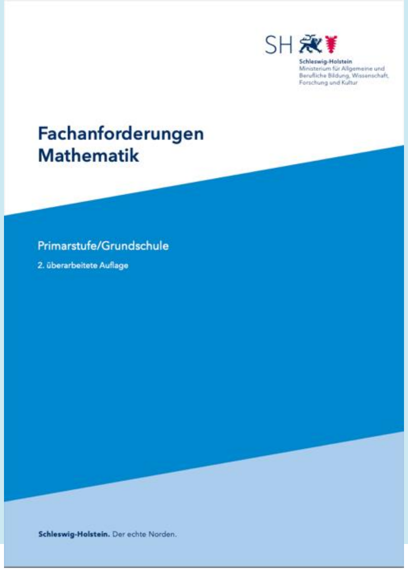
Roter Faden durch die Algebra

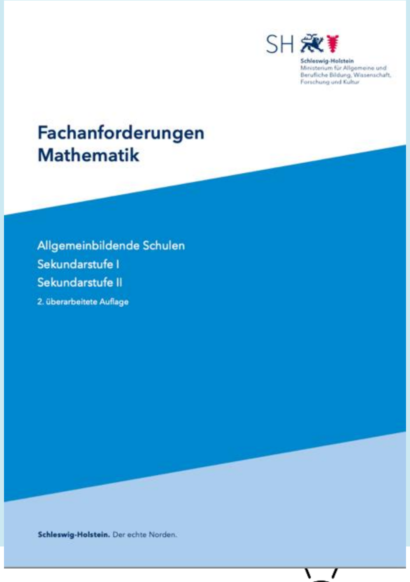
mathe.sh

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Variablen in der Grundschule

- Variablen/Terme/Gleichungen in der Grundschule?
- Fachanforderungen Mathematik SEK I





mathe.sh

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur
des Landes Schleswig-Holstein

Variablen in der Grundschule: Was muss man alles zum Variablenbegriff lernen?

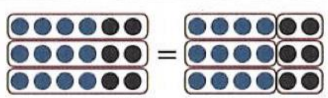
Sichtweisen auf die Variable...

- als allgemeine Zahl
  (bereits in der Grundschule z.B. beim Kommutativgesetz)
- als Unbekannte
  (bereits in der Grundschule durch Kästchen)
- als Veränderliche
  (bereits in der Grundschule bei produktiven Päckchen)

Aus einem Schulbuch:

> Platzhalter, für die man verschiedene Zahlen einsetzen kann, nennt man VARIABLEN.
> Man kann dafür Buchstaben schreiben.
> TERME enthalten Zahlen, Rechenzeichen, Klammern und auch Variablen.

Vorstellungen aufgreifen/daran anknüpfen

	Vorstellungen	**Beispiel**		**Kognitive Aktivität**
		Grundschule	**5/6**	
Grundschule und 5/6	*Variablen* …	„Fülle die Lücke.“		Vorwärts und rückwärts rechnen (Umkehraufgaben) Passende Zahlen finden, um Gleichheit von Termen zu erzeugen.
	… als Unbekannte („Platzhalter“)	$3 + 4 = \square$ $3 + \square = 7$ $3 + 4 = \square + 5$	$5/6 + \square/4 = \square/12$ $\square/3 + \square/2 = 1$	
	… als Veränderliche	„Rechne im Kopf und setze fort.“		Systematisches Verändern einer Zahl in Rechnungen
		$2 \cdot 5 = \square$ $4 \cdot 5 = \square$ $6 \cdot 5 = \square$	$0{,}23 \cdot 10 =$ $0{,}23 \cdot 100 =$ $0{,}23 \cdot 1000 =$	
	… als allgemeine Zahl	„Wie viele Punkte sind an der 10. Stelle?“	„Wie viele Punkte sind an der *x*-ten Stelle?“	Strukturen erkennen und beschreiben; Weiterdenken („an der *n*-ten Stelle“; Buchstaben als Platzhalter einführen)
	Terme: Arithmetische Terme und ihre Gleichwertigkeit	„Finde mehrere Wege, diese Punkte geschickt zu zählen.“		Systematisch zählen, Situationen beschreiben, Beschreibungsgleichheit entdecken, Gleichwertige Terme zum Formulieren von Rechengesetzen entwickeln.
			 $3 \cdot (4 + 2) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2$	

Vgl. Barzel, Holzäpfel

mathe.sh

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Rote Fäden durch die Algebra

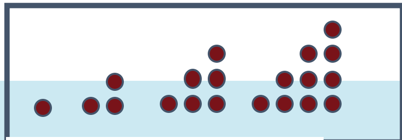
Quelle: KOSIMA

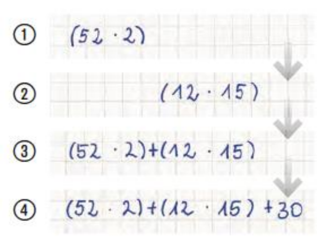
5

6

7

8





Strukturieren & Verallgemeinern

Zahlenmuster

Rechenregeln

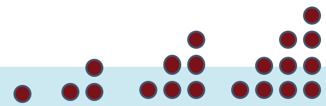
Langfristig vernetzt

Als Reise durch die Jahrgänge

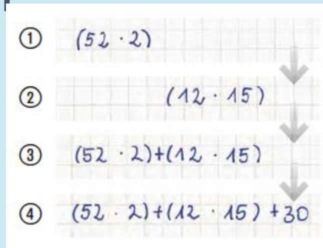
Rote Fäden durch die Algebra

Quelle: KOSIMA

5



6



7

8

Strukturieren & Verallgemeinern

(Veränderliche) Situationen beschreiben

Zahlenmuster

Rechenregeln

Alg. Terme aufstellen

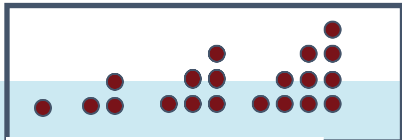
Langfristig vernetzt

Als Reise durch die Jahrgänge

Rote Fäden durch die Algebra

Quelle: KOSIMA

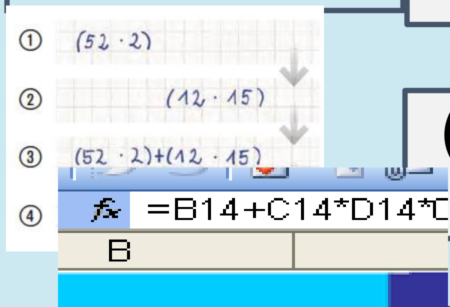
5



Strukturieren & Verallgemeinern

Zahlenmuster

6

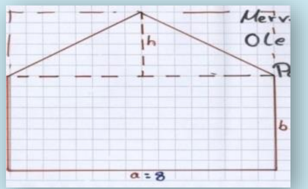


(Veränderliche) Situationen beschreiben

Rechenregeln

Alg. Terme aufstellen

7



Die gleiche (allgemeine) Situationen unterschiedlich beschreiben

Geo. Formeln

Fkt. Denken

8

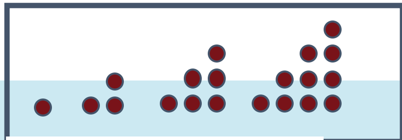
Langfristig vernetzt

Als Reise durch die Jahrgänge

Rote Fäden durch die Algebra

Quelle: KOSIMA

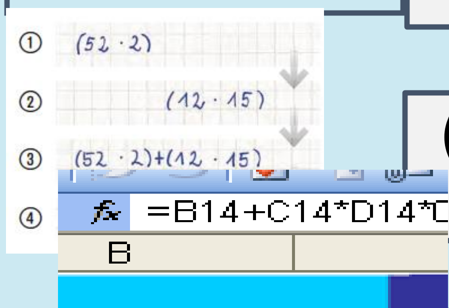
5



Strukturieren & Verallgemeinern

Zahlenmuster

6

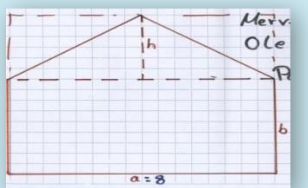


(Veränderliche) Situationen beschreiben

Rechenregeln

Alg. Terme aufstellen

7



Die gleiche (allgemeine) Situationen unterschiedlich beschreiben

Geo. Formeln

8

Veränderliche und abhängige Größen beschreiben

Fkt. Denken

Lineare Fkt.

Langfristig vernetzt

Als Reise durch die Jahrgänge

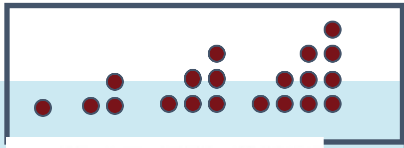
mathe.sh

IQ.SH Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

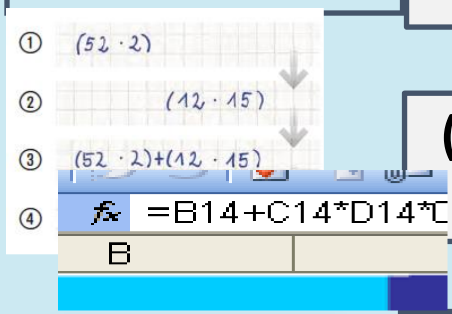
Rote Fäden durch die Algebra

Quelle: KOSIMA

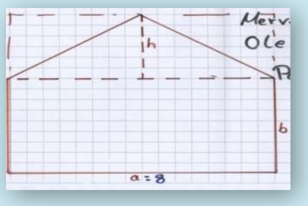
5



6



7



8

Strukturieren & Verallgemeinern

Zahlenmuster

(Veränderliche) Situationen beschreiben

Rechenregeln

Alg. Terme aufstellen

Die gleiche (allgemeine) Situationen unterschiedlich beschreiben

Geo. Formeln

Veränderliche und abhängige Größen beschreiben

Fkt. Denken

Lineare Fkt.

Unbekannte Werte bestimmen

Gleichungen

Langfristig vernetzt

Als Reise durch die Jahrgänge

mathe.sh

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Fehlvorstellungen

mathe.sh

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Rechnen mit Zahlen - Variablen

An einer Universität sind Professoren und Studenten. Auf einen Professor kommen 6 Studenten!

Drücken Sie die Beziehung zwischen ***S*** und ***P***

durch eine Gleichung aus.

Aktivität 4

Variablenverständnis

Variablenverständnis – Typische Schwierigkeiten

Interviewer (legt folgende Aufgabe vor):

> An einer Universität sind **P** Professoren und **S** Studenten. Auf einen Professor kommen 6 Studenten.
>
> Drücken Sie die Beziehung zwischen S und P durch eine Gleichung aus!

Ch: (schreibt) 6S = P
I: Nehmen wir einmal an, es sind 10 Professoren.
Wie viele Studenten sind es dann?
Ch: 60.
I: Setzen Sie das in die Gleichung ein!
Ch: 6 · 60 = 10. Aha, das kann nicht stimmen. (Nach einer Pause schreibt sie) P + 6S = P + S.
I: Was bedeutet das?
Ch: Die Professoren und die auf jeden Professor fallenden 6 Studenten ergeben zusammen alle Professoren und Studenten.
I: Hhmm ... Bei dieser Gleichung könnte man auf beiden Seiten P subtrahieren.
Was ergibt sich dann?
Ch; (streicht P auf beiden Seiten durch) 6S = S.
I: Kann das stimmen?
Ch: Ja natürlich ... die Gruppen zu 6 Studenten ergeben zusammen alle Studenten.
I: Setzen Sie wieder die Zahlen ein!
Ch: 10 Professoren und 60 Studenten. Dann ist das 6 · 60 = 10.
Das kann nicht stimmen.
(Nach einer Pause schreibt sie) P + S = 7.
I: (räuspert sich)
Ch: (bessert aus zu) P + 6S = 7
I: Was bedeutet das?
Ch: Ein Professor und seine 6 Studenten sind zusammen 7 Personen.

Murmelphase

- Welche Fehlvorstellung liegt vor?
- Was muss gefördert werden?

Aktivität 4

Variablenverständnis (Ursachen)

Umkehrfehler	Ch:	(schreibt) 6S = P
	I:	Nehmen wir einmal an, es sind 10 Professoren. Wie viele Studenten sind es dann?
Beispiel wird richtig gerechnet. Umkehrfehler findet auf der symbolisch-semantischen Ebene statt	Ch:	60.
	I:	Setzen Sie das in die Gleichung ein!
Es wurde verstanden, dass man für Variablen Zahlen einsetzen kann.	Ch:	6 · 60 = 10. Aha, das kann nicht stimmen. (Nach einer Pause schreibt sie) P + 6S = P + S.
	I:	Was bedeutet das?
Fehler im Variablenverständnis (S kann nicht 2 Werte annehmen)	Ch:	Die Professoren und die auf jeden Professor fallenden 6 Studenten ergeben zusammen alle Professoren und Studenten.
	I:	Hhmm ... Bei dieser Gleichung könnte man auf beiden Seiten P subtrahieren. Was ergibt sich dann?
Fehler im Variablenverständnis (S kann nicht 2 Werte annehmen)	Ch:	(streicht P auf beiden Seiten durch) 6S = S.
	I:	Kann das stimmen?
	Ch:	Ja natürlich ... die Gruppen zu 6 Studenten ergeben zusammen alle Studenten.
	I:	Setzen Sie wieder die Zahlen ein!
Es wurde verstanden, dass man für Variablen Zahlen einsetzen kann.	Ch:	10 Professoren und 60 Studenten. Dann ist das 6 · 60 = 10. Das kann nicht stimmen. (Nach einer Pause schreibt sie) P + S = 7.
	I:	(räuspert sich)
Ursprüngliche Aufgabe wird nicht mehr beachtet. Durch diesen Term wird keine Beziehung zischen Professoren und Studenten ausgedrückt	Ch:	(bessert aus zu) P + 6S = 7
	I:	Was bedeutet das?
	Ch:	Ein Professor und seine 6 Studenten sind zusammen 7 Personen.

Andere mögliche Ursache:
Für Ch steht Variable für ein Objekt und nicht für eine Zahl

(Malle 1993)

Fehler und Fehlvorstellungen I

Vereinfache den folgenden Term:

4n + 6n + 3

Lösung von Lea

$$4n + 6n + 3 = 10n + 3 = 13n$$

Lehrerin:	Guck noch mal auf deine Rechnung, 10n + 3 = 13n, stimmt das wirklich?
Lea:	Ja, wieso?
Lehrerin:	Setz doch für n mal eine Zahl ein und prüfe das.
Lea:	Wie meinen Sie das?
Lehrerin :	Na ja, nimm doch statt n mal die 4 und schreibe das auf.
Lea:	*[Schreibt 10 4 + 3, stockt]* Nee, wär' ja dann mal, *[schreibt 10 4 + 3 = 43]*
Lehrerin:	Und die 13n?
Lea:	Die wären dann, mhh, 52.
Lehrerin:	Und, fällt dir was auf?
Lea:	Nö, was? *[guckt auf die Zahlen, zögert]* Ist das wohl falsch?
Lehrerin:	Da kommt gar nicht das Gleiche raus?
Lea:	Nö. Aber ..... das ist ja auch mit 4, nicht mit n.

(Prediger 2009)

Fehler und Fehlvorstellungen II

b) Lena ist das älteste Kind der Familie Berger.
Sie erhält jeden Monat von ihren Eltern 22 € und von ihrer Oma 10 €.
Mit welchen der folgenden Terme kann Lena ihr Taschengeld für ein Jahr berechnen?

(1) $12 \cdot 22 + 10$	(2) $12 \cdot (22 + 10)$	(3) $(12 \cdot 22) + 10$
(4) $12 \cdot (10 + 22)$	(5) $12 \cdot 10 + 22$	(6) $12 \cdot 10 + 12 \cdot 22$

c) Denke dir zu den übrigen Termen aus b) passende Situationen aus.

(1) $12 \cdot 22 + 10$

Lena beommt 22 € Taschengeld im Monat
Sie bekommt noch 10 € Taschengeld dazu.

(2) $12 \cdot (22 + 10)$

22 € Taschengeld grigt sie aber sie krigt
44 € dazu aber sie kriegt eine abgezogen

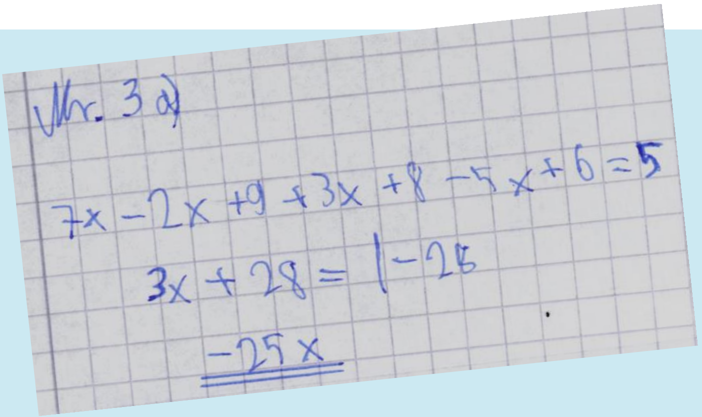
(3) $(12 \cdot 22) + 10$

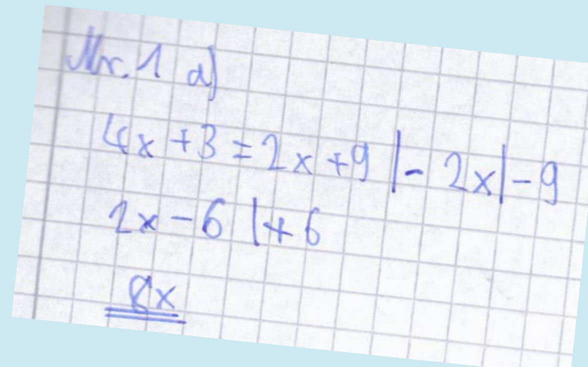
Sie kriege im Monat 44 € Taschengeld von
ihren Eltern

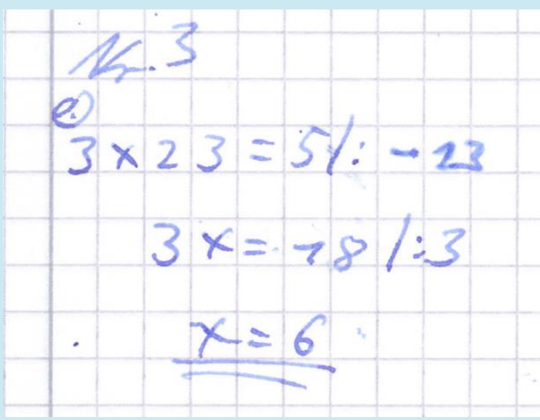
Fehler und Fehlvorstellungen III

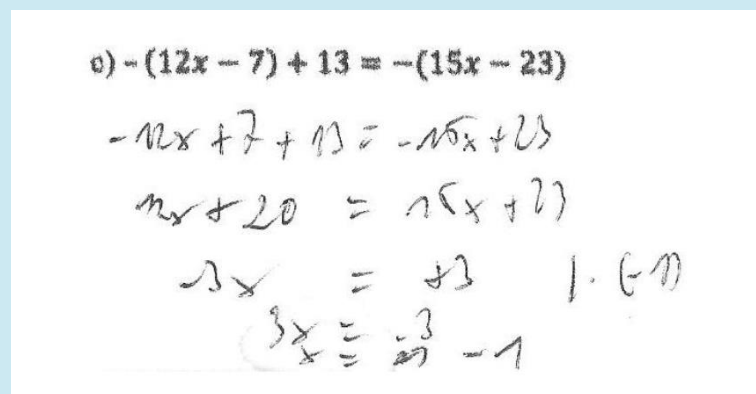
Situation	Die Variable x steht für …	Mit dem Term berechne ich …	Term
(7) Ich habe 7 Bobons in einer Tüte ~~das etwa~~ Ich habe mehrere Tüten. Das verteile ich mir über 12 Tage	… die Anzahl der Tüten	… Wie viele Bonbons sie hat	$(7+x)\cdot 12$
(7) Die Bücherei bekommt jeden Monat 7 neue Bücher. In diesem Monat waren es 3 ~~[illegible]~~ mehr.	… die Bücher die diesmal mehr waren	wie viele Bücher die Bücherei in einem Jahr bekommt	$(7+x)\cdot 12$

Fehler und Fehlvorstellungen VI









Kai von Berg

Typische Fehler - Maßnahmen

Variablenfehler	$3a + 4 = 7a$	$\mathbf{3 \cdot a + 4 = 7 \cdot a}$
Vorzeichenfehler	$-(5a - 4) = 5a + 4$	$\mathbf{-5a + 4}$
Koeffizientenfehler	$7a + a + 2a = 9a$	$\mathbf{a = 1 \cdot a}$
Gegenoperation	$-4x = 5$ |+4	$\mathbf{-4 \cdot x = 5}$ **|:4**

Achtung: Maßnahmen sind höchstens kurzfristig, aber nicht nachhaltig.

Inhaltliches Denken vor Kalkül

Variablen und Terme

Inhaltliches Denken vor Kalkül

Grundvorstellungen zu Variablen und Variablenaspekten

mathe.sh

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Aktivität 5

Variablenaspekt: Kalkülaspekt

Die Hälfte der Zahl a

Beschreiben Sie die Rolle der Variablen **a** in diesen Termen.

https://learningapps.org/display?v=pr7ui2c2520

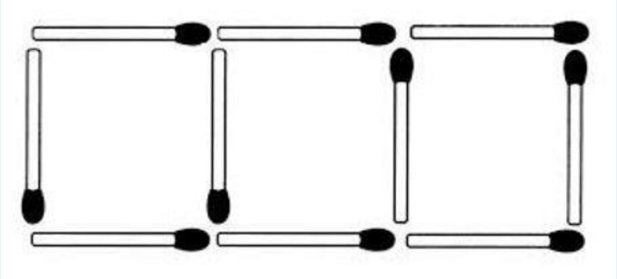
„man kann damit rechnen“

Aktivität 5

Variablenaspekt: Gegenstandsaspekt

Wie viele Hölzer?

Aus Hölzchen wird eine Reihe aneinander liegenden Quadrate gebildet:



1. Wie viele Hölzer siehst du? Bestimme die Anzahl der Hölzer.
2. Wie hast du gezählt? Beschreibe dein Vorgehen.
3. Lässt sich das Muster fortsetzen?
4. Berechne die Anzahl der Hölzer für 20 Quadrate.
5. Notiere deinen Term.

„Man nutzt die Variable, um etwas zu beschreiben.“

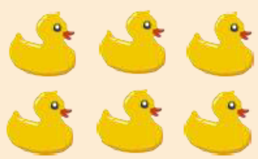
Aktivität 5

Situation beschreiben

Variablenaspekt: Gegenstandsaspekt

Lucy kauft 6 Enten für insgesamt 12 Euro.
Sie möchte herausfinden, wie teuer eine Ente ist und schreibt $6e = 12$.
Wofür steht das **e** in Lucys Gleichung?

- eine Ente
- Euro
- die Anzahl der Enten
- Enten
- die Kosten einer Ente



In einem Geschäft gibt es Fahrräder **f** (mit jeweils 2 Reifen) und **d** Dreiräder (mit jeweils 3 Reifen).

Welche Gleichung gibt an, dass es in dem Geschäft insgesamt 100 Reifen gibt?

- $2f + 3d = 100$
- $f + d = 100$
- $35f + 10d = 100$

Für meinen Geburtstag habe ich **r** rote Ranunkeln und **l** lila Lavendel-Pflanzen gekauft. Die Ranunkeln kosten jeweils 4 €. Der Lavendel kostet jeweils 5 €

Welche Gleichung gibt an, dass die Pflanzen insgesamt 70 € gekostet haben?

- $4r + 5l = 70$
- $10r + 6l = 70$
- $r + l = 70$

„Man nutzt die Variable, um etwas zu beschreiben.“

mathe.sh
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Aktivität 5

Variablenaspekt: Einsetzungsaspekt

Wie viele Hölzer?

Überprüfe das Rechengesetz durch das Einsetzen unterschiedlicher Zahlen:

$$a + b = b + a$$

„Man kann Werte für die Variablen einsetzen.“

Grundvorstellungen zu Variablen und Variablenaspekten

		...und was man mit Variablen in den verschiedenen Rollen tun kann		
Die Rollen, die Variablen spielen können		Man kann Werte dafür **einsetzen**	Man nutzt sie, um damit etwas zu **beschreiben**	Man kann damit **rechnen**
	Variable als Unbekannte *z.B.* 13 + **Δ** = 75	a + c = 20 12,5 + 7,5 = 20	Für ein Rechteck nehme ich 2a + 2c	4a = 40 | :4 ⇔ a = 10
	Variable als allgemeine Zahl *z.B.* Δ + ⊗ = ⊗ + Δ	a + c = 20 12,5 + 10 = 20 f 12,5 + 7,5 = 20 r	Die Länge des Streckenzugs ändert sich nicht, wenn ich anders anordne.	a + c + c = 2c + a
	Variable als Veränderliche z.B. ⊙ · 23 = ⊡	U(x) = 4x x = 3,5 ⟶ U = 14	Der Umfang eines Quadrates ist viermal so lang wie seine Seitenlänge.	f(x) = x + x + x + x = 4x

Grundlagen: Malle, Günther (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra, Vieweg, Wiesbaden.
Vollrath, H.(1994): Algebra in der Sekundarstufe. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim.

mathe.sh
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

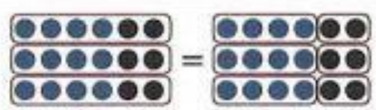
...und was man mit Variablen in den verschiedenen Rollen tun kann (Aspekte)

Die Rollen, die Variable spielen können (Grundvorstellungen)	Man kann Werte dafür einsetzen (Einsetzungsaspekt)	Man kann damit rechnen (Kalkülaspekt)	Man nutzt sie, um damit etwas zu beschreiben (Gegenstandsaspekt)
Variable als allgemeine Zahl *Beispiel:* $a + b = b + a$	Es können beliebige Zahlen eingesetzt werden. *Setze Zahlen ein, um das Gesetz zu überprüfen.*	✔ *Nutze das Gesetz bei einer Termumformung*	Mathematische Zusammenhänge (z. B. geometrische Formeln, Rechengesetze usw.). *Das Gesetz beschreibt die Kommutativität der Addition.*
Variable als Unbekannte *Beispiel:* $2x - 1 = x + 3$	Nur das Einsetzen der Lösungswerte erfüllt die Gleichung. *Lösung finden durch systematisches Probieren:* $2 \cdot 2 - 1 = 2+3$ f $2 \cdot 3 - 1 = 3+3$ f $2 \cdot 4 - 1 = 4+3$ r	✔ *Lösung finden durch Umformungen:* $2x - 1 = x+3 \quad \vert -x$ $x - 1 = 3 \quad \vert +1$ $x = 4$	In Situationen, bei denen ein unbekannter Wert gesucht ist. *Gesucht ist die Zahl, deren Doppeltes um eins verringert genau so groß ist, wie die Zahl um drei erhöht.*
Variable als Veränderliche *Beispiel:* $f(x) = 2x+3$	Die Werte der Definitionsmenge können eingesetzt werden $D = \mathbb{R}$	✔ *Zu einem gegebenen f(x)-Werte einen x-Werte bestimmen (z. B. Nullstellen).*	Unabhängige und abhängige Größen, die in Beziehung zueinander stehen. *Beziehung zwischen einer unabhängigen Größe x und einer davon abhängigen Größe f(x) wird beschrieben.*

Vgl. Barzel, Holzäpfel 2017

mathe.sh
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Vorstellungen aufgreifen

	Vorstellungen	Beispiel: Grundschule	Beispiel: 5/6	Kognitive Aktivität
Grundschule und 5/6	*Variablen* …	„Fülle die Lücke."		Vorwärts und rückwärts rechnen (Umkehraufgaben) Passende Zahlen finden, um Gleichheit von Termen zu erzeugen.
	… als Unbekannte („Platzhalter")	$3 + 4 = \square$ $3 + \square = 7$ $3 + 4 = \square + 5$	$5/6 + \square/4 = \square/12$ $\square/3 + \square/2 = 1$	
	… als Veränderliche	„Rechne im Kopf und setze fort."		Systematisches Verändern einer Zahl in Rechnungen
		$2 \cdot 5 = \square$ $4 \cdot 5 = \square$ $6 \cdot 5 = \square$	$0{,}23 \cdot 10 =$ $0{,}23 \cdot 100 =$ $0{,}23 \cdot 1000 =$	
	… als allgemeine Zahl	„Wie viele Punkte sind an der 10. Stelle?"	„Wie viele Punkte sind an der *x*-ten Stelle?"	Strukturen erkennen und beschreiben; Weiterdenken („an der *n*-ten Stelle"; Buchstaben als Platzhalter einführen)
	Terme: Arithmetische Terme und ihre Gleichwertigkeit	„Finde mehrere Wege, diese Punkte geschickt zu zählen."		Systematisch zählen, Situationen beschreiben, Beschreibungsgleichheit entdecken, Gleichwertige Terme zum Formulieren von Rechengesetzen entwickeln.
			 $3 \cdot (4+2) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2$	

Aufbau über die Jahrgänge

	Vorstellungen	Beispiel(-Aufgabe)	Kognitive Aktivität
5/6	*Variable* ... als allgemeine Zahl	*Modellieren mit Zahlentermen:* Wie viel Euro kosten der Musikunterricht und die Fahrt dorthin pro Woche? $10 + 2$ Wie viel ist das in einem Monat? $4 \cdot (10 + 2)$ Warum muss man hier Klammern setzen? Welche Kosten kommen durch die Anmeldegebühr noch dazu? $(4 \cdot (10 + 2)) + 20$ Sind hier alle Klammern wirklich notwendig?	Terme aufstellen, um Situationen zu beschreiben
7/8	*Variable* ... als allgemeine Zahl *Terme* Algebraische Terme	*Modellieren mit Variablen:* Micha will ein E-Bike kaufen. Ihn interessieren Preis, Akku-Reichweite, Akku-Lebensdauer. Um Angebote zu vergleichen, legt er eine Excel-Tabelle an. Es gibt Felder, deren Werte er verändern möchte (Preis, Kilometerzahl pro Jahr) und Felder, in denen sich die berechneten Werte (Gesamtkosten) dann automatisch ändern.	Sich verändernde Situationen mit Termen beschreiben; dazu Variablen nutzen. Tabellenkalkulation unterstützt mit dem Zellbezug, der in Formeln eingebunden wird, die Vorstellung der Variablen als allgemeine Zahl in einem Term
	Variable … als allgemeine Zahl *Terme* … und ihre Gleichwertigkeit	„Erfinde verschiedene Geschichten zu dem Term $12x + 50$." Taschengeld pro Jahr: Julia bekommt monatlich einen bestimmten Betrag und zum Geburtstag 50 €. Der Basispreis bei einem Mietwagen kostet 50 € pro Tag; für jeden gefahrenen km werden zudem 12 ct. berechnet.	Unterschiedliche, strukturgleiche Situationen mit einem algebraischen Term beschreiben. Terme auf ihre Gleichwertigkeit prüfen (Beschreibungsgleichheit und Einsetzungsgleichheit zum Vorstellungsaufbau nutzen)
7/8	*Terme* … beschreiben veränderliche Situationen (Funktionsterme) *Variable* … als allgemeine Zahl	*Beim Aufbau funktionalen Denkens:* „Beantworte mit Graph, Tabelle und einer Rechnung: Ein neues Haar wächst täglich um 0,3 mm. Wie lang ist es nach drei Jahren?" *Parameter erkennen:* „$f(x) = m \cdot x + b$. Was bedeuten m, x und b?"	Beziehungen zwischen unabhängigen und abhängigen Variablen in verschiedenen Darstellungen beschreiben (sprachlich, graphisch, tabellarisch und algebraisch)
	Gleichungen … aufstellen *Variable* … als Unbekannte *Gleichungen* … lösen	*Finde den x-Wert zu einem gegebenen y-Wert:* „Ein Ball kostet 2 €. Wie viele Bälle kannst du für 16 € kaufen?" Term 1: $2x + 8$ Term 2: $6x + 4$ Bestimme die Stelle, an der die Werte gleich sind. Erstelle dazu eine Tabelle und zeichne die Graphen. Überprüfe dein Ergebnis durch Einsetzen in den Term.	Werte für Variablen finden, damit verschiedene Terme den gleichen Wert haben Gleichungen auf verschiedenen Wegen lösen: z. B. systematisches Probieren / Rückwärtsrechnen / grafisch / äquivalentes Umformen Einen gemeinsamen Wert finden durch schrittweises Umformen einer Gleichung.
9/10	algebraische Objekte und Symbolik nutzen, z. B. in der Geometrie, bei Funktionen	*Vergleich:* Was beschreiben diese Terme? a) $2x + 2y$ b) $x^2 \cdot y$ c) $\pi \cdot x^2$ d) $\pi \cdot 2 \cdot x$ d) $\pi \cdot x^2 \cdot y$ e) $1/3 \cdot x \cdot y \cdot z$	Abhängigkeiten durch Terme beschreiben; Terme interpretieren

mathe.sh
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Gleichwertigkeit (Äquivalenz) von Termen

Inhaltliches Denken vor Kalkül

Grundvorstellungen zu Variablen und Variablenaspekte

mathe.sh

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Bedeutung des Gleichheitszeichens

Aufforderung zum Rechnen

24 : 4 – 3 =

Relationszeichen (Beschreiben einer Beziehung)

- als Bedingung, um eine Unbekannte zu bestimmen
  (*Gesucht ist x mit* $x^2 + x - 6 = 0$.)
- als Zusammenhang zwischen Größen
  $A_{\text{Trapez}} = 1/2\,(a + c) \cdot h$; $K_n = K_0\,(1 + p/100)^n$
- zwischen gleichwertigen Termen (formale Gleichheit)
  $(x - 2) \cdot (x + 3) = x^2 + x + 6$

Definitionszeichen (Setzung, normative Deutung)

Zum Definieren eines neuen Objekts

einer neuen Variablen $a := 2b$, *einer Funktion* $f(x) := 2x + 1$,

einer neuen Größe $\sin(\alpha) :=$ *Gegenkathete/Hypotenuse usw.*

Vgl. Prediger/Barzel/Holzäpfel 2011

Gleichwertigkeit (Äquivalenz) von Termen

Formulieren Sie:

Wann sind Terme gleich?

a) Was würden Ihre SuS sagen?

b) Was sagen Sie?

Gleichwertigkeit (Äquivalenz) von Termen (DZLM)

Schülerantworten:

wenn sie das gleiche Ergebnis haben

Wenn Sie die gleich aussehen

Wenn rechts und links dasselbe steht

Ihre Antworten:

Einsetzungsgleichheit

Beim einsetzen aller möglicher Variablenbelegungen kommt dasselbe Ergebnis heraus

Umformungsgleichheit

Beim Umformen mit gültigen Rechengesetzen lässt sich Term 1 in Term 2 überführen

Wenn die Werte der Terme gleich sind

Gleichwertigkeit (Äquivalenz) von Termen je nach Interpretation der Variablen

Terme sind gleichwertig, wenn ...

- *Umformungsgleichheit*: Werden die Variablen als interpretationslose Zeichen angesehen (Kalkülaspekt der Variablen, Malle 1993, S. 46), gelten zwei Terme als gleichwertig, wenn sie sich durch Termumformungsregeln ineinander überführen lassen.
- *Beschreibungsgleichheit*: Werden die Variablen als unbestimmte Zahlen oder Größen gedeutet (Gegenstandsaspekt der Variablen, Malle 1993, S. 46), so gelten zwei Terme dann als gleichwertig, wenn sie denselben Sachzusammenhang oder dasselbe Bild auf unterschiedliche Weise beschreiben.
- *Einsetzungsgleichheit*: Werden die Variablen als Platzhalter für das potenzielle Einsetzen von Zahlen gedeutet (Einsetzungsaspekt, vgl. Malle 1993, S. 46), so gelten zwei Terme dann als gleichwertig, wenn sie für jede Kombination eingesetzter Zahlen denselben Wert ergeben.

Prediger 2009

Gleichwertigkeit (Äquivalenz) von Termen je nach Interpretation der Variablen

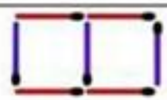
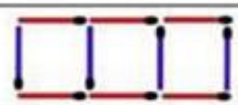
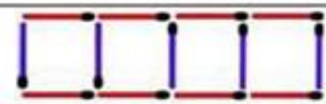
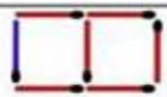
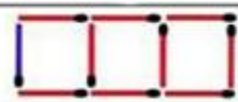
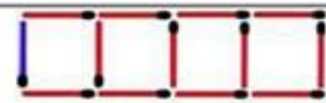
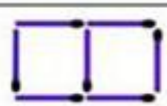
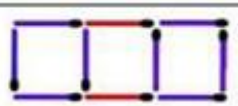
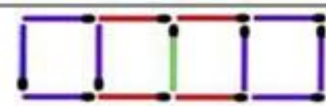
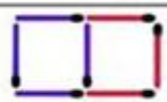
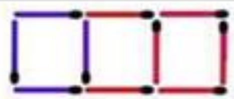
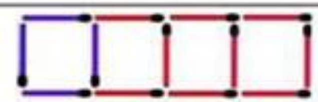
Terme sind gleichwertig, wenn ...

- *Beschreibungsgleichheit:* Zwei Terme beschreiben das Gleiche; z. B. dasselbe Bild, dieselbe Situation.
- *Einsetzungsgleichheit:* Der Wert der Terme ist gleich, wenn man die gleichen Zahlen einsetzt.
- *Umformungsgleichheit:* Durch Umformen erhält man das Gleiche, d. h. man kann kalkülhaft von einem Term zum anderen gelangen.

Vgl. Zwetzschler/Prediger 2013.

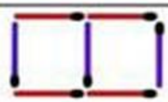
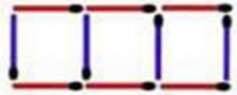
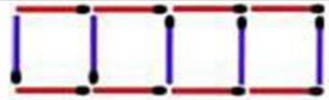
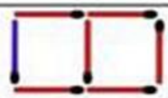
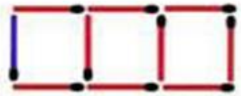
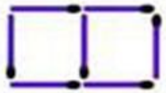
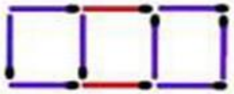
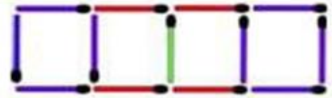
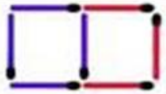
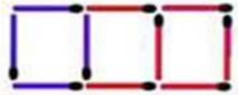
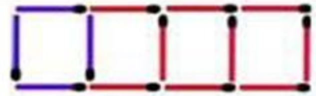
Aktivität 7

Beschreibungsgleichheit:
Gleiche Situation mit unterschiedlichen Termen beschreiben

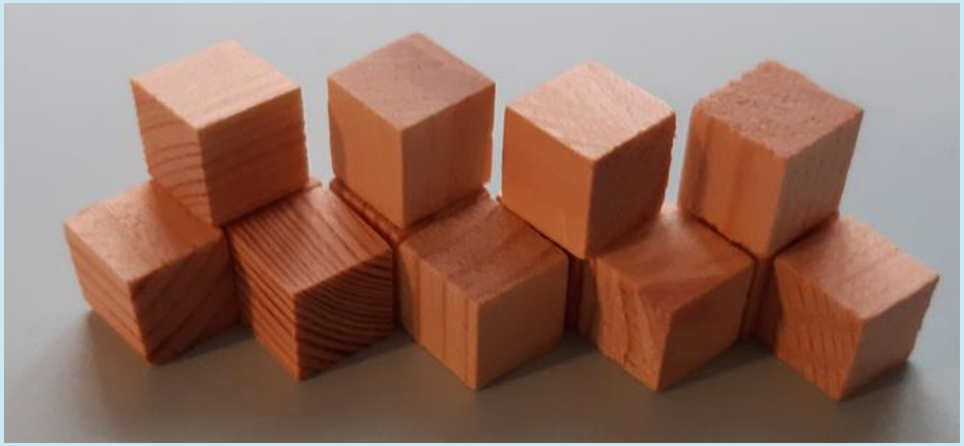
Anzahl Quadrate	2 Quadrate	3 Quadrate	4 Quadrate	...	n Quadrate
Variante 1					
Variante 2					
Variante 3					
Variante 4					

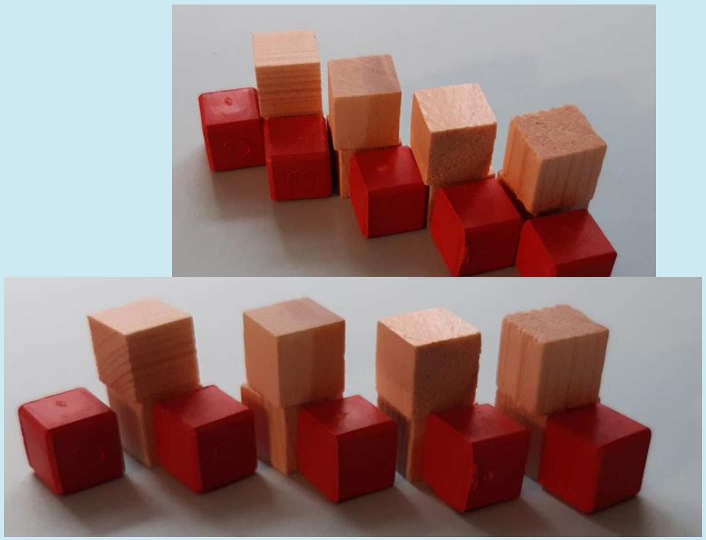
mathe.sh
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Beschreibungsgleichheit:
Gleiche Situation mit unterschiedlichen Termen beschreiben

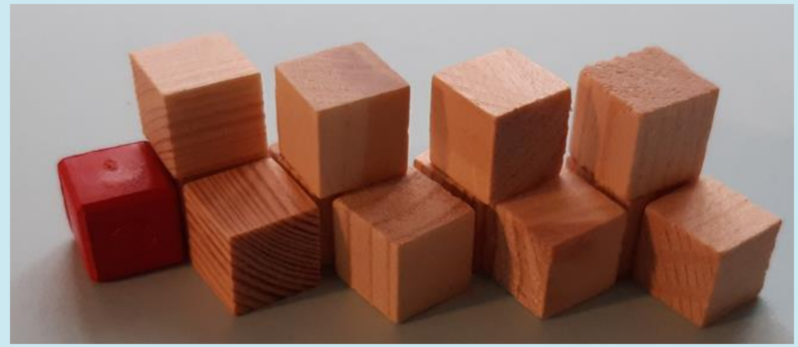
Anzahl Quadrate	2 Quadrate	3 Quadrate	4 Quadrate	...	n Quadrate
Variante 1					
	$2 \cdot 2 + 3$	$3 \cdot 2 + 4$	$4 \cdot 2 + 5$		$n \cdot 2 + (n + 1)$
Variante 2					
	$1 + 2 \cdot 3$	$1 + 3 \cdot 3$	$1 + 4 \cdot 3$		$1 + n \cdot 3$
Variante 3					
	$2 \cdot 4 + 0 \cdot 2$	$2 \cdot 4 + 1 \cdot 2$	$2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1$		$2 \cdot 4 + (n-2) \cdot 2 + (n-3) \cdot 1$
Variante 4					
	$4 + 1 \cdot 3$	$4 + 2 \cdot 3$	$4 + 3 \cdot 3$		$4 + (n-1) \cdot 3$

Beschreibungsgleichheit:
Gleiche Situation mit unterschiedlichen Termen beschreiben





Term:



Term:

Gleichwertigkeit (Äquivalenz) von Termen

Beschreibungsgleichheit:

Eine Situation kann mit unterschiedlich aussehenden Termen beschrieben werden.

Aktivität 8

Beschreibungsgleichheit: Unterschiedliche Situationen durch den gleichen Term beschreiben

Was hat ein Theaterbesuch mit dem Umfang eines Rechtecks zu tun?

Meine Frau und ich zahlen jeweils 25€ Eintritt und 3€ für die Garderobe.

Der Umfang des Rechtecks berechnet sich aus der verdoppelten Summe der Länge 25 und der Breite 3.

KOSIMA
Ein fachdidaktisches Entwicklungs- und Forschungsprojekt

mathe.sh

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur
des Landes Schleswig-Holstein

Beschreibungsgleichheit:
Unterschiedliche Situationen durch den gleichen Term beschreiben

Was hat ein Theaterbesuch mit dem Umfang eines Rechtecks zu tun?

gleiches Modell

$$2\,(25 + 3)$$

Meine Frau und ich bezahlen jeweils 25 € Eintritt und 3 € für die Garderobe.

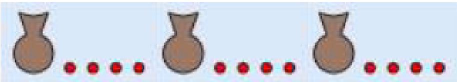
Der Umfang des Rechtecks berechnet sich aus der verdoppelten Summe von Länge 25 und Breite 3

Beide Situationen haben die gleiche Struktur.

Beschreibungsgleichheit

Gleiche Situationen mit unterschiedlichen Termen beschreiben

$3 \cdot (x + 4) \stackrel{?}{=} 3x + 12$



	3 (x + 4)	3x + 12
x = 1	$3 \cdot 5 = 15$	$3 + 12 = 15$
x = 3	$3 \cdot 7 = 21$	$9 + 12 = 21$

$3 \cdot (x + 4)$ (Ausmultiplizieren)
$= 3x + 12$

Beschreiben die Terme dasselbe Bild, dieselbe Situation?

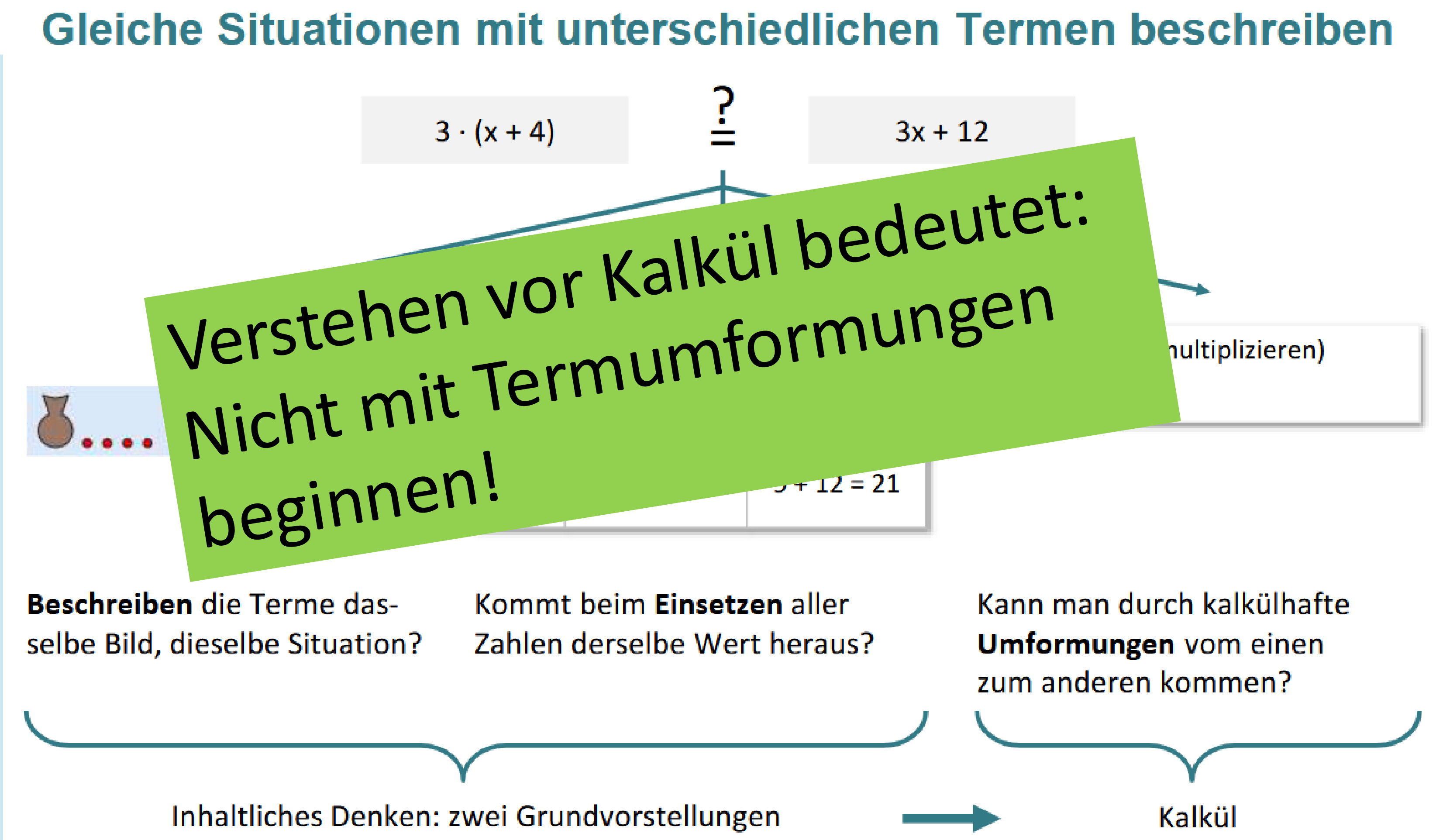
Kommt beim **Einsetzen** aller Zahlen derselbe Wert heraus?

Kann man durch kalkülhafte **Umformungen** vom einen zum anderen kommen?

Inhaltliches Denken: zwei Grundvorstellungen → Kalkül

mathe.sh
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Beschreibungsgleichheit



Ziele des Algebra-Unterrichts im Sinne der Schulmathematik

Terme vereinfachen und schaffen Klarheit, liefern ein Modell für viele Situationen, sind das Fundament für weitere Operationen.

- Fähigkeit zur Strukturerkennung fördern
- mathematische Inhalte zunehmend knapper und ohne Verlust an Präzision beschreiben lernen
- mathematisches Regelsystem sicher verwenden können (nicht unnötig komplex)

Algebra als eine Sprache kennenlernen, nicht als „Rechnen mit Buchstaben“!

mathe.sh
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Aktivität 9

Inhaltliches Denken vor Kalkül

Perspektivwechsel

mathe.sh

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Term als Beschreibungsmittel

Die Geburtstagsaufgabe

Verschaffen Sie sich einen Überblick über die Inhalte der Aufgabe.

https://learningapps.org/display?v=pstgensc521

...und was man mit Variablen in den verschiedenen Rollen tun kann (Aspekte)

Die Rollen, die Variable spielen können (Grundvorstellungen)	Man kann Werte dafür einsetzen (Einsetzungsaspekt)	Man kann damit rechnen (Kalkülaspekt)	Man nutzt sie, um damit etwas zu beschreiben (Gegenstandsaspekt)
Variable als allgemeine Zahl *Beispiel:* $a + b = b + a$	Es können beliebige Zahlen eingesetzt werden. *Setze Zahlen ein, um das Gesetz zu überprüfen.*	✔ *Nutze das Gesetz bei einer Termumformung*	Mathematische Zusammenhänge (z. B. geometrische Formeln, Rechengesetze usw.). *Das Gesetz beschreibt die Kommutativität der Addition.*
Variable als Unbekannte *Beispiel:* $2x - 1 = x + 3$	Nur das Einsetzen der Lösungswerte erfüllt die Gleichung. *Lösung finden durch systematisches Probieren:* $2 \cdot 2 - 1 = 2+3$ *f* $2 \cdot 3 - 1 = 3+3$ *f* $2 \cdot 4 - 1 = 4+3$ *r*	✔ *Lösung finden durch Umformungen:* $2x - 1 = x + 3 \quad \vert -x$ $x - 1 = 3 \quad \vert +1$ $x = 4$	In Situationen, bei denen ein unbekannter Wert gesucht ist. *Gesucht ist die Zahl, deren Doppeltes um eins verringert genau so groß ist, wie die Zahl um drei erhöht.*
Variable als Veränderliche *Beispiel:* $f(x) = 2x+3$	Die Werte der Definitionsmenge können eingesetzt werden $D = \mathbb{R}$	✔ *Zu einem gegebenen f(x)-Werte einen x-Werte bestimmen (z. B. Nullstellen).*	Unabhängige und abhängige Größen, die in Beziehung zueinander stehen. *Beziehung zwischen einer unabhängigen Größe x und einer davon abhängigen Größe f(x) wird beschrieben.*

Vgl. Barzel, Holzäpfel 2017

mathe.sh

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur
des Landes Schleswig-Holstein

Variablenaspekte – Bedeutung von Termen

- Beschreibungsmittel (= Modell)
  Welche Situation beschreibt der Term?

- Unbestimmte (→ Verallgemeinern)
  Was bedeutet das x an dieser Stelle?

- Beschreibungsgleichheit (→ Umformung)
  Welche anderen Terme beschreiben dieselbe Situation?

- Veränderliche (→ funktionales Denken)
  Was bedeutet der Termwert und wie verändert er sich?

Malle (1993), Barzel & Herget (2007), Hußmann & Leuders (2008)

Variablenaspekte
– Unbestimmte (→ Verallgemeinern)

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Unbestimmte helfen dabei, Berechnungen von der konkreten Einzelsituation zu lösen

Monat	Kilometerzahl Term	Benzinverbrauch Term	Benzinkosten Term	Benzin-kosten in €
Februar	*600*	*600 · 0,06*	*600 · 0,06· 1,90*	*68,40*
Juli (Urlaub)	*5800*	*5800 · 0,06*	*5800 · 0,06 · 1,90*	*661,20*
Dezember	*1900*	*1900 · 0,06*	*1900 · 0,06 · 1,90*	*216,50*
x-beliebige Kilometerzahl	*x*	*x · 0,06*	*x · 0,06 · 1,90*	x-beliebig

Prediger & Marxer, 2013, Mathewerkstatt 6

Variablenaspekte

– Veränderliche (→ funktionales Denken)

Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

$$\frac{x}{2} + \frac{48}{y} + z$$

2	4	6
12	18	24

Setze von den Karten drei Zahlen in den Term ein, so dass

- Der Wert des Terms möglichst groß wird
- Der Wert des Terms möglichst klein wird

→Funktionale Sicht auf Term und Termwert
→produktives Übungsformat
→operatives Durcharbeiten des Termkonzeptes

Terme verstehen – „Sichtweisen“ von Termen

Quelle: KOSIMA

Beschreibungs-mittel (=Modell)

Welche Situation beschreibt dieser Term?

Unbestimmte (→ Verallgemeinern)

Was bedeutet das x an dieser Stelle?

$$3x + 1$$

Welche anderen Terme beschreiben dieselbe Situation?

Was bedeutet der Termwert und wie verändert er sich?

Beschreibungs-gleichheit (→ Umformen)

Veränderliche (→ funktionales Denken)

KOSIMA

Ein fachdidaktisches Entwicklungs- und Forschungsprojekt

(Malle 1993)

Vorstellungen aufgreifen und entwickeln

Aus Rechentermen werden Variablenterme

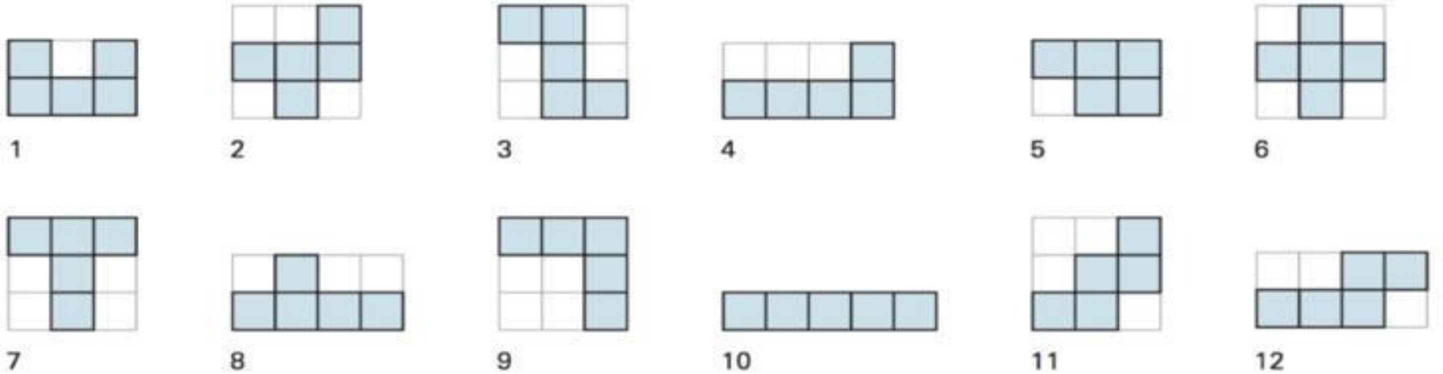
Kai von Berg

mathe.sh

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Der Weg zum Term –

Pentominos im Hunderterfeld



A Wähle ein Pentomino und lege es auf die Hundertertafel. Berechne die Summe der fünf von ihm abgedeckten Zahlen.
In unserem Beispiel bedeckt Pentomino Nr. 3 die Felder 15, 16, 26, 36 und 37, die Summe beträgt 130.

B Verschiebe dein Pentomino um ein Feld nach links oder rechts, dann nach oben oder unten und berechne jeweils die Summe.
Was fällt dir auf? Wiederhole mit einem andern Pentomino.

C Nimm ein Pentomino und lege es so, dass die Summe der zugedeckten Zahlen möglichst nahe bei 240 liegt. Vergleiche deine Lösung mit Kameradinnen und Kameraden.

D Bestimme selber eine Summe und versuche, sie mit einem Pentomino zu erreichen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

E Lege zwei verschiedene Pentominos so nebeneinander, dass sie die gleiche Summe bedecken.

mathe.sh
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Aktivität 11

Der Weg zum Term –

Pentominos im Hunderterfeld

1. Wählen Sie drei Pentominos aus. Stellen Sie Unterschiede und Gemeinsamkeiten dar.

2. Definieren Sie ein Feld (oder auch zwei Felder) des Pentominos als "unbekannte Zahl" x (und y). Stellen Sie Gleichungen auf, um die Unbekannte(n) zu bestimmen.

mathe.sh

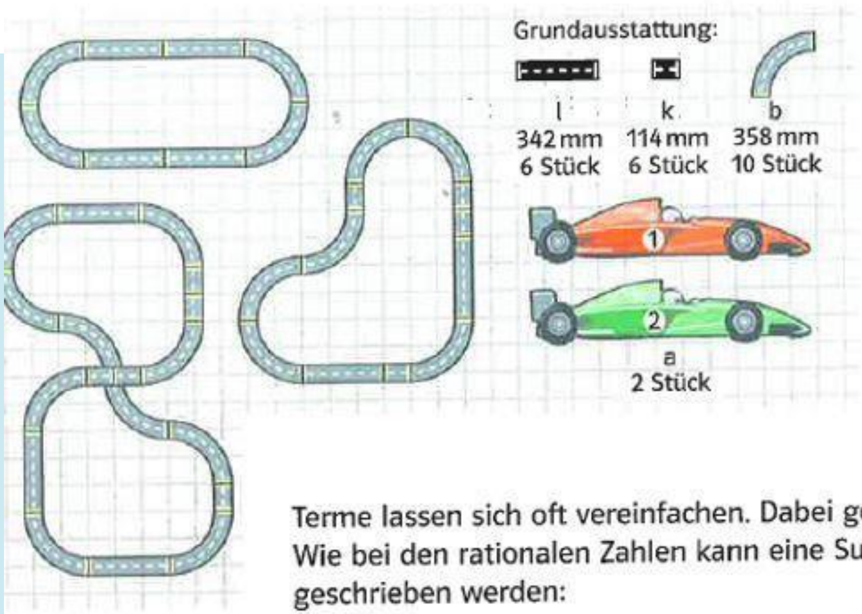
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Lernumgebungen: Terme umformen

… aufstellen/vereinfachen/ multiplizieren/faktorisieren

Aktivität 12

Schienenverkehr



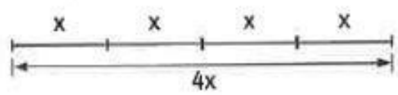
Für den Bausatz der Modellrennbahn gibt es eine Grundausstattung an Fahrbahnstücken.

→ Drücke die Länge jeder Rennstrecke mithilfe eines Terms aus, der die Variablen l, k und b enthält.
Vergleicht eure Terme.

→ Entwirf eigene Rennstrecken und beschreibe ihren Aufbau mit einem Term.

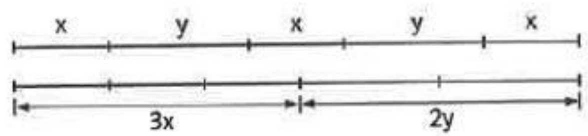
Terme lassen sich oft vereinfachen. Dabei gelten die bisher bekannten Rechengesetze. Wie bei den rationalen Zahlen kann eine Summe mit gleichen Summanden als Produkt geschrieben werden:

$x + x + x + x$
$= 4x$

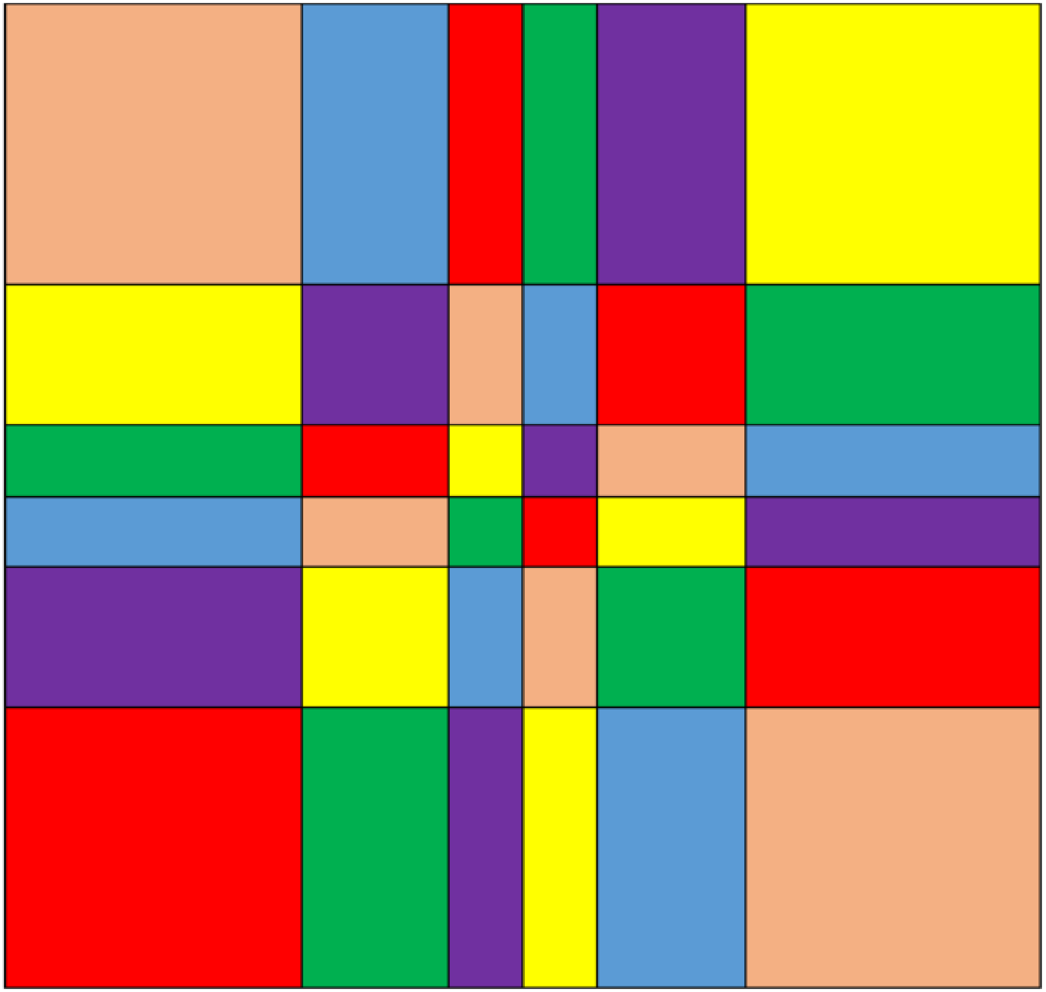


In machen Termen lassen sich die Summanden vor dem Zusammenfassen ordnen. Dazu wendet man das Vertauschungsgesetz an:

$x + y + x + y + x$
$= x + x + x + y + y = 3x + 2y$



mathe.sh
IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein



Aktivität 13

Terme multiplizieren/faktorisieren

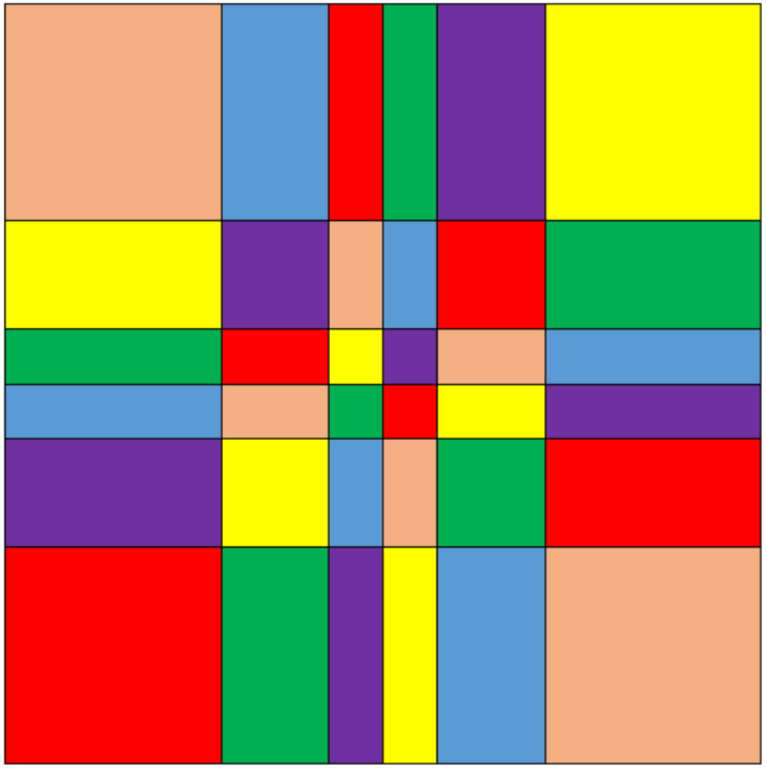
Der Schweizer Maler Richard Paul Lohse hat 1983 das Bild „6 komplementäre Farbreihen“ gemalt.

Die Seitenlänge des Bildes kann man messen, aber auch durch Terme beschreiben:

(a) $a + b + c + c + b + a$

(b) $2a + 2b + 2c$

(c) …



s. M7 - Aufgaben Lohse.pdf

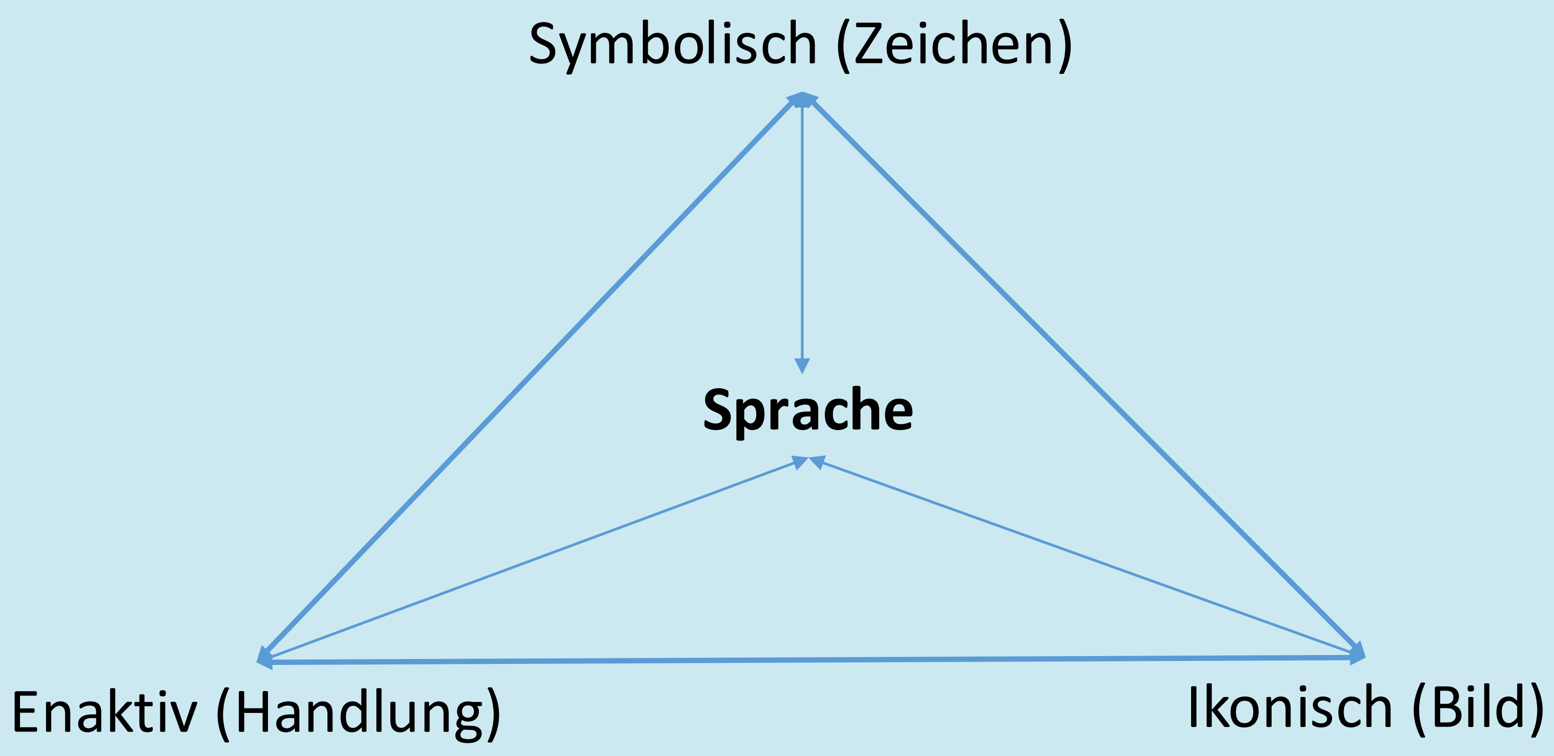
Gleichungen lösen nach dem E-I-S-Prinzip

Knack die Box

mathe.sh

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

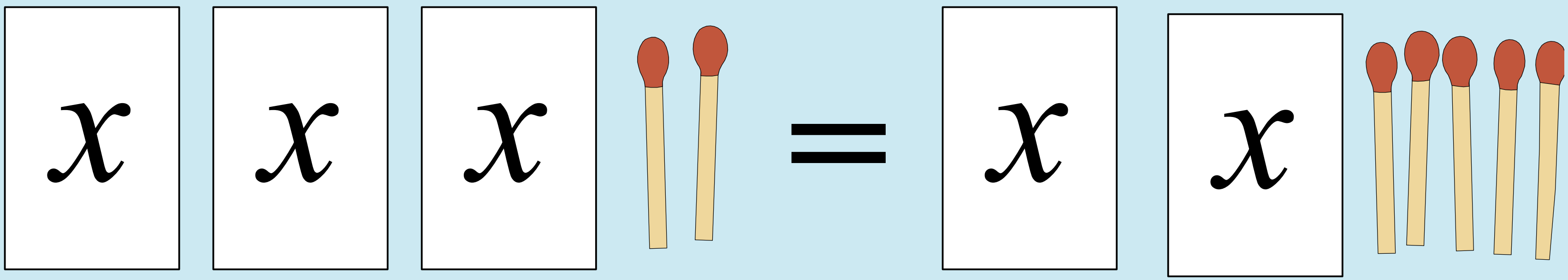
E-I-S-Prinzip



mathe.sh

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Streichholzschachtel-Gleichungen



Gegebene Informationen:

In jeder Streichholzschachtel sind gleich viele Streich-hölzer versteckt, nämlich *x* Stück.

Auf jeder Seite des Gleichheitszeichens befinden sich gleich viele Streichhölzer.

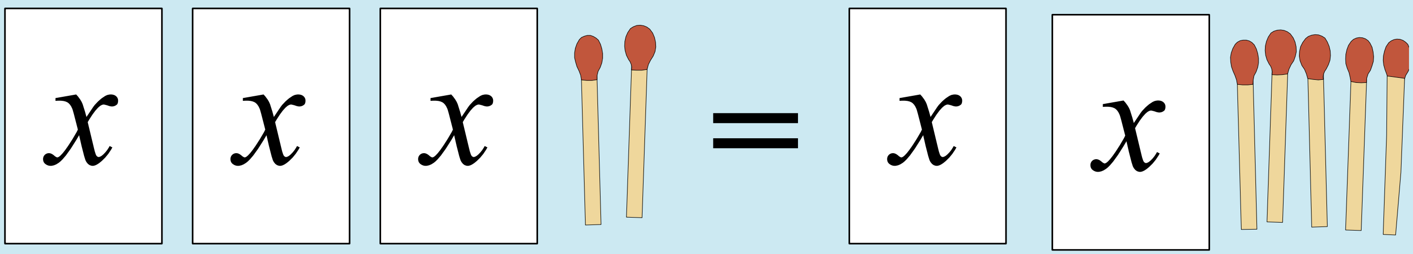
mathe.sh

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur
des Landes Schleswig-Holstein

Aktivität 14

Streichholzschachtel-Gleichungen

Bitte überlegen Sie sich, welche Fragen sich die Schülerinnen und Schüler hier stellen könnten.



Gegebene Informationen:

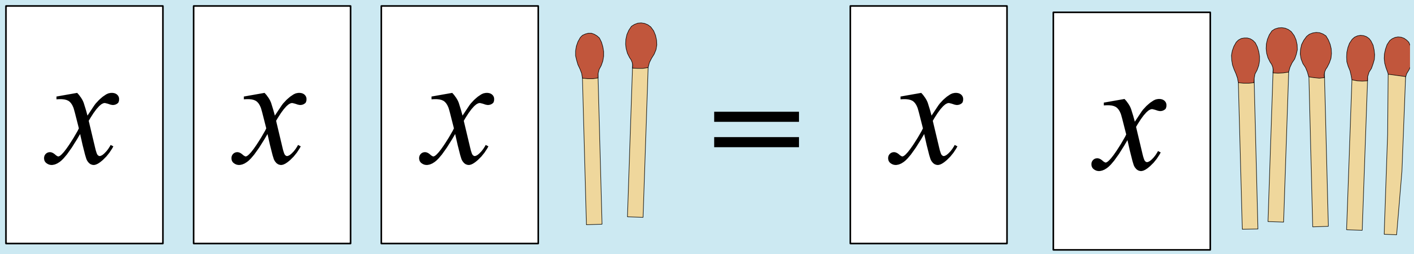
In jeder Streichholzschachtel sind gleich viele Streichhölzer versteckt, nämlich x Stück.

Auf jeder Seite des Gleichheitszeichens befinden sich gleich viele Streichhölzer.

mathe.sh

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur des Landes Schleswig-Holstein

Streichholzschachtel-Gleichungen



Mögliche Fragen:

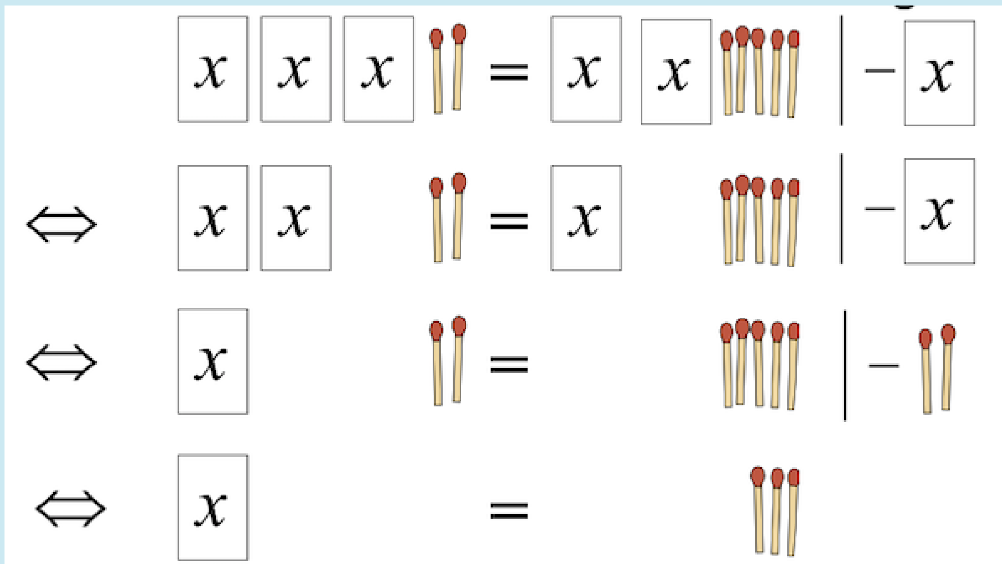
Wie viele Streichhölzer sind insgesamt vorhanden?

Wie viele Streichhölzer liegen links?

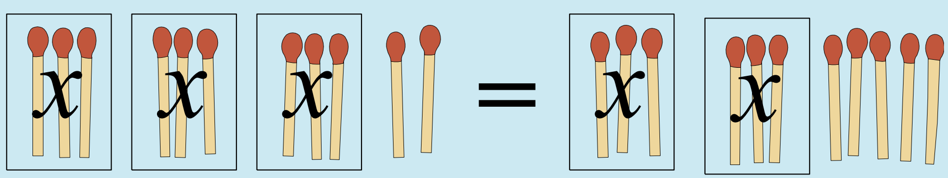
Wie viele Streichhölzer liegen rechts?

Wie viele Streichhölzer sind in einer Schachtel versteckt?

Streichholzschachtel-Gleichungen



$$T_{\mathrm{l}}(3) = 3 \cdot 3 + 2 = 11 \qquad T_{\mathrm{r}}(3) = 2 \cdot 3 + 5 = 11$$



Aktivität 15

Aufgabe: Knack die Box

Benötigtes Material in Moodle

Einige Streichholzschachteln(unterscheidbar, z.B. rot und blau) und einige Streichhölzer

1. Zu viert: Person 1 baut eine Streichholzschachtel-Gleichung nach dem Vorbild der vorherigen Folien. Person 2 löst die Gleichung im Kontext der Streichholzschachteln laut denkend. Person 3+4 beobachtet die Verbalisierung und teilt ihre Beobachtungen mit. Anschließend Rollentausch.
   (Bei der Umsetzung ist etwas Eigeninitiative gefragt: Zeichnung auf Tablet, …)
2. Bearbeitet die Aufgaben aus der Lernumgebung „Knack die Box“ (Material in Moodle).
3. Angenommen, in der Fachkonferenz deiner Schule wird jede Kollegin/jeder Kollege um eine begründete Stellungnahme gebeten, ob Streichholzschachtel-Gleichungen als verbindlicher Inhalt in das schulinterne Fachcurriculum aufgenommen werden sollen. Nimm Stellung dazu.

Quellenverzeichnis

Barzel, Holzäpfel: „ Strukturen als Basis der Algebra“, ML 202, S. 2 ff.

Blomberg, Marxer: „Wie aus Zahlen Variablen werden“, ML 202, S. 14 ff.

Leuders, T. & Prediger, S. (2016). Flexibel differenzieren und fokussiert fördern im Mathematikunterricht - Ein fachdidaktisch fundiertes Praxisbuch. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Prediger, Susanne: „Inhaltliches Denken vor Kalkül – Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten“, Beltz Verlag, Weinheim 2009, S. 213-234.

Funktionen haben viele Gesichter!

mathe.sh

IQ.SH

Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur
des Landes Schleswig-Holstein