

Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II



Gilbert Greefrath

Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht

Didaktische Perspektiven
zum Sachrechnen in der Sekundarstufe

2. Auflage



Springer Spektrum

2.2 Modellierungskreislauf

Der gesamte Modellierungsprozess wird häufig idealisiert als Kreislauf dargestellt. Mit Idealisierung ist hier gemeint, dass diese Darstellung auch selbst wieder ein Modell ist. Der Kreislaufprozess wird hier an einem einfachen Beispiel dargestellt. Soll beispielsweise das Volumen des Sandes bestimmt werden, das sich in einem Container befindet, so werden zunächst Vereinfachungen vorgenommen. Diese Vereinfachungen können in diesem Beispiel darin bestehen, dass man annimmt, der Sand würde gleichmäßig im Container verteilt, sodass die Füllhöhe dann ungefähr der Ladekante entspricht. Ebenso könnte man die Materialstärke des Containers vernachlässigen und damit Außen- und Innenmaße gleichsetzen. Außerdem ist es sinnvoll anzunehmen, dass der Container keine Beulen oder andere Unebenheiten besitzt. Beim Übergang in die Mathematik kann man den mit Sand gefüllten Teil des Containers mit einem Prisma identifizieren, das eine trapezförmige Grundfläche hat. Im Rahmen dieses Modells werden dann Berechnungen durchgeführt, die zu einer mathematischen Lösung führen, die schließlich als das Volumen des Sandes interpretiert wird (s. Abb. 2.3).

Etwas abstrakter betrachtet, ist die Frage nach dem Sand im Container ein *Problem in der Realität*. Dieses Problem wird zunächst auf der Sachebene vereinfacht und führt zu einem *Modell in der Realität*. Dieses bezeichnet man häufig mit *Realmodell*. Es könnte aber auch *konzeptionelles Modell* genannt werden (Sonar 2001, S. 21). Nun folgt der Schritt in die Mathematik, zum *mathematischen Modell*. Mithilfe dieses Modells wird nun eine *mathematische Lösung* ermittelt, die schließlich wieder auf das reale Problem bezogen werden muss.

Andere Idealisierungen des Lösungsprozesses dieses Container-Problems sind ebenfalls denkbar. So könnte man beispielsweise die Datenbeschaffung noch extra ausweisen oder auf den Zwischenschritt bei der Erstellung des mathematischen Modells verzichten. Daher gibt es in der Literatur unterschiedliche Kreislaufdarstellungen des Modellierens. Wir stellen nun diese Kreislaufdarstellungen aufsteigend nach ihrer Komplexität vor.

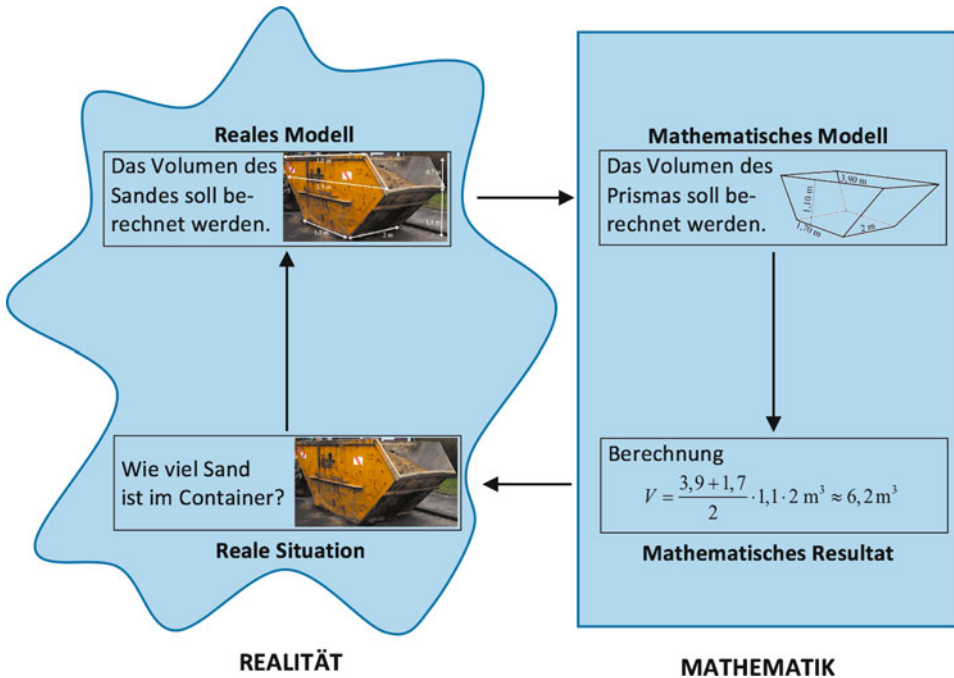


Abb. 2.3 Als Modellierungskreislauf idealisierter Lösungsprozess

2.2.1 Einfaches Mathematisieren

Mit einfachem Mathematisieren beschreiben wir Kreislaufmodelle des Modellierens, bei denen nur ein Schritt von der Situation zum Modell verwendet wird. Winter verwendet beispielsweise nur einen Schritt von der Situation zum Modell (Winter 2003, S. 33). Eine besonders anschauliche Darstellung dieses allgemein anerkannten und übersichtlichen Modells des Modellierens stammt von Schupp (1988, S. 11), das in einer Dimension Mathematik und Welt unterteilt. Dies ist bei Modellen des Modellierens allgemein üblich. Zusätzlich wird noch gleichberechtigt zwischen Problem und Lösung in einer zweiten Dimension unterschieden (s. Abb. 2.4). Dieses Modell verwenden z. B. auch Danckwerts und Vogel (2001, S. 25).

Zu den genannten Modellen wird häufig ergänzt, dass der Kreislauf nicht immer vollständig oder mehrfach durchlaufen werden kann. Büchter und Leuders (2005, S. 76) und Jürgen Maaß (2015, S. 202) stellen diesen mehrfachen Durchlauf des Modellierungskreislaufs als Modellierungsspirale dar. Dadurch wird auch die Entwicklung während des Modellierungsprozesses verdeutlicht. Nach jedem Umlauf vergrößert sich die Erfahrung mit dem Problem. Auch hier wird nicht zwischen realem und mathematischem Modell unterschieden, allerdings das Präzisieren des Problems als eigener Schritt zwischen Realität und Modell formuliert.

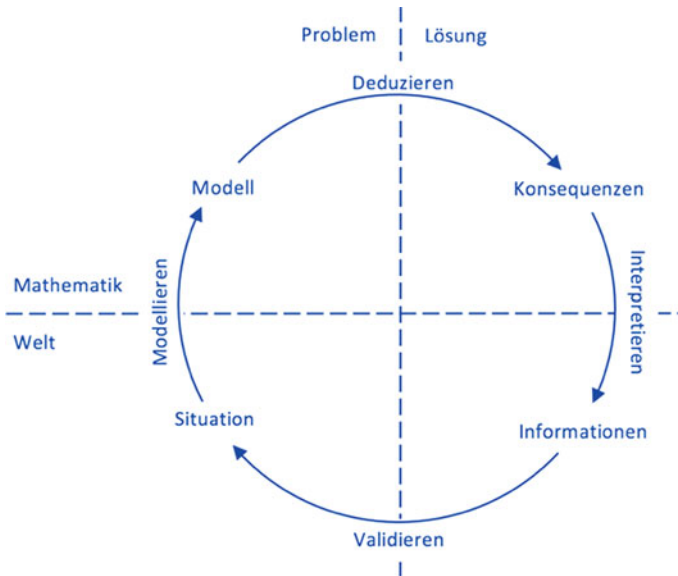


Abb. 2.4 Modellierungskreislauf nach Schupp (1988, S. 11)

Spezielle Kreisläufe gibt es für Teilgebiete der Mathematik. So wird beispielsweise in der Stochastik die Modellierung von Axiomensystemen aus Erfahrungen beschrieben (Behnen und Neuhaus 1984, S. 9). Für die Verwendung eines dynamischen Geometriesystems verwendet Schumann (2003, S. 25) einen Modellierungskreislauf, in dem das statische bzw. dynamische Modell des dynamischen Geometriesystems sowie die damit durchgeführte Simulation besonders hervorgehoben werden.

2.2.2 Genaueres Mathematisieren

Einer der in Deutschland bekanntesten Modellierungskreisläufe wurde von Blum (1985, S. 200) beschrieben. Hier wird für das Erstellen des mathematischen Modells noch ein Zwischenschritt eingefügt. Wie bei der Bearbeitung des Container-Problems (s. Abb. 2.3) wird die Vereinfachung in der Realität, das reale Modell, noch als eigener Schritt betrachtet.

Dieses Modell wurde gemeinsam mit Kaiser-Meßmer (1986) entwickelt und wird von vielen Autoren verwendet (z. B. Henn 1995, S. 56; Humenberger und Reichel 1995, S. 35; Maaß K. 2002, S. 11; Borromeo Ferri 2004, S. 109). Katja Maaß (2005) sowie Kaiser und Stender (2013) führen zusätzlich als Zwischenschritt von den mathematischen Resultaten bzw. der mathematischen Lösung zur realen Situation bzw. Realität die *interpretierte Lösung* ein (s. Abb. 2.5). Dieser Zwischenschritt verdeutlicht die unterschiedlichen Prozesse „interpretieren“ und „validieren“ in der zweiten Hälfte des Modellierungskreislaufs.

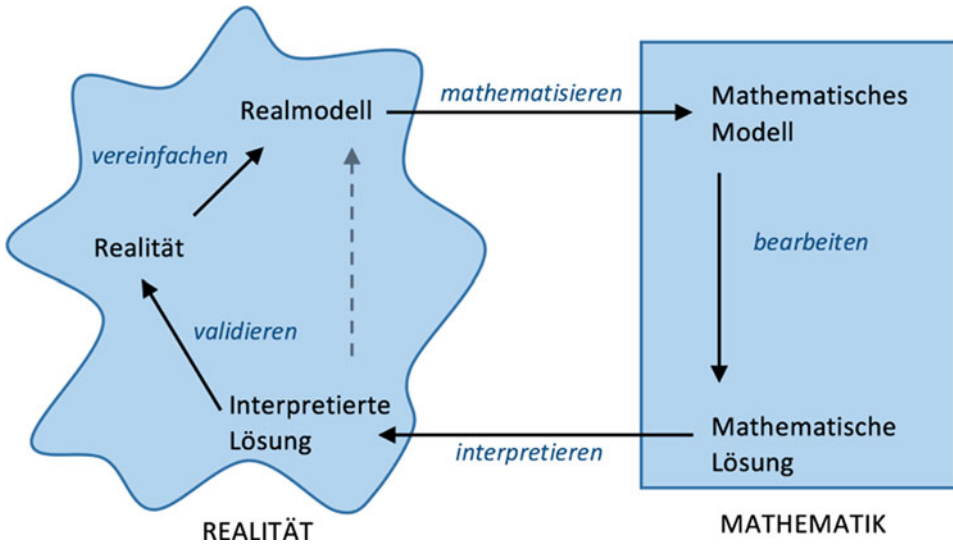


Abb. 2.5 Modellierungskreislauf nach Katja Maaß (2005, S. 117)

2.2.3 Komplexes Mathematisieren

Ein umfassenderes Modell des Modellierens von Blum und Leiß (2005), das im Prinzip auch von Borromeo Ferri (2006, S. 92) verwendet wird, ist unter kognitiven Gesichtspunkten erstellt worden (s. Abb. 2.6). Es wurde im Vergleich zum Modell von Blum (1985) um das Situationsmodell erweitert. Die Erstellung des mathematischen Modells wird detaillierter betrachtet und es wird der Prozess des Individuums, welches das Modell erstellt, detaillierter dargestellt. Das Situationsmodell beschreibt die mentale Darstellung der Situation durch das Individuum.

Auch im Modell von Fischer und Malle (1985) wird der Schritt von der Situation zum mathematischen Modell detailliert beschrieben. Insbesondere das Einfügen der Datenbeschaffung ist hier interessant und spielt bei vielen offenen Modellierungs- oder Anwendungsaufgaben eine Rolle (s. Abb. 2.7). Beispielsweise müssen bei der Bearbeitung von Fermi-Aufgaben viele Informationen durch Schätzen ermittelt werden.

Je nach Zielgruppe, Forschungsgegenstand oder -interesse haben die dargestellten Modelle des Modellierens andere Schwerpunkte. Häufig ist der Zweck unterschiedlich. Insbesondere sind normative und deskriptive Modelle des Modellierens zu unterscheiden. So könnte ein bestimmtes Modell für die Beschreibung von Schülertätigkeiten im Rahmen einer empirischen Untersuchung verwendet werden. Hierzu eignen sich auch sehr komplexe Modelle wie in Abb. 2.6. Ebenso könnte aber auch ein Kreislauf wie in Abb. 2.4 als Unterstützung für Lernende bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben im Unterricht normativ verwendet werden.

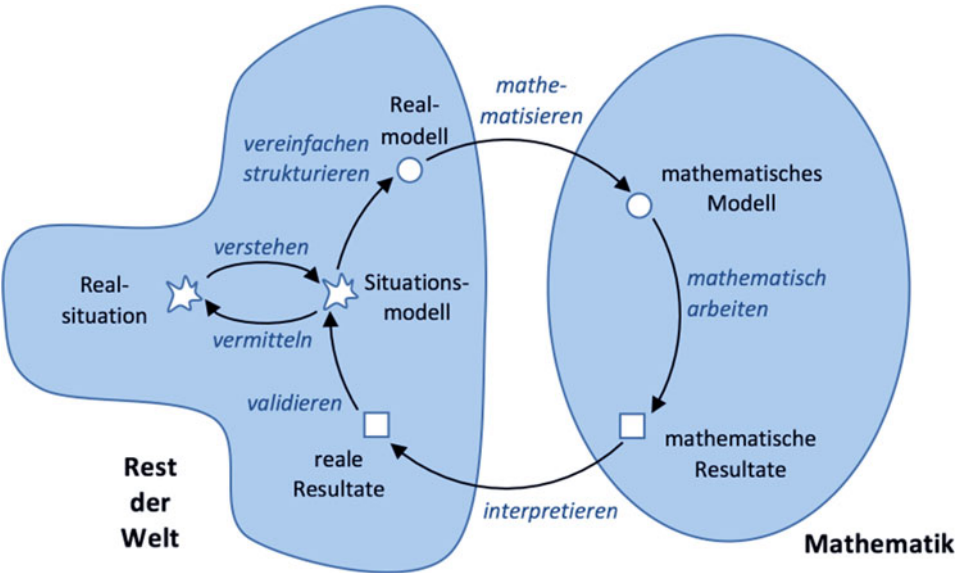


Abb. 2.6 Modellierungskreislauf von Blum und Leiß (2005, S. 19)

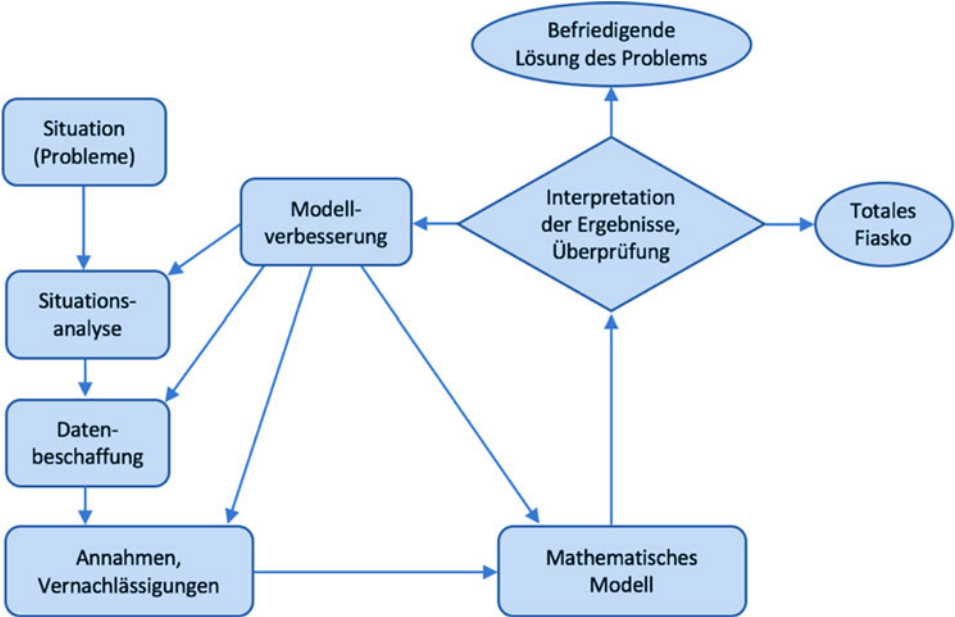


Abb. 2.7 Modellierungskreislauf nach Fischer und Malle (1985, S. 101)

2.3 Modellieren als Kompetenz

In der Vereinbarung der Kultusministerkonferenz über „Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss“ vom 3. Dezember 2003 (KMK 2004) bzw. in den entsprechenden Lehrplänen der Bundesländer wird Modellieren als eine allgemeine mathematische bzw. als prozessbezogene Kompetenz beschrieben.

Der Kern des mathematischen Modellierens ist – wie in den Bildungsstandards beschrieben – das Übersetzen eines Problems aus der Realität in die Mathematik, das Arbeiten mit mathematischen Methoden und das Übertragen der mathematischen Lösung auf das reale Problem. Die Beschreibungen aus den Bildungsstandards sind im idealisierten Kreislauf in Abb. 2.8 dargestellt.

Da aber das Modellieren in den Bildungsstandards neben den inhaltsbezogenen Leitideen wie beispielsweise *Raum und Form*, *Funktionaler Zusammenhang* und *Daten und Zufall* sowie neben weiteren allgemeinen Kompetenzen wie z. B. *Problemlösen* und *Argumentieren* steht, kann das Modellieren nur im Zusammenspiel mit Inhalten und weiteren allgemeinen Kompetenzen gesehen werden. Modellierungskompetenz kann nicht singulär erworben werden, sondern nur in der Auseinandersetzung mit den mathematischen Inhalten aus den Leitideen.

Es ist sinnvoll, den Blick nicht nur auf die Zwischenschritte während des Modellierungsprozesses zu richten, sondern ebenso auf die Teilprozesse, die während dieser Schritte (z. B. vom Realmodell zum mathematischen Modell) ablaufen. Die Diskussion

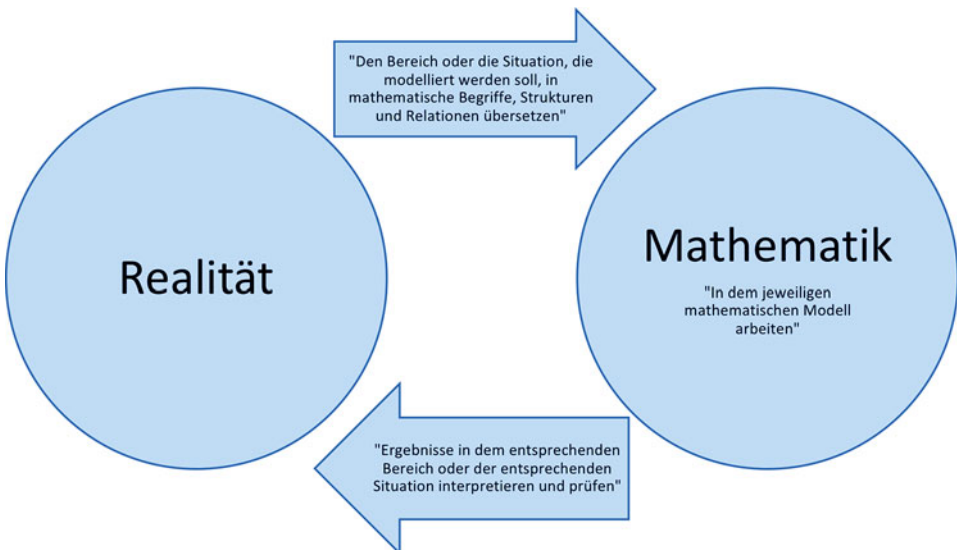


Abb. 2.8 Modellierungsprozess idealisiert. (Vgl. KMK 2004, S. 8)

Tab. 2.1 Teilkompetenzen des Modellierens

Teilkompetenz	Indikator
Verstehen	Die Schülerinnen und Schüler konstruieren ein eigenes mentales Modell zu einer gegebenen Problemsituation und verstehen so die Fragestellung
Vereinfachen	Die Schülerinnen und Schüler trennen wichtige und unwichtige Informationen einer Realsituation
Mathematisieren	Die Schülerinnen und Schüler übersetzen geeignet vereinfachte Realsituationen in mathematische Modelle (z. B. Term, Gleichung, Figur, Diagramm, Funktion)
Mathematisch arbeiten	Die Schülerinnen und Schüler arbeiten mit dem mathematischen Modell
Interpretieren	Die Schülerinnen und Schüler beziehen die im Modell gewonnenen Resultate auf die Realsituation und erzielen damit reale Resultate
Validieren	Die Schülerinnen und Schüler überprüfen die realen Resultate im Situationsmodell auf Angemessenheit Die Schülerinnen und Schüler vergleichen und bewerten verschiedene mathematische Modelle für eine Realsituation
Vermitteln	Die Schülerinnen und Schüler beziehen die im Situationsmodell gefundenen Antworten auf die Realsituation und beantworten so die Fragestellung
Beurteilen	Die Schülerinnen und Schüler beurteilen kritisch das verwendete mathematische Modell
Realisieren	Die Schülerinnen und Schüler ordnen einem mathematischen Modell eine passende Realsituation zu bzw. finden zu einem mathematischen Modell eine passende Realsituation

der unterschiedlich komplexen Modellierungskreisläufe (s. Abschn. 2.2) zeigt, dass auch die Teilprozesse unterschiedlich differenziert und detailliert beschrieben werden können.

Auch in den Kernlehrplänen von Nordrhein-Westfalen (Ministerium für Schule NRW 2004) werden einige dieser Prozesse als Teilkompetenzen des Modellierens beschrieben und dort beispielsweise das Mathematisieren, das Validieren und das Realisieren explizit genannt. Mithilfe genauerer Beschreibungen, die wir hier Indikatoren nennen, kann verdeutlicht werden, was unter diesen Teilkompetenzen zu verstehen ist. Dieses Verfahren kann auch auf andere Modelle des Modellierens übertragen werden. Wir beziehen uns hier im Wesentlichen auf den siebenschriftigen Modellierungskreislauf von Blum und Leiß (2005) und erhalten dann eine umfangreiche Liste von Teilkompetenzen des Modellierens (s. Tab. 2.1).

Abb. 2.9 zeigt die in der Tab. 2.1 aufgeführten Teilkompetenzen im Modellierungskreislauf visualisiert, z. B. wie sich der Prozess der Modellentwicklung aus Vereinfachen und Mathematisieren zusammensetzt. Das Realisieren ist hier genannt, weil es auch im Kernlehrplan Nordrhein-Westfalens (Ministerium für Schule NRW 2004) vorkommt. Diese Kompetenz scheint zunächst für einen Modellierungsprozess unnötig zu sein. Sie ist aber beispielsweise im Zusammenhang mit der Diskussion von Modellen sinnvoll. Das

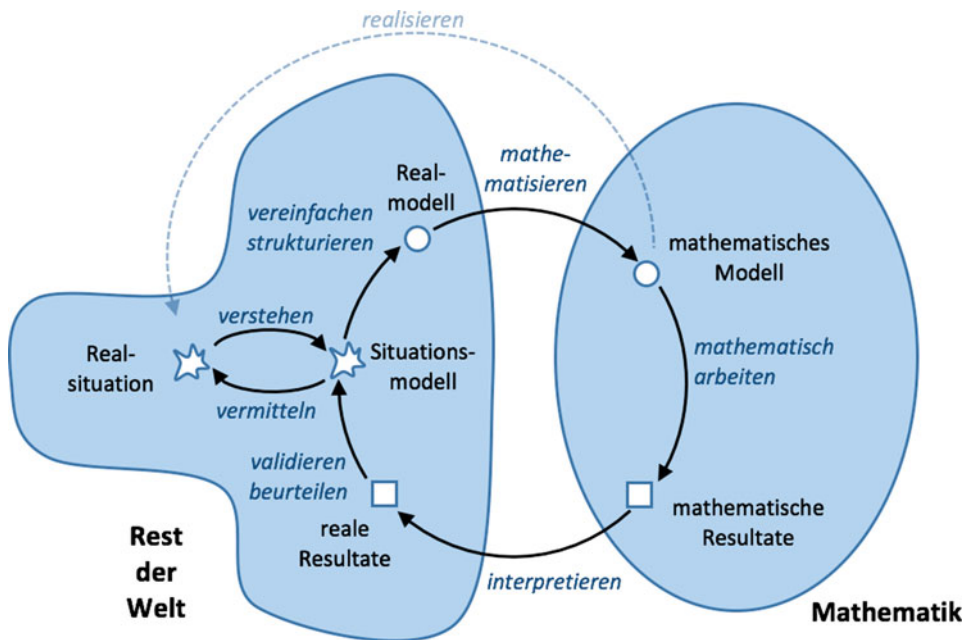


Abb. 2.9 Teilkompetenzen im idealisierten Modellierungskreislauf

Aufteilen des Modellierens in Teilkompetenzen bzw. Teilprozesse stellt einen möglichen Weg dar, um die Komplexität der Problematik zu reduzieren. Insbesondere ermöglicht diese genaue Betrachtung von Teilkompetenzen eine gezielte Diagnose und Förderung, um schließlich eine umfassende Modellierungskompetenz aufzubauen (zu Modellierungskompetenzen vgl. auch Kaiser und Brand 2015).

2.4 Lösungspläne und Lösungshilfen

Eine Möglichkeit, Lernende bei der Bearbeitung von Modellierungsaufgaben zu unterstützen, ist die Verwendung von Lösungsplänen. Diese orientieren sich häufig an Teilschritten oder Teilkompetenzen, die beim Modellieren eine wichtige Rolle spielen. Lösungspläne können die Bearbeitung von Modellierungsaufgaben unterstützen. Blum (2010) hat beispielsweise im Rahmen des Projekts DISUM („Didaktische Interventionsformen für einen selbstständigkeitsorientierten aufgabengesteuerten Unterricht am Beispiel Mathematik“) einen Lösungsplan für Schülerinnen und Schüler entwickelt, der sich an einem vereinfachten Modellierungskreislauf orientiert (s. Tab. 2.2).

Dieser Lösungsplan umfasst vier Schritte, die *Aufgabe verstehen*, *Modell erstellen*, *Mathematik benutzen* und *Ergebnis erklären* genannt werden. Jeder Schritt wird für die Schülerinnen und Schüler mit einer Frage und einigen erklärenden Punkten erläutert.

Tab. 2.2 Lösungsplan für Modellierungsaufgaben. (Blum 2010)

1	Aufgabe verstehen	Was ist gegeben, was ist gesucht?	Text genau lesen Situation genau vorstellen Skizze anfertigen
2	Modell erstellen	Welche mathematischen Beziehungen kann ich aufstellen?	Evtl. fehlende Angaben ergänzen, z. B. Gleichung aufstellen oder Dreieck einzeichnen
3	Mathematik benutzen	Wie kann ich die Aufgabe mathematisch lösen?	Z. B. Gleichung ausrechnen oder Pythagoras anwenden, mathematisches Ergebnis aufschreiben
4	Ergebnis erklären	Wie lautet mein Endergebnis? Ist es sinnvoll?	Mathematisches Ergebnis runden und auf die Aufgaben beziehen – evtl. zurück zu 1 Antwort hinschreiben

Der Lösungsplan von Blum gehört zu den sogenannten indirekten allgemeinen strategischen Hilfen, da er zwar auf allgemeine fachliche Modellierungsmethoden hinweist, aber prinzipiell keine konkreten und auf den Inhalt der Aufgabe bezogenen Hilfestellungen gibt. In den Schritten 2 und 3 dieses Lösungsplans wird allerdings die Allgemeinheit der strategischen Hilfe zugunsten inhaltsorientierter Hinweise verlassen. Es handelt sich dann wegen der Hinweise auf Gleichungen und den Satz des Pythagoras um eine inhaltsorientierte strategische Hilfe. Dieser Lösungsplan kann für Lernende aufbereitet werden. Die Verwendung lässt sich zusätzlich mithilfe von Beispielaufgaben einüben.

In einer Studie von Schukajlow et al. (2010) im Rahmen des Projekts DISUM konnten signifikante Unterschiede in den Schülerleistungen beim Modellieren mit diesem Lösungsplan in Bezug auf den Inhaltsbereich „Satz des Pythagoras“ nachgewiesen werden. Der Unterricht mit dem Lösungsplan erwies sich dabei als die effektivere Lehr- bzw. Lernform. Zusätzlich haben die Lernenden in der Lösungsplangruppe auch die Nutzung kognitiver Strategien, sprich des Lösungsplans, stärker wahrgenommen.

Ein fünfschrittiger Lösungsplan wurde im Rahmen des Projekts LIMO („Lösungs-Instrumente beim Modellieren“) an der Universität Münster verwendet. Dieser Lösungsplan umfasst die Schritte 1) Verstehen und vereinfachen, 2) Mathematisieren, 3) Mathematisch arbeiten, 4) Interpretieren und 5) Kontrollieren. Es wurden fünf Schritte gewählt, um auch den Schritt des Validierens von Ergebnis und Lösungsweg zu betonen (Adamek 2016).

Von einigen Autoren werden auch vereinfachte Modellierungskreisläufe als Lösungshilfen für die Lernenden verwendet. Katja Maaß (2004) hat im Rahmen einer qualitativen Studie in den Klassen 7 und 8 die Modellierungskompetenz von Lernenden untersucht und konnte bei einem großen Teil der Lernenden am Ende der Studie angemessene metakognitive Modellierungskompetenzen rekonstruieren. Sie beschreibt auch als Ergebnis, dass die Lernenden das Wissen über den Modellierungsprozess und die Darstellung in Form eines Kreislaufs als Orientierungshilfe empfunden haben.

Es werden aber auch Nachteile solcher Lösungspläne genannt. So führen etwa Meyer und Voigt (2010) an, dass ein Lösungsplan in Anlehnung an einen Modellierungskreislauf mit Strukturschemata zur Bearbeitung von Aufgaben des Sachrechnens aus den 1960er und 1970er Jahren verglichen werden kann, als solche den Lernenden als vermeintliche Lösungshilfe angeboten wurden und sich als zusätzlicher Lernstoff herausstellten.

Eine weitere Möglichkeit für eine Lösungshilfe zur Bearbeitung von Modellierungsaufgaben, die nicht an einen Modellierungskreislauf angelehnt ist, ist das Stellen und Beantworten von Hilfsfragen bzw. einfacheren Fragen (Greefrath und Leuders 2013). Die Schülerinnen und Schüler lernen dabei, zu Modellierungsaufgaben eigene Fragen zu stellen und zu beantworten. Dadurch können zwei Ziele erreicht werden. Zum einen ist es dadurch einfacher zu erkennen, welche Informationen der Text in der Aufgabenstellung wirklich liefert und welche – möglicherweise sogar für die Lösung der Aufgabe erforderlichen Informationen – auf andere Weise beschafft werden müssen. Zum anderen wird dadurch die zu bearbeitende Modellierungsaufgabe in Teilschritte zerlegt, die zunächst einzeln bearbeitet werden können, bevor die Teilergebnisse dann zur Lösung der Aufgabe zusammengesetzt werden. Später können die Lernenden selbst solche Fragen stellen und entscheiden, ob sie mithilfe des Textes zu beantworten sind.

Der tatsächliche Lösungsweg von Lernenden verläuft allerdings nicht immer nach dem jeweils vorgegebenen Lösungsplan. Auch wenn schriftlich fixierte Lösungen von Lernenden zum Teil eine ähnliche, am Lösungsplan orientierte Struktur haben, so unterscheiden sich die detaillierten Lösungsprozesse erheblich. Dies erinnert an die individuellen Modellierungsverläufe, die etwa von Borromeo Ferri (2018) beschrieben wurden. Ob der Lösungsplan beim Lösungsprozess eine Rolle spielt oder nur das Ergebnis beeinflusst, ist aber die entscheidende Frage bei der Beurteilung der Effektivität dieser Pläne als Lösungshilfen. Es ist anzunehmen, dass es Lernende gibt, die größere Schwierigkeiten haben, mit einem solchen Plan umzugehen, und andere, denen bereits eine kurze Einführung ausreicht, um mit dem Plan zu arbeiten.