Bestand und Änderung

Grundvorstellungen entwickeln und nutzen

Bestand und Änderung sind für den Alltag wichtige aber auch fehleranfällige Konzepte. Es ist deshalb eine Daueraufgabe im Mathematikunterricht, Grundvorstellungen zu Bestand und Änderung aufzubauen und regelmäßig zu nutzen. Nur so haben Schülerinnen und Schüler die Chance, inhaltlich angemessen mit dem wichtigen Konzept des funktionalen Zusammenhangs umzugehen und damit zu argumentieren.

JÜRGEN ROTH UND HANS-STEFAN SILLER

Funktionale Zusammenhänge kommen fast überall vor – im Alltag ebenso wie innerhalb der Mathematik. Trotzdem fällt es vielen Menschen schwer, in und mit solchen Zusammenhängen zu denken. Eine Schwierigkeit, die beim Denken in funktionalen Zusammenhängen auftritt, besteht darin, den Unterschied zwischen Bestand und Änderung richtig zu beurteilen (vgl. Sweeney/Sterman 2000; Ossimitz 2003).

Zu den Begriffen Bestand und Änderung

Der Bestand (auch als Bestandsgröße oder Zustandsgröße bezeichnet) hat zu jedem Zeitpunkt einen bestimmten Wert und wird durch Zu- bzw. Abflüsse verändert. Mit Änderung sind die absolute Änderung in einem Zeitintervall wie auch die relative Änderung pro Zeiteinheit (Änderungsrate) gemeint.

Wie die Beispiele in **Tab. 1** illustrieren, sind Bestände und ihre Änderungen (Zu- und Abflüsse) im Alltag weit verbreitet. Trotzdem haben Schülerinnen und Schüler – und auch viele Erwachsene – erhebliche Probleme, sich z. B. aus Zu- und Abflüssen den daraus resultierenden Bestand zu erschließen. Wer diese Aufgabe bewältigen möchte, muss über drei notwendige Kernfähigkeiten zur gedanklichen Auseinandersetzung mit Änderungen (vgl. Roth 2005a) verfügen:

Tab. 1: Beispiele für Bestandsgrößen und zugehörige Zu- bzw. Abflüsse

Bestandsgröße	Zuflüsse	Abflüsse
Anzahl der Studierenden	Immatrikulationen	Exmatrikulationen
Treibstoffmenge im Tank	Tanken an der Tankstelle	Treibstoffverbrauch
Kontostand	Zubuchungen	Abbuchungen
Anzahl der Hotelgäste	ankommende Gäste	abreisende Gäste
Staatsverschuldung	Staatseinnahmen	Staatsausgaben

Kernfähigkeiten zur gedanklichen Auseinandersetzung mit Änderungen

- In eine Situation eine Änderung hineinsehen und damit argumentieren.
- Den Gesamtzusammenhang erfassen und analysieren.
- Das Änderungsverhalten erfassen und beschreiben.

Es scheint insbesondere die Fähigkeit „Änderungsverhalten erfassen und beschreiben“ zu sein, welche die entscheidenden Probleme verursacht. Diese Kernfähigkeit wird in der Aufgabe in **Abb. 1** (Ossimitz 2003, S. 61) gezielt angesprochen: Ein Diagramm[1] zeigt die Ankünfte und Abreisen in einem Hotel während eines bestimmten Zeitraums. Die Ankünfte und Abreisen der Gäste sind jeweils als Änderungen der Hotelgäste-Anzahl zu interpretieren. Man muss zusätzlich erfassen, dass die Anzahl der Gäste bis zu dem Zeitpunkt steigt, an dem die Zahl der Abreisen erstmals die der Anreisen übersteigt. Im Beispiel ist dies am 27. Dezember der Fall.

Genauer betrachtet, spielen bei dieser Aufgabe *alle* Kernfähigkeiten für den Umgang mit Änderungen eine Rolle: Zunächst müssen die Daten der Graphik als Änderung interpretiert werden. Dann ist der Gesamtzusammenhang zu erfassen und zu analysieren, d. h. die beiden Änderungen des Systems „Hotel“ müssen in ihrer Gegenläufigkeit erfasst und gemeinsam (als Änderungssaldo) verstanden werden. Erst beide Gedankengänge zusammen gestatten eine Aussage über das Änderungsverhalten.

In einer Studie haben nur 22 % die Aufgabe in Abb. 1 richtig beantwortet[2]. 60 % gaben an, der Tag mit den meisten Ankünften im Hotel sei der Tag, an dem das Hotel die meisten Gäste beherbergt (vgl. Ossimitz 2003). Hingegen erhielt man auf die Frage nach dem Tag, an dem die meisten Gäste abreisen, fast durchweg korrekte Antworten. Die Befragten scheinen also Maxima eines (Funktions-)Graphen relativ sicher angeben zu können, sind aber mehrheitlich nicht in der Lage, das Maximum einer Bestandsgröße (Funktionswert) vom Maximum einer zugehörigen Änderung unterscheiden zu können.

Wo liegen die Schwierigkeiten?

Es bestehen erhebliche Probleme bei der Differenzierung zwischen einer Größe (bzw. ihrem Bestand) und ihrer (zeitlichen) Änderung. Insbesondere der Schluss von einer Änderungsrate auf den zu Grunde liegenden Bestand fällt vielen schwer, meist werden die Werte der Änderungsrate und des Bestands einfach gleichgesetzt.

Absolute und relative Änderungen sind sprachlich nur schwer fassbar. Dies ist einerseits eine Schwierigkeit bei der Formulierung einer Aufgabe zum Änderungsverhalten – es ist nicht ganz einfach, diese sprachlich so zu formulieren, dass sie eindeutig und gleichzeitig gut verständlich sind. So ist etwa nicht intuitiv klar, was mit einer „gleichmäßigen" Änderung gemeint ist. Andererseits ist es wichtig, dass wir als Lehrende adäquate Versprachlichungen für das Änderungsverhalten verwenden, die für die Lernenden verständlich sowie mathematisch tragfähig und anschlussfähig sind (vgl. **Funktionen beschreiben Veränderungen** in diesem Heft).

Dieser Artikel ist ein Plädoyer, solche Probleme durch frühzeitige und durchgängige Schulung von Grundvorstellungen[3] (**Kasten 1**) zu Bestand und Änderung im Sinne des Spiralprinzips zu mindern. Der Beitrag **Unterscheiden von Bestand und Änderung** zeigt, wie frühzeitig Grundvorstellungen zum funktionalen Zusammenhang angebahnt werden können. Entscheidend hierbei ist der Aufbau von inhaltlichem Verständnis, das an konkreten Situationen festgemacht wird. An dieses Verständnis kann Wissen angelagert und abgerufen werden. Derart vertieft erarbeitete Erfahrungsbereiche lassen sich dann auch auf andere, strukturähnliche Situationen übertragen.

Orientierung an der Leitidee Funktionaler Zusammenhang

In den Bildungsstandards Mathematik ist der wichtigste Bezugspunkt für die Aspekte Bestand und Änderung die Leitidee Funktionaler Zusammenhang. Hiernach werden zunächst Grunderfahrungen zum Arbeiten mit Repräsentationen funktionaler Zusammenhänge (Tabelle, Graph, verbale Beschreibung, Term) ermöglicht und darauf aufbauend primäre und sekundäre Grundvorstellungen zu den folgenden drei Aspekten funktionalen Denkens (normativen Grundvorstellungen) erarbeitet: *Zuordnung*, *Änderungsverhalten* und *Sicht als Ganzes* (nach Vollrath 1989, vgl. Roth 2014).

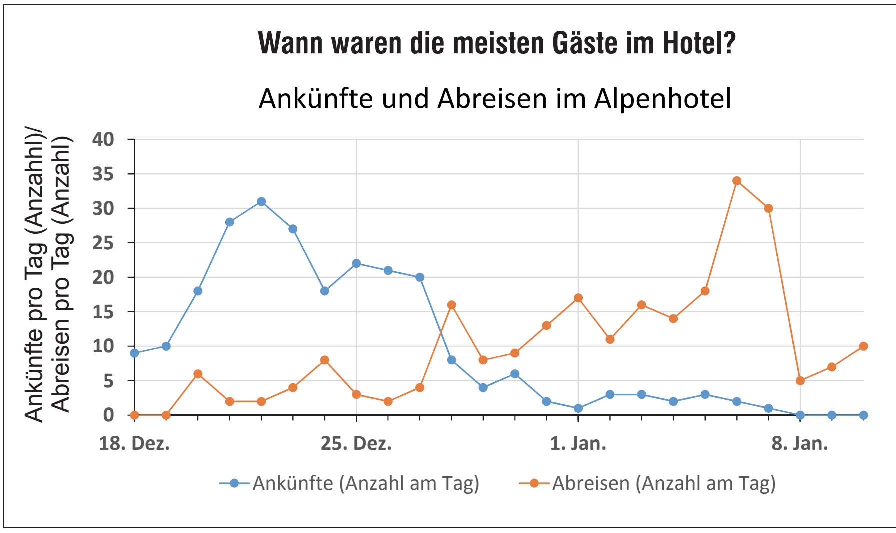


Abb. 1: Bei dieser Aufgabe ist es erforderlich, Änderungsverhalten zu erfassen und zu beschreiben.

1. Zuordnung

Durch Funktionen werden Zusammenhänge zwischen Größen beschrieben oder gestiftet: Einer Größe ist eine zweite, von ihr abhängige Größe zugeordnet.

Im Unterricht: Die Schülerinnen und Schüler laufen so schnell wie möglich eine lange Treppe nach oben. Sie messen nach dem Lauf ihren aktuellen Puls (15 sec. zählen, das Ergebnis vervierfachen) und wiederholen die Messung in Abständen von 30 sec. So erleben sie, wie einem Zeitpunkt jeweils der aktuelle Puls zugeordnet wird und halten diesen Zusammenhang in einer Tabelle fest.

2. Änderungsverhalten/Kovariation

Durch Funktionen wird deutlich, wie sich die Änderung einer Größe auf eine von ihr abhängige Größe auswirkt.

Im Unterricht: Wie ändert sich der Puls, wenn er in gleichen Zeitschritten (hier 30 sec) gemessen wird? Ändert er sich auch gleichmäßig, oder nimmt er zunächst langsamer ab und dann schneller, oder umgekehrt? Zur Beantwortung dieser Fragen reicht es nicht mehr, einzelne Wertepaare (Zeitpunkt | Puls) zu betrachten. Hier müssen mehrere benachbarte Wertepaare zueinander in Beziehung gesetzt werden.

3. Sicht als Ganzes

Mit Funktionen sieht man einen Zusammenhang als etwas Ganzes. Man betrachtet nicht mehr nur einzelne Wertepaare, sondern die Menge aller Wertepaare.

Im Unterricht: Für das Erfassen des funktionalen Zusammenhangs zwischen der verstreichenden Zeit und der Pulsfrequenz des Läufers nach einem Trep-

1 WISSENSWERT

Grundvorstellungen

Grundvorstellungen repräsentieren abstrakte Begriffe anschaulich und ermöglichen Verbindungen zwischen Mathematik und Anwendungssituationen.

Es gibt zwei Typen von Grundvorstellungen (vgl. vom Hofe/Hattermann 2013):

Primäre Grundvorstellungen haben ihre Wurzeln in gegenständlichen Handlungserfahrungen (im Alltag oder Unterricht). So können Kinder z. B. Grundvorstellungen zur eindeutigen Zuordnung einer Funktion bereits im Kindergarten, beim Aufhängen ihrer Jacke an den mit ihrem Bild versehenen Haken der Garderobe erwerben.

Sekundäre Grundvorstellungen bilden sich, insbesondere bei komplexeren Zusammenhängen, anhand mathematischer Repräsentationen (Zahlenstrahl, Koordinatensystem, Graph, Term …) aus bzw. werden durch (gedankliche oder reale) Operationen mit diesen erworben und vertieft.
Eine sekundäre Grundvorstellung zur Änderungsrate einer linearen Funktion kann z. B. anhand eines Steigungsdreiecks am Funktionsgraphen erworben und mental „gespeichert“ werden.

Den Aufbau und die Vernetzung adäquater Grundvorstellungen kann man wie folgt fördern:

Sinnzusammenhänge herstellen, durch Anknüpfen an bekannte (inner- und außermathematischer) Sachzusammenhänge oder Handlungsvorstellungen.

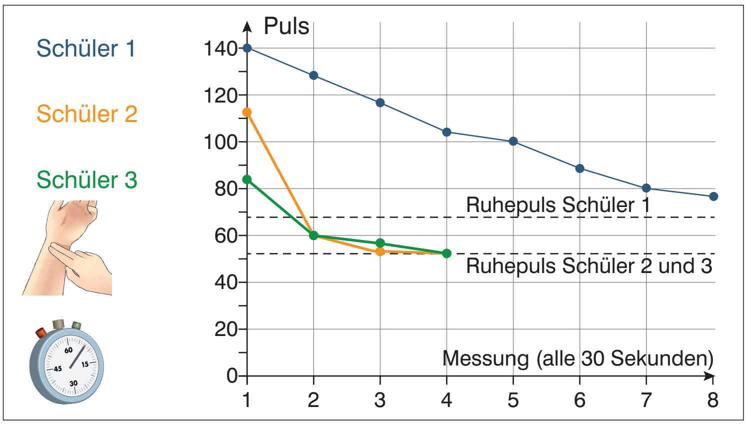
Visuelle Repräsentationen aufbauen, die mantales Operieren mit ihnen ermöglichen und als Verständniskerne dienen können.

Anwenden auf die Wirklichkeit, indem die entsprechende mathematische Struktur in Sachzusammenhängen erkannt oder beim Modellieren genutzt wird.

Wir unterscheiden zwischen **individuellen Grundvorstellungen**, die Schülerinnen und Schüler jeweils individuell entwickeln, und **normativen Grundvorstellungen**, die sich im fachdidaktischen Diskurs als tragfähige inhaltliche Basis für das jeweils zugrundeliegende mathematische Konzept herauskristallisiert haben.
Gute Aufgaben und Lernumgebungen sind so gestaltet, dass Lernende daran individuelle Grundvorstellungen ausbilden können, die konform mit normativen Grundvorstellungen sind. Normative Grundvorstellungen sind daher Bezugspunkte für einen auf inhaltliches Verstehen ausgerichteten Unterricht.

penlauf muss man systematisch Daten aufnehmen, in einer Tabelle erfassen und anschließend in einen Graphen umsetzen. Erst auf dieser Basis können der funktionale Zusammenhang zwischen Zeit und Puls eines Läufers als Ganzes betrachtet und die Graphen für verschiedene Läufer anhand der Gesamtverläufe verglichen werden – auch im Hinblick auf deren jeweilige Fitness (**Abb. 2**).

Abb. 2: Anhand der Puls-Messpunkt-Graphen (Pulsverläufe) jeweils als Ganzes lässt sich die Fitness der Läufer vergleichen.[1]



An der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* wird bereits ab der Grundschule im Sinne des Spiralprinzips in allen Jahrgangstufen gezielt gearbeitet. So erfolgt eine systematische, kumulative Begriffsbildung zum Funktionsbegriff. Bestand und Änderung sind in diesem Zusammenhang Kernbegriffe, die sich auch in anderen Leitideen (Messen sowie Daten und Zufall) wiederfinden. Dabei gilt auf jedem Niveau: Ohne den Aufbau und die Nutzung von Grundvorstellungen kann eine verständnisorientierte Bearbeitung von Problemen zu Bestand und Änderung nicht gelingen.

Dynamische Repräsentationen helfen beim Aufbau von Grundvorstellungen

Gerade wenn Schülerinnen und Schüler Verständnis für Änderungen entwickeln sollen, können leicht veränderbare Darstellungen auf der Basis dynamischer Mathematiksysteme, wie etwa GeoGebra, sehr gute Dienste leisten. Solche *dynamischen Repräsentationen* dienen als:

- *Kontrollinstanz*, wenn Ergebnisse von Denkprozessen mit ihrer Hilfe auf ihre Tragfähigkeit hin überprüft und kritisch hinterfragt werden,
- *Kommunikationsmittel*, um die Aufmerksamkeit zu fokussieren und insbesondere das Änderungsverhalten durch „Vorführen" von Veränderungen zu veranschaulichen und damit erst kommunizierbar machen zu können,
- „*Denkzeug*", mit dessen Hilfe die Komplexität eines Phänomens reduziert, das Gedächtnis entlastet und so die Konzentration auf Planung, Analyse und Argumentation erleichtert werden kann.

Dynamische Repräsentationen sollten dosiert und überlegt eingesetzt werden, damit sie wirklich zum Denken anregen und nicht zum „Auslagern" des Denkens oder zum planlosen Agieren führen (Roth 2005b, 2005c).

Grundvorstellungen zur Ableitung und zum Integral

Auch in der Oberstufe müssen Grundvorstellungen (GV) zu funktionalen Zusammenhängen aufgegriffen und u. a. mit Hilfe von dynamischen Repräsentationen (weiter-)entwickelt werden. So fordern die Bildungsstandards zu Allgemeinen Hochschulreife u. a. die Entwicklung folgender Fähigkeiten im Zusammenhang mit der Leitidee Funktionaler Zusammenhang (KMK 2012, S. 20):

- Die Ableitung insbesondere als lokale Änderungsrate deuten.
- Änderungsraten funktional beschreiben.

Auch im Rahmen der Leitidee Messen sollen Fähigkeiten mit klarem Bezug zu Bestand und Änderung ausgebildet werden (ebd. S. 19):

- Änderungsraten berechnen und deuten.
- Bestände aus Änderungsraten und Anfangsbestand berechnen.

Im Folgenden stellen wir für die Thematik „Bestand und Änderung" wesentliche Grundvorstellungen zur Ableitung und zum Integral aus einer fachdidaktischen Perspektive dar (vgl. Greefrath u. a. 2016a).

GV: Ableitung als lokale Änderungsrate

Die Grundvorstellung „Ableitung als lokale Änderungsrate" lässt sich am Beispiel eines startenden Porsche erarbeiten, für den die Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt bestimmt werden soll. Die Anfangsbeschleunigung ist annähernd konstant und beträgt etwa $2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Über den pysikalischen Zusammenhang

$\mathit{Weg} = \frac{1}{2} \cdot \mathit{Beschleunigung} \cdot (\mathit{Zeit})^2$

lässt sich der zurückgelegte Weg x in Abhängigkeit von der dafür benötigten Zeit t wie folgt berechnen: $x(t) = \frac{1}{2} \cdot 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 = 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2$.

Zeitintervall $[t, t_0]$	Mittlere Geschwindigkeit $\frac{x(t_0) - x(t)}{t_0 - t}$ mit $x(t) = 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,t^2$
$[0\,\text{s}; 1\,\text{s}]$	$\frac{1^2\,\text{m} - 0^2\,\text{m}}{1\,\text{s} - 0\,\text{s}} = 1\,\text{m/s}$
$[0{,}9\,\text{s}; 1\,\text{s}]$	$\frac{1^2\,\text{m} - 0{,}9^2\,\text{m}}{1\,\text{s} - 0{,}9\,\text{s}} = 1{,}9\,\text{m/s}$
$[0{,}99\,\text{s}; 1\,\text{s}]$	$\frac{1^2\,\text{m} - 0{,}99^2\,\text{m}}{1\,\text{s} - 0{,}99\,\text{s}} = 1{,}99\,\text{m/s}$
$[0{,}999\,\text{s}; 1\,\text{s}]$	$\frac{1^2\,\text{m} - 0{,}999^2\,\text{m}}{1\,\text{s} - 0{,}999\,\text{s}} = 1{,}999\,\text{m/s}$

Tab. 2: Die mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[t, t_0]$ nähert sich bei Verkleinerung des Zeitintervalls immer mehr einer Geschwindigkeit, der Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 an.

Die Geschwindigkeit lässt sich bei gleichen Zeitintervallen über die Wegänderung *(absolute Änderung)* abschätzen. In der ersten Sekunde legt der Porsche den Weg $x(1\,\text{s}) - x(0\,\text{s}) = 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1\,\text{s}^2 - 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0\,\text{s}^2 = 1\,\text{m} - 0\,\text{m} = 1\,\text{m}$ zurück. Zwischen der ersten und der vierten Sekunde sind es $x(4\,\text{s}) - x(1\,\text{s}) = 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (4\,\text{s})^2 - 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (1\,\text{s})^2 = 16\,\text{m} - 1\,\text{m} = 15\,\text{m}$.

In welchem Zeitintervall $[t_1; t_2]$ ist der Porsche aber im Mittel schneller gefahren, in der ersten Sekunde oder in den folgenden drei Sekunden? Um diese Frage zu beantworten, reicht es nicht, die absoluten Wegänderungen zu vergleichen. Man muss sie vielmehr auf die dafür jeweils benötigte Zeit beziehen, also die *relative Änderung* bzw. die *Änderungsrate* bestimmen. Man interessiert sich also für die mittleren Geschwindigkeiten in den jeweiligen Zeitintervallen. Dafür ergibt sich:

$$\frac{x(1\,\text{s}) - x(0\,\text{s})}{1\,\text{s} - 0\,\text{s}} = \frac{1^2\,\text{m} - 0^2\,\text{m}}{1\,\text{s} - 0\,\text{s}} = 1\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\frac{x(4\,\text{s}) - x(1\,\text{s})}{4\,\text{s} - 1\,\text{s}} = \frac{4^2\,\text{m} - 1^2\,\text{m}}{4\,\text{s} - 1\,\text{s}} = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die mittlere Geschwindigkeit ist im zweiten hier betrachteten Zeitintervall größer. Wenn man wissen möchte, wie hoch die aktuelle Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt (Momentangeschwindigkeit) ist, dann kann man das Zeitintervall in dem man die mittlere Geschwindigkeit untersucht immer kleiner machen und dabei den Zeitpunkt der interessiert als eine Grenze der untersuchten Intervalle festhalten. Dieses Vorgehen wird exemplarisch in **Tab. 2** durchgeführt. Je kleiner das Intervall $[t, t_0]$ wird, je näher also t an t_0 heranrückt, desto näher kommt die mittlere Geschwindigkeit in unserem Fall dem Wert 2 m/s bzw. allgemein der Momentangeschwindigkeit. Sie kommt ihm bzw. ihr beliebig nahe. Den Wert der dabei angenähert wird, nennt man lokale Änderungsrate. Mit diesem Vorgehen ist es möglich den Grenzübergang intuitiv nachzuvollziehen.[4]

Abb. 3 fasst den Weg zusammen, den man bei der Entwicklung der Grundvorstellung „Ableitung als lokale Änderungsrate" beschreitet (vgl. auch Dank-

Beschreibungsebene	Schritt 1	Schritt 2	Schritt 3	Schritt 4
symbolisch	$f(x_0)$	$f(x)-f(x_0)$	$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
inhaltlich	**Bestand** zum Zeitpunkt x_0	**absoluter Zuwachs** in der Zeit von x_0 bis x	**relativer Zuwachs** im Zeitintervall $[x_0, x]$ (**mittlere Änderungsrate**)	momentane (**lokale**) **Änderungsrate** zum Zeitpunkt x_0
terminologisch	Funktionswerte	Differenz der Funktionswerte	Differenzenquotient	Ableitung

algebraisch → analytisch

Abb. 3: Schematische Darstellung der Schritte bei der Entwicklung der Grundvorstellung „Ableitung als lokale Änderungsrate“

werts/Vogel 2006, S. 57). Die Verständnisentwicklung kann dabei durch eine parallele Darstellung der dort angegebenen Beschreibungsebenen unterstützt werden. Ein Beispiel für eine Umsetzung im Unterricht anhand von GPS-Daten einer Autofahrt bietet **Mit Vollgas in die Differentialrechnung** in diesem Heft.

GV: Ableitung als Tangentensteigung

Die Grundvorstellung „Ableitung als Tangentensteigung“ nähert sich der Ableitung geometrisch. Lernende kennen den Begriff der Tangente aus der Sekundarstufe I als eine Gerade, die den Kreis in genau einem Punkt berührt. Diese Sicht der Tangente als *lokale Stützgerade* wird nun – im Sinne des Spiralcurriculums – aufgegriffen und hin zur analytischen Sichtweise der Tangente als *lokale Schmieggerade* (vgl. Blum/Törner 1983, S. 94) ausgeschärft (**Abb. 4a** und **Abb. 4b**). Dies ist wichtig, da andernfalls Missverständnissen im Sinne der „Ein-Punkt-Berührung“ vorprogrammiert sind (vgl. Dankwerts/Vogel 2006, S. 46; Greefrath u. a., 2016b, S. 150).

Der klassische Zugang zur Tangente an den Funktionsgraphen wird in der Regel geometrisch mit Hilfe von Sekanten des Funktionsgraphen motiviert, deren Steigung über die Koordinaten der beiden Schnittpunkte mit dem Funktionsgraphen leicht bestimmt werden kann (**Abb. 5**). Hier greift man auf die Erfahrungen zur Steigungsbestimmung linearer Funktionen über Steigungsdreiecke zurück. Wird der zweite Schnittpunkt mit entsprechender Mathematiksoftware „dynamisiert“, lässt sich eine Annäherung an die Tangentiallage von links und von rechts dynamisch erforschen – auch hinsichtlich der Auswirkungen auf die Schmiege-Eigenschaft und die Werte der jeweiligen Differenzenquotienten (**Abb. 5**).

Der dynamische Zugang verdeutlicht: Es liegt im Differenzenquotienten

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

eine Definitionslücke an der Stelle $x = x_0$ vor. Dies deckt sich mit der geometrischen Tatsache, dass eine Gerade (hier die Tangente) durch einen Punkt nicht eindeutig definiert ist. Trotzdem nähert sich der Wert des Differenzenquotienten bei einer Annäherung von x gegen x_0 von beiden Seiten demselben Wert beliebig nahe an. Gleichzeitig wird die Schmiege-Eigenschaft der Sekanten bei dieser Annäherung beliebig gut. Dieses Vorgehen ermöglicht Schülerinnen und Schülern eine intuitive Vorstellung vom Grenzprozess, der dann mit der Schreibweise $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ knapp dargestellt wird.

GV: Ableitung als lokale lineare Approximation

Diese Grundvorstellung geht auf Arnold Kirsch zurück, der sie noch „Funktionenmikroskop“ genannt und mit Serien von OHP-Folien gearbeitet hat (Kirsch 1979). Die Grundidee besteht darin, die Steigung einer Funktion an einer Stelle dadurch zu erfassen, dass man um diese Stelle des Funktionsgraphen herum in diesen hineinzoomt (Funktionenlupe). Dabei stellt man (bei an dieser Stelle differenzierbaren Funktionen) fest, dass der Graph dabei mit jeder Zoom-Stufe „linearer“ wird (**Abb. 6**). Dies lässt sich mit dem Rechner dynamisch umsetzen (s. Elschenbroich u. a. 2014 und http://funktionenlupe.de).

GV: Ableitung als „Änderungsdetektor“

Mit dieser auch als „Verstärkungsfaktorvorstellung“ bezeichneten Grundvorstellung (Greefrath u. a. 2016a) lassen sich Auswirkungen kleiner Änderungen der unabhängigen Variable auf die abhängige

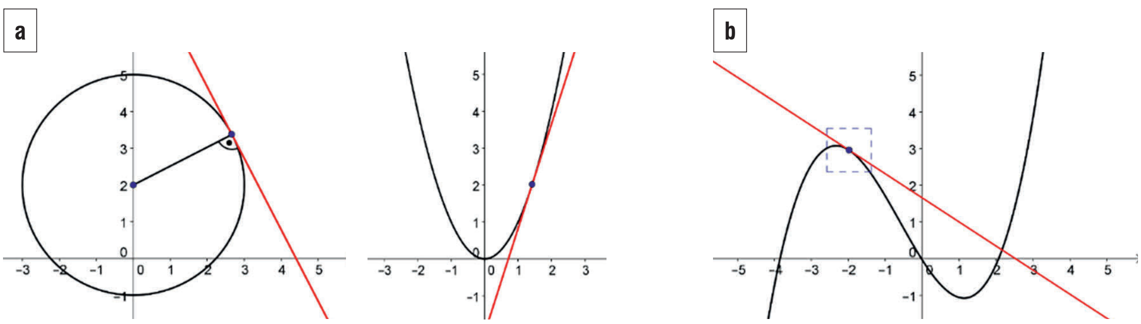


Abb. 4a: Geometrische Sicht: Tangente als globale Stützgerade

Abb. 4b: Analytische Sicht: Tangente als lokale Schmieggerade

screenshots: GeoGebra/www.geogebra.org

Variable erschließen. Dies wird in **Abb. 7** (vgl. Dankwerts/Vogel 2006, S. 61f) als Antwort auf folgende Frage konkretisiert: „Warum ist die lokale Änderungsrate des Flächeninhalts eines Quadrats der Kantenlänge x gleich seinem halben Umfang?" Im Beitrag **„Integral Kraft d Weg"** wird dieser Aspekt anhand weiterer Beispiele ausführlich dargestellt.

Grundvorstellungen zum Integral

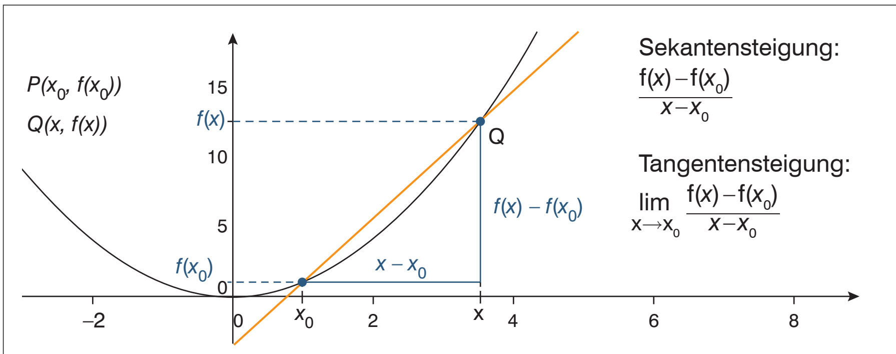
In enger Anlehnung an die Ausführungen zu den Grundvorstellungen zur Ableitung, gilt es auch Grundvorstellungen zum Integral auszubilden. Einen Überblick über identifizierte normative Grundvorstellungen zum Integral geben wir in **Tab. 3** (vgl. auch Greefrath u. a. 2016b). Dort benennen wir jeweils die Idee der Grundvorstellung und bieten eine Visualisierung an, sodass Anknüpfungspunkte zur Ausbildung der Grundvorstellung geboten sind.

Zusammenhang zwischen den Grundvorstellungen zu Ableitung und Integral

„Die Schülerinnen und Schüler können den Hauptsatz als Beziehung zwischen Ableitungs- und Integralbegriff begründen" (KMK 2012, S. 22 ff.). So lautet ein wichtiges Ziel der Bildungsstandards für den höheren Schulabschluss. Es kann nur erreicht werden, wenn mindestens einige der hier zusammengestellten Grundvorstellungen zu Bestand und Änderung aktiviert werden. Erst auf dieser Grundlage lässt sich der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung (HDI) als Bindeglied zwischen den beiden Themen erfassen. Der HDI umfasst zwei Aussagen, sodass eigentlich von zwei Hauptsätzen gesprochen werden müsste (Walter 2004, S. 259). Dies kann für die Schule z. B. wie in **Kasten 2** aufbereitet werden. In der Schule wird der HDI gern mit Hilfe geeigneter Applets visualisiert – auch um Zusammenhänge zwischen Grundvorstellungen zu erarbeiten und zu vernetzen. Der Beitrag **Mit Wasserhahn-Applets zur Integralrechnung** beschreibt einen solchen Unterichtsgang.

Bestand und Änderung – eine erweiterte Sichtweise

Bestände und Änderungen spielen auch bei Differenzen- und Differenzialgleichungen eine wesentliche Rolle. Die KMK-Standards für die Allgemeine Hochschulreife nennen als Ziel zu diesem Themengebiet: „Die Schülerinnen und Schüler können in einfachen Fällen Verknüpfungen und Verkettungen von Funktionen zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge nutzen." (KMK 2012, S. 20) In Österreich wird gefordert, das „systemdynamische Verhalten von Größen durch Differenzengleichungen beschreiben bzw. diese im Kontext" (vgl. BIFIE 2014, S. 14) gedeutet werden können.



Beispiel: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+,\ x \mapsto x^2$

- $P(1, 1)$; $Q(x, f(x))$
- Sekantensteigung: $\frac{f(x)-1}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{x-1} \overset{x \neq 1}{=} (x+1)$
- Tangentensteigung: $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-1}{x-1} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to x_0} (x+1) = 2$

Abb. 5: Von der Sekanten- zur Tangentensteigung

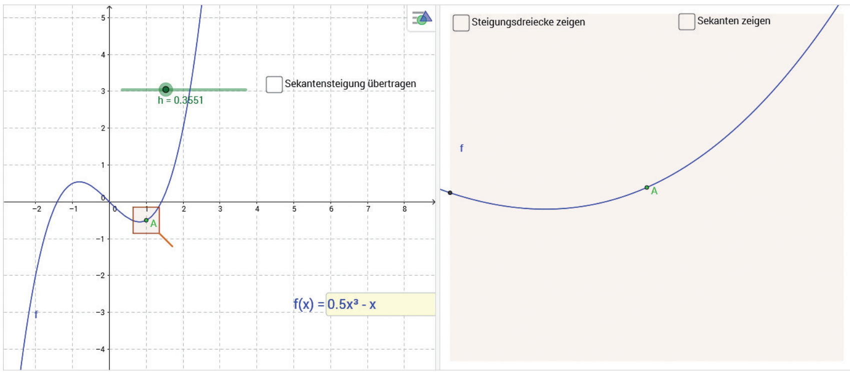


Abb. 6: Funktionenlupe

Inhaltliches Verständnis von Ableitungsregeln

- „Die Ableitung von x^2 ist $2x$" wird oft rein syntaktisch verstanden.
- ***Inhaltlich***: „Warum ist die lokale Änderungsrate des Flächeninhalts eines Quadrats der Kantenlänge x gleich seinem halben Umfang?"
- ***Absolute Änderung*** des Flächeninhalts: Für kleine h im Wesentlichen die schattierten Rechtecke.
- ***Relative Änderung*** des Flächeninhalts (mittlere Änderungsrate): Für kleine h im Wesentlichen gleicgh dem halben Umfang.
- Näherung $\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \approx 2x$ ist beliebig gut, wenn h hinreichend klein ist.
- Analog: inhaltliches Verstehen von „Die Ableitung von x^3 ist $3x^2$."

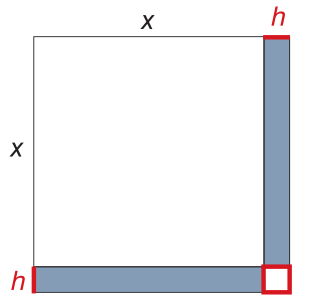


Abb. 7: Ableitung als Änderungsdetektor

Das Wechselspiel von Bestand und Änderung wird hier offensichtlich und kann z. B. mit Hilfe von Aufnahme- und Abbauprozessen (etwa Schoberleitner/Siller 2015) thematisiert werden. Grundvorstellungen zu Bestand und Änderung sind wichtig für die Beurteilung von solchen Phänomenen wie sie in diesem Zusammenhang auch in der Finanzwelt auftreten. Es folgt ein Aufgabenbeispiel für Prüfungen dazu (BIFIE 2015, S. 19):

→ *Ein langfristiger Kredit soll mit folgender Bedingung getilgt werden: Der offene Betrag wird am Ende eines jeden Jahres mit 5 % verzinst, danach wird jeweils eine Jahresrate von 20 000 € zurückgezahlt.*
y_2 stellt die Restschuld nach Bezahlung der zweiten Rate zwei Jahre nach Kreditaufnahme dar,
y_3 die Restschuld nach Bezahlung der dritten Rate ein Jahr später.
Stellen Sie y_3 in Abhängigkeit von y_2 dar.

Die (relativ) einfache Lösung $y_3 = 1{,}05 \cdot y_2 + 20\,000$ konnten nur knapp 58 % der Prüflinge im Haupttermin 2014/15 angeben (vgl. Sattlberger 2016). Dies könnte als fehlendes Bewusstsein für Bestands- und Änderungsprozesse interpretiert werden. Durch die Orientierung an Grundvorstellungen zu Bestand und Änderung kann auch das Thema der Differenzengleichungen in den Mathematikunterricht integriert werden (vgl. den Beitrag **Ein Experiment zu Bestand und Änderung** in diesem Heft).

2 WISSENSWERT

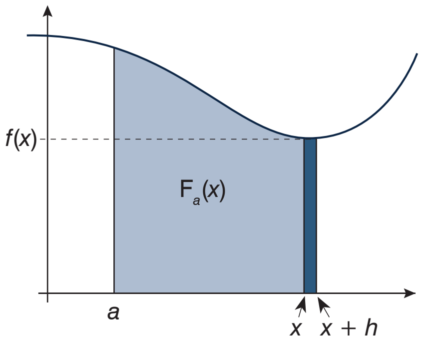
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

1. Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall I stetige Funktion und $a \in I$. Dann ist die Integralfunktion F_a auf I differenzierbar und sie ist eine Stammfunktion von f, d. h. $F_a' = f$.
2. Sei $f: I \to \mathbb{R}$ eine auf einem Intervall I stetige Funktion und F eine Stammfunktion von f.
   Dann gilt für alle $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Anschauliche Überlegung (mit Beweis-Grundidee)

Ohne Einschränkung verlaufe der Graph von f oberhalb der x-Achse und es sei $h > 0$ mit $x + h \in I$.
$F_a(x + h) - F_a(x)$ hat die Breite h und näherungsweise die Höhe $f(x)$, d. h. es ist $F_a(x + h) - F_a(x) \approx f(x) \cdot h$.
Für $h \to 0$ konvergiert also $\dfrac{F_a(x + h) - F_a(x)}{h}$ gegen $f(x)$.



Anmerkungen

1 Es handelt sich hier um eine diskrete Funktion. Insofern besteht der Funktionsgraph nur aus den jeweiligen Punkten. Um die beiden Graphen einfacher zueinander in Beziehung setzen zu können (manchmal auch um Änderungen hervorzuheben), kann es dennoch sinnvoll sein, die Punkte des Graphen miteinander zu verbinden. Entscheidend ist, dass die Nutzer keine Zuordnungen im Bereich der Verbindungslinien zwischen den Datenpunkten hineinsehen, wo gar keine sind.

2 Im Test von Ossimitz (2003) wurden die Antworten „27.12.“, „28.12.“ und „Die Nacht vom 27. auf den 28.12.“ als richtig gewertet.

3 Zum Grundvorstellungskonzept vgl. vom Hofe/Hattermann 2014. Der Aufbau von Grundvorstellungen ist eine wesentliche Voraussetzung, um mit Begriffen verständnisvoll umzugehen, denn: „Eine Grundvorstellung zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt.“ (Greefrath u. a. 2016b, S. 17).

4 Dass der Begriff der Rate bzw. der Änderungsrate keinesfalls so intuitiv ist, wie er oft dargestellt wird, zeigt beispielsweise eine Studie (Herbert/Pierce 2012).

Literatur

Baumert, J./Bos, W., Klieme, E./Lehmann, R./Lehrke, M./Hosenfeld, I./Neubrand, J./Watermann, R. (Hrsg.) (1999): Testaufgaben zu TIMSS/III. Mathematisch-naturwissenschaftliche Grundbildung und voruniversitäre Mathematik und Physik der Abschlussklassen der Sekundarstufe II (Population 3). Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

Blum, W./Törner, G. (1983): Didaktik der Analysis. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Danckwerts, R./Vogel, D. (2006): Analysis verständlich unterrichten. München: Spektrum Akademischer Verlag.

Elschenbroich, H.-J./Seebach, G./Schmidt, R. (2014): Die digitale Funktionenlupe. Ein neuer Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. – In: mathematik lehren Heft 187, S. 34–37.

Greefrath, G./Oldenburg, R./Siller, H.-St./Weigand, H.-G./Ulm, V. (2016a): Aspects and “Grundvorstellungen” of the Concepts of Derivative and Integral - Subject Matter-related Didactical Perspectives of Concept Formation. – In: Journal für Mathematik-Didaktik, Vol. 37, Suppl. 1, S. 99–129.

Greefrath, G./Oldenburg, R./Siller, H.-St./Weigand, H.-G./Ulm, V. (2016b): Didaktik der Analysis. Wiesbaden: Springer.

Herbert, S./Pierce, R. (2012): What is rate? Does context or representation matter? – In: Mathematical Education Research Journal, 23(4), S. 455–477.

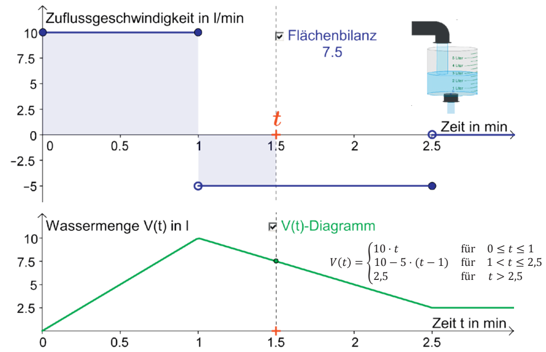
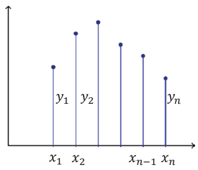
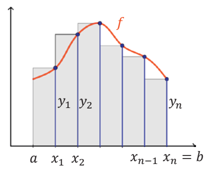
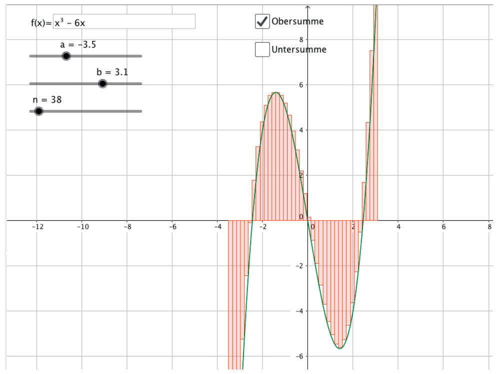
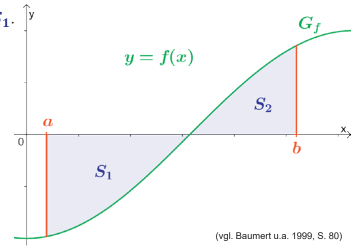
Herford, P./Reinhardt, G. (1980): Mathematik. Studienbriefe zur Fachdidaktik für Lehrer der Sekundarstufe II. Zugänge zur Integralrechnung Analysis MA 3. Weinheim: Beltz.

Hofe vom, R./Hattermann, M. (2014): Zugänge zu negativen Zahlen. – In: mathematik lehren Heft 183, S. 2–7.

Kirsch, A. (1979): Ein Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff. – In: Der Mathematikunterricht 25(3), S. 25–41.

KMK (2012): Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012). Köln, Wolters Kluwer.

Ossimitz, G. (2003): Zeitliche Dynamik verstehen. – In: mathematik lehren Heft 120, S. 60–63.

Grundvorstellung	Idee	Visualisierung
Integral als Rekonstruktion des Gesamteffekts	• Rekonstruktion des Bestandes aus der gegebenen Änderung • Konstruktion der Stammfunktion aus einer gegeben Funktion (Herford/Reinhard 1980, S. 98) • Bestimmung des Flächeninhalts unter einer Kurve über Produktsummen	
Integral als Mittelwertbildung	• quantitative Beschreibung der Fläche unter einer Kurve über ein flächengleiches Rechteck im betrachteten Intervall (Intervalllänge als Grundseite und Mittelwert aller Funktionswerte als zweite Seite des Rechtecks) • Mittelwertbildung einer diskreten Messreihe mit anschließender Deutung als diskrete Realisierung eines stetigen Funktionsverlaufs	**Gesucht:** Mittelwert einer Messreihe aus n Messwerten $y_1, y_2, \dots, y_n$ zu äquidistanten Zeitpunkten $x_1, x_2, \dots, x_n$. **Ergebnis:** Der gesuchte Mittelwert ist das arithmetische Mittel der Messwerte $y_1, y_2, \dots, y_n$ $\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot (y_1 + \dots + y_n) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i\,.$ • Messwerte als diskrete Realisierung eines stetigen Funktionsverlaufs f. • Algebraische Umformung der arithmetischen Mittels liefert: $\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ $= \frac{1}{b-a} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \frac{b-a}{n} \approx \frac{1}{b-a} \cdot I_a(b)$ 
Integral als Kumulation	• Summation einzelner Produkte betont dabei den Prozess und nicht das Ergebnis des Integrierens • geometrische Veranschaulichung dieser Vorstellung durch „Integral als Grenzwert einer Summe von Rechtecksflächen(inhalten), wobei die Stufen dieser Treppenfiguren beim Grenzprozeß beliebig schmal werden“ (Blum/Törner 1983, S. 163) • konsequente Umsetzung des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung	
Integral als (orientierter) Flächeninhalt	• Vorstellung zum orientierten Flächeninhalt bzw. zur Flächenbilanz	• S_1 ist der Inhalt der Fläche, die vom Graphen G_f der Funktion f, von der x-Achse und der Geraden $x = a$ eingeschlossen wird. • S_2 ist der Inhalt der Fläche, die vom Graphen G_f der Funktion f, von der x-Achse und der Geraden $x = b$ eingeschlossen wird. • Es ist $a < b$ und $0 < S_2 < S_1$. • Der Wert des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ ist dann: a) $S_1 + S_2$ b) $S_1 - S_2$ c) $S_2 - S_1$ d) $\lvert S_1 - S_2 \rvert$ e) $\frac{1}{2} \cdot (S_1 + S_2)$  (vgl. Baumert u.a. 1999, S. 80)

screenshots: GeoGebra/www.geogebra.org

Roth, J. (2005a): Bewegliches Denken im Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker.

Roth, J. (2005b): Figuren verändern – Funktionen verstehen. – In: Graumann, G. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, S. 481–484.

Roth, J. (2005c): Kurvenerzeugende Sehnen. – In: mathematik lehren Heft 130, S. 8–10.

Roth, J. (2014): Experimentieren mit realen Objekten, Videos und Simulationen. Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. – In: Der Mathematikunterricht 60(6), S. 37–42.

Sattlberger E. (2016): Habemus Haupttermin – Die SRP in Mathematik (AHS) nach 2015 – Wie war's und wie geht's weiter. Vortrag am Lehrer/innen-Fortbildungstag der ÖMG-Didaktikkommission, 01.04.2016.

Schoberleitner, F./Siller, H.-St. (2015): Abbauvorgänge im Körper. – In: Der Mathematikunterricht, 61(5), S. 13–19.

Sweeney, L. B./Sterman, J. D. (2000): Bathtub dynamics: initial results of a systems thinking inventory. – In: System Dynamics Review, 16 (4), S. 249–286.

Vollrath, H.-J. (1989): Funktionales Denken. – In: Journal für Mathematikdidaktik 10(1), S. 3–37.

vom Hofe, R./Hattermann, M. (2013): Zugänge zu negativen Zahlen – In: mathematik lehren, Heft 183, S. 2–8.