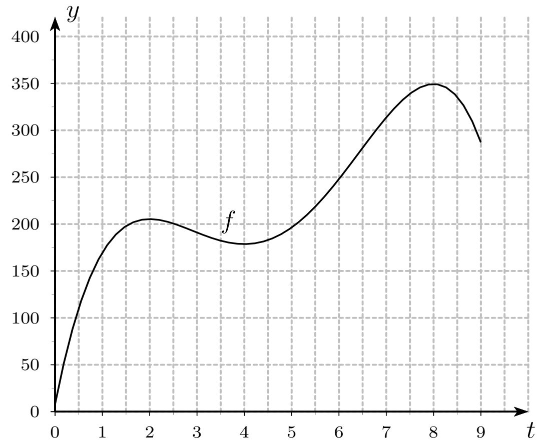
Aufgabe 2: Analysis

Da das Grillen im Winter immer beliebter wird, untersucht der Hersteller eines Gasgrills den Temperaturverlauf während eines Grillvorgangs bei einer Umgebungstemperatur von $8\,°\mathrm{C}$.
Zwei Minuten nach Beginn der Messung wird der Deckel für einen gewissen Zeitraum geöffnet, um Grillgut aufzulegen. Die durch den Temperaturfühler im Deckel gewonnenen Messpunkte liegen auf dem Graphen einer Funktion f mit

$$f(t) = -t^4 + \frac{56}{3}\,t^3 - 112\,t^2 + 256\,t + 8\ ;\ 0 \le t \le 9.$$

Dabei gibt t die Zeit in $\mathrm{Minuten}$ und $f(t)$ die Temperatur am Temperaturfühler in $°\mathrm{C}$ an.



a) a1) Bestimmen Sie mit Hilfe der Grafik auf dem Beiblatt sowohl die Temperatur als auch die momentane Temperaturänderungsrate sechs Minuten nach Beginn der Messung. (4 P)

a2) Berechnen Sie die maximale Temperatur. (6 P)

a3) Berechnen Sie die durchschnittliche Temperatur über dem Zeitintervall $[0; 9]$. (3 P)

a4) Der Hersteller behauptet, dass die momentane Temperaturänderungsrate zu Beginn des Grillvorgangs $5\,°\mathrm{C}$ pro Sekunde erreicht. Zeigen Sie rechnerisch, dass diese Behauptung bei dem untersuchten Grillvorgang nicht zutrifft. (3 P)

b) Nach 9 Minuten kühlt der ausgeschaltete Grill bei geöffnetem Deckel weiter ab. Die bei der Abkühlung gewonnenen Messpunkte liegen auf dem Graphen einer Funktion $g_{a;b}$ mit

$$g_{a;b}(t) = a \cdot e^{-b\cdot(t-9)} + 7 \quad ; \quad 9 \le t \le 20 \quad ; \quad a > 0 \quad ; \quad b > 0.$$

Es gilt $g'_{a;b}(t) = -a \cdot b \cdot e^{-b\cdot(t-9)}$.

b1) Beweisen Sie, dass die Graphen der Funktionen $g_{a;b}$ für alle $a > 0$ und $b > 0$ an jeder Stelle t fallen. (2 P)

b2) Die Graphen der Funktionen $g''_{a;b}$ verlaufen für alle $a > 0$ und $b > 0$ vollständig oberhalb der t-Achse. Erläutern Sie die Bedeutung dieser Eigenschaft für die Graphen der Funktionen $g_{a;b}$. (2 P)

b3) Auf dem Beiblatt ist der Graph einer Funktion $g_{a;b}$ abgebildet, der knickfrei an den Graphen von f anschließt. Bestimmen Sie die zugehörigen Parameter a und b. (5 P)

c) Im Folgenden wird die Funktion g mit

$$g(t) = g_{280;\,0{,}5}(t) = 280 \cdot e^{-0{,}5\cdot(t-9)} + 7 \quad ; \quad 9 \leq t \leq 20$$

und die durch die Funktion g beschriebene Abkühlungsphase betrachtet.

c1) Ermitteln Sie den Zeitpunkt t, an dem die momentane Temperaturänderungsrate gleich der mittleren Temperaturänderungsrate der Abkühlungsphase ist. (4 P)

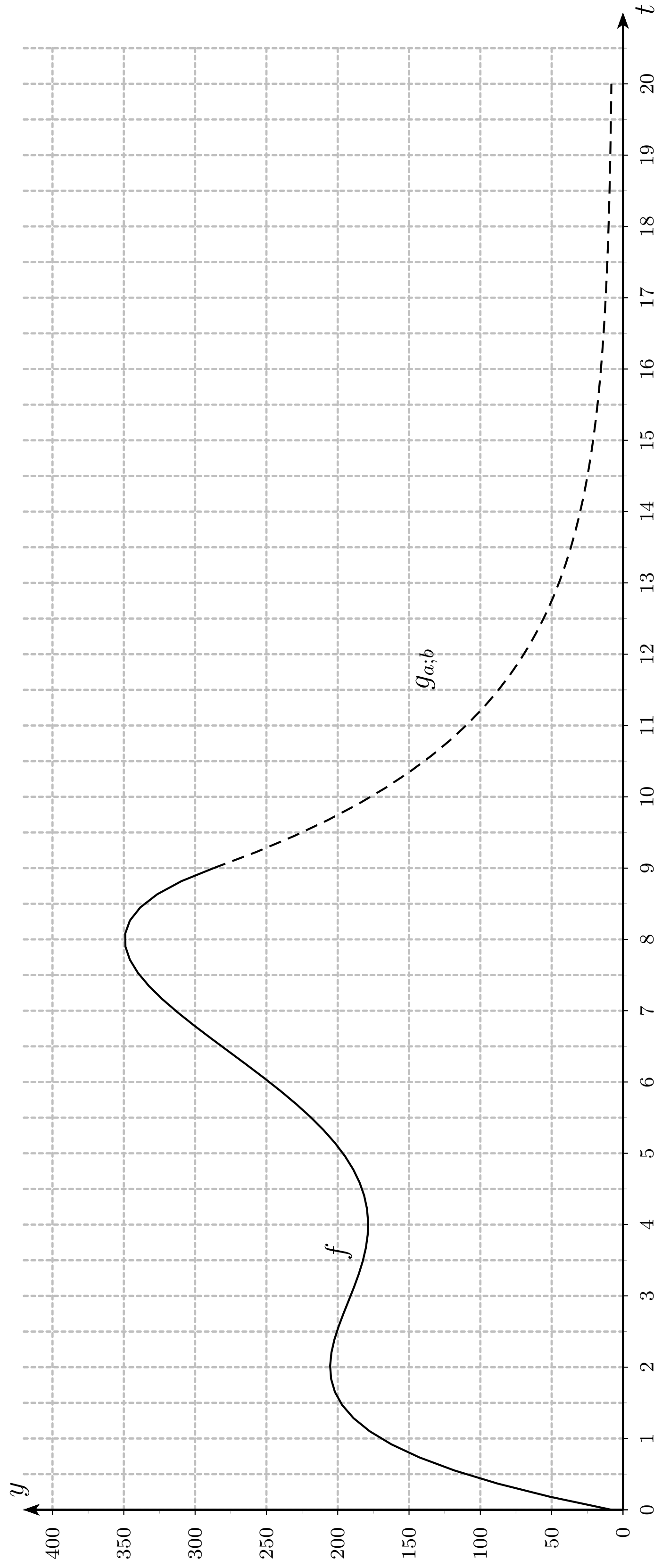
c2) Berechnen Sie das zweiminütige Zeitintervall, in dem die Temperatur um genau $100\,^\circ\mathrm{C}$ sinkt. (3 P)

d) Der Graph von f, der Graph von g und die t-Achse begrenzen über dem Intervall $[0;20]$ eine Fläche F.

d1) Berechnen Sie den Inhalt A dieser Fläche F. (3 P)

[Kontrolle: $A \approx 2666{,}91$]

d2) Durch den Punkt $M(m \mid 0)$ verläuft eine zur y-Achse parallele Gerade, die die Fläche F in zwei flächeninhaltsgleiche Teile zerlegt. Ermitteln Sie den Wert m. (5 P)


t
y
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
0
50
100
150
200
250
300
350
400
f
$g_{a;b}$

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe a) Aus der Grafik entnimmt man $f(6) \approx 250$, also beträgt die Temperatur sechs Minuten nach Beginn der Messung ungefähr $250\,°\mathrm{C}$. Durch Anlegen einer Tangente und Bestimmung der Steigung ermittelt man mit Hilfe der Grafik $f'(6) \approx \frac{250}{4}$, also beträgt die momentane Temperaturänderungsrate sechs Minuten nach Beginn der Messung ungefähr $62{,}5\,\frac{°\mathrm{C}}{\mathrm{min}}$.	1 3		
Zu ermitteln ist das globale Maximum von f im Intervall $[0;9]$. Notwendig für eine lokale Extremstelle t von f ist $f'(t)=0$. Es gilt $f'(t) = -4\,t^3 + 56\,t^2 - 224\,t + 256$. $f'(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; -4\,t^3 + 56\,t^2 - 224\,t + 256 = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 2 \vee t = 4 \vee t = 8$ Da zusätzlich $f(0) = 8,\ f(2) \approx 205{,}33,\ f(4) \approx 178{,}67,\ f(8) \approx 349{,}33$ und $f(9) = 287$ gilt, beträgt die maximale Temperatur im Grill ungefähr $349\,°\mathrm{C}$.	4 2		
$\frac{1}{9}\int\limits_0^9 f(t)\,dt = \frac{1}{9}\int\limits_0^9 -t^4 + \frac{56}{3}\,t^3 - 112\,t^2 + 256\,t + 8\,dt = \frac{1129}{5} = 225{,}8$ Die durchschnittliche Temperatur über dem Zeitintervall $[0;9]$ beträgt $225{,}8\,°\mathrm{C}$.		3	
Wegen $f'(0) = 256$ beträgt die momentane Temperaturänderungsrate zu Beginn des Grillvorgangs $256\,\frac{°\mathrm{C}}{\mathrm{min}}$. Da $256\,\frac{°\mathrm{C}}{\mathrm{min}} \approx 4{,}27\,\frac{°\mathrm{C}}{\mathrm{s}} < 5\,\frac{°\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$ ist, trifft die Behauptung des Herstellers bei diesem Grillvorgang nicht zu.		3	
Teilaufgabe b) Wegen $a > 0$ und $b > 0$ gilt $g'_{a;b}(t) = -a \cdot b \cdot e^{-b\cdot(t-9)} < 0$ für alle t. Somit fallen die Graphen der Funktionen $g_{a;b}$ für alle $a > 0$ und $b > 0$ an jeder Stelle t.		2	
Da die Graphen der Funktionen $g''_{a;b}$ für alle positiven a und b vollständig oberhalb der t-Achse verlaufen, gilt $g''_{a;b}(t) > 0$ für alle t. Also sind die Graphen der Funktionen $g_{a;b}$ an jeder Stelle t linksgekrümmt.			2
$\left\lvert \begin{array}{l} g_{a;b}(9) = f(9) \\ g'_{a;b}(9) = f'(9) \end{array} \right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert \begin{array}{l} a \cdot e^{-b\cdot(9-9)} + 7 = 287 \\ -a \cdot b \cdot e^{-b\cdot(9-9)} = -140 \end{array} \right\rvert$ $\Leftrightarrow \left\lvert \begin{array}{l} a + 7 = 287 \\ -a \cdot b = -140 \end{array} \right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert \begin{array}{l} a = 280 \\ b = 0{,}5 \end{array} \right\rvert$		3 2	

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung I	II	III
Teilaufgabe c) Es gilt $g'(t) = -140 \cdot e^{-0{,}5\cdot(t-9)}$ und $\frac{g(20)-g(9)}{11} = \frac{280 \cdot e^{-5{,}5} + 7 - 287}{11} \approx -25{,}35.$ Aus $g'(t) = \frac{g(20)-g(9)}{11} \Leftrightarrow -140 \cdot e^{-0{,}5\cdot(t-9)} = \frac{280 \cdot e^{-5{,}5} + 7 - 287}{11}$ folgt $t \approx 12{,}42$. Nach ungefähr $12{,}42$ Minuten ist der Zeitpunkt erreicht, an dem die momentane Temperaturänderungsrate gleich der mittleren Temperaturänderungsrate der gesamten Abkühlungsphase ist.	2	2	
$g(t) = g(t+2) + 100$ $\Leftrightarrow \; 280 \cdot e^{-0{,}5\cdot(t-9)} + 7 = 280 \cdot e^{-0{,}5\cdot((t+2)-9)} + 7 + 100$ Es folgt $t \approx 10{,}14$. Das Zeitintervall, in dem die Temperatur um genau $100\,^\circ\mathrm{C}$ sinkt, beginnt nach ungefähr $10{,}14$ Minuten und endet nach ungefähr $12{,}14$ Minuten.			3
Teilaufgabe d) $\int\limits_0^9 f(t)\,dt + \int\limits_9^{20} g(t)\,dt$ $= \int\limits_0^9 -t^4 + \frac{56}{3}\,t^3 - 112\,t^2 + 256\,t + 8\,dt + \int\limits_9^{20} 280 \cdot e^{-0{,}5\cdot(t-9)} + 7\,dt$ $\approx 2032{,}2 + 634{,}71 = 2666{,}91$		3	
$\int\limits_0^m f(t)\,dt = \frac{2666{,}91}{2} = 1333{,}455$ $\Leftrightarrow \int\limits_0^m -t^4 + \frac{56}{3}\,t^3 - 112\,t^2 + 256\,t + 8\,dt = 1333{,}455$ $\Leftrightarrow \left[-\frac{1}{5}\,t^5 + \frac{14}{3}\,t^4 - \frac{112}{3}\,t^3 + 128\,t^2 + 8\,t\right]_0^m = 1333{,}455$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{5}\,m^5 + \frac{14}{3}\,m^4 - \frac{112}{3}\,m^3 + 128\,m^2 + 8\,m = 1333{,}455$ Es folgt $m \approx 6{,}90$.			2 3
Punktsummen	12	18	10