

Hilfsmittelfreier Teil

Lösungen PLUS

HMF 1 - Analysis (Pool 1)

Hier ist eine Funktion f_a durch eine Gleichung gegeben:

$$f_a(x) = a \cdot x^6 - x^4$$

1.1

► **Bestimme a , sodass f_a mehr als eine Nullstelle hat**

Um Nullstellen einer Funktion zu bestimmen, musst du sie mit Null gleichsetzen und nach x auflösen.

$$f_a(x) = 0$$

$$a \cdot x^6 - x^4 = 0$$

$$(a \cdot x^2 - 1) \cdot x^4 = 0$$

Mit dem **Satz vom Nullprodukt** siehst du, dass bei $x^4 = 0 \rightarrow x = 0$ eine Nullstelle ist. Für eine weitere Nullstelle musst du den anderen Term auflösen:

$$a \cdot x^2 - 1 = 0 \quad | +1$$

$$a \cdot x^2 = 1 \quad | : a$$

$$x^2 = \frac{1}{a} \quad | \pm \sqrt{}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{a}}$$

Die zweite Nullstelle liegt bei $x = \pm \sqrt{\frac{1}{a}}$. Da der Term in der Wurzel positiv sein muss, und man nicht durch Null teilen kann, muss gelten $a > 0$.

1.2

► **Bestimme a , sodass f_a an der Stelle $x = 1$ ein Minimum hat**

Um zu zeigen, dass eine Funktion f an einer Stelle x_1 ein Minimum hat, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

1. $f'(x) = 0$: Die notwendige Bedingung zeigt, dass eine Extrem- oder Sattelstelle vorliegt
2. $f''(x) > 0$: Die hinreichende Bedingung zeigt, dass die Extremstelle ein Minimum ist

Um die Bedingungen zu zeigen, gehst du in 4 Schritten vor:

1. Ableitungen bilden
2. 1. Ableitung mit Null gleichsetzen und nach x auflösen
3. Nullstellen mit $x = 1$ gleichsetzen und nach a auflösen
4. Überprüfen der 2. Bedingung

1. Schritt: Ableitungen von f bilden

$$f_a(x) = a \cdot x^6 - x^4$$

$$f'_a(x) = 6a \cdot x^5 - 4 \cdot x^3$$

$$f''_a(x) = 30a \cdot x^4 - 12 \cdot x^2$$

2. Schritt: notwendige Bedingung anwenden

$$f'_a(x) = 0$$

$$6a \cdot x^5 - 4 \cdot x^3 = 0 \quad | : x^3$$

$$6a \cdot x^2 - 4 = 0 \quad | +4$$

$$6a \cdot x^2 = 4 \quad | : 6a$$

$$x^2 = \frac{2}{3}a \quad | \pm\sqrt{}$$

$$x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3a}}$$

Du weißt, dass f an den Stellen $x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3a}}$ Nullstellen hat.

3. Schritt: Nullstellen mit $x = 1$ gleichsetzen:

Das Minimum soll an der Stelle $x = 1$ liegen, daher benötigst du nur die positive Lösung:

$$x_1 = 1$$

$$+\sqrt{\frac{2}{3a}} = 1 \quad | ()^2$$

$$\frac{2}{3a} = 1 \quad | \cdot 3a$$

$$2 = 3a \quad | : 3$$

$$\frac{2}{3} = a$$

f hat für $a = \frac{2}{3}$ an der Stelle $x = 1$ eine Extremstelle.

4. Schritt Überprüfe 2. Bedingung:

Abschließend musst du $a = \frac{2}{3}$ und $x = 1$ in die zweite Ableitung einsetzen und überprüfen, ob der Wert der 2. Ableitung an dieser Stelle größer als Null ist:

$$f_a''(x) = 30a \cdot x^4 - 12 \cdot x^2$$

$$\begin{aligned} f_{\frac{2}{3}}''(1) &= 30 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - 12 \cdot 1 \\ &= 20 - 12 \\ &= 8 > 0 \end{aligned}$$

Somit sind alle Bedingungen erfüllt. Für $a = \frac{2}{3}$ hat f an der Stelle $x = 1$ ein Minimum.

HMF 2 - Analysis (Pool 1)

Hier ist eine Funktionenschar f_k mit einer Gleichung angegeben:

$$f_k(x) = (x - k) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

2.1

► Berechne den Schnittpunkt mit der x -Achse

Um den Schnittpunkt der Funktionenschar mit der x -Achse zu bestimmen, musst du den Funktionsterm mit Null gleichsetzen und nach x auflösen:

$$f_k(x) = 0$$

$$(x - k) \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0$$

Der **Satz vom Nullprodukt** sagt, dass ein Produkt Null ist wenn mindestens einer der Faktor Null ist. Die Exponentialfunktion ist stets echt größer Null. Somit muss $(x - k)$ gleich Null sein:

$$x - k = 0 \quad | +k$$

$$x = k$$

Der Schnittpunkt des Graphen mit der x -Achse ist im Punkt $S(k | 0)$.

2.2

► Welche Terme beschreiben den Flächeninhalt

In dieser Aufgabe sollst du angeben, welche Terme den Flächeninhalt der gezeigten Fläche richtig beschreibt. Dazu überlegst du dir zunächst wie der Flächeninhalt bestimmt wird und vergleichst deinen Term mit den gegebenen Termen:

Flächeninhalt bestimmen

Für den Flächeninhalt A braucht man zunächst die Fläche A_1 zwischen dem Graphen der Funktion f_4 und den Koordinatenachsen:

$$A_1 = \int_0^b |f_4(x)| \, dx$$

Davon muss man die Fläche A_2 zwischen dem Graphen der Funktion f_3 und den Koordinatenachsen abziehen:

$$A_2 = \int_0^a |f_3(x)| \, dx$$

$$A = \int_0^b |f_4(x)| \, dx - \int_0^a |f_3(x)| \, dx$$

Der 3. und 5. Term liefern das richtige Ergebnis. Der 5. Term

$$\int_0^a f_3(x) \, dx - \int_0^b f_4(x) \, dx$$

liefert das richtige Ergebnis, weil beide Integrale einen negativen Wert haben, allerdings wird der betragsmäßig größere Wert vom kleineren abgezogen, weshalb der Wert des Terms positiv ist. Der 3. Term ist gleich dem 5. Term mit zusätzlichen Betragsstrichen. Da der 5. Term bereits positiv ist ändert sich durch die Betragsstriche nichts. Alle anderen Terme liefern kein richtiges Ergebnis.

HMF 3 - Analysis (Pool 2)

Die Funktion f ist gegeben durch die Funktionsgleichung:

$$f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 6$$

3.1

► **Zeige, dass der Wendepunkt auf der Geraden $y = x - 2$ liegt**

Hier sollst du zeigen, dass der Wendepunkt der Funktion f auf der Geraden mit der Gleichung $y = x - 2$ liegt. Die zwei Bedingungen für einen Wendepunkt sind:

1. $f''(x) = 0$ Notwendige Bedingung: Die zweite Ableitung muss Null sein.
2. $f'''(x) \neq 0$ Hinreichende Bedingung: Die dritte Ableitung muss ungleich Null sein.

Du gehst hier in 4 Schritten vor.

1. Ableitungen bilden
2. Zweite Ableitungen mit Null gleichsetzen
3. 2. Bedingung überprüfen und vollständige Koordinaten des Wendepunkt bestimmen
4. Überprüfe, ob der Wendepunkt auf der Geraden liegt

1. Schritt: Ableitungen bilden

Zunächst bildest du die ersten drei Ableitungen der Funktion f :

$$f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 6$$

$$f'(x) = 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 11$$

$$f''(x) = 6 \cdot x - 12$$

$$f'''(x) = 6$$

2. Schritt: Zweite Ableitung Null setzen und nach x auflösen

Du musst nun die 2. Ableitung mit Null gleichsetzen und anschließend nach x auflösen.

$$f''(x) = 0$$

$$6 \cdot x - 12 = 0 \quad | +12$$

$$6 \cdot x = 12 \quad | :6$$

$$x = 2$$

An der Stelle $x = 2$ muss der Wendepunkt liegen.

3. Schritt: Hinreichende Bedingung überprüfen

Die dritte Ableitung $f'''(x) = 6$ ist immer größer Null, damit ist die Bedingung erfüllt. Die y -Koordinate des Wendepunkts kann bestimmt werden, wenn der Funktionsterm von f an der Stelle $x = 2$ ausgewertet wird:

$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 - 6$$

$$= 0$$

Der Wendepunkt ist $W(2 | 0)$.

4. Schritt: Überprüfe, ob der Wendepunkt auf der Geraden liegt

Um zu überprüfen, ob der Punkt auf der Geraden liegt, setzt du x - und y -Koordinate in die Geradengleichung ein und überprüfst ob die Gleichung erfüllt ist:

$$y = x - 2$$

$$0 = 2 - 2$$

$$0 = 0$$

Die Geradengleichung ist erfüllt, somit liegt der Wendepunkt W auf der Geraden.

3.2

► Verschiebung des Graphen von f

Der Graph von f wird so verschoben, dass der Punkt $(2 | 0)$ danach die Koordinaten $(3 | 2)$ hat. Der verschobene Graph gehört zur Funktion h , die du bestimmen sollst.

Der Graph der Funktion g_1

$$g_1(x) = f(x - a)$$

geht durch Verschiebung des Graphen von f um a Einheiten entlang der positiven x -Achse hervor.

Der Graph der Funktion g_2

$$g_2(x) = f(x) + b$$

geht durch Verschiebung des Graphen von f um b Einheiten entlang der positiven y -Achse hervor.

Hier wird der Punkt um eine Einheit in positiver x -Richtung und um zwei Einheiten in positiver y -Richtung verschoben. Das heißt, die Konstante sind $a = 1$ und $b = 2$. Der Funktionsterm von h ergibt sich nun:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x - 1) + 2 \\ &= (x - 1)^3 - 6 \cdot (x - 1)^2 + 11 \cdot (x - 1) - 6 + 2 \\ &= x^3 - 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 1 - 6 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 6 + 11 \cdot x - 11 - 6 + 2 \\ &= x^3 - 9 \cdot x^2 + 26 \cdot x - 22 \end{aligned}$$

Die Gleichung für h kannst du als $h(x) = (x - 1)^3 - 6 \cdot (x - 1)^2 + 11 \cdot (x - 1) - 4$ oder $h(x) = x^3 - 9 \cdot x^2 + 26 \cdot x - 22$ angeben.

HMF 4 - Analytische Geometrie (Pool 1)

4.1

► Bestimme was Ausdruck beschreibt

Hier sind mit drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ und zwei reellen Zahlen r und t verschiedene Ausdrücke beschrieben. Du sollst zu jedem Ausdruck sagen, ob es ein Vektor ist, eine Zahl ist oder ob der Ausdruck nicht definiert ist. Das Rechenzeichen $\circ$ ist das **Skalarprodukt**, wenn es zwischen zwei Vektoren steht, ist das Ergebnis eine reelle Zahl. Das Rechenzeichen $\times$ ist das **Kreuzprodukt**, wenn es zwischen zwei Vektoren steht, ist das Ergebnis ein Vektor. Betragsstriche $|\vec{a}|$ machen aus einem Vektor eine reelle Zahl. Du gehst alle Ausdrücke nacheinander durch:

Ausdruck	Vektor	Zahl	nicht definiert
$(\vec{u} \circ \vec{v}) + \vec{w}$			X
$ \vec{u} ^2 - \vec{w} ^2$		X	
$(\vec{u} \times \vec{v}) - (r \cdot t) \cdot \vec{w}$	X		
$(\vec{u} \circ \vec{u}) + (r - t)^2$		X	
$(r \cdot \vec{u}) \circ (t \times \vec{u} \times \vec{v})$			X
$\vec{u} \times ((\vec{w} - \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}))$	X		

4.2

► Bestimmen einer Ebene

Hier sind drei Punkt A , B und C gegeben. Sie liegen nicht auf einer gemeinsamen Geraden, und bilden deshalb eine Ebene. Du sollst die zugehörige Ebenengleichung angeben.

1. Ebenengleichung in Parameterform

Hier ist es sinnvoll die Parameterform zu betrachten:

$$E_P : \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$$

Der Vektor $\vec{p}$ ist der **Stützvektor**. Der Ortsvektor eines der gegebenen Punkte, bildet den Stützvektor. Die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind die **Spannvektoren** der Ebene. Du bildest sie als Differenz zwischen den Ortsvektoren verschiedener Punkte.

Stützvektor

Als Stützvektor kannst du den Ortsvektor vom Punkt A verwenden:

$$\vec{p} = \overrightarrow{OA}$$

Spannvektoren

Als Spannvektor verwendest du die Differenz der Punkte $A B$ und $A C$:

$$\vec{u} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC}$$

Ebenengleichung

Du kannst jetzt die Ebenengleichung angeben:

$$E_P : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC}$$

► Bestimme den Normaleneinheitsvektoren

Desweiteren sollst du einen Vektor bestimmen, der senkrecht zur Ebene ist und die Länge 1 hat, also einen Normalenvektor der Länge 1. Den Vektor bildest du mit dem **Kreuzprodukt** der beiden Spannvektoren der Ebene. Damit er die Länge 1 hat, musst du das Kreuzprodukt durch den Betrag des Kreuzprodukts teilen:

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}$$

HMF 5 - Analytische Geometrie (Pool 1)

Eine Gerade g verläuft durch die Punkte $A(0 | 1 | 2)$ und $B(2 | 5 | 6)$.

5.1

► Zeige, dass der Abstand zwischen A und B gleich 6 ist

Um den Abstand zwischen zwei Punkten zu bestimmen, berechnest du die Länge des Verbindungsvektors zwischen den Punkten. Die Länge des Verbindungsvektors, also der Abstand ist:

$$\begin{aligned}
 d &= \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right| \\
 &= \sqrt{(0-2)^2 + (1-5)^2 + (2-6)^2} \\
 &= \sqrt{4 + 16 + 16} \\
 &= \sqrt{36} = 6
 \end{aligned}$$

Damit hast du gezeigt, dass die Punkte A und B den Abstand 6 haben.

► **Bestimme die Koordinaten der Punkte C und D**

Die Punkte C und D liegen ebenfalls auf der Geraden g . Beide haben den Abstand 12 vom Punkt A . Nun sollst du die Koordinaten der Punkte bestimmen. Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ hat die Länge 6, da die Punkte A und B den Abstand 6 haben. Zudem verläuft er parallel zur Geraden g . Wenn man den Vektor $\overrightarrow{AB}$ zwei Mal zum Vektor $\overrightarrow{OA}$ addiert oder subtrahiert, erhält man den Ortsvektor der Punkte C und D :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AB} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2-0 \\ 5-1 \\ 6-2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} - 2 \cdot \overrightarrow{AB} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2-0 \\ 5-1 \\ 6-2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Die Koordinaten sind $C(4 \mid 9 \mid 10)$ und $D(-4 \mid -7 \mid -6)$.

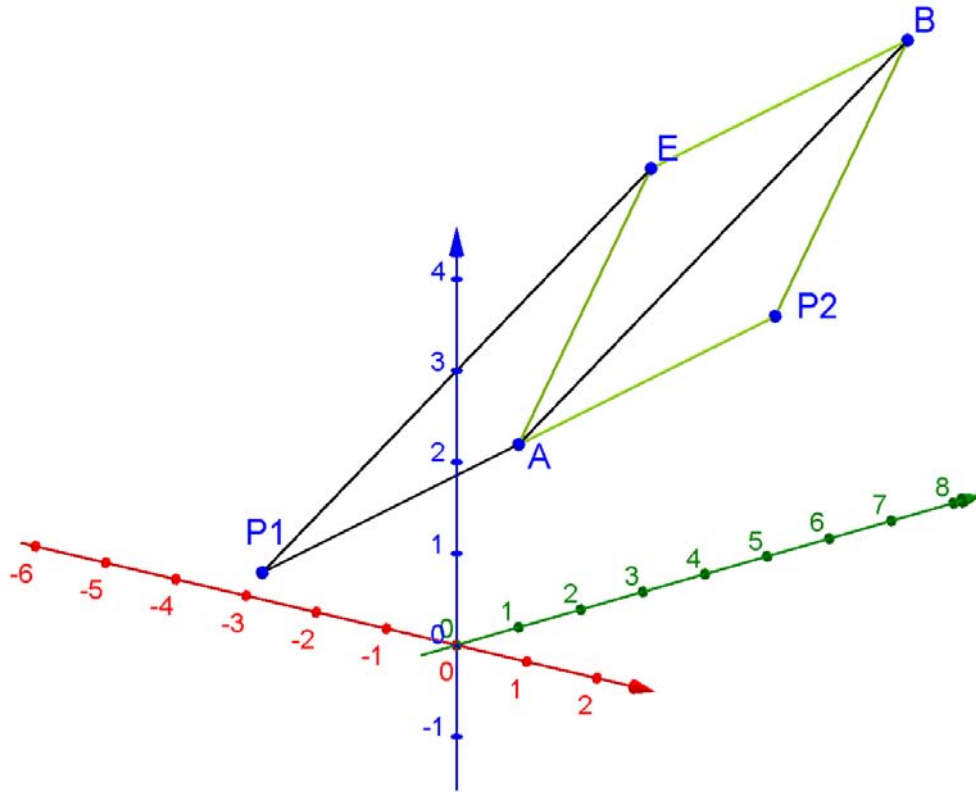
5.2

► **Bilde mit den Punkten A , B und E ein Parallelogramm**

Die Punkte A , B und $E(1|2|5)$ und ein vierter Punkt P sollen ein Parallelogramm bilden. Ein Parallelogramm hat zwei wichtige Eigenschaften:

- Gegenüberliegende Seiten sind parallel
- Gegenüberliegende Seiten sind gleichlang

Die zweite Eigenschaft folgt aus der ersten, ist allerdings sehr nützlich. Es gibt mehrere Möglichkeiten mit den gegebenen Punkten ein Parallelogramm zu bilden. Eine Skizze zeigt dir zwei Mögliche Punkte P_1 und P_2 .



1. Parallelogramm

Das schwarze Parallelogramm wird aus den Punkten A , B , E und P_1 gebildet. Die Koordinaten des Punkts P_1 findest du, indem du vom Ortsvektor von E den Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ subtrahierst:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{AB} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die Koordinaten des Punkts P_1 sind somit $P_1(-1 | -2 | 1)$.

2. Parallelogramm

Das grüne Parallelogramm wird aus den Punkten A , B , E und P_2 gebildet. Die Koordinaten des Punkts P_2 findest du, indem du vom Ortsvektor von B den Verbindungsvektor $\overrightarrow{AE}$ subtrahierst:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AE} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-0 \\ 2-1 \\ 5-2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Koordinaten des Punkts P_2 sind somit $P_2 (1 | 4 | 3)$.

HMF 6 - Analytische Geometrie (Pool 2)

Hier sind eine Kugel K , eine Gerade g und eine Ebene E gegeben. Der Kreismittelpunkt ist im Ursprung $O(0 | 0 | 0)$, der Radius ist $r_K = \sqrt{144} = 12$

6.1

► Bestimme die Schnittpunkte zwischen Kugel K und Gerade g

Hier sind eine Kreis- und eine Geradengleichung gegeben. Um die Schnittpunkt zu erhalten, setzt du die Geradengleichung in die Kreisgleichung ein und löst den Term nach s auf.

$$\left(s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^2 = 144$$

$$s^2 \cdot (4 + 4 + 1) = 144$$

$$9 \cdot s^2 = 144 \quad | :9$$

$$s^2 = 16 \quad | \pm\sqrt{}$$

$$s = \pm 4$$

Jetzt kannst du die beiden Werte für s in die Geradengleichung einsetzen und du erhältst die Schnittpunkte:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OS_1} &= 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \\
 \overrightarrow{OS_2} &= -4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Die Koordinaten der Schnittpunkte sind $S_1 (8 \mid -8 \mid 4)$ und $S_2 (-8 \mid 8 \mid -4)$.

6.2

► Schnittkreis der Kugel K mit der Ebene E

Zunächst musst du den Abstand d der Kugelmittle von der Ebene E bestimmen. Der Kugelmittelpunkt liegt im Ursprung $O(0 \mid 0 \mid 0)$, da der Ursprung auch in der Ebene E liegt, ist der Abstand Null.

Da der berechnete Abstand Null ist, ist der Radius des Schnittkreises gleich dem Radius der Kugel:

$$r_s = r_k = 12$$

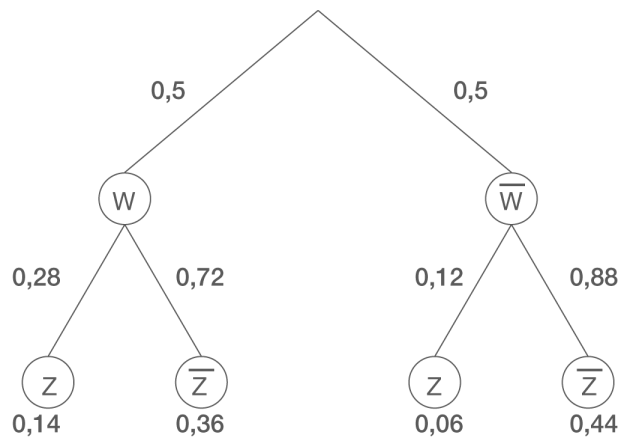
Der Kreismittelpunkt ist ebenfalls identisch mit dem Kugelmittelpunkt $M_S(0 \mid 0 \mid 0)$, weil der Abstand Null ist.

HMF 7 - Stochastik (Pool 1)

7.1

► Baumdiagramm

Hier sollst du ein Baumdiagramm zeichnen, das den Sachverhalt vollständig erfasst. Es handelt sich um ein zweistufiges Zufallsexperiment. In der ersten Stufe erfolgt die Anmeldung zur Prüfung bei der sich zeigt, ob man die Prüfung wiederholt oder zum ersten Mal schreibt. In der zweiten Stufe erfolgt ein möglicher Rücktritt von der Prüfung.



7.2

► Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass ein Prüfling Wiederholer ist

Hier musst du die bedingte Wahrscheinlichkeit berechnen, dass ein Prüfungsteilnehmer Wiederholer ist. Dazu verwendest du den **Satz von Bayes**. Du erhältst die Wahrscheinlichkeit, indem du die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wiederholer an der Prüfung teilnimmt, durch die Gesamtwahrscheinlichkeit teilst, dass ein Prüfling an der Prüfung teilnimmt.

1. Wahrscheinlichkeit, dass ein Wiederholer nicht zurücktritt

Für die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ musst du die Wahrscheinlichkeiten für Wiederholer W mit der Wahrscheinlichkeit nicht zurückgetreten $\bar{Z}$ multiplizieren:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(W) \cdot P(\bar{Z}) \\ &= 0,5 \cdot 0,72 \\ &= 0,36 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wiederholer zur Prüfung antritt ist 36%.

2. Wahrscheinlichkeit, dass ein Prüfling nicht zurücktritt

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Prüfling nicht zurücktritt, bildet sich aus der Summe der Wahrscheinlichkeiten, dass ein Wiederholer nicht zurücktritt und der Wahrscheinlichkeit, dass ein nicht Wiederholer nicht zurücktritt. Ersteres hast du bereits berechnet. Für den zweiten Fall multiplizierst du die Wahrscheinlichkeit für nicht Wiederholer $\bar{W}$ und nicht zurück getreten $\bar{Z}$:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\bar{W}) \cdot P(\bar{Z}) \\ &= 0,5 \cdot 0,88 \\ &= 0,44 \end{aligned}$$

Die Summe der beiden Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$ ist 80%.

3. Wahrscheinlichkeit berechnen

Jetzt kannst du die Wahrscheinlichkeit bestimmen, dass ein zufälliger Prüfling an der Klausur teilnimmt und Wiederholer ist:

$$\begin{aligned}
 P(C) &= \frac{P(A)}{P(B)} \\
 &= \frac{0,36}{0,8} \\
 &= 0,45
 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt somit 45%.

HMF 8 - Stochastik (Pool 1)

8.1

► Bestimme den Erwartungswert

In der Abbildung auf dem Aufgabenblatt sind alle möglichen Werte einer Zufallsvariable mit zugehöriger Wahrscheinlichkeit gegeben. Um den Erwartungswert μ einer Zufallsvariable X zu bestimmen, musst du die Summe aller möglichen Ereignisse k multipliziert mit der jeweiligen Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$ bilden:

$$\begin{aligned}
 \mu &= 2 \cdot P(X = 2) + 1 \cdot P(X = 1) - 2 \cdot P(X = -2) \\
 &= 2 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,25 - 2 \cdot 0,25 \\
 &= 1 + 0,25 - 0,5 \\
 &= 0,75
 \end{aligned}$$

Der Erwartungswert der Zufallsvariable X ist $\mu = 0,75$.

8.2

► Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable negativ ist

Du sollst die Wahrscheinlichkeit $P(n)$ bestimmen, dass die Summe der jeweiligen Zufallsvariablen negativ ist. Dazu musst du alle Fälle betrachten, für die die Summe negativ wird. Es gibt drei mögliche Szenarien:

- Das Experiment liefert zweimal $k = -2$
- Das Experiment liefert zuerst $k = -2$, dann $k = 1$
- Das Experiment liefert zuerst $k = 1$, dann $k = -2$

Jetzt musst du die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten bestimmen und summieren.

1. Wahrscheinlichkeiten berechnen

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Experiment zweimal $k = -2$ liefert:

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(X = -2) \cdot P(X = -2) \\
 &= 0,25 \cdot 0,25 \\
 &= 0,0625
 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Experiment einmal $k = -2$ und einmal $k = 1$ liefert:

$$\begin{aligned}
 P(B) &= P(X = -2) \cdot P(X = 1) \\
 &= 0,25 \cdot 0,25 \\
 &= 0,0625
 \end{aligned}$$

2. Wahrscheinlichkeiten summieren

Abschließend musst du die Summe der Wahrscheinlichkeiten bilden:

$$\begin{aligned}
 P(n) &= P(A) + 2 \cdot P(B) \\
 &= 0,0625 + 2 \cdot 0,0625 \\
 &= 0,1875
 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Zufallsvariablen aus zwei Zufallsexperimenten negativ ist, ist $P(n) = 18,75\%$.