Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II

Friedhelm Padberg
Sebastian Wartha

Didaktik der Bruchrechnung

5. Auflage

Springer Spektrum

Inhaltsverzeichnis

Zur Einführung von Brüchen

3

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns intensiv und unter vielen verschiedenen Gesichtspunkten mit der Einführung der Brüche im Mathematikunterricht. Eine anschauliche, gut gelungene Einführung ist für die gesamte Bruchrechnung von zentraler Bedeutung. Werden nämlich an dieser Stelle des Unterrichts *keine tragfähigen* Grundlagen gelegt, sind heftige Probleme im weiteren Unterrichtsverlauf für die Schülerinnen und Schüler vorprogrammiert.

3.1 Zentrale Grundvorstellungen

Brüche besitzen viele *verschiedene* Gesichter und nicht nur *einen* formalisierten Schattenriss (Hefendehl-Hebeker [63]). Wer daher die Bruchrechnung wirklich verstehen und nicht nur Brüche nach auswendig gelernten, fehleranfälligen Regeln manipulieren will, muss zuvor diese Gesichter gründlich betrachtet und ihre Zusammenhänge verstanden haben.

3.1.1 Einige Verwendungssituationen von Brüchen

Wir verwenden Brüche in **sehr unterschiedlichen Situationen und Kontexten**, wie die folgenden Beispiele belegen:

(1) Max hat die Schinkenpizza in vier gleich große Stücke geschnitten. Sarah isst 3 Stücke. Welchen Teil der Pizza hat sie insgesamt gegessen?
(2) Unser Körper besteht zu $\frac{3}{5}$ seines Gewichts aus Wasser. Melanie wiegt 30 kg. Wie viel Wasser enthält ihr Körper?
(3) Die Tombola beim Schulfest hat 1236 Euro Einnahmen erbracht. $\frac{3}{4}$ hiervon werden an ein Kinderdorf überwiesen. Wie viel Euro erhält das Kinderdorf?

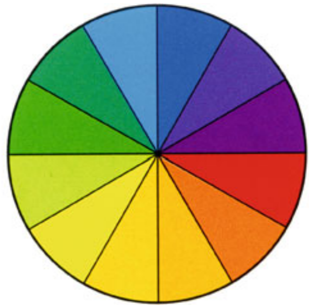
F. Padberg, S. Wartha, *Didaktik der Bruchrechnung*,
Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II, DOI 10.1007/978-3-662-52969-0_3

(4)

Farbkreis

In dem Bild rechts ist ein Farbkreis abgebildet.

» Wie viele Farben sind dargestellt?
» Welcher Anteil des Farbkreises ist gelb gefärbt?
Welcher Anteil des Kreises ist mit Grün-Tönen gefärbt?
» Wie groß ist der Anteil am Farbkreis an Rot- und Orange-Farbtönen?



© *Mathematik heute 6*, [S13], S. 43 oben

(5) Wie viel Zentimeter hat $\frac{1}{2}$ m? Wie viel Minuten dauert $\frac{3}{4}$ Stunde? Wie viel Gramm hat $\frac{1}{4}$ kg?
(6) Der Zeiger meiner Tankuhr steht genau in der Mitte zwischen $\frac{1}{2}$ und 1.
(7)

Tanja, Melanie und Sarah haben Geld geschenkt bekommen. Es reicht nur für zwei Pizzas. Sie wollen gerecht teilen. Jedes Mädchen soll gleich viel bekommen.
Welchen Anteil an einer Pizza bekommt jedes Mädchen?

© *Elemente der Mathematik 5* [S3], S. 236 oben

(8) Ist die Gleichung $3 \cdot x = 2$ lösbar? Wie lautet ggf. die Lösung?
(9)

Schuldig oder nicht schuldig?
Oft wird ein Urteil gesprochen, bei dem nicht eindeutig der Beklagte oder der Kläger schuldig ist. Beide haben eine Teilschuld und müssen gemeinsam die Kosten des Gerichtsverfahrens tragen.

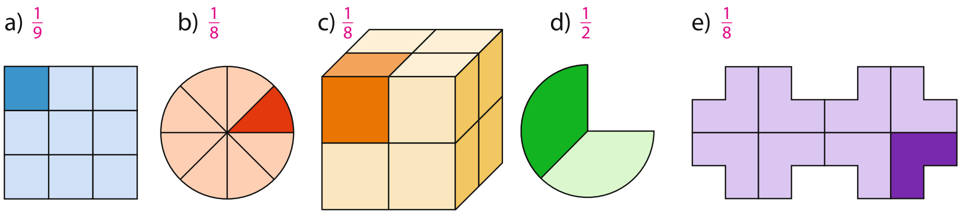
a) „Die Kosten des Verfahrens trägt zu drei Teilen der Beklagte und zu einem Teil der Kläger." Welchen Bruchteil der Gerichtskosten müssen Kläger und Beklagter in diesem Fall bezahlen?
b) In einem anderen Fall entscheidet das Gericht: „Die Kosten des Verfahrens in Höhe von 1600 Euro werden zwischen Beklagtem und Kläger im Verhältnis 3 zu 5 aufgeteilt." Wie viel müssen die beiden Streitparteien jeweils bezahlen?

© *Mathematik Neue Wege 5* [S17], S. 232, Nr. 21

(10) Pia will die Wände ihres Zimmers violett streichen. Sie kauft dazu 2 Dosen mit blauer und 3 Dosen mit roter Farbe und mischt hieraus die violette Farbe. Alle Dosen sind gleich groß. Welcher Bruchteil der Mischung ist blaue Farbe, welcher Bruchteil rote Farbe?

(11) In Peters Klasse sind 28 Kinder. Davon kommen 7 zu Fuß und 14 mit dem Rad in die Schule. Welcher Anteil der Klasse kommt zu Fuß, welcher mit dem Rad?

(12) Welcher Anteil ist dunkel gefärbt?



© *Fundamente der Mathematik 5* [S7], S. 153, Nr. 4

(13) Du warst gestern eine viertel Stunde zu spät in der Tennishalle. Unser erster Satz hat $\frac{3}{4}$ Stunde gedauert.

Betrachten wir die vorstehenden Beispiele genauer, so können wir mindestens die folgenden unterschiedlichen Verwendungssituationenen bei Brüchen erkennen:

1. Bruch als Anteil Analysieren wir die Beispiele (**1**), (**4**) und (**12**) genauer, so wird hier jeweils der betreffende **Anteil eines Ganzen** gesucht. Bei (**1**) ist das Ganze die Schinkenpizza, bei (**4**) der Farbkreis und bei (**12**) sind dies jeweils völlig unterschiedliche Figuren (Quadrat, Kreis, Würfel, Teil eines Kreises, ein Vieleck). Hierbei ist die Situation bei (**12**) besonders einfach. Es wird hier jede Figur restlos in gleich große Teile zerlegt und *ein* Teil dunkel gefärbt. Sein Anteil an dem jeweiligen Ganzen muss bestimmt werden. Diesen Anteil können wir durch besonders einfache Brüche, nämlich durch **Stammbrüche** bezeichnen, also durch Brüche, bei denen der Zähler 1 ist. Bei (**1**) muss dagegen das Ganze *zunächst* in vier gleich große Teile zerschnitten bzw. bei (**4**) beim Farbkreis in 12 gleich große Teile unterteilt werden. *Ein* Teil beträgt also $\frac{1}{4}$ bzw. $\frac{1}{12}$ des jeweiligen Ganzen. *Danach* werden dann hiervon jeweils *mehrere* Teile genommen und der so erhaltene *Anteil vom Ganzen* bestimmt. Sarah hat also nicht $\frac{1}{4}$, sondern das Dreifache, also $\frac{3}{4}$ der Schinkenpizza gegessen, und vom Farbkreis ist nicht nur $\frac{1}{12}$, sondern $\frac{3}{12}$ in Grün-Tönen gefärbt. Hierbei kann der Anteil auch größer als 1 sein, wie wir im weiteren Verlauf noch genauer sehen werden. Bei Brüchen gibt also der **Nenner** an, in wie viele gleich große Teile wir das Ganze zerschneiden oder zerlegen, und der **Zähler**, wie viele Teile wir hiervon nehmen bzw. betrachten.

Bislang war das Ganze in unseren Beispielen *ein einziges* geometrisches Gebilde wie beispielsweise ein Kreis oder ein Rechteck. Im Beispiel (**11**) bilden dagegen die **28 Schüler** einer Klasse das Ganze. Das Ganze muss also bei der Anteilbestimmung nicht *kontinuierlich* sein (wie bei den geometrischen Gebilden), es kann auch *diskret* sein.

Von ganz anderer Struktur ist das Beispiel (**7**). Das Ganze ist hier nicht mehr – wie bislang – *eine* Pizza, sondern *zwei* Pizzas. Dieses neue Ganze soll gerecht verteilt werden (Verteilsituation). Wir sprechen in diesem Fall vom Bruch als **Anteil mehrerer Ganzer**, wobei diese Kurzformulierung beinhaltet, dass das „neue" Ganze aus mehreren Ganzen besteht – wie im Beispiel **(7)** aus zwei Pizzas. Wir gehen auf diese beiden Teilaspekte der Grundvorstellung **Bruch als Anteil** (Anteil eines Ganzen, Anteil mehrerer Ganzer) im Abschn. 3.2 noch genauer ein.

Etwas anders als wir unterscheiden Schink [161] und Wessel [212] *drei* Teilaspekte. Hierbei entspricht der dritte Teilaspekt „relativer Anteil von Mengen" unserem Teilaspekt „Anteil eines Ganzen" in der diskreten Version.

2. Bruch als Maßzahl In den Beispielen (**5**) und (**13**) sind die Brüche **Maßzahlen**. Die Brüche treten darum in diesen Sachsituationen kombiniert mit einer Maßeinheit auf und bezeichnen Größen.

3. Bruch als Operator In den Beispielen (**2**) und (**3**) werden die Brüche offenbar wiederum anders eingesetzt. Hier werden die Brüche zur knappen Beschreibung von auf Größen anzuwendenden **multiplikativen Handlungsanweisungen** benutzt. In (**2**) muss $\frac{3}{5}$ von 30 kg und in (**3**) $\frac{3}{4}$ von 1236 Euro bestimmt werden. Den **Operator „$\frac{3}{5}$ von"** (in der Literatur wird dieser Ansatz auch **Von-Ansatz** genannt) kann man sich zusammengesetzt vorstellen aus „teile durch 5" (kurz (: 5), Divisionsoperator) und „verdreifache" (kurz ($\cdot 3$), Multiplikationsoperator). Wir können nachweisen, dass die Reihenfolge von Divisionsoperator und Multiplikationsoperator stets vertauscht werden darf (Padberg [126]) und darum bei der Bestimmung von „$\frac{3}{5}$ von 30 kg" entweder zunächst durch 5 dividiert und danach das Ergebnis verdreifacht oder umgekehrt zunächst verdreifacht und dann durch 5 dividiert wird (letzteres ist hier offenbar ungünstiger). Völlig analog können wir auch bei „$\frac{3}{4}$ von 1236 Euro" vorgehen.

In den beiden genannten Beispielen ist das Ganze eine diskrete Menge (1236 Euro beispielsweise vorgestellt als 1236 1-Euro-Stücke, 30 kg als 30 1-Kilogramm-Stücke). Aber auch bei der Operator-Grundvorstellung kann das Ganze kontinuierlich sein wie im Beispiel: „Bilde $\frac{3}{4}$ von diesem Rechteck".

4. Brüche und Verhältnisse In den Beispielen (**9**) und (**10**) kommen **Verhältnisse** vor. Bei (**9**) werden die Kosten in Teil a) offenbar im Verhältnis 3 : 1 aufgeteilt, der Beklagte muss also $\frac{3}{4}$, der Kläger $\frac{1}{4}$ der Kosten zahlen. In Teil b) muss der Beklagte $\frac{3}{8}$ von 1600 Euro, also 600 Euro, und der Kläger $\frac{5}{8}$ von 1600 Euro, also 1000 Euro bezahlen.

In Beispiel (**10**) verhalten sich die beiden verwendeten Farben Blau und Rot wie 2 : 3. Also sind $\frac{2}{5}$ der Mischung blau und $\frac{3}{5}$ rot. Die Beispiele zeigen, wie Verhältnisangaben bei inneren Teilverhältnissen inhaltlich gleichwertig in **Bruchangaben** umgewandelt werden können.

5. Brüche und Quotienten Das Beispiel (**7**) kann auch als **Divisionsaufgabe** 2 : 3 gedeutet werden, der durch die Anteilvorstellung das Ergebnis $\frac{2}{3}$ zugeordnet wird, also $2 : 3 = \frac{2}{3}$ und allgemein $a : b = \frac{a}{b}$ für $a, b \in \mathbb{N}$.

6. Brüche als Lösungen linearer Gleichungen Im Beispiel (**8**) ist $\frac{2}{3}$ die Lösung der linearen Gleichung $3 \cdot x = 2$. Offensichtlich besteht zwischen diesem Aspekt und dem Quotientenaspekt $2 : 3 = \frac{2}{3}$ ein sehr enger Zusammenhang.

7. Brüche als Skalenwerte Im Beispiel (**6**) dient der Bruch $\frac{1}{2}$ zur genaueren Bezeichnung einer Stelle auf einer Skala – in diesem Fall bei einer Tankskala im Auto. Ein enger Zusammenhang zum Einsatz von Brüchen als Maßzahlen ist offensichtlich.

8. Quasikardinalität Dieser Gesichtspunkt kommt in den vorstehenden Beispielen **nicht** explizit vor. Er ist jedoch später beispielsweise bei der Addition oder Subtraktion insbesondere gleichnamiger Brüche hilfreich. Schreiben wir beispielsweise $\frac{3}{4}$ in der Form 3 Viertel, so ist die *Analogie* zum Einsatz von 3 als *Kardinalzahl* beim Ausdruck 3 Äpfel unübersehbar. Allgemein können wir Brüche $\frac{a}{b}$ in diesem Sinne „quasikardinal" als Größen mit der Maßzahl a und der Größeneinheit $\frac{1}{b}$ auffassen (vgl. auch Griesel [44], Padberg [126], Führer [31]).

3.1.2 Zwei zentrale Grundvorstellungen

Die vorgestellten Bruchzahlaspekte überlappen sich vielfach. Einige **Überlappungen** haben wir schon im vorstehenden Abschnitt genannt, einige weitere sollen hier knapp aufgeführt werden:

- Anteil und Maßzahl,
- Anteil und Operator,
- Anteil (Anteil mehrerer Ganzer) und Quotient,
- Quasikardinalität und Maßzahl.

Die vorstehend erwähnten Überlappungen belegen, dass der Aspekt **Anteil** für das Verständnis von Brüchen grundlegend ist und unter den verschiedenen Aspekten eine herausragende Rolle einnimmt. Diese Einschätzung teilen u. a. auch Pitkethly und Hunting [137] in ihrer gründlichen Metaanalyse mit dem Titel *A review of recent research in the area of initial fraction concepts*. Wir heben daher diesen Aspekt heraus als:

Grundvorstellung 1: Bruch als Anteil Hierbei haben wir im vorigen Abschnitt schon **zwei Teilaspekte** dieser Grundvorstellung benannt: Bruch als Anteil *eines* Ganzen (kontinuierlich, diskret) und Bruch als Anteil *mehrerer* Ganzer. Die folgenden drei Beispiele dienen nochmals der Verdeutlichung dieser beiden Teilaspekte der Grundvorstellung 1. Eine genauere Analyse finden Sie im Abschn. 3.2.

1. Vor Pia liegt ein Rechteck. Es ist in vier gleich große Teile unterteilt, drei davon sind blau. Welcher Anteil des Rechtecks ist blau? (kontinuierlich)
2. Vor Pia liegen 4 Perlen, 3 davon sind blau. Welcher Anteil der Perlen ist blau? (diskret)
3. Vier Mädchen teilen sich gerecht (gleichmäßig) drei Pizzas. Welchen Anteil erhält jedes Mädchen? (Bruch als Anteil mehrerer Ganzer)

Neben dieser Grundvorstellung 1 hat noch ein weiterer der oben genannten Aspekte eine größere Bedeutung für die Bruchrechnung. Wir heben ihn daher hier heraus als:

Grundvorstellung 2: Bruch als Operator Diese Grundvorstellung spielt insbesondere bei der **Multiplikation** von Brüchen eine wichtige Rolle.

Die folgenden beiden Beispiele dienen der Verdeutlichung dieser Grundvorstellung:

1. Färbe $\frac{3}{4}$ von dem Rechteck blau (kontinuierlich).
2. Lege $\frac{3}{4}$ von den 12 Perlen vor dir auf die linke Seite (diskret).

Auch bei der Grundvorstellung *Bruch als Operator* kann das Ganze kontinuierlich und diskret sein.

Aufgaben wie: „Bilde $\frac{3}{5}$ von 45.000 Euro" sind nach Prediger et al. [148] für Lernende aus zwei Gründen besonders schwierig: 1. Das Ganze (45.000 Euro) gibt mehr Elemente an als der Nenner (5). 2. Der Darstellungswechsel von grafisch dargestelltem Ganzen, z. B. Rechtecken, hier hin zu rein symbolisch gegebenem Ganzen (45.000 Euro) bereitet Schwierigkeiten. In dem genannten Artikel beschreiben Prediger et al. vier Förderelemente zur Förderung des Verständnisses dieses Aufgabentyps.

Die Anteil- und Operatorvorstellungen hängen offenkundig eng zusammen. Genauer gibt es jedoch folgende Unterschiede: Die Operator-Grundvorstellung betont stärker die **Herstellung**, also die *dynamische* Komponente, die Anteil-Grundvorstellung stärker das **Ergebnis**, also die *statische* Komponente bei Brüchen.

Der von einigen Forschern (z. B. Streefland [178]) ebenfalls herausgehobene **Verhältnisaspekt** ist zweifelsohne eine wichtige Komponente des Bruchbegriffs, ist jedoch für den Aufbau der Bruch*rechnung* nicht tragfähig. Er kann beispielsweise bei der Behandlung des Erweiterns und Kürzens sowie des Größenvergleichs hilfreich sein, ist allerdings z. B. zur Einführung der Addition von Brüchen unbrauchbar. Er legt nämlich eine andere – falsche – Additionsdefinition nahe und verursacht somit leicht typische Fehlvorstellungen (vgl. Führer [31]). Im Alltag treten zudem Verhältnisangaben häufiger als Anteile auf (Führer [32], Jahnke [80], zitiert nach Wartha [198], S. 59) und inhaltlich können viele Sachverhalte sowohl durch Anteile als auch Verhältnisse beschrieben werden (vgl. auch Streit/Barzel [180]).

3.1.3 Alternative Zugänge

Die aktuelle Form der Erarbeitung der Bruchrechnung im Mathematikunterricht stützt sich dominant auf die Grundvorstellung 1 *Bruch als Anteil* (kurz: Anteil-Grundvorstellung) sowie ergänzend – insbesondere im Bereich der Multiplikation – auf die Grundvorstellung 2 *Bruch als Operator* (kurz: Operator-Grundvorstellung).

Dies war im **Zeitablauf** keineswegs schon immer so. So dominierte beispielsweise in den 1970er und 1980er Jahren für rund 15 Jahre die Operator-Grundvorstellung in den deutschen Schulbüchern und die Anteil-Grundvorstellung spielte nur eine äußerst untergeordnete Rolle. Allerdings waren die Probleme mit dem Operatorkonzept insbesondere in seiner reinen Form, aber auch noch in der später modifizierten Form so gravierend, dass dieses Konzept heute schon seit rund 30 Jahren wieder weitgehend aus den Bruchrechenlehrgängen verschwunden ist. Wegen einer genaueren Beschreibung des Operatorkonzepts sowie insbesondere auch seiner Mängel verweisen wir hier auf Padberg ([126], S. 15–19, und [116], S. 106–169).

Neben dem Operatorkonzept werden in der Literatur zwei weitere Konzeptionen zur Behandlung der Bruchrechnung erwähnt und propagiert, die allerdings – anders als das Operatorkonzept – nie in nennenswertem Umfang explizit Eingang in die Schulbücher gefunden haben. Wir skizzieren sie im Folgenden knapp. Bei dem **Gleichungskonzept** werden Bruchzahlen als Lösungen linearer Gleichungen eingeführt, so beispielsweise $\frac{3}{4}$ als Lösung der Gleichung $4 \cdot x = 3$ oder $\frac{2}{3}$ als Lösung von $3 \cdot x = 2$ (vgl. Abschn. 3.1.1). Auf dieser Grundlage lassen sich dann mehr oder weniger gut das Erweitern und Kürzen von Brüchen sowie die Rechenoperationen einführen. Allerdings wird hierbei aus der Fülle von Bruchzahlaspekten nur ein einziger – nicht besonders breit vernetzter – Aspekt herausgegriffen. Hierauf die komplette Bruchrechnung aufzubauen – wie von Freudenthal ([28], S. 206) vorgeschlagen –, ist daher sehr einseitig, äußerst formal und wird den vielen Aspekten der Bruchzahlen nicht gerecht. Eine genauere Darstellung dieses Konzepts und insbesondere Hinweise auf die damit verbundenen gravierenden Probleme finden Sie bei Padberg [126], S. 19 f.

Eine weitere Konzeption ist das **Äquivalenzklassenkonzept**, bei dem die Idee der Bruchzahl als Klasse gleichwertiger („äquivalenter“) Brüche, die bei jedem Bruchrechenkonzept zumindest implizit thematisiert werden muss, explizit gemacht wird und Grundlage für den Bruchrechenlehrgang ist. Während dieser Weg an der Universität bei der Einführung der rationalen Zahlen weit verbreitet ist, spielt er in der Schulmathematik wegen seines hohen Abstraktionsgrades zu Recht keine Rolle. In Phasen der Betonung der *Wissenschaftsorientierung* beim Mathematikunterricht wurde von Verfechtern dieses Weges etwa mit folgenden Argumenten für ihn geworben: „Ich habe die Bruchrechnung der Schule nie verstanden. Erst in der Vorlesung zum Aufbau des Zahlensystems der Universität ist mir klargeworden, worum es geht. Man sollte doch den ganzen unmathematischen Kram [‚Pfannkuchenmethode bzw. Tortenmethode‘] lassen und sich gefälligst an dem üblichen Standard der Hochschulmathematik orientieren“ (zitiert nach Griesel ([43], S. 6). Dieser Zugangsweg ist zwar fachlich „sauber“, aber wegen seiner Überforderung der Lernenden und der fehlenden Praxisorientierung für die Schule nicht geeignet. Daher hat er sich in der Schulpraxis nie durchsetzen können. Für eine detailliertere Darstellung der Nachteile dieses Weges verweisen wir auf Padberg [126], S. 21 f.

3.2 Bruch als Anteil – zwei Teilaspekte

Wie schon in Abschn. 3.1.1 erwähnt, ist es sinnvoll, bei der Grundvorstellung *Bruch als Anteil* zwei Teilaspekte zu unterscheiden, nämlich Bruch als Anteil *eines* Ganzen und Bruch als Anteil *mehrerer* Ganzer. Letzteres ist – wie in Abschn. 3.1.1 schon erwähnt – eine Kurzformulierung für den Sachverhalt, dass das „neue“ Ganze aus mehreren „Ganzen“ besteht, etwa aus 3 Pizzas, die gleichmäßig (gerecht) an 4 Kinder verteilt werden. Hierbei ist der erste Teilaspekt offenkundig vorstellungsmäßig leichter.

3.2.1 Teilaspekt 1 – Anteil eines Ganzen

Beim *Einstieg* in die Bruchrechnung werden häufig zunächst Kreise verwendet, die anschaulich als Pizzas oder Torten gedeutet werden. Kreise bieten nämlich den Vorteil, dass so das Ganze besonders prägnant ist. Sobald die Lernenden Teile eines Ganzen selbst herstellen müssen, eignen sich hierfür allerdings Rechtecke und auch Strecken in vielen Situationen deutlich besser.

Ein gutes Beispiel für einen entsprechenden **Einstieg** ist das folgende Schulbuch (*Elemente der Mathematik* 5):

Teilen eines Ganzen in gleich große Teile
Teilen sich zwei Freunde gleichmäßig *eine* Pizza, so bekommt jeder eine *halbe* Pizza.

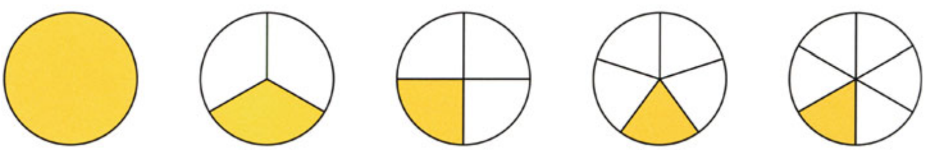
a) Wie viel Pizza bekommt jeder, wenn sich 3, 4, 5, 6 Freunde eine Pizza teilen? Zeichne auch.

b) Wie viele drittel, viertel, fünftel, sechstel Pizzas ergeben jeweils eine ganze Pizza?

1 *ganze* Pizza 1 *halbe* Pizza 1 *halbe* Pizza

1 *ganze* Pizza = 2 *halbe* Pizzas

a)



ganze Pizza drittel Pizza viertel Pizza fünftel Pizza sechstel Pizza

Bei 3 Freunden bekommt jeder eine *drittel* Pizza, bei 4 Freunden bekommt jeder eine *viertel* Pizza, bei 5 Freunden bekommt jeder eine fünftel Pizza, bei 6 Freunden bekommt jeder eine *sechstel* Pizza.

b) 1 *ganze* Pizza = 3 *drittel* Pizzas
1 *ganze* Pizza = 4 *viertel* Pizzas
1 *ganze* Pizza = 5 *fünftel* Pizzas
1 *ganze* Pizza = 6 *sechstel* Pizzas

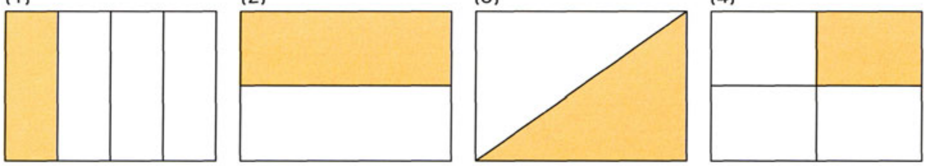
Die Pizza, also das Ganze, wird in dem Beispiel in 2, 3, 4, 5, 6, ... gleich große Teile zerlegt. So erhalten wir im Kontext von Pizzas Halbe, Drittel, Viertel, Fünftel, Sechstel, ... Neben dem Zahlwort wird parallel das zugehörige Zahlzeichen ($\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$) eingeführt und so die anschauliche Vorstellung verankert, dass **ein Drittel** ($\frac{1}{3}$) **eins von drei gleich großen Teilen eines Ganzen** oder ein Viertel ($\frac{1}{4}$) *eins* von vier gleich großen Teilen eines Ganzen bedeutet. Auf diesem Weg können die Stammbrüche anschaulich eingeführt und auch gleichzeitig gut die Erkenntnis gewonnen werden, dass 2 halbe Pizzas, 3 drittel Pizzas, 4 viertel Pizzas, ... jeweils *eine* ganze Pizza ergeben.

Das folgende Schulbuchbeispiel (*Mathematik heute* 5) verdeutlicht, dass Lernende bei **Rechtecken** Unterteilungen deutlich leichter selbst finden und darstellen können als beim Kreis. Außerdem gibt es bei Rechtecken oft mehrere verschiedene Darstellungen.

Auch ein Rechteck stellt ein Ganzes dar. Denke z. B. an einen Blechkuchen.

a) In wie viele gleich große Teile ist das Ganze zerlegt? Wie heißt ein solcher Teil?

(1) (2) (3) (4)



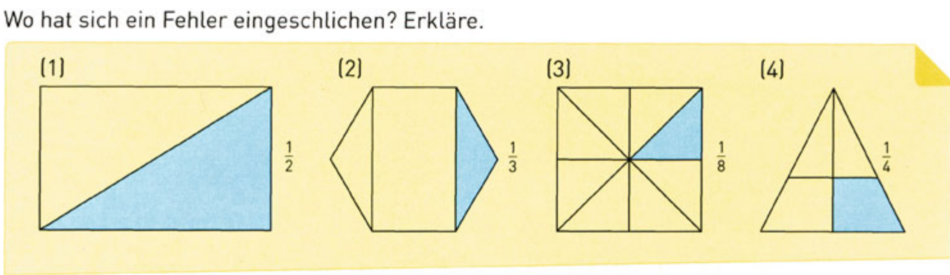
b) Nimm ein (rechteckiges) Blatt Papier. Färbe vom Ganzen
(1) ein Viertel; (2) ein Achtel; (3) ein Drittel; (4) ein Sechstel.
Falte dazu das Blatt geeignet.

© *Mathematik heute* 5 [S12], S. 171, Nr. 2a,b

Bei *Rechtecken* können wir Anteile gut *ikonisch* (zeichnerisch) darstellen. Durch **Falten** eines rechteckigen Blattes **Papier** können wir Anteile auch *enaktiv*, also durch Handlungen gewinnen. So erhalten wir besonders leicht Halbe, Viertel, Achtel, aber auch Drittel und Sechstel.

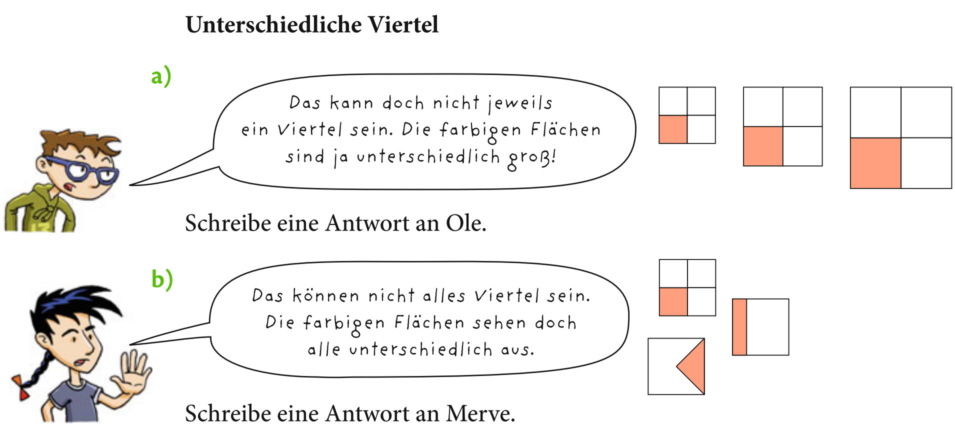
Neben Kreisen und Rechtecken eignen sich zur Darstellung von Brüchen auch gut Strecken oder – mit Einschränkungen – Quader.

Eine gute Möglichkeit, die Charakteristika von (Stamm-)Brüchen mittels Beispielen und Gegenbeispielen zu vertiefen, bilden die folgenden beiden Schulbuchbeispiele. Das erste Schulbuchbeispiel (*Mathematik heute* 5) klärt gut ab, dass es nicht ausreicht, das Ganze in drei Teile zu unterteilen, um $\frac{1}{3}$ darzustellen. Vielmehr ist zentral, dass **alle Teile jeweils gleich groß** sind.



© *Mathematik heute* 5 [S12], S. 172, Nr. 10

Wichtig ist aber auch die Einsicht, dass beispielsweise Viertel *keine* feste **„Größe"** haben, sondern unterschiedlich groß sein können, und dass sie sich auch in der **„Form"** stark unterscheiden können, wie das Schulbuch *mathewerkstatt 5* zunächst für Stammbrüche gut herausarbeitet:

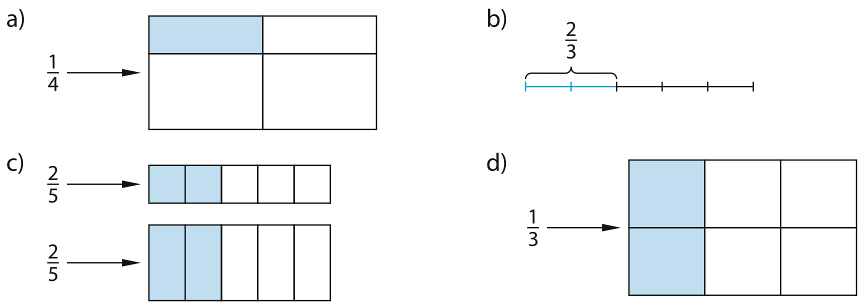


© *mathewerkstatt* 5 [S19], S. 108, Nr. 7 a,b

Zerlegen wir ein Ganzes in n gleich große Teile ($n \in \mathbb{N}$) und nehmen hiervon *ein* Teil, so beschreiben wir die entsprechenden Anteile – wie schon zu Beginn dieses Kapitels kurz erwähnt – speziell durch **Stammbrüche** $\frac{1}{n}$, also durch Brüche mit dem Zähler 1. Nehmen wir hiervon mehrere (m) Teile, so beschreiben wir den Anteil durch Brüche $\frac{m}{n}$. Der Nenner n gibt uns hierbei also an, in wie viele gleich große Teile wir ein Ganzes zerlegen, und der Zähler m, wie viele dieser Teile wir betrachten. Ist speziell $m < n$, so sprechen wir von **echten Brüchen**; gilt $m \geq n$, so sprechen wir von **unechten Brüchen**. In diesem Fall können wir – sofern der Zähler *kein* Vielfaches des Nenners ist – die Brüche auch als **gemischte Zahlen** schreiben (Beispiel: $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$). Ist der Zähler speziell ein Vielfaches des Nenners, so können wir diese Brüche sogar als natürliche Zahlen notieren (Beispiel: $\frac{3}{3} = 1$).

Völlig analog wie bislang bei den besonders leichten Stammbrüchen können und sollten die Charakteristika des Bruchbegriffs auch bei beliebigen Brüchen deutlich an Beispielen und Gegenbeispielen herausgearbeitet werden – etwa wie es das folgende Schulbuchbeispiel (*Fundamente der Mathematik* 6) zeigt:

Stolperstelle: Überprüfe die Zeichnungen und begründe, warum sie richtig oder falsch sind. Zeichne eine richtige Lösung ins Heft.

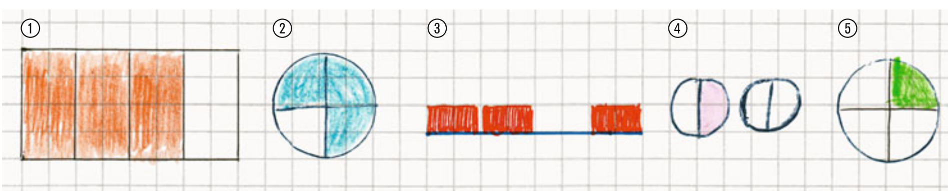


© *Fundamente der Mathematik* 6 [S9], S. 12, Nr. 9

Wichtig ist außerdem, dass die Schülerinnen und Schüler die Einsicht gewinnen, dass auch **Nicht-Stammbrüche** wie beispielsweise $\frac{3}{4}$ sowohl von der *Form* wie auch von der *Größe* her äußerst unterschiedlich aussehen können (vgl. *mathewerkstatt* 5):

Ein Bruch – verschiedene Formen

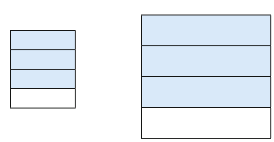
a) Fünf Kinder haben fünf verschiedene Bilder zum Bruch $\frac{3}{4}$ gezeichnet.



Begründe, warum alle Bilder den Bruch $\frac{3}{4}$ richtig darstellen.

b) $\frac{3}{4}$ kann sogar bei der gleichen Grundform unterschiedlich aussehen.
Zeichne zwei gleich große Rechtecke. Färbe auf unterschiedliche Weise jeweils $\frac{3}{4}$.
Zeichne auch bei einem Kreis und bei einer Strecke je zwei Möglichkeiten für $\frac{3}{4}$.

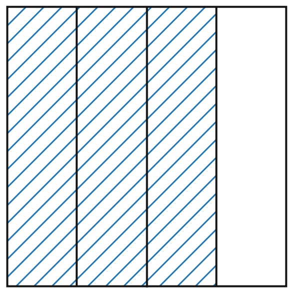
c) $\frac{3}{4}$ kann auch unterschiedlich groß sein.
Erkläre das anhand der beiden Rechtecke.



© *mathewerkstatt* 5 [S19], S. 103, Nr. 3 a,b,c

Neben der ikonischen Darstellung von Brüchen mittels Rechtecken, Kreisen und Strecken sowie der enaktiven Darstellung mittels Falten von rechteckigem Papier können wir Brüche nach Vorschlägen von Winter [214] auch gut enaktiv herstellen durch das probierend-korrigierende Rollen von Papierstreifen bzw. – breiter einsetzbar und tragfähiger – durch das Arbeiten mit Streifenmustern (für Details vgl. Padberg [126], S. 34 f.).

Zusammenfassend halten wir fest: Um den schraffierten Teil des nachfolgend dargestellten Rechtecks als $\frac{3}{4}$ zu identifizieren, müssen die Lernenden folgende Fragen richtig verstehen, beantworten und begründen können:



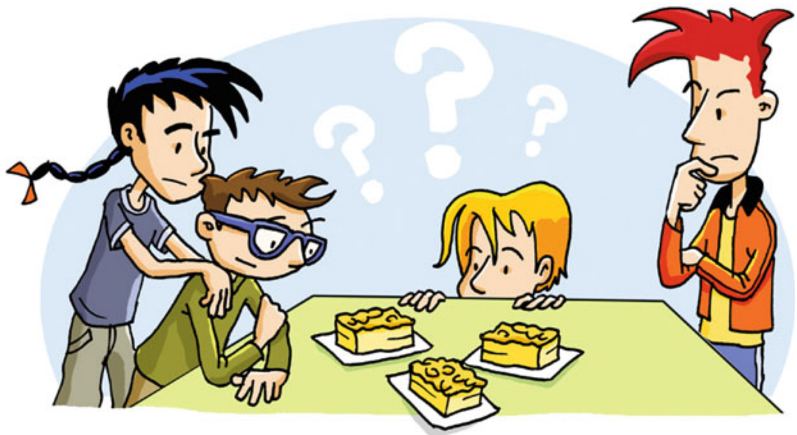
1. Was ist das Ganze?
2. In wie viele Teile ist das Ganze zerlegt worden?
3. Sind die Teile jeweils gleich groß?
4. Wie groß ist jedes Teil bezogen auf das Ganze?
5. Wie viele Teile sind hier (durch die Schraffur kenntlich gemacht) zusammengefasst worden?

Für den „umgekehrten" Weg, den Anteil $\frac{3}{4}$ eines Rechtecks zu schraffieren, müssen bei der Zeichnung ebenfalls obige Fragestellungen analog beachtet werden.

3.2.2 Teilaspekt 2 – Anteil mehrerer Ganzer

Der zweite Teilaspekt ist für Lernende deutlich komplizierter als der erste (vgl. Neumann [112], Padberg/Krüger [132]). Die Lernenden müssen nämlich hierbei einsehen, dass mehrere Ganze – zum Beispiel drei Stücke Streuselkuchen – das *neue* Ganze bilden, das gerecht verteilt werden soll (vgl. *mathewerkstatt* 5):

Auf dem Tisch liegen drei Stücke Streuselkuchen.
Auch den Kuchen wollen sich die vier Freunde gerecht untereinander teilen.



Zeichne ins Heft, wie du die drei Stücke aufteilen würdest.

© *mathewerkstatt* 5 [S19], S. 99, 3 b

Die vier Freunde im vorstehenden Schulbuchbeispiel können die drei Stücke Streuselkuchen auf dem Tisch beispielsweise folgendermaßen **gerecht verteilen**:

- Jeder bekommt von jedem der drei Stücke jeweils ein Viertel, also jeder insgesamt drei Viertel Stück Kuchen.
- Zunächst werden zwei Stücke Kuchen gerecht verteilt, jeder bekommt also ein halbes Stück. Anschließend wird das dritte Stück gerecht verteilt. Jeder bekommt ein Viertel, also jeder insgesamt drei Viertel Stück Kuchen.
- Einer der Freunde bekommt von jedem Stück ein Viertel, also insgesamt drei Viertel Stück Kuchen. Die drei übrigen Freunde bekommen jeweils das „Reststück", also ebenfalls drei Viertel Stück Kuchen.

In allen drei Fällen hat also jeder drei Viertel von einem Stück Streuselkuchen bekommen und von dem gesamten Streuselkuchen ein Viertel. Da wir die Streuselkuchenstücke wie Rechtecke auf verschiedene Arten halbieren oder auch vierteln können, gibt es **viele**

verschiedene Wege, die drei Streuselkuchenstücke gerecht an vier Personen zu verteilen. Schon Middleton/van den Heuvel-Panhuizen/Shew [108] beschreiben eindrucksvoll, wie variationsreich und kreativ Schülerinnen und Schüler das gerechte Verteilen von Sandwiches bearbeiten, Streefland ([179], [178], [176] u. a.) zeigt das gerechte Verteilen von Pizzas bei geeigneter Fragestellung. An dieser Stelle sollte im Mathematikunterricht auch thematisiert werden, dass sich *keineswegs* alle Dinge *gerecht* verteilen lassen – etwa durch die Fragestellung: „Welche der folgenden Dinge können an 3 Kinder gerecht verteilt werden: 2 Pizzas, 2 Euro, 2 Flaschen Apfelsaft, 2 Luftballons?“

Die **Division** wird im Bereich der **natürlichen Zahlen** unter anderem über das gerechte (gleichmäßige) Verteilen eingeführt (für genauere Details vgl. Padberg/Benz [127], S. 154 ff.). So gilt beispielsweise $8 : 4 = 2$, da beim gerechten Verteilen von 8 Äpfeln an 4 Personen jede Person 2 Äpfel erhält und entsprechend können wir im Bereich der natürlichen Zahlen über die Grundvorstellung des gerechten Verteilens bei jeder in $\mathbb{N}$ lösbaren Divisionsaufgabe das Ergebnis erhalten. Wegen der Aufgabe mit den 3 Stücken Kuchen und den vier Freunden ist es daher auch naheliegend, jetzt der in $\mathbb{N}$ unlösbaren Aufgabe $3 : 4$ in der Menge der **Bruchzahlen** das Ergebnis $\frac{3}{4}$ zuzuordnen und allgemein Aufgaben $m : n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ das – auf analogem Weg findbare – Ergebnis $\frac{m}{n}$. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt daher: $m : n = \frac{m}{n}$.

Nach Thematisierung der beiden Teilaspekte der Grundvorstellung *Bruch als Anteil* ist es wichtig, dass die Lernenden einsehen, dass **beide Teilaspekte gleichwertig** sind (vgl. hierzu auch Padberg [126], S. 38 f.). Eine gute Grundlage für zielführende Diskussionen bildet die folgende Aufgabe (*mathewerkstatt* 5):

Till und Pia erklären beide, was drei Fünftel bedeutet.

a) Zeichne zu Tills Erklärung ein Bild.

b) Was für ein Bild stellt Pia sich vor?

c)

Erkläre Merve an Hand der Bilder, warum dennoch beide Recht haben.

© *mathewerkstatt* 5 [S19], S. 103, Nr. 2