

Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II



Friedhelm Padberg
Sebastian Wartha

Didaktik der Bruchrechnung

5. Auflage



Springer Spektrum

Inhaltsverzeichnis

1	Zahlen, Operationen und Strategien „verstehen“ – einige Grundlagen . .	1
1.1	„Verstehen“ und Grundvorstellungen	1
1.2	Verstehen untersuchen	2
1.3	Aufbau von Grundvorstellungen	3
1.4	Überwinden von Grundvorstellungsumbrüchen	4
1.5	Bedeutung der Prozessorientierung	5
2	Ist die Bruchrechnung heute noch nötig?	7
2.1	Die Bruchrechnung ist überflüssig – einige häufiger genannte Argumente	7
2.2	Die Bruchrechnung ist keineswegs überflüssig – einige ausgewählte Argumente	8
2.2.1	Anschauliche Fundierung des Dezimalbruchbegriffs mittels Brüchen	9
2.2.2	Einsichtige Fundierung des Rechnens mit Dezimalbrüchen mittels Brüchen	10
2.2.3	Prävention und Intervention bei Problembereichen der Dezimalbruchrechnung mittels Brüchen	10
2.2.4	Leichtere Begründung algebraischer Eigenschaften von \mathbb{Q}^+ mittels Brüchen	11
2.2.5	Wahrscheinlichkeitsrechnung	12
2.2.6	Gleichungslehre	14
2.2.7	Algebra	15
2.2.8	Reichhaltige und vielseitige Möglichkeiten zur Prozessorientierung	16
2.3	Resümee	16
3	Zur Einführung von Brüchen	17
3.1	Zentrale Grundvorstellungen	17
3.1.1	Einige Verwendungssituationen von Brüchen	17
3.1.2	Zwei zentrale Grundvorstellungen	21
3.1.3	Alternative Zugänge	22

3.2	Bruch als Anteil – zwei Teilaspekte	24
3.2.1	Teilaspekt 1 – Anteil eines Ganzen	24
3.2.2	Teilaspekt 2 – Anteil mehrerer Ganzer	28
3.3	Bruch als Anteil – zwei sachorientierte Bemerkungen	31
3.4	Schreibweisen und Repräsentanten	31
3.5	Bruchalbum und Stationenlernen – zwei innovative Ansätze	33
3.6	Drei Grundaufgaben	34
3.7	Anschauliche Vorkenntnisse zu Brüchen	36
3.8	Ein unterrichtlicher Zugang zu den Bruchzahlen	37
3.9	Unterschiede zwischen den natürlichen Zahlen und Bruchzahlen	38
4	Erweitern/Kürzen von Brüchen	41
4.1	Anschauliche Vorkenntnisse	41
4.2	Gleichwertige Brüche – anschauliche Zugangswege	43
4.3	Erweitern – systematische Behandlung	47
4.4	Kürzen – systematische Behandlung	48
4.5	Variationsreiches Üben	50
4.6	Mögliche Problembereiche und Hürden/ Prävention und Intervention	52
4.7	Vertiefung	54
5	Größenvergleich von Brüchen	55
5.1	Anschauliche Vorkenntnisse	55
5.2	Anschauliche Wege zum Größenvergleich	57
5.3	Systematische Behandlung	62
5.4	Variationsreiches Üben	63
5.5	Mögliche Problembereiche und Hürden	64
5.6	Prävention und Intervention	67
5.7	Vertiefung	70
6	Addition und Subtraktion von Brüchen	73
6.1	Anschauliche Vorkenntnisse	73
6.2	Grundvorstellungen und anschauliche Wege zur Addition und Subtraktion von Brüchen	74
6.3	Addition und Subtraktion – systematische Behandlung	78
6.4	Gemischte Zahlen	79
6.5	Variationsreiches Üben	80
6.6	Mögliche Problembereiche und Hürden	82
6.6.1	Grundvorstellungen und Rechenkalkül	83
6.6.2	Anschauliche Vorstellungen – oft Fehlanzeige	84
6.6.3	Schwierigkeitsfaktoren	85
6.6.4	Abfolge im Schwierigkeitsgrad – ein Überblick	86

6.6.5	Bruch plus Bruch/Bruch minus Bruch	87
6.6.6	Kombinierter Fall (Bruch und natürliche Zahl)	90
6.7	Prävention und Intervention	91
6.8	Vertiefung	94
7	Multiplikation von Brüchen	99
7.1	Anschauliche Vorkenntnisse	100
7.2	Anschauliche Wege zur Multiplikation	101
7.3	Natürliche Zahl mal Bruch – Grundvorstellung und systematische Behandlung	105
7.4	Bruch mal natürliche Zahl – Grundvorstellung und systematische Behandlung	106
7.5	Bruch mal Bruch – Grundvorstellungen und systematische Behandlung	108
7.5.1	Grundvorstellung: Anteil vom Anteil	108
7.5.2	Grundvorstellung: Flächeninhalt	110
7.5.3	Vergleich beider Wege	111
7.6	Variationsreiches Üben	112
7.7	Mögliche Problembereiche und Hürden	114
7.7.1	Multiplizieren vergrößert immer	114
7.7.2	Abfolge im Schwierigkeitsgrad – ein Überblick	115
7.7.3	Multiplikation gleichnamiger Brüche	116
7.7.4	Multiplikation ungleichnamiger Brüche	117
7.7.5	Natürliche Zahl mal Bruch/Bruch mal natürliche Zahl	117
7.7.6	Multiplikation gemischter Zahlen	118
7.7.7	Regelformulierung und Begründung	119
7.8	Prävention und Intervention	120
7.9	Vertiefung	121
8	Division von Brüchen	125
8.1	Anschauliche Vorkenntnisse	125
8.2	Anschauliche Wege zur Division	128
8.3	Bruch durch natürliche Zahl – Grundvorstellung und systematische Behandlung	133
8.4	Bruch durch Bruch/Natürliche Zahl durch Bruch – Grundvorstellungen und systematische Behandlung	134
8.4.1	Grundvorstellung Messen	134
8.4.2	Grundvorstellung Umkehroperation	135
8.4.3	Vergleich der beiden Wege	137
8.5	Natürliche Zahl durch natürliche Zahl	138
8.6	Variationsreiches Üben	139

8.7	Mögliche Problembereiche und Hürden	140
8.7.1	Abfolge im Schwierigkeitsgrad – ein Überblick	140
8.7.2	Bruch durch Bruch	141
8.7.3	Bruch durch natürliche Zahl/Natürliche Zahl durch Bruch	142
8.7.4	Natürliche Zahl durch natürliche Zahl	143
8.7.5	Grundvorstellungsumbrüche bei der Division	143
8.7.6	Division von Brüchen und praktische Anwendungen	144
8.7.7	Regelformulierung und Begründung	145
8.8	Prävention und Intervention	146
8.9	Vertiefung	148
9	Brüche und natürliche Zahlen – viele Gemeinsamkeiten, aber auch starke Umbrüche in den Grundvorstellungen	151
10	Resümee Brüche	155
10.1	Vorkenntnisse über Brüche überraschend gering	155
10.2	Gründliche Fundierung des Bruchbegriffs erforderlich	155
10.3	Grundvorstellungen sorgfältig erarbeiten	156
10.4	Mögliche Problembereiche und Hürden geschickt thematisieren	158
10.5	Variationsreiches Üben und Vertiefen	159
11	Prozessorientierter Zugang zu Dezimalbrüchen	161
11.1	Zur Bedeutung von Dezimalbrüchen	161
11.2	Vorteile der Schreibweise als Dezimalbruch	162
11.3	Zielsetzung des Dezimalbruchlehrgangs	163
11.4	Bedeutung der Prozessorientierung und Vernetzung	164
11.5	Grundvorstellungen aufbauen	165
11.6	Überwinden von Grundvorstellungsumbrüchen	166
12	Veranschaulichungen zu Dezimalbrüchen	167
12.1	Rolle von Anschauungsmitteln	167
12.2	Kriterien zur Auswahl von Arbeitsmitteln	168
12.3	Konkrete Arbeitsmittel für Dezimalbrüche	169
12.3.1	Zehnersystemblöcke/Dienes-Material	169
12.3.2	Lineare Arithmetikblöcke	169
12.3.3	Decimats	170
12.3.4	Millimeterpapierquadrate	170
12.3.5	Stellenwerttafeln	171
12.3.6	Zahlengerade	171
12.4	Arbeitsmittel sind nicht selbsterklärend	172
12.5	Vom konkreten Material zur Grundvorstellung	173
12.6	Übersetzen in Sachsituationen	174

13	Erweiterung des Stellenwertsystems	177
13.1	Stellenwerte und deren Zusammenhänge	177
13.2	Mögliche Problembereiche und Hürden	179
13.3	Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern	180
14	Darstellen, Lesen und Schreiben von Dezimalbrüchen	181
14.1	Brüche in Stellenwertschreibweise darstellen	181
14.2	Schreib- und Sprechweisen	182
14.3	Mögliche Problembereiche und Hürden	183
14.3.1	Probleme beim Übersetzen in eine nichtsymbolische Darstellung	183
14.3.2	Probleme beim Lesen und Schreiben	184
14.4	Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern	186
14.5	Variationsreiches Üben und Vertiefen	187
15	Erweitern und Kürzen bei Dezimalbrüchen	191
15.1	Verfeinern und Vergrößern einer Unterteilung	191
15.2	Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern	192
16	Größenvergleich und Anordnung bei Dezimalbrüchen	195
16.1	Wege zum Größenvergleich	195
16.1.1	Über die Stellenwerte an flächigen Veranschaulichungen	195
16.1.2	Über die Zahlengerade	196
16.1.3	Über Größen	196
16.1.4	Über Stellenwerttafeln	196
16.1.5	Beispiel	196
16.1.6	Vergleich der verschiedenen Wege	196
16.2	Anordnung von Dezimalbrüchen	198
16.3	Mögliche Problembereiche und Hürden	198
16.3.1	Probleme beim Vergleichen von Dezimalbrüchen	198
16.3.2	Probleme bei der Anordnung von Dezimalbrüchen	201
16.4	Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern	201
16.5	Variationsreiches Üben und Vertiefen	203
17	Zusammenhang zwischen Brüchen und Dezimalbrüchen	207
17.1	Umwandlung von Bruch- in Dezimalbruchschreibweise	207
17.2	Umwandlung von Dezimalbruch- in Bruchschreibweise	210
17.3	Mögliche Problembereiche und Hürden	211
17.4	Typische Fehlerstrategien bei der Umwandlung zwischen Dezimalbruch- und Bruchschreibweise	212
17.5	Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern	213

18	Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen	215
18.1	Grundvorstellungen zur Addition und Subtraktion	215
18.2	Rechenstrategien und -methoden zur Addition und Subtraktion	216
18.3	Operative Additions- und Subtraktionsstrategien	217
18.4	Stellenweises Rechnen und schriftlicher Algorithmus	218
18.5	Weitere Strategien	220
18.5.1	Rechnen im kleinsten Stellenwert	220
18.5.2	Zehnerbrüche	221
18.5.3	Größen	221
18.6	Zusammenfassung und Bewertung	222
18.7	Lösungsquoten und -wege	223
18.8	Mögliche Problembereiche und Hürden	224
18.8.1	Stellenwertprobleme	224
18.8.2	Komma-trennt-Strategie	225
18.9	Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern	227
18.10	Variationsreiches Üben und Vertiefen	228
19	Multiplikation von Dezimalbrüchen	231
19.1	Grundvorstellungen zur Multiplikation	231
19.2	Multiplizieren von Stellenwerten	234
19.2.1	Multiplikation mit Zehnerpotenzen	234
19.2.2	Multiplikation mit Stellenwerten kleiner 1	235
19.3	Strategien zur Berechnung von Multiplikationstermen	236
19.3.1	Nutzen des Flächeninhalts am Rechteckmodell	236
19.3.2	Malkreuz	237
19.3.3	Größen	237
19.3.4	Rechnen mit Zehnerbrüchen	239
19.3.5	Rechnen mit kleinsten Stellenwerten	239
19.3.6	Regel zur Multiplikation von Dezimalbrüchen	239
19.3.7	Sonderfall: Multiplikation mit natürlichen Zahlen	240
19.4	Mögliche Problembereiche und Hürden	240
19.4.1	Gering ausgeprägte Grundvorstellungen	240
19.4.2	Fehlvorstellungen	241
19.4.3	Probleme bei Rechenstrategien	242
19.5	Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern	245
19.5.1	Diagnostische Aufgaben und Beobachtungsschwerpunkte	245
19.5.2	Fördervorschläge: Grundvorstellung und Grundvorstellungsumbruch Multiplikation	246
19.5.3	Fördervorschläge: Rechenstrategien	247
19.6	Variationsreiches Üben und Vertiefen	248

20	Division von Dezimalbrüchen	251
20.1	Grundvorstellungen zur Division	251
20.2	Strategien zur Division durch Dezimalbrüche	252
20.2.1	Anschauliche Division am Modell	252
20.2.2	Division über Zehnerbrüche	253
20.2.3	Rückgriff auf Größen	253
20.2.4	Umkehroperation	254
20.2.5	Gleichsinniges Verändern	254
20.3	Sonderfall: Division durch Zehnerpotenzen	256
20.4	Sonderfall: Divisionsstrategien Dezimalbruch geteilt durch natürliche Zahl	257
20.5	Mögliche Problembereiche und Hürden	258
20.5.1	Fehlende Grundvorstellungen	258
20.5.2	Fehlerstrategien	259
20.6	Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern	263
20.6.1	Diagnostische Aufgaben	263
20.6.2	Fördervorschläge	263
20.7	Variationsreiches Üben und Vertiefen	264
20.7.1	Wahl der Rechenoperation	264
20.7.2	Divisionsstrategien	265
21	Runden, Überschlagen und Schätzen	269
21.1	Runden	270
21.2	Überschlagen von Rechenausdrücken	271
21.3	Schätzen von Zahlen und Größen	272
21.4	Mögliche Problembereiche und Hürden	273
21.5	Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern	274
21.6	Variationsreiches Üben und Vertiefen	275
22	Resümee und Konsequenzen	277
22.1	Zielsetzung: Verstehen und Prozesse	277
22.2	Modelle: Tragfähigkeit statt Vielfalt	278
22.3	Inhalte: Zahlen statt Ziffern	279
22.4	Zahlvorstellungen im Stellenwertsystem	279
22.5	Vorwissen aufgreifen, gegenüberstellen, Umbrüche vollziehen	280
22.6	Probleme bei mangelnden Grundvorstellungen	281
22.7	Fehlerstrategien beim syntaktischen Arbeiten	281
22.8	Fehlvorstellungen	282
22.9	Diagnose: Erfassung von Prozessen	283

22.10 Förderung und Förderkonzepte	283
22.10.1 Aktivieren von Grundvorstellungen	283
22.10.2 Überwinden von Fehlvorstellungen	284
22.10.3 Fehlerstrategien erkennen und überwinden	285
22.11 Vernetzung: eine Herausforderung	286
Diagnostische Tests	289
Zitierte Literatur	291
Zitierte Schulbücher	305
Vertiefende Literatur	307
Bisher erschienene Bände der Reihe Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II	315

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns intensiv und unter vielen verschiedenen Gesichtspunkten mit der Einführung der Brüche im Mathematikunterricht. Eine anschauliche, gut gelungene Einführung ist für die gesamte Bruchrechnung von zentraler Bedeutung. Werden nämlich an dieser Stelle des Unterrichts *keine tragfähigen* Grundlagen gelegt, sind heftige Probleme im weiteren Unterrichtsverlauf für die Schülerinnen und Schüler vorprogrammiert.

3.1 Zentrale Grundvorstellungen

Brüche besitzen viele *verschiedene* Gesichter und nicht nur *einen* formalisierten Schattenriss (Hefendehl-Hebeker [63]). Wer daher die Bruchrechnung wirklich verstehen und nicht nur Brüche nach auswendig gelernten, fehleranfälligen Regeln manipulieren will, muss zuvor diese Gesichter gründlich betrachtet und ihre Zusammenhänge verstanden haben.

3.1.1 Einige Verwendungssituationen von Brüchen

Wir verwenden Brüche in **sehr unterschiedlichen Situationen und Kontexten**, wie die folgenden Beispiele belegen:

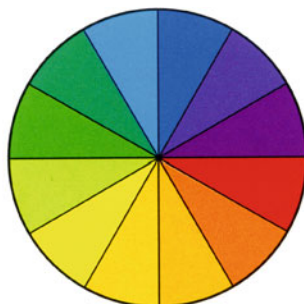
- (1) Max hat die Schinkenpizza in vier gleich große Stücke geschnitten. Sarah isst 3 Stücke. Welchen Teil der Pizza hat sie insgesamt gegessen?
- (2) Unser Körper besteht zu $\frac{3}{5}$ seines Gewichts aus Wasser. Melanie wiegt 30 kg. Wie viel Wasser enthält ihr Körper?
- (3) Die Tombola beim Schulfest hat 1236 Euro Einnahmen erbracht. $\frac{3}{4}$ hiervon werden an ein Kinderdorf überwiesen. Wie viel Euro erhält das Kinderdorf?

(4)

Farbkreis

In dem Bild rechts ist ein Farbkreis abgebildet.

- » Wie viele Farben sind dargestellt?
- » Welcher Anteil des Farbkreises ist gelb gefärbt?
Welcher Anteil des Kreises ist mit Grün-Tönen gefärbt?
- » Wie groß ist der Anteil am Farbkreis an Rot- und Orange-Farbtönen?



© *Mathematik heute 6*, [S13], S. 43 oben

- (5) Wie viel Zentimeter hat $\frac{1}{2}$ m? Wie viel Minuten dauert $\frac{3}{4}$ Stunde? Wie viel Gramm hat $\frac{1}{4}$ kg?
- (6) Der Zeiger meiner Tankuhr steht genau in der Mitte zwischen $\frac{1}{2}$ und 1.
- (7)

Tanja, Melanie und Sarah haben Geld geschenkt bekommen. Es reicht nur für zwei Pizzas. Sie wollen gerecht teilen. Jedes Mädchen soll gleich viel bekommen. Welchen Anteil an einer Pizza bekommt jedes Mädchen?



© *Elemente der Mathematik 5* [S3], S. 236 oben

- (8) Ist die Gleichung $3 \cdot x = 2$ lösbar? Wie lautet ggf. die Lösung?
- (9)

Schuldig oder nicht schuldig?

Oft wird ein Urteil gesprochen, bei dem nicht eindeutig der Beklagte oder der Kläger schuldig ist. Beide haben eine Teilschuld und müssen gemeinsam die Kosten des Gerichtsverfahrens tragen.

- a) „Die Kosten des Verfahrens trägt zu drei Teilen der Beklagte und zu einem Teil der Kläger.“ Welchen Bruchteil der Gerichtskosten müssen Kläger und Beklagter in diesem Fall bezahlen?
- b) In einem anderen Fall entscheidet das Gericht: „Die Kosten des Verfahrens in Höhe von 1600 Euro werden zwischen Beklagtem und Kläger im Verhältnis 3 zu 5 aufgeteilt.“ Wie viel müssen die beiden Streitparteien jeweils bezahlen?

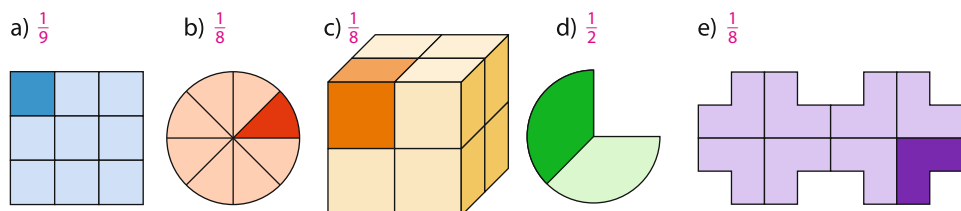
© *Mathematik Neue Wege 5* [S17], S. 232, Nr. 21

- (10) Pia will die Wände ihres Zimmers violett streichen. Sie kauft dazu 2 Dosen mit blauer und 3 Dosen mit roter Farbe und mischt hieraus die violette Farbe. Alle Dosen sind

gleich groß. Welcher Bruchteil der Mischung ist blaue Farbe, welcher Bruchteil rote Farbe?

(11) In Peters Klasse sind 28 Kinder. Davon kommen 7 zu Fuß und 14 mit dem Rad in die Schule. Welcher Anteil der Klasse kommt zu Fuß, welcher mit dem Rad?

(12) Welcher Anteil ist dunkel gefärbt?



© *Fundamente der Mathematik 5* [S7], S. 153, Nr. 4

(13) Du warst gestern eine viertel Stunde zu spät in der Tennishalle. Unser erster Satz hat $\frac{3}{4}$ Stunde gedauert.

Betrachten wir die vorstehenden Beispiele genauer, so können wir mindestens die folgenden unterschiedlichen Verwendungssituationen bei Brüchen erkennen:

1. Bruch als Anteil Analysieren wir die Beispiele (1), (4) und (12) genauer, so wird hier jeweils der betreffende **Anteil eines Ganzen** gesucht. Bei (1) ist das Ganze die Schinkenpizza, bei (4) der Farbkreis und bei (12) sind dies jeweils völlig unterschiedliche Figuren (Quadrat, Kreis, Würfel, Teil eines Kreises, ein Vieleck). Hierbei ist die Situation bei (12) besonders einfach. Es wird hier jede Figur restlos in gleich große Teile zerlegt und *ein* Teil dunkel gefärbt. Sein Anteil an dem jeweiligen Ganzen muss bestimmt werden. Diesen Anteil können wir durch besonders einfache Brüche, nämlich durch **Stammbrüche** bezeichnen, also durch Brüche, bei denen der Zähler 1 ist. Bei (1) muss dagegen das Ganze *zunächst* in vier gleich große Teile zerschnitten bzw. bei (4) beim Farbkreis in 12 gleich große Teile unterteilt werden. *Ein* Teil beträgt also $\frac{1}{4}$ bzw. $\frac{1}{12}$ des jeweiligen Ganzen. *Danach* werden dann hiervon jeweils *mehrere* Teile genommen und der so erhaltene *Anteil vom Ganzen* bestimmt. Sarah hat also nicht $\frac{1}{4}$, sondern das Dreifache, also $\frac{3}{4}$ der Schinkenpizza gegessen, und vom Farbkreis ist nicht nur $\frac{1}{12}$, sondern $\frac{3}{12}$ in Grün-Tönen gefärbt. Hierbei kann der Anteil auch größer als 1 sein, wie wir im weiteren Verlauf noch genauer sehen werden. Bei Brüchen gibt also der **Nenner** an, in wie viele gleich große Teile wir das Ganze zerschneiden oder zerlegen, und der **Zähler**, wie viele Teile wir hiervon nehmen bzw. betrachten.

Bislang war das Ganze in unseren Beispielen *ein einziges* geometrisches Gebilde wie beispielsweise ein Kreis oder ein Rechteck. Im Beispiel (11) bilden dagegen die **28 Schüler** einer Klasse das Ganze. Das Ganze muss also bei der Anteilbestimmung nicht *kontinuierlich* sein (wie bei den geometrischen Gebilden), es kann auch *diskret* sein.

Von ganz anderer Struktur ist das Beispiel (7). Das Ganze ist hier nicht mehr – wie bislang – *eine* Pizza, sondern *zwei* Pizzas. Dieses neue Ganze soll gerecht verteilt werden (Verteilsituation). Wir sprechen in diesem Fall vom Bruch als **Anteil mehrerer Ganzer**, wobei diese Kurzformulierung beinhaltet, dass das „neue“ Ganze aus mehreren Ganzen besteht – wie im Beispiel (7) aus zwei Pizzas. Wir gehen auf diese beiden Teilaspekte der Grundvorstellung **Bruch als Anteil** (Anteil eines Ganzen, Anteil mehrerer Ganzer) im Abschn. 3.2 noch genauer ein.

Etwas anders als wir unterscheiden Schink [161] und Wessel [212] *drei* Teilaspekte. Hierbei entspricht der dritte Teilaspekt „relativer Anteil von Mengen“ unserem Teilaspekt „Anteil eines Ganzen“ in der diskreten Version.

2. Bruch als Maßzahl In den Beispielen (5) und (13) sind die Brüche **Maßzahlen**. Die Brüche treten darum in diesen Sachsituationen kombiniert mit einer Maßeinheit auf und bezeichnen Größen.

3. Bruch als Operator In den Beispielen (2) und (3) werden die Brüche offenbar wiederum anders eingesetzt. Hier werden die Brüche zur knappen Beschreibung von auf Größen anzuwendenden **multiplikativen Handlungsanweisungen** benutzt. In (2) muss $\frac{3}{5}$ von 30 kg und in (3) $\frac{3}{4}$ von 1236 Euro bestimmt werden. Den **Operator** „ $\frac{3}{5}$ von“ (in der Literatur wird dieser Ansatz auch **Von-Ansatz** genannt) kann man sich zusammengesetzt vorstellen aus „teile durch 5“ (kurz (: 5), Divisionsoperator) und „verdreifache“ (kurz ($\cdot 3$), Multiplikationsoperator). Wir können nachweisen, dass die Reihenfolge von Divisionsoperator und Multiplikationsoperator stets vertauscht werden darf (Padberg [126]) und darum bei der Bestimmung von „ $\frac{3}{5}$ von 30 kg“ entweder zunächst durch 5 dividiert und danach das Ergebnis verdreifacht oder umgekehrt zunächst verdreifacht und dann durch 5 dividiert wird (letzteres ist hier offenbar ungünstiger). Völlig analog können wir auch bei „ $\frac{3}{4}$ von 1236 Euro“ vorgehen.

In den beiden genannten Beispielen ist das Ganze eine diskrete Menge (1236 Euro beispielsweise vorgestellt als 1236 1-Euro-Stücke, 30 kg als 30 1-Kilogramm-Stücke). Aber auch bei der Operator-Grundvorstellung kann das Ganze kontinuierlich sein wie im Beispiel: „Bilde $\frac{3}{4}$ von diesem Rechteck“.

4. Brüche und Verhältnisse In den Beispielen (9) und (10) kommen **Verhältnisse** vor. Bei (9) werden die Kosten in Teil a) offenbar im Verhältnis 3 : 1 aufgeteilt, der Beklagte muss also $\frac{3}{4}$, der Kläger $\frac{1}{4}$ der Kosten zahlen. In Teil b) muss der Beklagte $\frac{3}{8}$ von 1600 Euro, also 600 Euro, und der Kläger $\frac{5}{8}$ von 1600 Euro, also 1000 Euro bezahlen.

In Beispiel (10) verhalten sich die beiden verwendeten Farben Blau und Rot wie 2 : 3. Also sind $\frac{2}{5}$ der Mischung blau und $\frac{3}{5}$ rot. Die Beispiele zeigen, wie Verhältnisangaben bei inneren Teilverhältnissen inhaltlich gleichwertig in **Bruchangaben** umgewandelt werden können.

5. Brüche und Quotienten Das Beispiel (7) kann auch als **Divisionsaufgabe** 2 : 3 gedeutet werden, der durch die Anteilvorstellung das Ergebnis $\frac{2}{3}$ zugeordnet wird, also $2 : 3 = \frac{2}{3}$ und allgemein $a : b = \frac{a}{b}$ für $a, b \in \mathbb{N}$.

6. Brüche als Lösungen linearer Gleichungen Im Beispiel (8) ist $\frac{2}{3}$ die Lösung der linearen Gleichung $3 \cdot x = 2$. Offensichtlich besteht zwischen diesem Aspekt und dem Quotientenaspekt $2 : 3 = \frac{2}{3}$ ein sehr enger Zusammenhang.

7. Brüche als Skalenwerte Im Beispiel (6) dient der Bruch $\frac{1}{2}$ zur genaueren Bezeichnung einer Stelle auf einer Skala – in diesem Fall bei einer Tankskala im Auto. Ein enger Zusammenhang zum Einsatz von Brüchen als Maßzahlen ist offensichtlich.

8. Quasikardinalität Dieser Gesichtspunkt kommt in den vorstehenden Beispielen **nicht** explizit vor. Er ist jedoch später beispielsweise bei der Addition oder Subtraktion insbesondere gleichnamiger Brüche hilfreich. Schreiben wir beispielsweise $\frac{3}{4}$ in der Form 3 Viertel, so ist die *Analogie* zum Einsatz von 3 als *Kardinalzahl* beim Ausdruck 3 Äpfel unübersehbar. Allgemein können wir Brüche $\frac{a}{b}$ in diesem Sinne „quasikardinal“ als Größen mit der Maßzahl a und der Größeneinheit $\frac{1}{b}$ auffassen (vgl. auch Griesel [44], Padberg [126], Führer [31]).

3.1.2 Zwei zentrale Grundvorstellungen

Die vorgestellten Bruchzahlaspekte überlappen sich vielfach. Einige **Überlappungen** haben wir schon im vorstehenden Abschnitt genannt, einige weitere sollen hier knapp aufgeführt werden:

- Anteil und Maßzahl,
- Anteil und Operator,
- Anteil (Anteil mehrerer Ganzer) und Quotient,
- Quasikardinalität und Maßzahl.

Die vorstehend erwähnten Überlappungen belegen, dass der Aspekt **Anteil** für das Verständnis von Brüchen grundlegend ist und unter den verschiedenen Aspekten eine herausragende Rolle einnimmt. Diese Einschätzung teilen u. a. auch Pitkethly und Hunting [137] in ihrer gründlichen Metaanalyse mit dem Titel *A review of recent research in the area of initial fraction concepts*. Wir heben daher diesen Aspekt heraus als:

Grundvorstellung 1: Bruch als Anteil Hierbei haben wir im vorigen Abschnitt schon **zwei Teilaspekte** dieser Grundvorstellung benannt: Bruch als Anteil *eines* Ganzen (kontinuierlich, diskret) und Bruch als Anteil *mehrerer* Ganzer. Die folgenden drei Beispiele dienen nochmals der Verdeutlichung dieser beiden Teilaspekte der Grundvorstellung 1. Eine genauere Analyse finden Sie im Abschn. 3.2.

1. Vor Pia liegt ein Rechteck. Es ist in vier gleich große Teile unterteilt, drei davon sind blau. Welcher Anteil des Rechtecks ist blau? (kontinuierlich)
2. Vor Pia liegen 4 Perlen, 3 davon sind blau. Welcher Anteil der Perlen ist blau? (diskret)
3. Vier Mädchen teilen sich gerecht (gleichmäßig) drei Pizzas. Welchen Anteil erhält jedes Mädchen? (Bruch als Anteil mehrerer Ganzer)

Neben dieser Grundvorstellung 1 hat noch ein weiterer der oben genannten Aspekte eine größere Bedeutung für die Bruchrechnung. Wir heben ihn daher hier heraus als:

Grundvorstellung 2: Bruch als Operator Diese Grundvorstellung spielt insbesondere bei der **Multiplikation** von Brüchen eine wichtige Rolle.

Die folgenden beiden Beispiele dienen der Verdeutlichung dieser Grundvorstellung:

1. Färbe $\frac{3}{4}$ von dem Rechteck blau (kontinuierlich).
2. Lege $\frac{3}{4}$ von den 12 Perlen vor dir auf die linke Seite (diskret).

Auch bei der Grundvorstellung *Bruch als Operator* kann das Ganze kontinuierlich und diskret sein.

Aufgaben wie: „Bilde $\frac{3}{5}$ von 45.000 Euro“ sind nach Prediger et al. [148] für Lernende aus zwei Gründen besonders schwierig: 1. Das Ganze (45.000 Euro) gibt mehr Elementen an als der Nenner (5). 2. Der Darstellungswechsel von grafisch dargestelltem Ganzen, z. B. Rechtecken, hier hin zu rein symbolisch gegebenem Ganzen (45.000 Euro) bereitet Schwierigkeiten. In dem genannten Artikel beschreiben Prediger et al. vier Förderelemente zur Förderung des Verständnisses dieses Aufgabentyps.

Die Anteil- und Operatorvorstellungen hängen offenkundig eng zusammen. Genauer gibt es jedoch folgende Unterschiede: Die Operator-Grundvorstellung betont stärker die **Herstellung**, also die *dynamische* Komponente, die Anteil-Grundvorstellung stärker das **Ergebnis**, also die *statische* Komponente bei Brüchen.

Der von einigen Forschern (z. B. Streefland [178]) ebenfalls herausgehobene **Verhältnisaspekt** ist zweifelsohne eine wichtige Komponente des Bruchbegriffs, ist jedoch für den Aufbau der *Bruchrechnung* nicht tragfähig. Er kann beispielsweise bei der Behandlung des Erweiterns und Kürzens sowie des Größenvergleichs hilfreich sein, ist allerdings z. B. zur Einführung der Addition von Brüchen unbrauchbar. Er legt nämlich eine andere – falsche – Additionsdefinition nahe und verursacht somit leicht typische Fehlvorstellungen (vgl. Führer [31]). Im Alltag treten zudem Verhältnisangaben häufiger als Anteile auf (Führer [32], Jahnke [80], zitiert nach Wartha [198], S. 59) und inhaltlich können viele Sachverhalte sowohl durch Anteile als auch Verhältnisse beschrieben werden (vgl. auch Streit/Barzel [180]).

3.1.3 Alternative Zugänge

Die aktuelle Form der Erarbeitung der Bruchrechnung im Mathematikunterricht stützt sich dominant auf die Grundvorstellung 1 *Bruch als Anteil* (kurz: Anteil-Grundvorstellung) sowie ergänzend – insbesondere im Bereich der Multiplikation – auf die Grundvorstellung 2 *Bruch als Operator* (kurz: Operator-Grundvorstellung).

Dies war im **Zeitablauf** keineswegs schon immer so. So dominierte beispielsweise in den 1970er und 1980er Jahren für rund 15 Jahre die Operator-Grundvorstellung in den deutschen Schulbüchern und die Anteil-Grundvorstellung spielte nur eine äußerst untergeordnete Rolle. Allerdings waren die Probleme mit dem Operatorkonzept insbesondere in seiner reinen Form, aber auch noch in der später modifizierten Form so gravierend, dass dieses Konzept heute schon seit rund 30 Jahren wieder weitgehend aus den Bruchrechenlehrgängen verschwunden ist. Wegen einer genaueren Beschreibung des Operatorkonzepts sowie insbesondere auch seiner Mängel verweisen wir hier auf Padberg ([126], S. 15–19, und [116], S. 106–169).

Neben dem Operatorkonzept werden in der Literatur zwei weitere Konzeptionen zur Behandlung der Bruchrechnung erwähnt und propagiert, die allerdings – anders als das Operatorkonzept – nie in nennenswertem Umfang explizit Eingang in die Schulbücher gefunden haben. Wir skizzieren sie im Folgenden knapp. Bei dem **Gleichungskonzept** werden Bruchzahlen als Lösungen linearer Gleichungen eingeführt, so beispielsweise $\frac{3}{4}$ als Lösung der Gleichung $4 \cdot x = 3$ oder $\frac{2}{3}$ als Lösung von $3 \cdot x = 2$ (vgl. Abschn. 3.1.1). Auf dieser Grundlage lassen sich dann mehr oder weniger gut das Erweitern und Kürzen von Brüchen sowie die Rechenoperationen einführen. Allerdings wird hierbei aus der Fülle von Bruchzahlaspekten nur ein einziger – nicht besonders breit vernetzter – Aspekt herausgegriffen. Hierauf die komplette Bruchrechnung aufzubauen – wie von Freudenthal ([28], S. 206) vorgeschlagen –, ist daher sehr einseitig, äußerst formal und wird den vielen Aspekten der Bruchzahlen nicht gerecht. Eine genauere Darstellung dieses Konzepts und insbesondere Hinweise auf die damit verbundenen gravierenden Probleme finden Sie bei Padberg [126], S. 19 f.

Eine weitere Konzeption ist das **Äquivalenzklassenkonzept**, bei dem die Idee der Bruchzahl als Klasse gleichwertiger („äquivalenter“) Brüche, die bei jedem Bruchrechenkonzept zumindest implizit thematisiert werden muss, explizit gemacht wird und Grundlage für den Bruchrechenlehrgang ist. Während dieser Weg an der Universität bei der Einführung der rationalen Zahlen weit verbreitet ist, spielt er in der Schulmathematik wegen seines hohen Abstraktionsgrades zu Recht keine Rolle. In Phasen der Betonung der *Wissenschaftsorientierung* beim Mathematikunterricht wurde von Verfechtern dieses Weges etwa mit folgenden Argumenten für ihn geworben: „Ich habe die Bruchrechnung der Schule nie verstanden. Erst in der Vorlesung zum Aufbau des Zahlensystems der Universität ist mir klargeworden, worum es geht. Man sollte doch den ganzen unmathematischen Kram [„Pfannkuchenmethode bzw. Tortenmethode“] lassen und sich gefälligst an dem üblichen Standard der Hochschulmathematik orientieren“ (zitiert nach Griesel ([43], S. 6). Dieser Zugangsweg ist zwar fachlich „sauber“, aber wegen seiner Überforderung der Lernenden und der fehlenden Praxisorientierung für die Schule nicht geeignet. Daher hat er sich in der Schulpraxis nie durchsetzen können. Für eine detailliertere Darstellung der Nachteile dieses Weges verweisen wir auf Padberg [126], S. 21 f.

3.2 Bruch als Anteil – zwei Teilaspekte

Wie schon in Abschn. 3.1.1 erwähnt, ist es sinnvoll, bei der Grundvorstellung *Bruch als Anteil* zwei Teilaspekte zu unterscheiden, nämlich Bruch als Anteil *eines* Ganzen und Bruch als Anteil *mehrerer* Ganzer. Letzteres ist – wie in Abschn. 3.1.1 schon erwähnt – eine Kurzformulierung für den Sachverhalt, dass das „neue“ Ganze aus mehreren „Ganzen“ besteht, etwa aus 3 Pizzas, die gleichmäßig (gerecht) an 4 Kinder verteilt werden. Hierbei ist der erste Teilaspekt offenkundig vorstellungsmäßig leichter.

3.2.1 Teilaspekt 1 – Anteil eines Ganzen

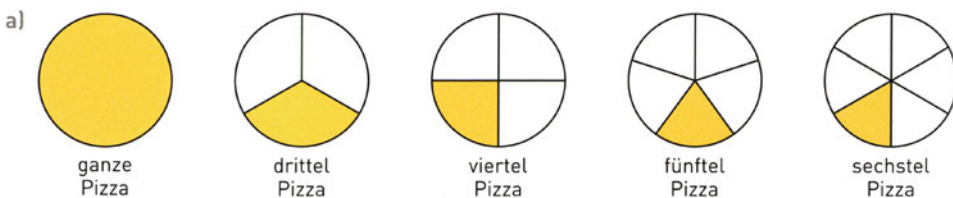
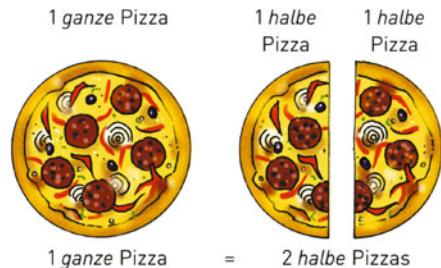
Beim *Einstieg* in die Bruchrechnung werden häufig zunächst Kreise verwendet, die anschaulich als Pizzas oder Torten gedeutet werden. Kreise bieten nämlich den Vorteil, dass so das Ganze besonders prägnant ist. Sobald die Lernenden Teile eines Ganzen selbst herstellen müssen, eignen sich hierfür allerdings Rechtecke und auch Strecken in vielen Situationen deutlich besser.

Ein gutes Beispiel für einen entsprechenden **Einstieg** ist das folgende Schulbuch (*Elemente der Mathematik 5*):

Teilen eines Ganzen in gleich große Teile

Teilen sich zwei Freunde gleichmäßig *eine* Pizza, so bekommt jeder eine *halbe* Pizza.

- a) Wie viel Pizza bekommt jeder, wenn sich 3, 4, 5, 6 Freunde eine Pizza teilen? Zeichne auch.
- b) Wie viele drittel, viertel, fünftel, sechstel Pizzas ergeben jeweils eine ganze Pizza?



Bei 3 Freunden bekommt jeder eine *drittel* Pizza, bei 4 Freunden bekommt jeder eine *viertel* Pizza, bei 5 Freunden bekommt jeder eine *fünftel* Pizza, bei 6 Freunden bekommt jeder eine *sechstel* Pizza.

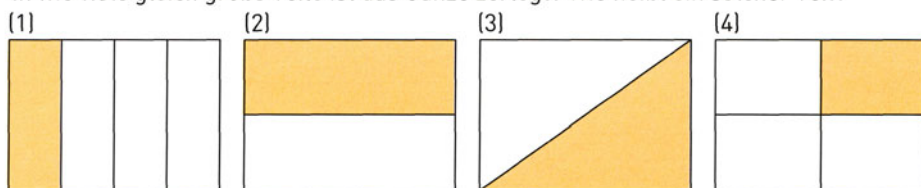
- b) 1 ganze Pizza = 3 drittel Pizzas
1 ganze Pizza = 4 viertel Pizzas
1 ganze Pizza = 5 fünftel Pizzas
1 ganze Pizza = 6 sechstel Pizzas

Die Pizza, also das Ganze, wird in dem Beispiel in 2, 3, 4, 5, 6, ... gleich große Teile zerlegt. So erhalten wir im Kontext von Pizzas Halbe, Drittel, Viertel, Fünftel, Sechstel, ... Neben dem Zahlwort wird parallel das zugehörige Zahlzeichen ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, ...) eingeführt und so die anschauliche Vorstellung verankert, dass **ein Drittel** ($\frac{1}{3}$) **eins von drei gleich großen Teilen eines Ganzen** oder ein Viertel ($\frac{1}{4}$) *eins* von vier gleich großen Teilen eines Ganzen bedeutet. Auf diesem Weg können die Stammbrüche anschaulich eingeführt und auch gleichzeitig gut die Erkenntnis gewonnen werden, dass 2 halbe Pizzas, 3 drittel Pizzas, 4 viertel Pizzas, ... jeweils *eine* ganze Pizza ergeben.

Das folgende Schulbuchbeispiel (*Mathematik heute* 5) verdeutlicht, dass Lernende bei **Rechtecken** Unterteilungen deutlich leichter selbst finden und darstellen können als beim Kreis. Außerdem gibt es bei Rechtecken oft mehrere verschiedene Darstellungen.

Auch ein Rechteck stellt ein Ganzes dar. Denke z. B. an einen Blechkuchen.

a) In wie viele gleich große Teile ist das Ganze zerlegt? Wie heißt ein solcher Teil?



b) Nimm ein (rechteckiges) Blatt Papier. Färbe vom Ganzen

(1) ein Viertel; (2) ein Achtel; (3) ein Drittel; (4) ein Sechstel.

Falte dazu das Blatt geeignet.

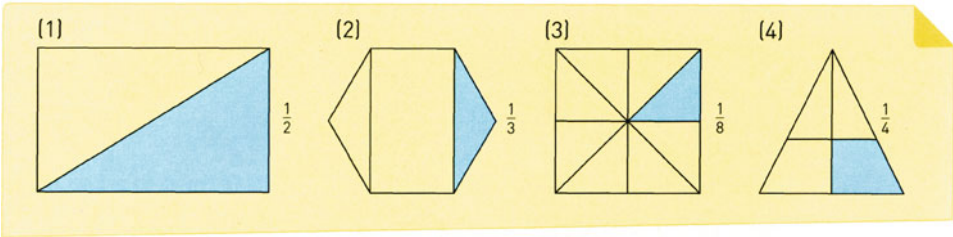
© *Mathematik heute* 5 [S12], S. 171, Nr. 2a,b

Bei *Rechtecken* können wir Anteile gut *ikonisch* (zeichnerisch) darstellen. Durch **Falten** eines rechteckigen Blattes **Papier** können wir Anteile auch *enaktiv*, also durch Handlungen gewinnen. So erhalten wir besonders leicht Halbe, Viertel, Achtel, aber auch Drittel und Sechstel.

Neben Kreisen und Rechtecken eignen sich zur Darstellung von Brüchen auch gut Strecken oder – mit Einschränkungen – Quader.

Eine gute Möglichkeit, die Charakteristika von (Stamm-)Brüchen mittels Beispielen und Gegenbeispielen zu vertiefen, bilden die folgenden beiden Schulbuchbeispiele. Das erste Schulbuchbeispiel (*Mathematik heute* 5) klärt gut ab, dass es nicht ausreicht, das Ganze in drei Teile zu unterteilen, um $\frac{1}{3}$ darzustellen. Vielmehr ist zentral, dass **alle Teile jeweils gleich groß** sind.

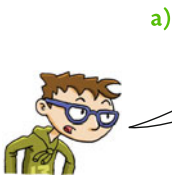
Wo hat sich ein Fehler eingeschlichen? Erkläre.



© Mathematik heute 5 [S12], S. 172, Nr. 10

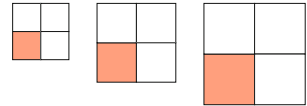
Wichtig ist aber auch die Einsicht, dass beispielsweise Viertel *keine* feste „Größe“ haben, sondern unterschiedlich groß sein können, und dass sie sich auch in der „Form“ stark unterscheiden können, wie das Schulbuch *mathewerkstatt 5* zunächst für Stammbrüche gut herausarbeitet:

Unterschiedliche Viertel



a)

Das kann doch nicht jeweils ein Viertel sein. Die farbigen Flächen sind ja unterschiedlich groß!

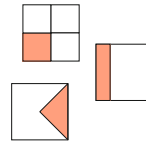


Schreibe eine Antwort an Ole.



b)

Das können nicht alles Viertel sein. Die farbigen Flächen sehen doch alle unterschiedlich aus.



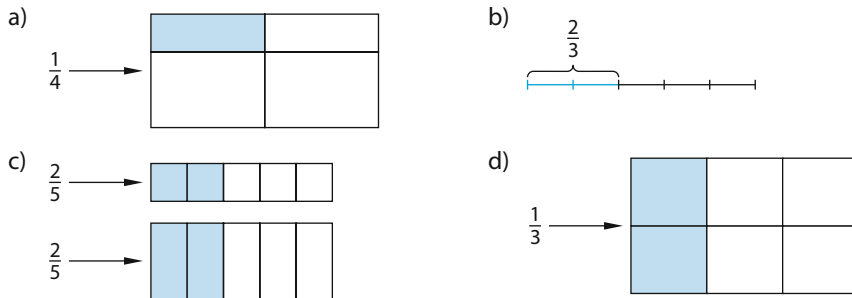
Schreibe eine Antwort an Merve.

© mathewerkstatt 5 [S19], S. 108, Nr. 7 a,b

Zerlegen wir ein Ganzes in n gleich große Teile ($n \in \mathbb{N}$) und nehmen hiervon *ein* Teil, so beschreiben wir die entsprechenden Anteile – wie schon zu Beginn dieses Kapitels kurz erwähnt – speziell durch **Stammbrüche** $\frac{1}{n}$, also durch Brüche mit dem Zähler 1. Nehmen wir hiervon mehrere (m) Teile, so beschreiben wir den Anteil durch Brüche $\frac{m}{n}$. Der Nenner n gibt uns hierbei also an, in wie viele gleich große Teile wir ein Ganzes zerlegen, und der Zähler m , wie viele dieser Teile wir betrachten. Ist speziell $m < n$, so sprechen wir von **echten Brüchen**; gilt $m \geq n$, so sprechen wir von **unechten Brüchen**. In diesem Fall können wir – sofern der Zähler *kein* Vielfaches des Nenners ist – die Brüche auch als **gemischte Zahlen** schreiben (Beispiel: $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$). Ist der Zähler speziell ein Vielfaches des Nenners, so können wir diese Brüche sogar als natürliche Zahlen notieren (Beispiel: $\frac{3}{3} = 1$).

Völlig analog wie bislang bei den besonders leichten Stammbrüchen können und sollten die Charakteristika des Bruchbegriffs auch bei beliebigen Brüchen deutlich an Beispielen und Gegenbeispielen herausgearbeitet werden – etwa wie es das folgende Schulbuchbeispiel (*Fundamente der Mathematik 6*) zeigt:

Stolperstelle: Überprüfe die Zeichnungen und begründe, warum sie richtig oder falsch sind. Zeichne eine richtige Lösung ins Heft.

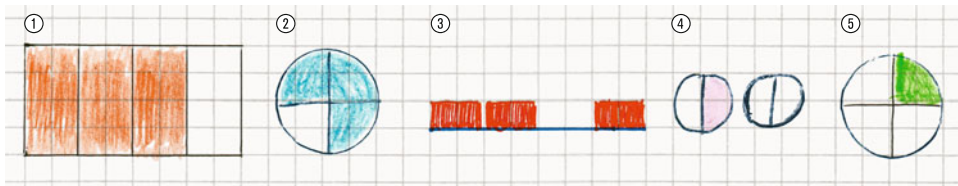


© *Fundamente der Mathematik 6* [S9], S. 12, Nr. 9

Wichtig ist außerdem, dass die Schülerinnen und Schüler die Einsicht gewinnen, dass auch **Nicht-Stammbrüche** wie beispielsweise $\frac{3}{4}$ sowohl von der *Form* wie auch von der *Größe* her äußerst unterschiedlich aussehen können (vgl. *mathewerkstatt 5*):

Ein Bruch – verschiedene Formen

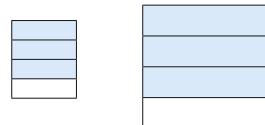
a) Fünf Kinder haben fünf verschiedene Bilder zum Bruch $\frac{3}{4}$ gezeichnet.



Begründe, warum alle Bilder den Bruch $\frac{3}{4}$ richtig darstellen.

b) $\frac{3}{4}$ kann sogar bei der gleichen Grundform unterschiedlich aussehen.
 Zeichne zwei gleich große Rechtecke. Färbe auf unterschiedliche Weise jeweils $\frac{3}{4}$.
 Zeichne auch bei einem Kreis und bei einer Strecke je zwei Möglichkeiten für $\frac{3}{4}$.

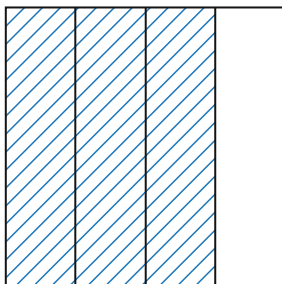
c) $\frac{3}{4}$ kann auch unterschiedlich groß sein.
 Erkläre das anhand der beiden Rechtecke.



© *mathewerkstatt 5* [S19], S. 103, Nr. 3 a,b,c

Neben der ikonischen Darstellung von Brüchen mittels Rechtecken, Kreisen und Strecken sowie der enaktiven Darstellung mittels Falten von rechteckigem Papier können wir Brüche nach Vorschlägen von Winter [214] auch gut enaktiv herstellen durch das probierend-korrigierende Rollen von Papierstreifen bzw. – breiter einsetzbar und tragfähiger – durch das Arbeiten mit Streifenmustern (für Details vgl. Padberg [126], S. 34 f.).

Zusammenfassend halten wir fest: Um den schraffierten Teil des nachfolgend dargestellten Rechtecks als $\frac{3}{4}$ zu identifizieren, müssen die Lernenden folgende Fragen richtig verstehen, beantworten und begründen können:



1. Was ist das Ganze?
2. In wie viele Teile ist das Ganze zerlegt worden?
3. Sind die Teile jeweils gleich groß?
4. Wie groß ist jedes Teil bezogen auf das Ganze?
5. Wie viele Teile sind hier (durch die Schraffur kenntlich gemacht) zusammengefasst worden?

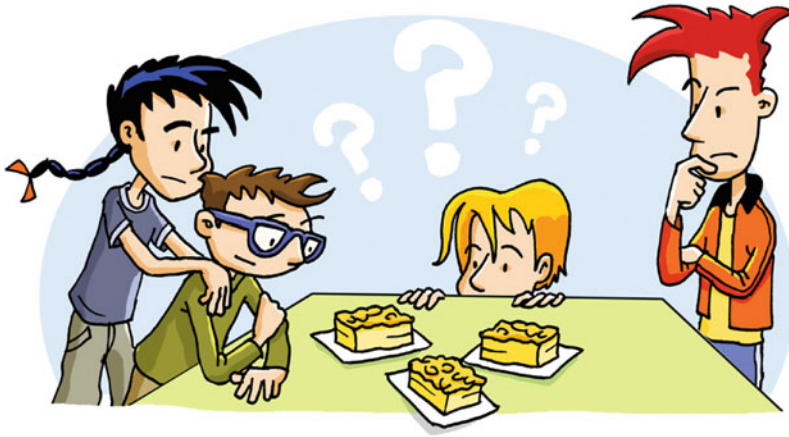
Für den „umgekehrten“ Weg, den Anteil $\frac{3}{4}$ eines Rechtecks zu schraffieren, müssen bei der Zeichnung ebenfalls obige Fragestellungen analog beachtet werden.

3.2.2 Teilaspekt 2 – Anteil mehrerer Ganzer

Der zweite Teilaspekt ist für Lernende deutlich komplizierter als der erste (vgl. Neumann [112], Padberg/Krüger [132]). Die Lernenden müssen nämlich hierbei einsehen, dass mehrere Ganze – zum Beispiel drei Stücke Streuselkuchen – das *neue* Ganze bilden, das gerecht verteilt werden soll (vgl. *mathewerkstatt* 5):

Auf dem Tisch liegen drei Stücke Streuselkuchen.

Auch den Kuchen wollen sich die vier Freunde gerecht untereinander teilen.



Zeichne ins Heft, wie du die drei Stücke aufteilen würdest.

© mathewerkstatt 5 [S19], S. 99, 3 b

Die vier Freunde im vorstehenden Schulbuchbeispiel können die drei Stücke Streuselkuchen auf dem Tisch beispielsweise folgendermaßen **gerecht verteilen**:

- Jeder bekommt von jedem der drei Stücke jeweils ein Viertel, also jeder insgesamt drei Viertel Stück Kuchen.
- Zunächst werden zwei Stücke Kuchen gerecht verteilt, jeder bekommt also ein halbes Stück. Anschließend wird das dritte Stück gerecht verteilt. Jeder bekommt ein Viertel, also jeder insgesamt drei Viertel Stück Kuchen.
- Einer der Freunde bekommt von jedem Stück ein Viertel, also insgesamt drei Viertel Stück Kuchen. Die drei übrigen Freunde bekommen jeweils das „Reststück“, also ebenfalls drei Viertel Stück Kuchen.

In allen drei Fällen hat also jeder drei Viertel von einem Stück Streuselkuchen bekommen und von dem gesamten Streuselkuchen ein Viertel. Da wir die Streuselkuchenstücke wie Rechtecke auf verschiedene Arten halbieren oder auch vierteln können, gibt es **viele**

verschiedene Wege, die drei Streuselkuchenstücke gerecht an vier Personen zu verteilen. Schon Middleton/van den Heuvel-Panhuizen/Shew [108] beschreiben eindrucksvoll, wie variationsreich und kreativ Schülerinnen und Schüler das gerechte Verteilen von Sandwiches bearbeiten, Streefland ([179], [178], [176] u. a.) zeigt das gerechte Verteilen von Pizzas bei geeigneter Fragestellung. An dieser Stelle sollte im Mathematikunterricht auch thematisiert werden, dass sich *keineswegs* alle Dinge *gerecht* verteilen lassen – etwa durch die Fragestellung: „Welche der folgenden Dinge können an 3 Kinder gerecht verteilt werden: 2 Pizzas, 2 Euro, 2 Flaschen Apfelsaft, 2 Luftballons?“

Die **Division** wird im Bereich der **natürlichen Zahlen** unter anderem über das gerechte (gleichmäßige) Verteilen eingeführt (für genauere Details vgl. Padberg/Benz [127], S. 154 ff.). So gilt beispielsweise $8 : 4 = 2$, da beim gerechten Verteilen von 8 Äpfeln an 4 Personen jede Person 2 Äpfel erhält und entsprechend können wir im Bereich der natürlichen Zahlen über die Grundvorstellung des gerechten Verteilens bei jeder in \mathbb{N} lösbaren Divisionsaufgabe das Ergebnis erhalten. Wegen der Aufgabe mit den 3 Stücken Kuchen und den vier Freunden ist es daher auch naheliegend, jetzt der in \mathbb{N} unlösbaren Aufgabe $3 : 4$ in der Menge der **Bruchzahlen** das Ergebnis $\frac{3}{4}$ zuzuordnen und allgemein Aufgaben $m : n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ das – auf analogem Weg findbare – Ergebnis $\frac{m}{n}$. Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt daher: $m : n = \frac{m}{n}$.

Nach Thematisierung der beiden Teilaspekte der Grundvorstellung *Bruch als Anteil* ist es wichtig, dass die Lernenden einsehen, dass **beide Teilaspekte gleichwertig** sind (vgl. hierzu auch Padberg [126], S. 38 f.). Eine gute Grundlage für zielführende Diskussionen bildet die folgende Aufgabe (*mathewerkstatt* 5):

Till und Pia erklären beide, was drei Fünftel bedeutet.

Ich nehme einen Kreis und teile ihn in fünf Teile. Jedes Teil ist ein Fünftel. Drei Fünftel bedeuten dann: Ich nehme drei solche Fünftel.



Ich nehme drei Kreise, gebe fünf Kindern von jedem Kreis gleich viel.

a) Zeichne zu Tills Erklärung ein Bild.

b) Was für ein Bild stellt Pia sich vor?

c)  Es kann doch nicht sein, dass $\frac{3}{5}$ bei Pia und Till das Gleiche ist. Till hat nur einen Kreis geteilt und Pia drei Kreise!

Erkläre Merve an Hand der Bilder, warum dennoch beide Recht haben.