Modul 08:
Funktionaler Zusammenhang SEK II

10.12.25 – online

Dr. Maike Tesch

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Ausbildungscurriculum

B3 Strukturen und funkt. Zusammenhang SEK II

Ziel: Die LiV kennen **geeignete Kontexte**, um in die Differentialrechung einzuführen und können Software zur Visualisierung und zur didaktischen Reduktion einsetzen.

Am Beispiel werden Merkmale eines gelungenen **Einstiegs in den Analysisuntericht in der Sek II** erarbeitet, bei dem die Neuerarbeitung von Inhalten mit der Wiederholung von Grundlagen aus dem SI-Unterricht verknüpft wird. Verschiedene **Zugänge zum Ableitungsbegriff** werden thematisiert und ein **themenorientierter Unterrichtsgang** erarbeitet, bei dem **Excel oder Geogebra** als Hilfsmittel zur Visualisierung und zum Auslagern aufwändiger Berechnungen einbezogen werden. Die LiV formulieren Bedingungen für Null-, Extrem- und Wendestellen und visualisieren diese mit Geogebra. Die Zusammenhänge zwischen Bestand, momentaner und mittlerer Änderungsrate und Mittelwertintegral werden im Sachzusammenhang verdeutlicht. Anhand von Aufgaben aus dem Zentralabitur werden exemplarisch Fähigkeiten ermittelt, die die SuS haben müssen, um **hilfsmittelfreie Aufgaben im Abitur** lösen zu können.

Das Ausbildungscurriculum im Fachportal: https://fachportal.lernnetz.de/Ausbildung.html

Ausbildungstag (Vorschlag)

08:30	Block 1	Begrüßung, Organisation Bericht aus der Unterrichtspraxis (u.a. Füllstände, SMART-Test, weitere Anliegen) Abitur
10:00	Kaffeepause	
10:15	Block 2	Darstellungswechsel Einstiege in die Differentialrechnung
12:30	Mittagspause	
13:00	Block 3	Grundvorstellungen zur Differentialrechnung
15:00	Kaffeepause	
15:15	Block 4	Bedingungen finden und nutzen, Graphisches Ableiten
16:00	Abschluss	

Organisatorisches

Morgenrunde

- Bei mir liegt gerade obenauf, dass…
- Im Unterricht habe ich gerade…
- In diesem Modul würde ich gern Zeit haben für…

Module - Planung

Schuljahr 25/26

Termin	Modul	Person
21.1.26	Messen Sek II (10)	Bennet Manthei
18.2.26	Modelliereun (11)	
18.3.26	Unterrichtsplanung Sek II (12)	
29.4.26	Lernumgebungen, Aufgabenkultur (15)	ONLINE
27.5.26	Raum und Form: Begriffsbildung, Problemlösen (13)	
25.6.26	Raum und Form: Argumentieren Sek II (14)	

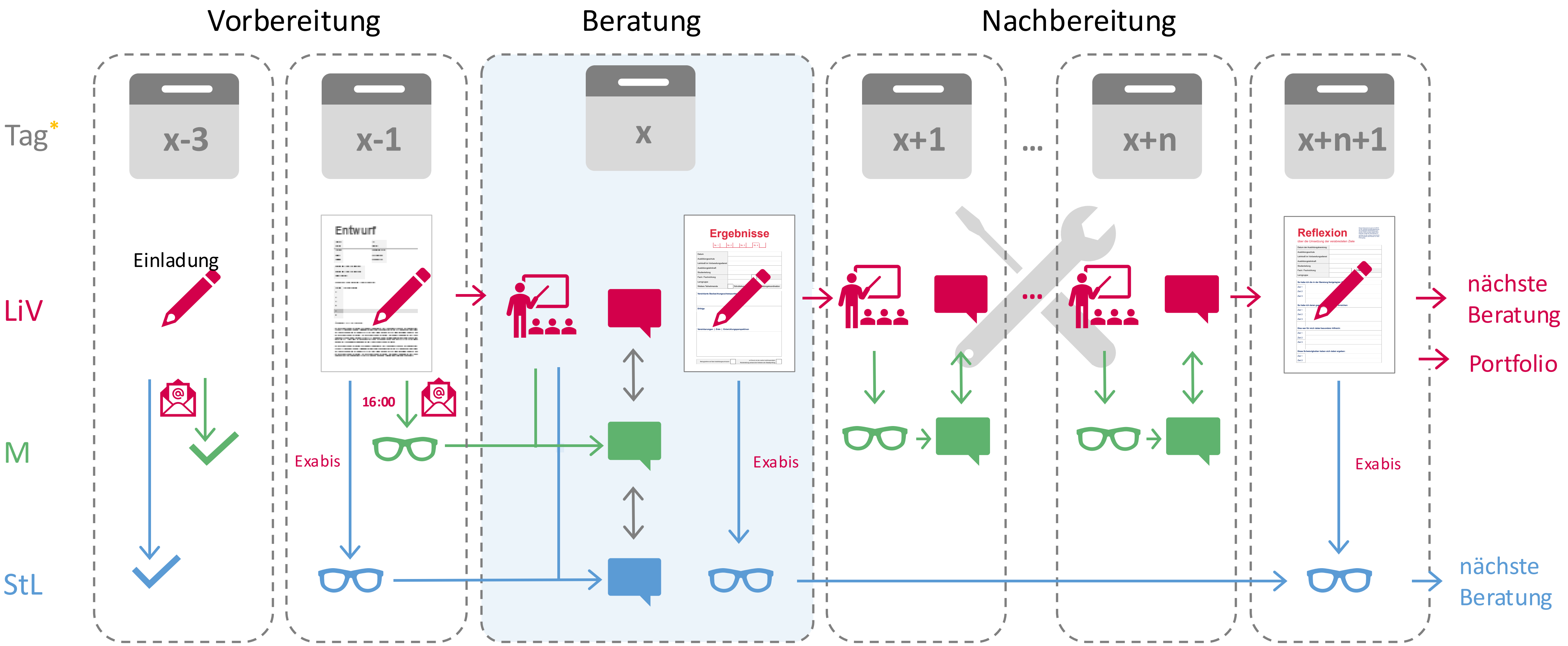
Beratungen

Termine SJ 2025/2026 2. Halbjahr

- Bitte frühzeitig melden (Kalenderwoche wünschen)
- ExamenskandidatInnen haben Vorrang bis Ostern
- Die anderen dürfen gern jetzt schon Wünsche anmelden (bitte bedenken, dass ggf. eine Hausarbeitsphase ansteht, die Stunden dürfen keine ABB sein)

Ausbildungsberatung

Ablauf



LiV = Lehrkraft im Vorbereitungsdient; M = Mentor; StL = Studienleitung * **Werktage**

Ausbildungsberatung

Entwurf

Sinn und Zweck?

Unterrichtsentwurf

Fach:	Mathematik	Lehrer in Vorbereitung[1]:	Stephan Baja
Klasse:	5b	Schule:	Gymnasium Harksheide
Raum:	O51		
Zeit:	Block 2 (09:35-10:20) 45'	Datum:	07.12.18

THEMA DER UNTERRICHTSEINHEIT: Rechnen mit Termen
THEMA DER UNTERRICHTSSTUNDE: Vorfahrtsregeln beim Berechnen von Termen

HAUPTINTENTION DER STUNDE: Die Schülerinnen und Schüler[2] erkennen im Kontext einer Frage von „Wer-wird-Millionär" die Notwendigkeit von „Vorfahrtsregeln" für das Berechnen von Termen und wenden diese in der Folge richtig an.

EINBINDUNG IN DIE LAUFENDE UNTERRICHTSEINHEIT:

1.	**Vorfahrtsregeln beim Berechnen von Termen**	**07.12.**
2.	Rechenbäume	11.12.
3.	Term-Baum-Fachausdrücke (Darstellungswechsel)	14.12.
4.	Weihnachtszauber	18.12.
5.	Assoziativ- und Kommutativgesetz (Rechenvorteile)	08.01.
6.	Distributivgesetz	11.01.
7.	Rechnen mit Variablen als Platzhalter	15.01.
8.	Umkehroperationen	18.01.

ZU FÖRDERNDE KOMPETENZEN: Zum einen soll in dieser Unterrichtsstunde mit Hilfe eines problematisierenden Einstiegs der Kompetenzbereich K1 „Mathematisch argumentieren" (1, S.18) angesprochen werden. Zum anderen soll durch eine produktive Übungsaufgabe der Kompetenzbereich K5 „Mit Mathematik symbolisch, formal und technisch umgehen" (1, S.19) gestärkt werden, indem die SuS den Umgang mit Klammern als „Routineverfahren" von „Operationen mit mathematischen Objekten" kennen und anwenden lernen (ebd., Kompetenzstufe I).

1. UNTERRICHTLICHE VORAUSSETZUNGEN

Seit Beginn des Schuljahres wird die Klasse 5b, bestehend aus 29 SuS (10 Mädchen, 19 Buben), in vier Stunden (2 x 90 min) pro Woche von mir unterrichtet. Zwar haben sich die SuS in der neuen Schule bereits eingelebt und kennen sich untereinander sowie die Lehrer, jedoch befindet sich die Klassengemeinschaft noch in der Findungsphase. Es bestehen noch Schwierigkeiten (Klassen-) Regeln einzuhalten. Um dem zu entgegnen wurde beispielsweise von den beiden Klassenlehrern eine „Klassenampel" installiert, an die Namen von ermahnten SuS gesteckt werden. Ebenso wurden Lob- und Tadelzettel eingeführt, die insbesondere zusammen mit dem von den SuS zu führenden Logbuch einen entsprechenden Austausch mit den Eltern begünstigen sollen.
Die SuS empfinden die am Gymnasium Harksheide üblichen 90-min-Blöcke als sehr lang. Die Teilnahmebereitschaft der SuS am Unterrichtgeschehen ist im starken Maße abhängig von der bereits verstrichenen Unterrichtszeit. Während am Anfang einer Stunde die SuS von sich aus konzentriert arbeiten, haben sie am Ende Probleme dem Unterrichtsgeschehen aufmerksam zu folgen. Um die SuS vor wichtigen Phasen zu aktiveren, werden daher von mir an passender Stelle im Unterrichtsgang Energizer (2), kleine Bewegungs- und Aktivierungsübungen, eingebaut.
Bedingt durch die verschiedenen Grundschulen, von denen die SuS an das Gymnasium Harksheide wechselten, sind die Vorkenntnisse im Fach Mathematik sehr unterschiedlich. Dies konnte ich beispielsweise im Themenbereich „schriftliches Rechnen" feststellen: Einige SuS beherrschten alle schriftlichen Rechenverfahren bereits sicher. Anderen SuS waren bis zu zwei schriftlichen Rechenverfahren ungeläufig. Diesem Sachverhalt Rechnung tragend, versuche ich an gegebenen Stellen im Unterricht Differenzierungsmaßnahmen zu ergreifen und insbesondere Einstiege zu planen, die mit unterschiedlichem Vorwissen zu bearbeiten sind.

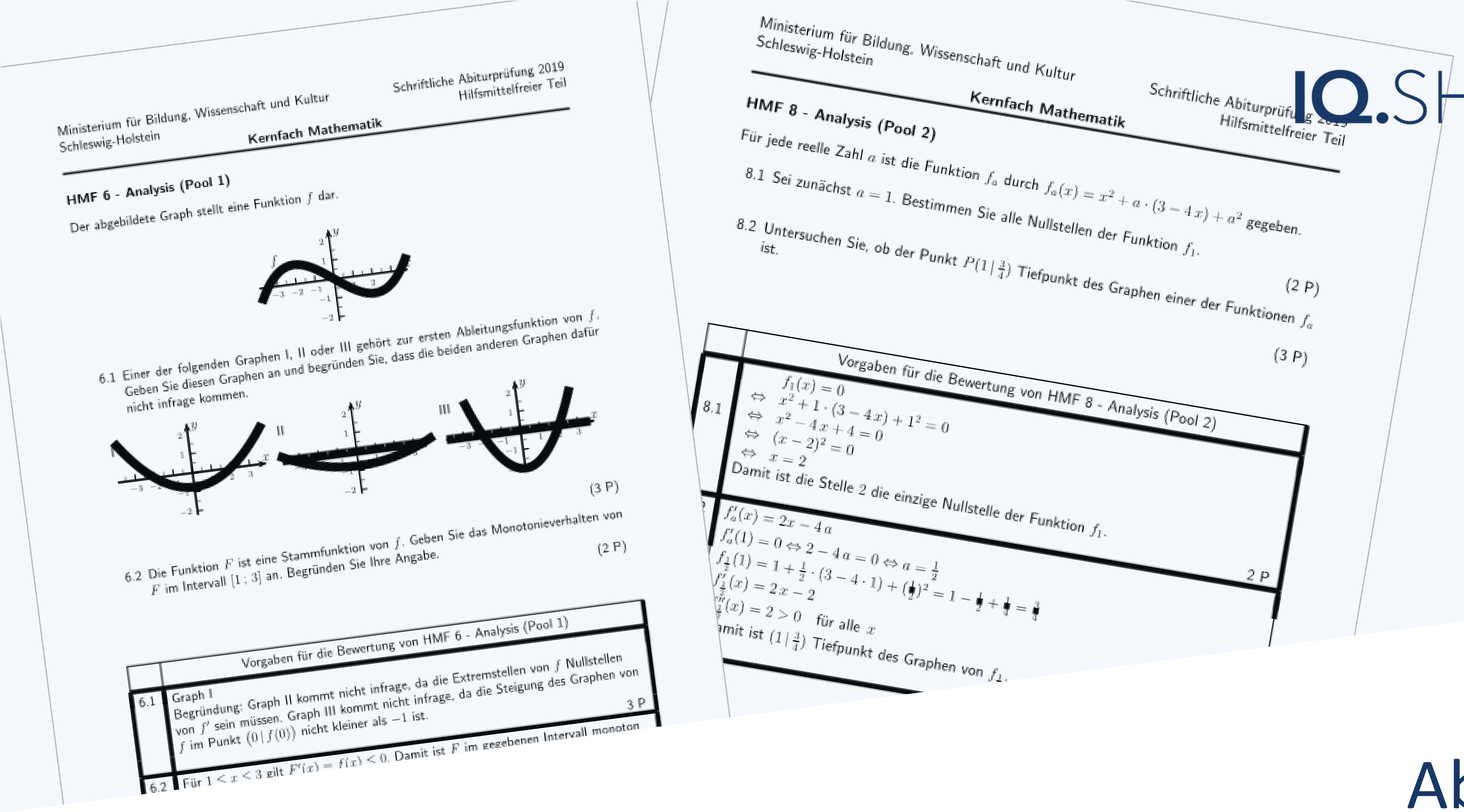
2. VORSTELLUNG DES UNTERRICHTSGEGENSTANDES

Nachdem in der letzten Stunde die Themeneinheit Figuren beendet wurde, steht die heutige Stunde am Anfang zur Themeneinheit „Rechnen mit Termen", welche gemäß des Fachcurriculums Mathe-

[1] Im Folgenden mit LiV abgekürzt.
[2] Im Folgenden mit SuS abgekürzt.

Welchen Sinn und Zweck hat der Unterrichtsentwurf?

Diskussion



Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur
Schleswig-Holstein

Schriftliche Abiturprüfung 2019
Hilfsmittelfreier Teil

Kernfach Mathematik

HMF 6 - Analysis (Pool 1)

Der abgebildete Graph stellt eine Funktion f dar.

6.1 Einer der folgenden Graphen I, II oder III gehört zur ersten Ableitungsfunktion von f. Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie, dass die beiden anderen Graphen dafür nicht infrage kommen. (3 P)

6.2 Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f. Geben Sie das Monotonieverhalten von F im Intervall $[1;3]$ an. Begründen Sie Ihre Angabe. (2 P)

Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Analysis (Pool 1)

6.1	Graph I Begründung: Graph II kommt nicht infrage, da die Extremstellen von f Nullstellen von f' sein müssen. Graph III kommt nicht infrage, da die Steigung des Graphen von f im Punkt $(0 \mid f(0))$ nicht kleiner als -1 ist.	3 P
6.2	Für $1 < x < 3$ gilt $F'(x) = f(x) < 0$. Damit ist F im gegebenen Intervall monoton	

Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur
Schleswig-Holstein

Schriftliche Abiturprüfung 2019
Hilfsmittelfreier Teil

Kernfach Mathematik

HMF 8 - Analysis (Pool 2)

Für jede reelle Zahl a ist die Funktion f_a durch $f_a(x) = x^2 + a \cdot (3 - 4x) + a^2$ gegeben.

8.1 Sei zunächst $a = 1$. Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion f_1. (2 P)

8.2 Untersuchen Sie, ob der Punkt $P(1 \mid \frac{3}{4})$ Tiefpunkt des Graphen einer der Funktionen f_a ist. (3 P)

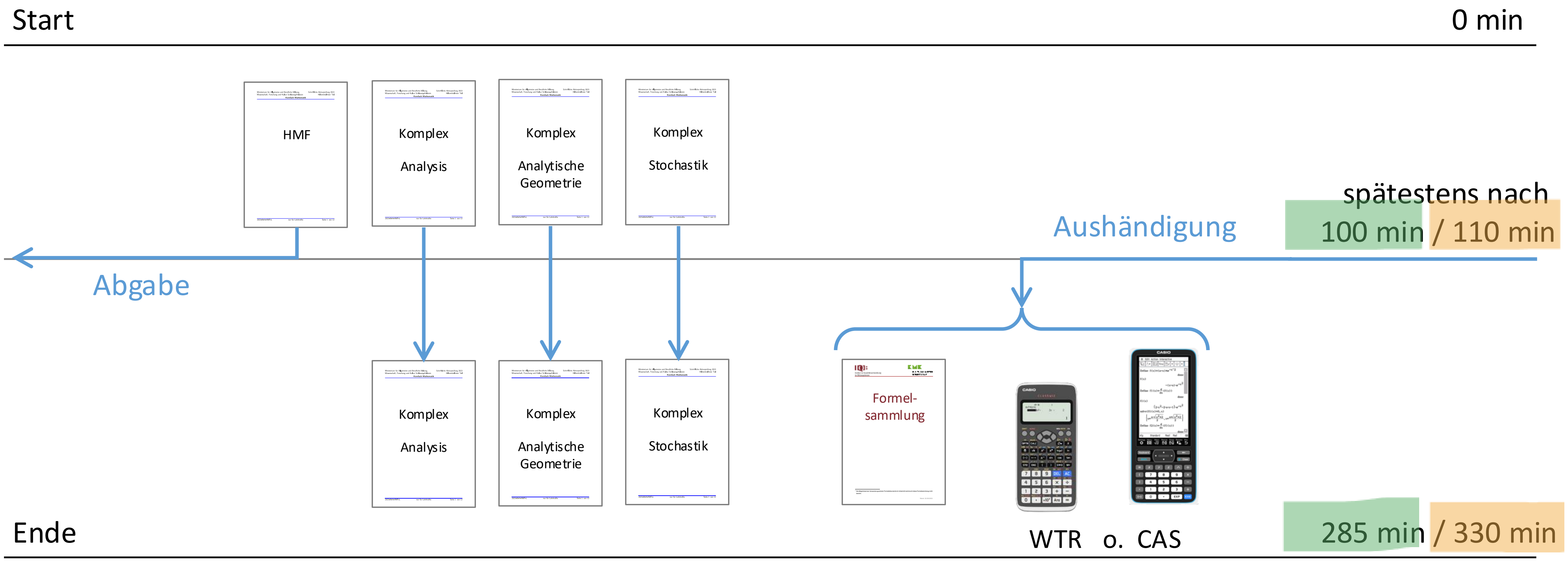
Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Analysis (Pool 2)

8.1	$f_1(x) = 0$ $\Leftrightarrow x^2 + 1 \cdot (3 - 4x) + 1^2 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$ $\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0$ $\Leftrightarrow x = 2$ Damit ist die Stelle 2 die einzige Nullstelle der Funktion f_1.	2 P
8.2	$f_a'(x) = 2x - 4a$ $f_a'(1) = 0 \Leftrightarrow 2 - 4a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ $f_{\frac{1}{2}}(1) = 1 + \frac{1}{2} \cdot (3 - 4 \cdot 1) + (\frac{1}{2})^2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ $f_{\frac{1}{2}}'(x) = 2x - 2$ $f_{\frac{1}{2}}''(x) = 2 > 0$ für alle x Damit ist $(1 \mid \frac{3}{4})$ Tiefpunkt des Graphen von $f_{\frac{1}{2}}$.	

Abitur
Hilfsmittelfreie Aufgaben

Abitur ab 2027 gA und eA

Ablauf



Abitur ab 2027 eA

Zusammenfassung

Teil	Zeit min			Auswahl Wer?	Wann?	Was?	Aufgaben AFB	BE
A	max. 110	HMF	Gruppe 1	-		vier von vier	I, II	20
			Gruppe 2	SoS	in der Prüfung	zwei von sechs	II, III	10
B	mind. 220	Analysis		LK + APK	vor der Prüfung	eine von zwei	I, II, III	30
		Anal. Geo.		SoS	in der Prüfung	eine von zwei	I, II, III	20
		Stochastik		LK + APK	vor der Prüfung	eine von zwei	I, II, III	20
	Σ 330 Minuten							**Σ 100**

SoS = Schülerin oder Schüler; LK = Lehrkraft; APK = Abiturprüfngskomission; HMF = Hilfsmittelfreie Aufgabe; AFB Anforderungsbereich

Abitur ab 2027 gA

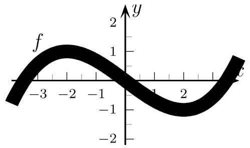
Zusammenfassung

Teil	Zeit min			Auswahl Wer?	Wann?	Was?	Aufgaben AFB	BE
A	max. 100	HMF	Gruppe 1	-		drei von drei	I, II	15
				SoS	in der Prüfung	eine von drei	I, II	5
			Gruppe 2	SoS	in der Prüfung	drei von sechs	II, III	5
B	mind. 185	Analysis		LK + APK	vor der Prüfung	eine von zwei	I, II, III	25
		Anal. Geo.		LK + APK	vor der Prüfung	eine von zwei	I, II, III	15
		Stochastik		LK + APK	vor der Prüfung	eine von zwei	I, II, III	15
	Σ 285 Minuten							**Σ 80**

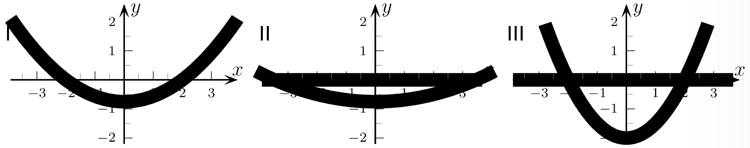
SoS = Schülerin oder Schüler; LK = Lehrkraft; APK = Abiturprüfngskomission; HMF = Hilfsmittelfreie Aufgabe; AFB Anforderungsbereich

HMF 6 - Analysis (Pool 1)

Der abgebildete Graph stellt eine Funktion f dar.



6.1 Einer der folgenden Graphen I, II oder III gehört zur ersten Ableitungsfunktion von f. Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie, dass die beiden anderen Graphen dafür nicht infrage kommen.



(3 P)

6.2 Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f. Geben Sie das Monotonieverhalten von F im Intervall $[1\,;\,3]$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.

(2 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 6 - Analysis (Pool 1)
6.1	Graph I Begründung: Graph II kommt nicht infrage, da die Extremstellen von f Nullstellen von f' sein müssen. Graph III kommt nicht infrage, da die Steigung des Graphen von f im Punkt $\big(0\,\vert\,f(0)\big)$ nicht kleiner als -1 ist. 3 P
6.2	Für $1 \leq x \leq 3$ gilt $F'(x) = f(x) \leq 0$. Damit ist F im gegebenen Intervall monoton fallend. *Alternative Lösung:* *Für $1 \leq x \leq 3$ gilt $F'(x) = f(x) < 0$. Damit ist F im gegebenen Intervall streng monoton fallend.* 2 P

Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur Schleswig-Holstein
Schriftliche Abiturprüfung 2019 Hilfsmittelfreier Teil
Kernfach Mathematik

HMF 8 - Analysis (Pool 2)

Für jede reelle Zahl a ist die Funktion f_a durch $f_a(x) = x^2 + a \cdot (3 - 4\,x) + a^2$ gegeben.

8.1 Sei zunächst $a = 1$. Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion f_1.

(2 P)

8.2 Untersuchen Sie, ob der Punkt $P(1\,\vert\,\frac{3}{4})$ Tiefpunkt des Graphen einer der Funktionen f_a ist.

(3 P)

	Vorgaben für die Bewertung von HMF 8 - Analysis (Pool 2)
8.1	$f_1(x) = 0$ $\Leftrightarrow\ x^2 + 1 \cdot (3 - 4\,x) + 1^2 = 0$ $\Leftrightarrow\ x^2 - 4\,x + 4 = 0$ $\Leftrightarrow\ (x-2)^2 = 0$ $\Leftrightarrow\ x = 2$ Damit ist die Stelle 2 die einzige Nullstelle der Funktion f_1. 2 P
8.2	$f_a'(x) = 2x - 4\,a$ $f_a'(1) = 0 \Leftrightarrow 2 - 4\,a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ $f_{\frac{1}{2}}(1) = 1 + \frac{1}{2} \cdot (3 - 4 \cdot 1) + ($[redacted]$)^2 = 1 -$ [redacted] $+$ [redacted] $=$ [redacted] $f_{\frac{1}{2}}'(x) = 2\,x - 2$ $f_{\frac{1}{2}}''(x) = 2 > 0$ für alle x Damit ist $(1\,\vert\,\frac{3}{4})$ Tiefpunkt des Graphen von $f_{\frac{1}{2}}$. 3 P

Welche Kompetenzen benötigen SuS zum lösen dieser Aufgaben?

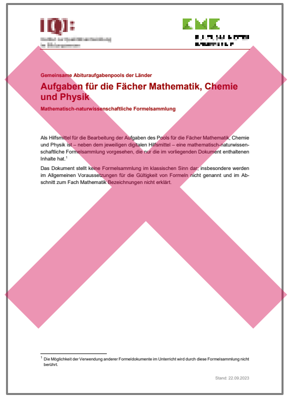
5 min

Abitur

Teil A: Hilfsmittelfreier Teil

<u>Aufgabeninhalte:</u>

- Namen und Definitionen (Funktion, Graph, Stelle, Wert, Sekante, Tangente, Ableitung)
- Aufstellen von Funktionstermen zu Sachproblemen
- Lesen und Interpretieren von Graphen
- Lösen von Gleichungen: linear, quadratisch, 3. Grades und 4. Grades in einfachen Fällen
- einfaches LGS lösen können, Kenntnisse über Lösbarkeit
- Gegenbeispiel: Polynomdivision
- Wissen über Lösbarkeit und Anzahl von Lösungen
- Ableitungsregeln (Potenzregel, Summenregel, Faktorregel, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel, spezielle Funktionen)
- graphisches Ableiten, graphisches Integrieren

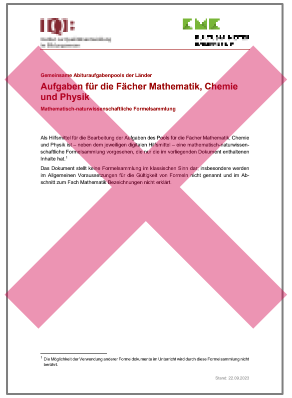


Abitur

Teil A: Hilfsmittelfreier Teil

Aufgabeninhalte:

- Sätze (notwendige Bedingung, hinreichende Bedingung, Hauptsatz)
- Integrationsregeln (spezielle Integrale, einfache Fälle von Substitution)
- Gegenbeispiel: komplizierte Fälle von Substitution und partieller Integration
- Flächenberechnung (Grenzen, Nullstellen), Rotationsvolumen
- prinzipielles Aussehen der Graphen bestimmter Funktionen (lineare Funktion, quadratische Funktion, Polynome, Exponentialfunktion, trigonometrische Funktionen, Wurzelfunktion)

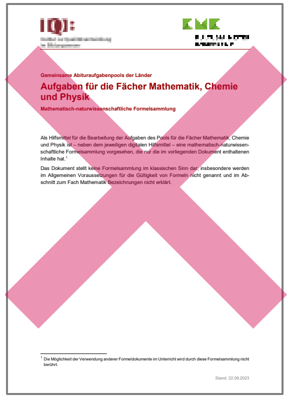


Abitur

Teil A: Hilfsmittelfreier Teil

<u>Aufgabeninhalte:</u>

- Auswirkungen von Parametern in Funktionstermen auf Form und Lage des Graphen wie seitliche Verschiebung, vertikale Streckung/Stauchung, horizontale Streckung/Stauchung
- Bestimmen des Funktionsterms aus den Eigenschaften des Graphen: Gleichungen aufstellen
- Gegenbeispiel: kompliziertes LGS lösen



Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Aufgaben für die Fächer Mathematik, Chemie und Physik

Mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung

Als Hilfsmittel für die Bearbeitung der Aufgaben des Pools für die Fächer Mathematik, Chemie und Physik ist – neben dem jeweiligen digitalen Hilfsmittel – eine mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung vorgesehen, die nur die im vorliegenden Dokument enthaltenen Inhalte hat.[1]

Das Dokument stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar; insbesondere werden im Allgemeinen Voraussetzungen für die Gültigkeit von Formeln nicht genannt und im Abschnitt zum Fach Mathematik Bezeichnungen nicht erklärt.

Abitur - Hilfsmittel

Teil B: Komplexteil

–Einsatz schon im Unterricht und in Klausuren

–vom IQB entwickelt

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Aufgaben für die Fächer Mathematik, Chemie und Physik

Mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung

Als Hilfsmittel für die Bearbeitung der Aufgaben des Pools für die Fächer Mathematik, Chemie und Physik ist – neben dem jeweiligen digitalen Hilfsmittel – eine mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung vorgesehen, die nur die im vorliegenden Dokument enthaltenen Inhalte hat.[1]

Das Dokument stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar; insbesondere werden im Allgemeinen Voraussetzungen für die Gültigkeit von Formeln nicht genannt und im Abschnitt zum Fach Mathematik Bezeichnungen nicht erklärt.

[1] Die Möglichkeit der Verwendung anderer Formeldokumente im Unterricht wird durch diese Formelsammlung nicht berührt.

Stand: 22.09.2023

1 Mathematik

Ebenen

- Parameterform: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$
- Koordinatenform: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k = 0$
- Normalenform: $\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{a}) = 0$

1.4 Stochastik

Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Die folgenden Aussagen zu Ereignissen A und B sind äquivalent:

- A und B sind stochastisch unabhängig.
- $P_B(A) = P(A)$
- $P_A(B) = P(B)$

Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Zufallsgrößen

- Für eine Zufallsgröße X mit den Werten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gilt:
  - Erwartungswert: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$
  - Varianz: $Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \cdot P(X = x_i)$
  - Standardabweichung: $\sqrt{Var(X)}$
- Für eine binomialverteilte Zufallsgröße X gilt:
  - $P_p^n(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
  - Erwartungswert: $\mu = n \cdot p$
  - Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$
- Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße: $\varphi(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

7

IQB (Hrsg.): Aufgaben für den Fächer Mathematik, Chemie und Physik. Gemeinsame Formelsammlung. Berlin 2023.

Abitur - Hilfsmittel

IQ.SH

Teil B: Komplexteil

– wissenschaftlicher Taschenrechner (WTR)

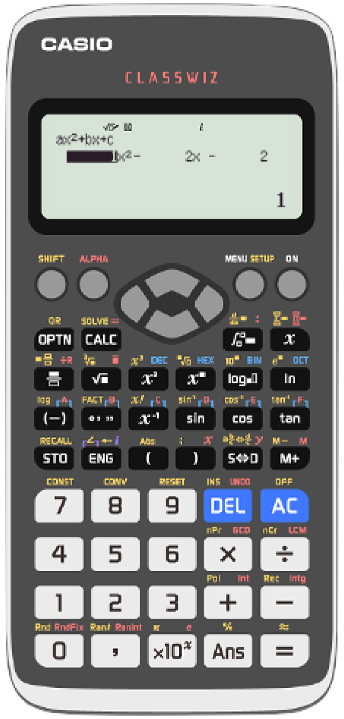
oder

Computer Algebra System (CAS)

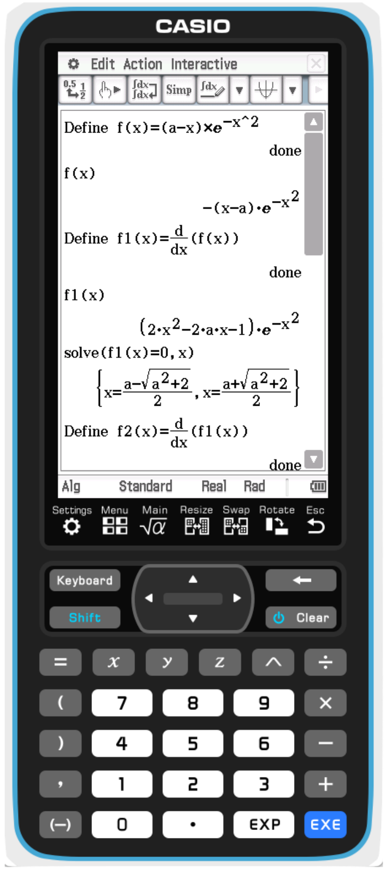
– Einsatz schon im Unterricht und in Klausuren

– CAS-Aufgaben bis 2029 weiterhin möglich

– nach 2029 für alle mit MMS



WTR



CAS

Abitur ab 2027

Hilfreiche Links

Infos rundherum:

https://fachportal.lernnetz.de/sh/faecher/mathematik/fortbildungen/oapvo-2021.html

Prüfungsregelungen

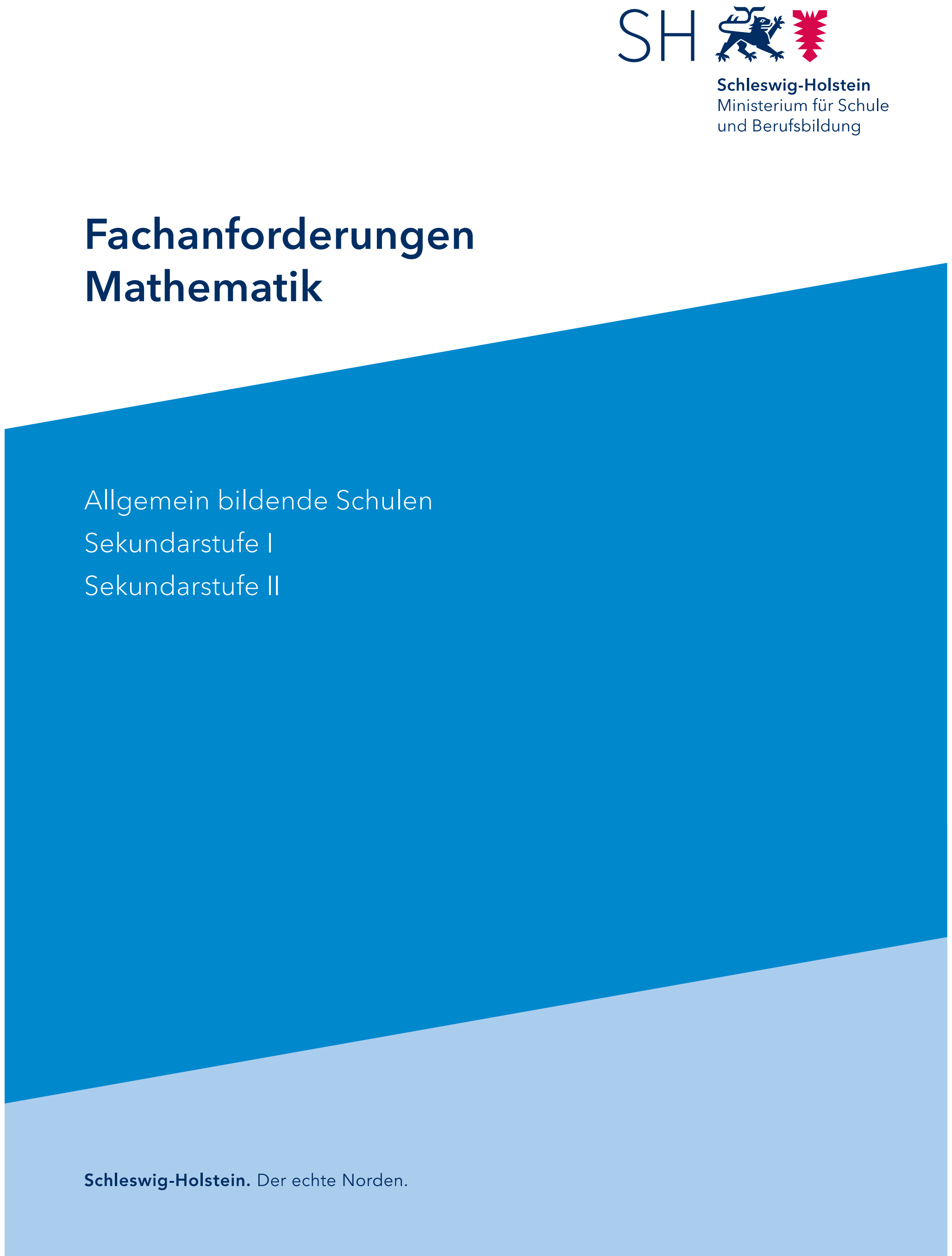
https://za.schleswig-holstein.de/?view=100&path=1%20Abitur|2024

Beispielaufgaben vom iqb

https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik/

Differentialrechnung

Fachanforderungen



2.2.4 Leitidee 4: Funktionaler Zusammenhang

In der Oberstufe werden die in der Sekundarstufe I vermittelten Kenntnisse über Funktionen und ihre Eigenschaften vertieft und insbesondere um die infinitesimalen Methoden der Differenzial- und Integralrechnung erweitert.

Inhaltsbezogene Kompetenzen *Die Schülerinnen und Schüler …*	**Verbindliche Themen und Inhalte**	**Vorgaben und Hinweise**
bestimmen die Definitions- und Wertemenge einer Funktion in geeigneter Schreibweise, bestimmen die Wertemenge bei eingeschränkter Definitionsmenge, nutzen Funktionen verschiedener Funktionsklassen zur Modellierung, Beschreibung und Untersuchung quantifizierbarer Zusammenhänge, stellen funktionale Zusammenhänge in verschiedenen Formen dar und wechseln situationsgerecht zwischen den Darstellungsformen Graph, Tabelle, Term und verbaler Beschreibung, untersuchen einfache Funktionen auf die Existenz einer Umkehrfunktion und bestimmen diese,	• Definitions- und Wertemenge einer Funktion • Intervall • ganzrationale Funktionen • Wurzelfunktionen • $f(x) = \frac{1}{x}$ • $f(x) = x^q$ mit $q \in \mathbb{Q}$ • Exponentialfunktionen • e-Funktion • **Logarithmusfunktionen** • **ln-Funktion** • **Umkehrfunktion** • Sinusfunktion • Kosinusfunktion • Verknüpfungen • Verkettungen • Funktionenscharen	Die Unterscheidung der Begriffe Stelle, Funktionswert und Punkt ist deutlich herauszuarbeiten. Um die funktionale Abhängigkeit zu betonen, ist die in der Sekundarstufe I eingeführte Schreibweise $f(x) = \dots$ beizubehalten. Wertetabellen können schnell mit entsprechenden Funktionen digitaler Mathematikwerkzeuge erstellt werden.
beschreiben die Veränderung des Graphen von *f* beim Übergang von $f(x)$ zu $f(x) + c$, $c \cdot f(x)$, $f(x + c)$, $f(c \cdot x)$, bestimmen Funktionen oder Parameter in Funktionstermen aus Bedingungen an die Funktion oder deren Ableitungen, untersuchen Funktionen auch rechnerisch auf Punktsymmetrie zum Ursprung und Achsensymmetrie zur *y*-Achse, erkennen Symmetrien zu beliebigen Punkten beziehungsweise Achsen.	• Verschiebung in *x*- beziehungsweise *y*-Richtung • Streckung in *x*- beziehungsweise *y*-Richtung • Spiegelung an der *x*- beziehungsweise *y*-Achse • Punkt- und Achsensymmetrie • gerade und ungerade Funktionen	

Inhaltsbezogene Kompetenzen *Die Schülerinnen und Schüler …*	**Verbindliche Themen und Inhalte**	**Vorgaben und Hinweise**
deuten die Ableitung als lokale Änderungsrate und interpretieren sie in Sachzusammenhängen. bestimmen die Gleichung der Tangente beziehungsweise der Normalen in einem Punkt eines Funktionsgraphen. **deuten die Ableitung im Zusammenhang mit der lokalen Approximation einer Funktion durch eine lineare Funktion.**	• lokale Änderungsrate • Differenzialquotient • Tangentensteigung • Ableitung • Normale • Newton-Verfahren	
interpretieren die Ableitungsfunktion im Sachzusammenhang.	• Ableitungsfunktion • Stetigkeit • Differenzierbarkeit	Es genügt ein intuitives Verständnis der Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Dabei sollen die anschaulichen Begriffe *sprungfrei* und *knickfrei* bekannt sein.
entwickeln Ableitungsgraphen aus dem Funktionsgraphen und umgekehrt. prüfen zusammengesetzte Funktionen auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.	• grafisches Differenzieren • Skizzieren von Stammfunktionen • zusammengesetzte, beziehungsweise abschnittsweise definierte Funktionen	An dieser Stelle soll die gedankliche Umkehrung des Differenzierens thematisiert werden, der Integralbegriff folgt erst später.
deuten die zweite Ableitung als Steigungsfunktion der ersten Ableitung. deuten das Vorzeichen der zweiten Ableitung als Indikator für die Krümmungsrichtung des Graphen der Ausgangsfunktion.	• Wendepunkte als Punkte des Graphen mit lokal extremer Steigung • Links-, Rechtskrümmung • Wendepunkt als Punkt, in dem sich die Krümmungsrichtung des Graphen ändert	
bilden Ableitungen der Funktionen der oben genannten Funktionsklassen.	• Ableitungsregeln zu den oben genannten Funktionsklassen • Summenregel • Faktorregel • Potenzregel • Produktregel • Kettenregel	Auf grundlegendem Niveau sollen vorzugsweise einfache verkettete Funktionen betrachtet werden.

Fortführung der Tabelle »

Inhaltsbezogene Kompetenzen *Die Schülerinnen und Schüler…*	Verbindliche Themen und Inhalte	Vorgaben und Hinweise
rechnen mit *n*-Tupeln und wenden die Rechengesetze eines Vektorraumes an, nutzen die Rechengesetze für Skalarprodukt und Vektorprodukt zum Berechnen und Umformen von Termen sowie zum Lösen von Vektorgleichungen.	· der 2-dimensionale Vektorraum $\mathbb{R}^2$ · der 3-dimensionale Vektorraum $\mathbb{R}^3$ · Nullvektor · Gegenvektor · Addition von Vektoren · Multiplikation von Vektoren mit Skalaren · Vektorgleichungen · Linearkombination · lineare Abhängigkeit · lineare Unabhängigkeit · Skalarprodukt · Vektorprodukt	Durch die Interpretation von Vektoren als Verschiebungen kann auf ihre Definition als Äquivalenzklasse (Pfeilklasse) verzichtet werden.

2.2.2 Leitidee 2: Messen

In der Oberstufe wird das Messen als universelles Werkzeug zum Quantifizieren und Vergleichen um die Ableitung, das Integral sowie das Skalar- und das Vektorprodukt erweitert. Die Leitidee *Messen* ist in besonderem Maße mit anderen Leitideen verknüpft.

Inhaltsbezogene Kompetenzen *Die Schülerinnen und Schüler…*	Verbindliche Themen und Inhalte	Vorgaben und Hinweise
bestimmen die mittlere Änderungsrate und deuten sie im Sachzusammenhang.	· mittlere Änderungsrate · Differenzenquotient einer Funktion · Sekantensteigung / mittlere Steigung	Zum Aufbau einer Grundvorstellung des Steigungsbegriffs sollten die Schülerinnen und Schüler zur Bestimmung von Sekantensteigungen zunächst Zeichnungen heranziehen. Für Visualisierungen sollte ein digitales Mathematikwerkzeug genutzt werden.
erläutern den Übergang vom Differenzenquotienten zum Differenzialquotienten, deuten die lokale Änderungsrate im Sachzusammenhang, nutzen die Definition des Differenzialquotienten, um die lokale Änderungsrate numerisch zu bestimmen, deuten den Schnittwinkel zwischen den Graphen als Winkel zwischen den Tangenten an die Graphen im Schnittpunkt.	· lokale Änderungsrate · Differenzenquotient · Differenzialquotient · Tangentensteigung · Differenzierbarkeit · Schnittwinkel von Graphen	Der Übergang vom Differenzenquotienten zum Differenzialquotienten sollte durch Grenzwertprozesse intuitiv erfasst und mit digitalen Mathematikwerkzeugen veranschaulicht werden. Auch mithilfe der Tabellenkalkulation kann das Verständnis des Grenzwertprozesses unterstützt werden. Dabei sollten links-, rechts- und beidseitige Grenzwertprozesse betrachtet werden.
deuten die Schreibweise des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Folge verfeinerter Messergebnisse, nutzen das Integral zur Bestimmung von Mittelwerten, bestimmen den Inhalt von Flächen, die durch Funktionsgraphen begrenzt werden, und deuten diese Flächeninhalte im Sachzusammenhang.	· Approximation von Flächeninhalten · bestimmtes Integral · Mittelwertbestimmung · **uneigentliches Integral**	Es genügt, Rechteckstreifen zur Approximation zu betrachten. Es soll ein intuitives Verständnis von uneigentlichen Integralen gewonnen werden. Es sollen auch Sachprobleme betrachtet werden, bei denen ein negativer Integralwert im Sachzusammenhang eine Bedeutung hat.

Fortführung der Tabelle »

Darstellungswechsel

Darstellungswechsel

Aufgabe

f ist eine differenzierbare Funktion, so dass $f\,(-x) \;=\; -\,f\,(x)$ gilt.

Überlegen Sie, welche der folgenden Aussagen zutreffen:

5 min

i) $f\,'(-a) \;=\; -\,f\,'(-a)$

ii) $f\,'(-a) \;=\; f\,'(a)$

iii) $f\,'(-a) \;=\; -\,f\,'(a)$

iv) keine von i) – iii)

Eisenberg, T.; Dreyfus, T. (1990): On the Reluctance to Visualize in Mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunninham (Hrsg.): Visualization in Teaching and Mathematics, MAA Series, Washington, S. 25-37.

Darstellungswechsel

Reflexion

f ist eine differenzierbare Funktion, so dass $f\,(-x) = -f\,(x)$ gilt.

Bitte überlegen Sie, welche der folgenden Aussagen zutreffen:

i) $f\,'(-a) = -f\,'(-a)$

ii) $f\,'(-a) = f\,'(a)$

iii) $f\,'(-a) = -f\,'(a)$

iv) keine von i) – iii)

In welcher Darstellung haben Sie (gedanklich) gearbeitet?

Zwischen welchen Darstellungen haben Sie gewechselt?

Übrigens:
Eine typische Antwort war:
$f\,'(-a) = (f\,(-a))' = (-f\,(a))' = -f\,'(a)$.

Eisenberg, T.; Dreyfus, T. (1990): On the Reluctance to Visualize in Mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunninham (Hrsg.): Visualization in Teaching and Mathematics, MAA Series, Washington, S. 25-37.

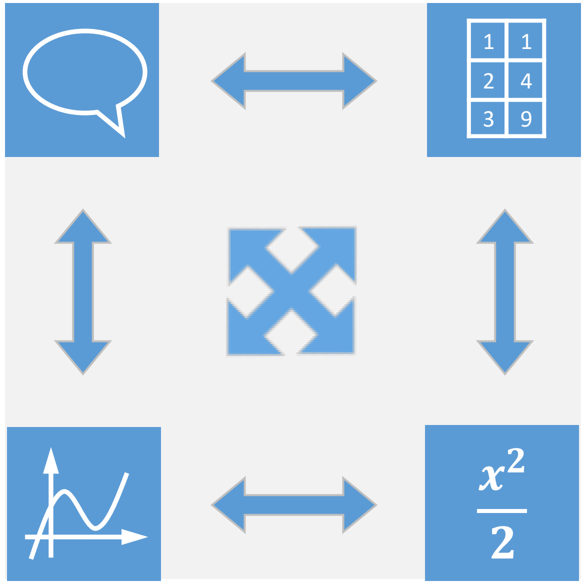
Darstellungsformen

Funktionen

Wdh. aus Modul B2
Funktionaler Zusammenhg.

verbal
Beschreibung
einer Situation

numerisch
konkrete
Werte(paare)



graphisch
Graph o.
Diagramm

symbolisch
(Funktions-)term,
Formeln

Einstiege in die Analysis

Eine Schachtel aus Papier

Beispiel 1

20 min

a) Basteln Sie eine solche Schachtel.

b) Versuchen Sie eine solche Schachtel mit maximalem Volumen zu basteln.

Für weitere Rechnungen arbeiten Sie mit den Seitenlängen 30 cm bzw. 21 cm.

Eine Schachtel aus Papier

Reflexionsaufgaben

1.
   a) Antizipieren Sie mögliche Probleme, die SuS bei der Bearbeitung haben können.
   b) Überlegen Sie sich geeignete Impulse bzw. Unterstützungen für die SuS.
2.
   a) Sichten Sie das „Basismodell Problemlösen“. *
   b) Diskutieren Sie, inwiefern Sie diese Modelle bei der Unterrichtsgestaltung berücksichtigen.
3.
   Erörtern Sie, ob und inwiefern diese Aufgabe als Einstieg in die Analysis der Oberstufe geeignet ist.

20 min

Darstellungsformen

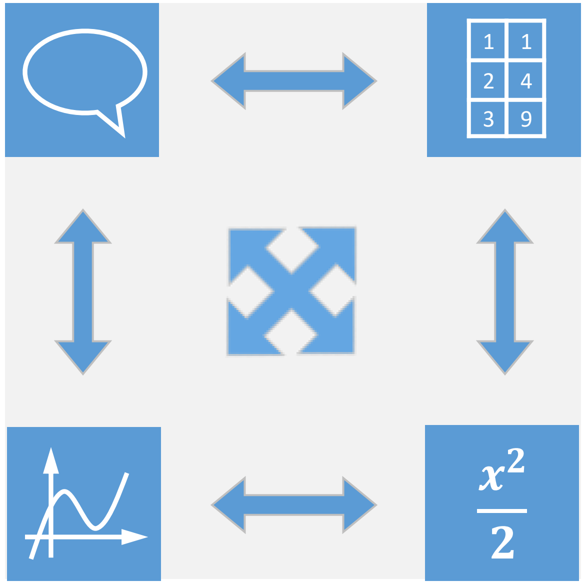
Funktionen

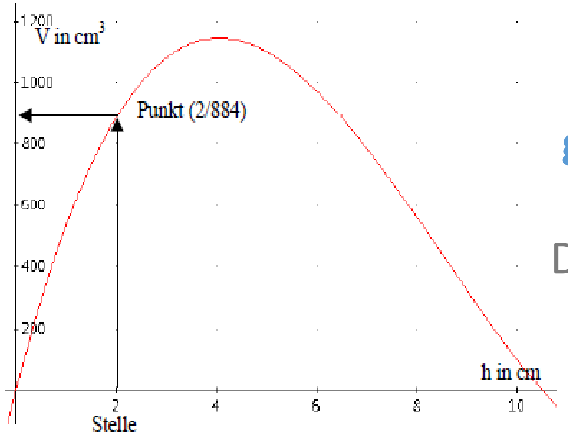
Wdh. aus Modul B2
Funktionaler Zusammenhg.

verbal
Beschreibung
einer Situation

numerisch
konkrete
Werte(paare)

h in cm	V(h) in cm³
0,0	0,000
1,0	532,000
2,0	884,000
3,0	1080,000
4,0	1144,000
5,0	1100,000





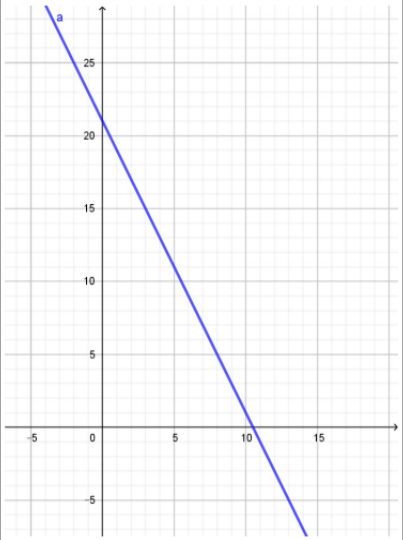
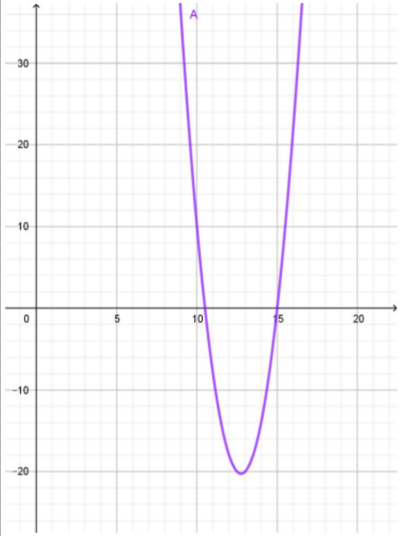
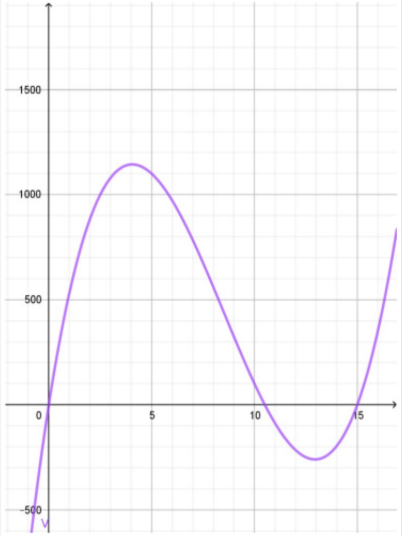
graphisch
Graph o.
Diagramm

symbolisch
(Funktions-)term,
Formeln

$V(h) = h \cdot (30-2h) \cdot (21-2h)$ oder $V(h) = 4h^3 - 102h^2 + 630h$

Eine Schachtel aus Papier

Ansätze

Fachbegriff / Fertigkeit	Beispiel a	Beispiel A	Beispiel V
Funktionsterme ganzrationaler Funktionen: $f(x) = m\,x + b$ $g(x) = a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x - d)^2 + e$ $h(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ $i(x) =$ usw.	Lineare Funktion a(x) = ...	Quadratische Funktion A(x) = ...	Kubische Funktion V(x) =...
Graphen ganzrationaler Funktionen: - Steigung / y-Achsenabschnitt - Scheitelpunkt / Streckungsfaktor - Stelle / Funktionswert - Schnittpunkte mit den Achsen: (0 / f(0)) und (x_N / 0) - Nullstelle x_N - Hochpunkt / Maximalstelle - Tiefpunkt / Minimalstelle - Wendepunkte - Verschiebung in x-Richtung / y-Richtung - Streckung / Stauchung			
Wertetabellen erstellen: TR-Nutzung	x | | | a(x) | | |	x | | | A(x) | | |	x | | | V(x) | | |

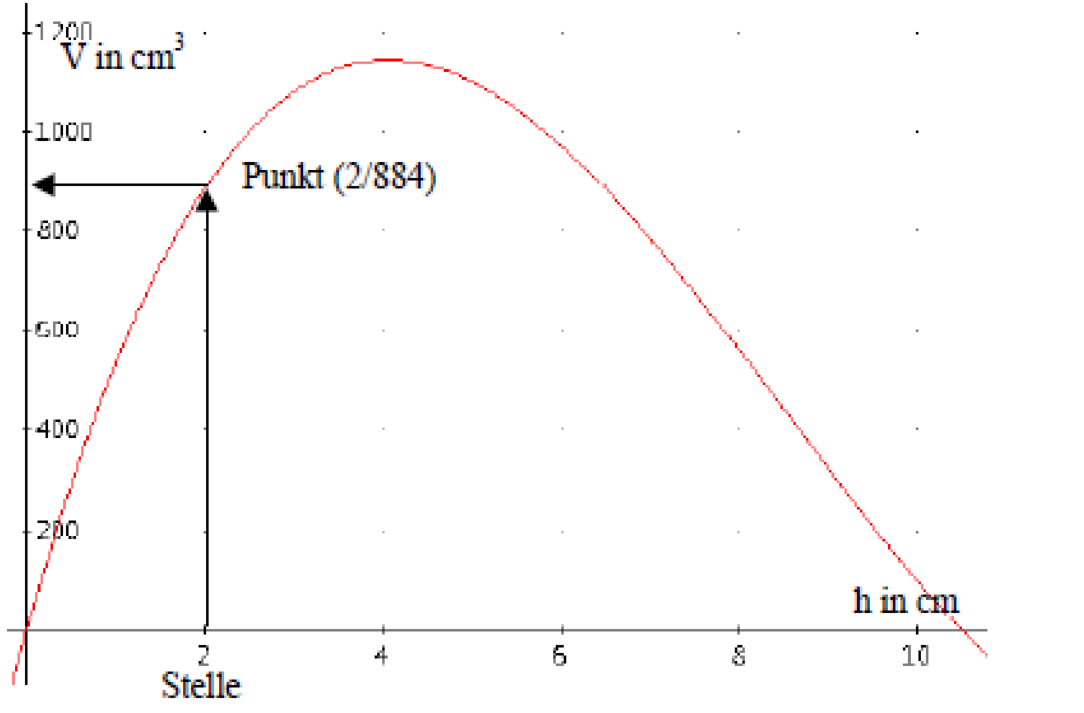
Eine Schachtel aus Papier

Darstellungsformen

tabellarisch:

h in cm	V(h) in cm³
0,0	0,000
1,0	532,000
2,0	884,000
3,0	1080,000
4,0	1144,000
5,0	1100,000
6,0	972,000
7,0	784,000
8,0	560,000
9,0	324,000
10,0	100,000

grafisch: (als Graph in einem Koordinatensystem):

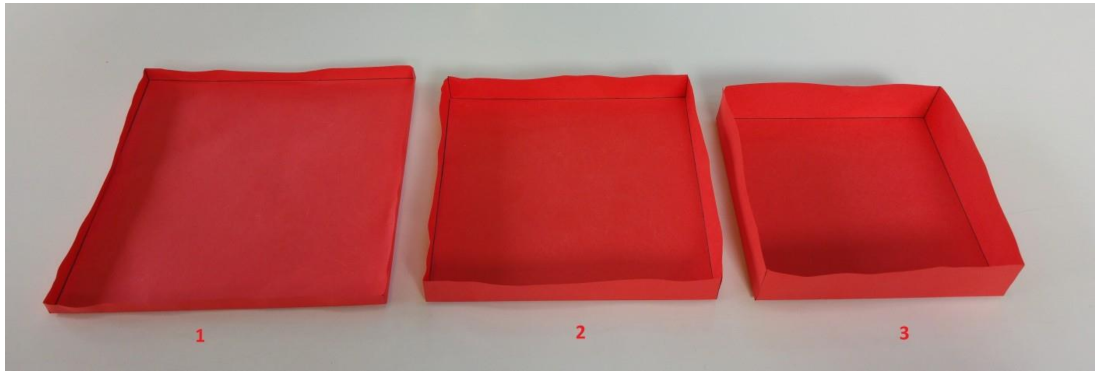


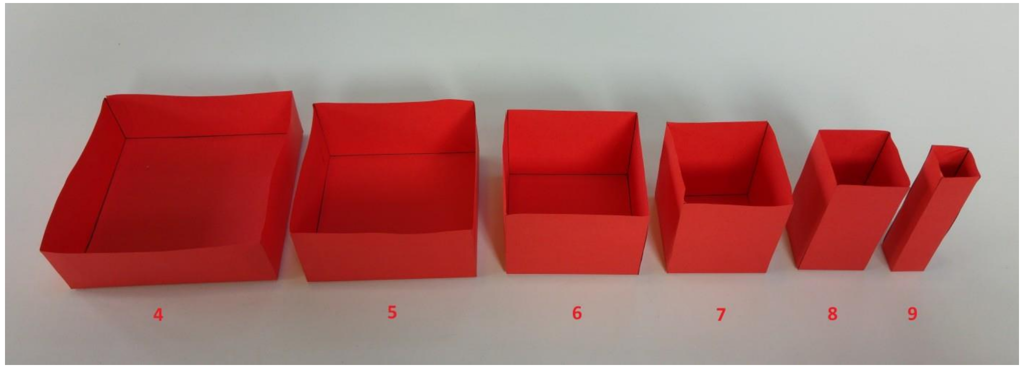
algebraisch: (mit Hilfe eines **Funktionsterms**):

$V(h)= h\cdot(30-2h)\cdot(21-2h)$ oder $V(h)=4h^3-102h^2+630h$

Schachtelaufgabe

Systematisierung



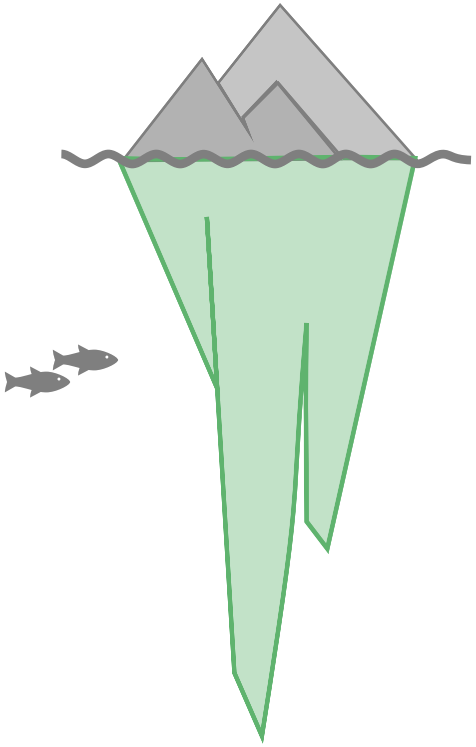


Basismodelltheorie: Problemlösen

Basismodelltheorie

nach Oser & Patry (1990)

Wdh. aus Modul C2
Unterrichtsplanung



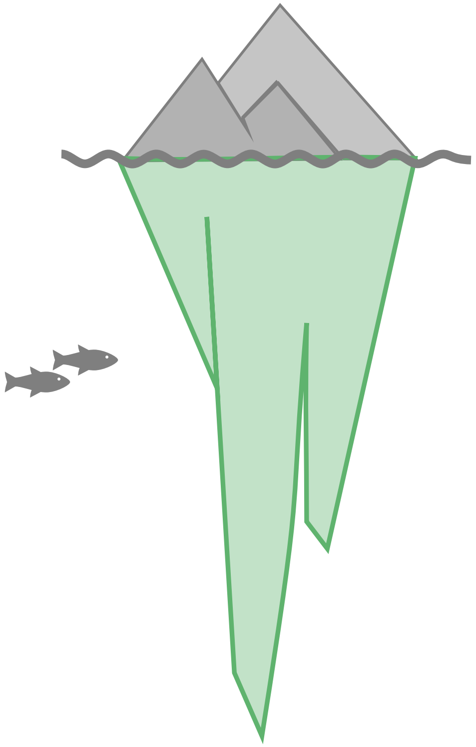
	Name des Basismodells	Zieltyp des Lernens	Notwendige Merkmale	
1	Lernen durch Eigenerfahrung	Aneignung von Erfahrungswissen	Unmittelbarer Lebensbezug	Arbeit in Sozial- und Produktionsbetriebe
2	Entwicklungsför-dernd./Strukturver-änderndes Lernen	Transformation von Tiefenstrukturen (z.B. moralisches Urteil)	Disäquilibrations-vorgänge	Kontroverse Diskussionen
3	Problemlösen (entdeckendes Lernen)	Lernen durch Versuch und Irrtum	Hypothesenbildung, Hypothesentestung	Experimentieren, Konfliktlösen
4a	Wissensaufbau	Memorierbare Fakten Fähigkeiten, ‚Narrativs“	Struktur und Strukturierung von Lehrgängen	Darbietender und entwickelnder Unterricht
4b	Konzeptbildung	Verwendung von Schemata	Differenzierung und Analogiebildung	Lernen durch Anwen-dung/ Transfer komple-xer Denksysteme

Fortführung der Tabelle »

Basismodelltheorie

nach Oser & Patry (1990)

Wdh. aus Modul C2
Unterrichtsplanung



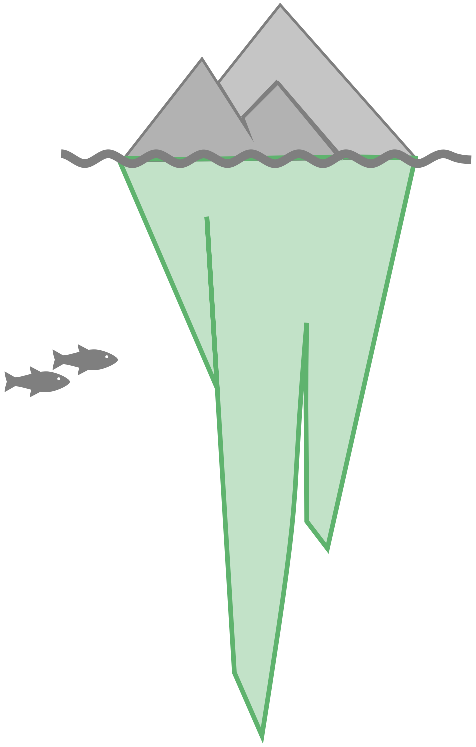
Name des Basismodells	Zieltyp des Lernens	Notwendige Merkmale	Sichtstruktur
5 Betrachtendes Lernen	Assimilation von ästhetischen Gegebenheiten	Nachahmung als innerer Prozess, meditativ. Wahrnehmen	Stille-Übung, geführte Bildbetrachtung
6 Lernen von Strategien	Lernen Lernen (Metalernen)	Gebrauch und Einsatz von allerlei Strategien	Reflexion über eigenes Lernen
7 Routinebildung & Training von Fertigkeiten	Routine & Fertigkeiten ohne Belastung des Bewusstseins verwenden	Hohe Übungsfre-quenz im Feld (Auto-fahren, mathm. Reihen, Vokabeln lernen)	Differenzierender Unterricht und Übungsqualität
8 Motilitätsmodell	Verarbeitung affektiver Spannungen durch schöpferisches Tun	Aufbau von affektiver Erregung, Indignation, Freude, Trauer etc. durch Narration vermittelt	Gestalterisches Zeichnen, Musizieren, „Dichten“, Tanzen, gestalterisches Mimik

Fortführung der Tabelle »

Basismodelltheorie

nach Oser & Patry (1990)

Wdh. aus Modul C2
Unterrichtsplanung

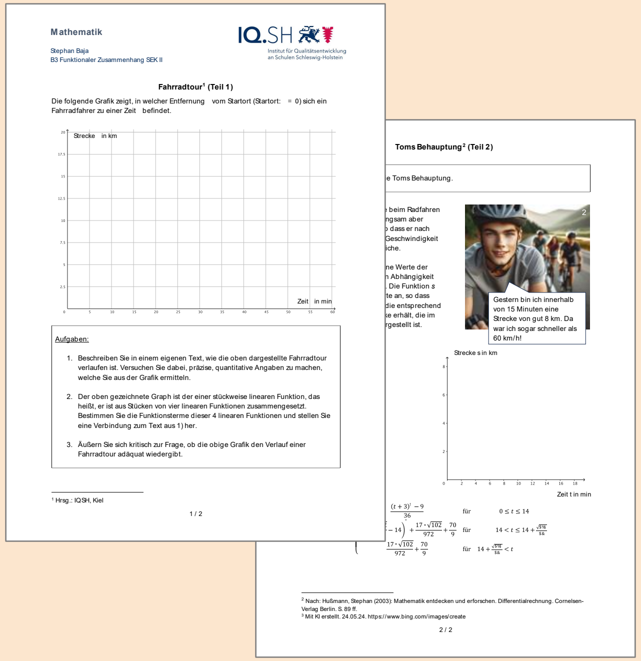


Name des Basismodells	Zieltyp des Lernens	Notwendige Merkmale	Sichtstruktur
9 Lernen dyn. Beziehungen, Lernen gem. Normen d. Partizipation (Kooperationslernen)	Assimilation von ästhetischen Gegebenheiten	Nachahmung als innerer Prozess, meditativ. Wahrnehmen	Gestaltung von Freundschaften, Kooperationsarbeiten, Schulversammlungen
10 Wert- und Identitätsaufbau	Wandel des Wertbewusstseins (politische, menschliche, religiöse Werte)	Reflektierte Hierarchien von Werten	Wertklärungsverfahren, politische Bildung, Kunsterziehung
11 Hypertextlernen	Komplexes Lernen, wenn die Begriffe schon vorhanden sind.	Suchen und Verarbeiten von Informationen über ein bestimmtes Thema, zu dem man schon alle Grundbegriffe aufgebaut hat	Vorbereiten von Vorträgen, Erstellen von größeren schriftlichen Arbeiten

Basismodell 3
Problemlösen

1. **Problemgenerierung:** Entdeckung eines Hier-und-Jetzt-Problem im Erfahrungsbereich der SuS
2. **Problemformulierung:** Formulierung des Untersuchungsproblems, und zwar in einer Diskussion, die die Meinung und Überzeugung der SuS ausdrücklich herausfordert
3. **Hypothesen entwerfen, Variation:** Die SuS entwerfen Hypothesen und denken erstmals über die Lösungsmöglichkeiten nach. Dabei sollen jeweils mehrere mögliche, plausible Lösungsmittel gesucht werden. (Lösungsstrategien sammeln)
4. **Hypothesen testen, Selektion:** Die Hypothesenformulierung wird verbunden und bestätigt in den klassischen Methoden der Wissenschaften (Sozialwissenschaften, Entdeckungen und Experimente etc.) und in elementarisierter Form von den Schülerinnen und Schülern nachvollzogen. (Lösungsstrategien testen, Ergebnis überprüfen)
5. **Verallgemeinerungen:** Der Unterricht führt zu eigenen Untersuchungen der SuS. Die Übertragbarkeit auf andere Aufgaben, Strategien und Methoden wird geprüft.

Fahrradtour
Beispiel 2



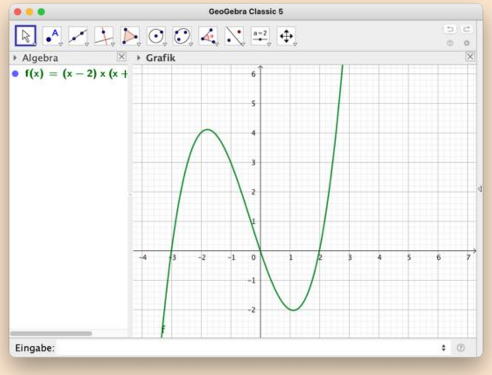
Fahrradtour Teil 1 + 2

1. Bearbeiten Sie die Aufgaben aus SuS-Perspektive.
2. Sichten Sie die Ergebnisse der Gruppenarbeit und erläutern Sie, wie Sie mit den Ergebnissen einer anschließenden Unterrichtsphase umgehen würden.

30 min

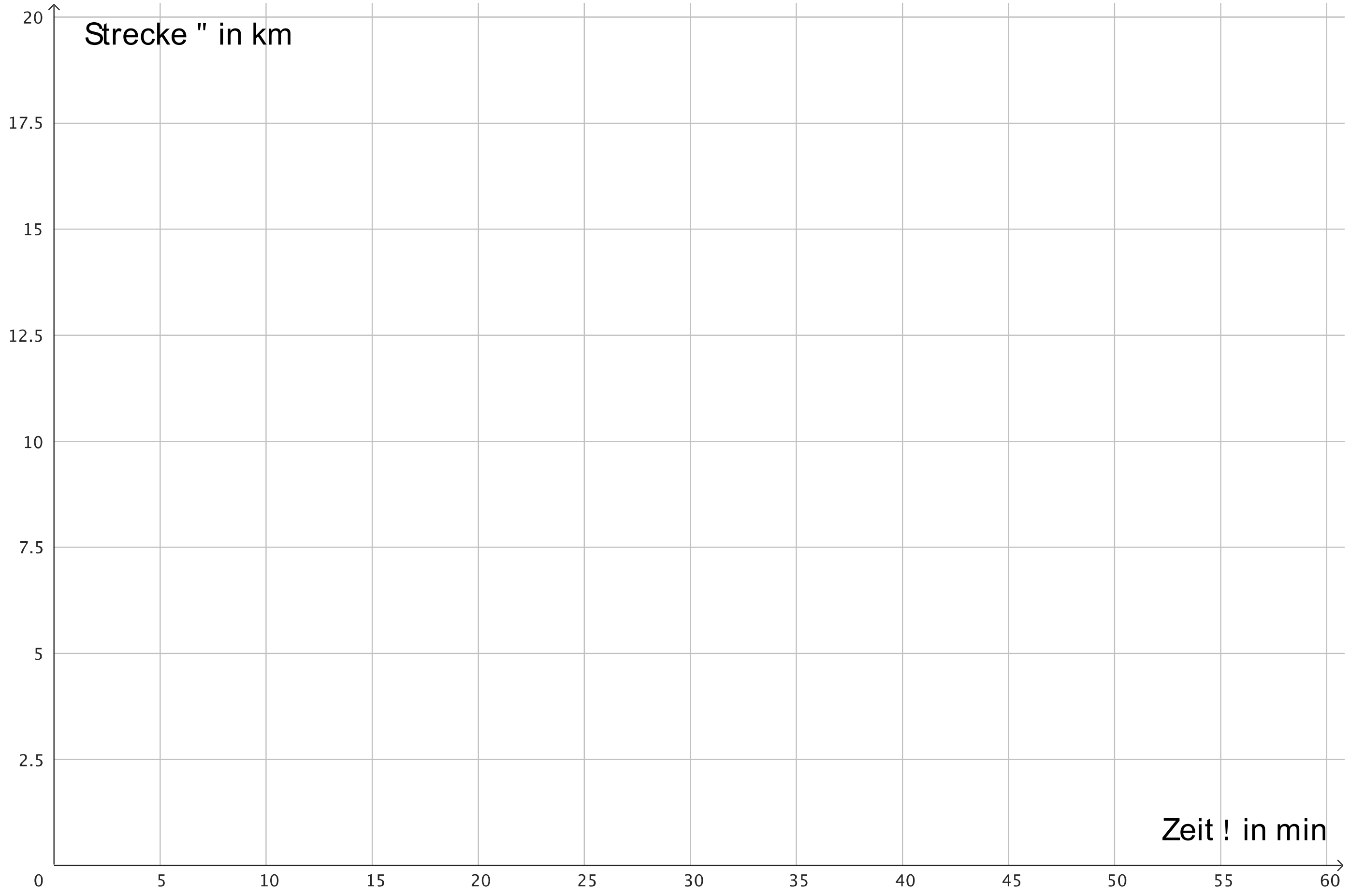
Fahrradtour Teil 3

3. Entwickeln Sie eine ggb-Aktivität, die an die Bearbeitung von Teil 2 Toms Behauptung anschließen könnte.



Fahrradtour

Teil 1



Nach: Thomsen, Oliver; IQSH

Fahrradtour

Teil 1

Erkenntnisse:

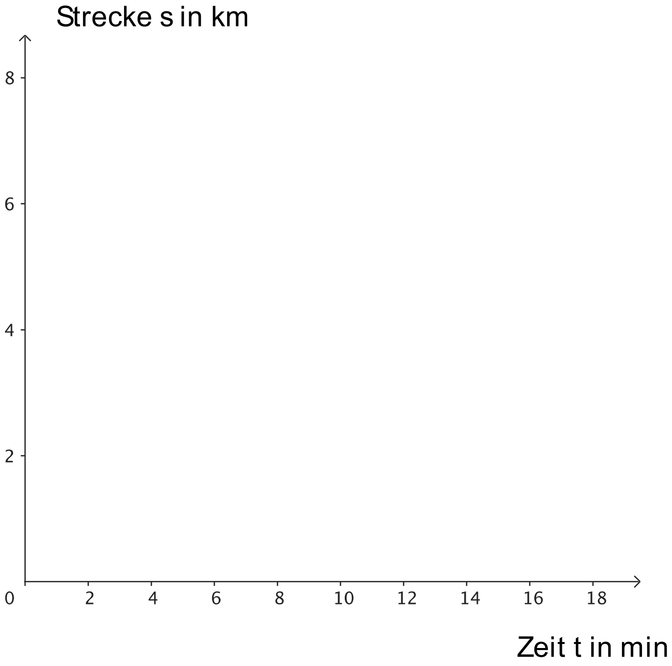
- Steigung des Graphen ist Maß für die Geschwindigkeit
- Genauer: Steigung der Sekanten durch $(t_1, s(t_1))$ und $(t_2, s(t_2))$ ist ein Maß für die mittlere Geschwindigkeit im Intervall $[t_1, t_2]$ d. h. für die mittlere Änderungsrate der Weglänge s im Intervall $[t_1, t_2]$
- Entwicklung der Formel für die mittlere Geschwindigkeit zwischen Zeitpunkt t_1 und t_2:
  $\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$ Differenzenquotient
- Kritik am Graphen: Knicke bedeuten „schlagartige“ Geschwindigkeitsänderung, das ist unrealistisch
- Untersuchung einer allmählichen Änderung der Geschwindigkeit:
  Wie muss ein Anfahrgraph aussehen? (siehe Teil 2)

Fahrradtour

Teil 2: Toms Behauptung

Gestern bin ich innerhalb von 15 Minuten eine Strecke von gut 8 km. Da war ich sogar schneller als 60 km/h!

Zeit t in min	Strecke s in km
1	0,194
2	0,444
5	1,53
8	3,11
10	4,44
13	6,86
16	7,95



$$s(t) = \begin{cases} \dfrac{(t+3)^{!} - 9}{36} & \text{für} \quad 0 \leq t \leq 14 \\ \left(t - \dfrac{\sqrt{102}}{18} - 14\right)^{"} + \dfrac{17 \cdot \sqrt{102}}{972} + \dfrac{70}{9} & \text{für} \quad 14 < t \leq 14 + \frac{\sqrt{\$\%}}{\$\&} \\ \dfrac{17 \cdot \sqrt{102}}{972} + \dfrac{70}{9} & \text{für} \quad 14 + \frac{\sqrt{\$\%}}{\$\&} < t \end{cases}$$

Fahrradtour

Teil 2: Toms Behauptung

Systematisierung

G1

Zeit t in min	Strecke s in km	Geschwindigkeit in $\frac{km}{h}$
1	0,19	$\frac{0,19}{\frac{1}{60}} = 11,4$
2	0,44	13,2
5	1,53	18,36
8	3,11	23,326
10	4,44	26,64
13	6,86	31,6615...
16	7,95	29,8125

G2

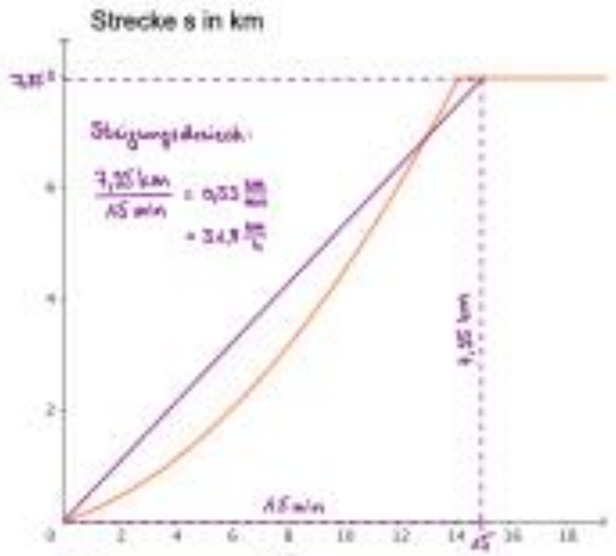
$s(14) \approx 7,78$
$s(13,5) \approx 7,31$
$7,78 - 7,31 = 0,47$

$\frac{0,47\,km}{0,5\,min} = 0,94\,\frac{km}{min} = 56,4\,\frac{km}{h}$

G3

Zeit t in min	Strecke s in km	
1	0,19	$\frac{0,44\,km - 0,19\,km}{1\,min} = 0,25\,\frac{km}{min} = 15\,\frac{km}{h}$
2	0,44	$\frac{1,53\,km - 0,44\,km}{5\,min - 2\,min} = 0,36\overline{3}\,\frac{km}{min} = 21,8\,\frac{km}{h}$
5	1,53	$0,52\overline{6}\,\frac{km}{min} = 31,6\,\frac{km}{h}$
8	3,11	$33,3\,\frac{km}{h}$
10	4,44	$48,4\,\frac{km}{h}$
13	6,86	$21,8\,\frac{km}{h}$
16	7,95	

G4

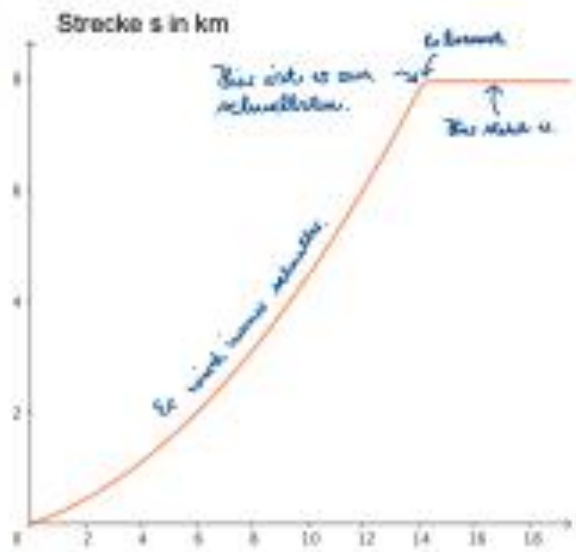


G5

Gestern bin ich innerhalb von 15 Minuten eine Strecke von gut 8 km gefahren. Da war ich sogar schneller als 60 km/h!

$8\,km : 0,25\,h = 32\,\frac{km}{h}$

G6



Differenzialrechnung
Themenorientierung

Traditioneller Unterricht	Angestrebter Unterricht
Steigungen stehen im Mittelpunkt.	Die Ableitung hat auch andere Bedeutungen.
Die Ableitung an einer Stelle entspricht der Steigung der Tangente an dieser Stelle.	Ableitung an einer Stelle entspricht der momentanen Änderungsrate an dieser Stelle.

Differenzialrechnung
Themenorientierung

x	$f(x)$	Bedeutung von $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$
Strecke	Höhe	mittlere Steigung
Zeit	Strecke	mittlere Geschwindigkeit
Zeit	Volumen	mittlere Stromstärke
Höhe	Temperatur	mittlere Temperaturänderung pro Höhenunterschied
Zeit	Individuenanzahl	mittlere Wachstumsgeschwindigkeit des Bestandes
Zeit	Menge eines Stoffes	mittlere Abbaugeschwindigkeit

Grundvorstellungen in der Differentialrechnung

Grundvorstellungen
ausbilden

Wdh. aus Modul A1
Messen, Grundvorstellungen

Grundvorstellungen beschreiben **Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und den inneren, individuellen Vorstellungen** zu einem Begriff oder Verfahren.

Die Ausprägung von Grundvorstellungen hängt ab vom Umfang der entsprechenden Handlungserfahrung und der Häufigkeit ihrer Aktivierung.

Lehrkraft

Individuum:
subjektive Erfahrungsbereiche,
Handlungsvorstellungen, Erklärungsmodel

aktivieren ↑ ↓ erfassen

Sachzusammenhang

didaktisch umsetzen ↑ ↓ aufbauen

Grundvorstellungen

inhaltlich bestimmen ↑ ↓ verstehen

Mathematik:
Begriffe, Verfahren, Resultate

Schüler

Hofe, Rudolf (1995): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg: Spektrum

Differenzialrechnung

Grundvorstellungen

Lokale Änderungsrate

- Vorstellung von der Momentangeschwindigkeit bei Veränderungsprozessen (z. B. Bewegungsvorgängen),
- Vorstellung von der Steigung einer Kurve in einem Punkt,
- Vorstellung, dass die Änderung der Abhängigen y durch $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$ gegeben ist.

Tangentensteigung

- Vorstellung von Tangenten als Schmieggeraden,
- Vorstellung, dass die Tangente an eine Kurve in einem Punkt die gleiche Steigung wie die Kurve hat,
- Vorstellung, dass die Tangente die lokale Richtung einer Kurve angibt.

Lokale Linearität

- Beim stark vergrößerten Blick auf die Umgebung eines Punktes des Graphen einer differenzierbaren Funktion sieht man nur ein geradliniges Kurvenstück.
- Für kleine Änderungen der x-Werte ist die Funktion so gut wie linear, kann also approximativ durch einen linearen Zusammenhang ersetzt werden.

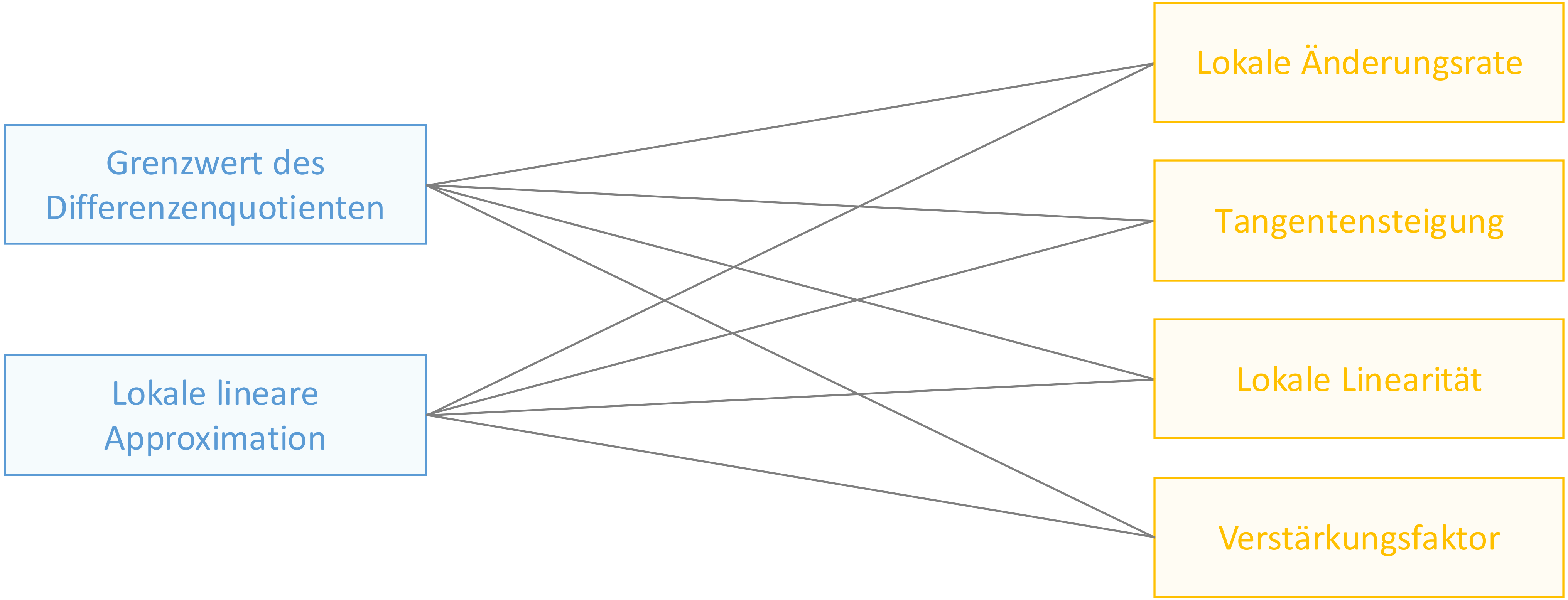
Verstärkungsfaktor

- Die Ableitung gibt an, wie stark sich kleine Änderungen der unabhängigen auf die abhängige Variable auswirken.
- Hohe Werte der Ableitung bedeuten schnelle/starke Änderungen der Funktionswerte.
- Für kleine Änderungen ist der Zusammenhang von Δx, Δy multiplikativ: $\Delta y \approx m \cdot \Delta x$.

Greefrath, G. u. a. (2016): *Didaktik der Analysis*, Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

Differenzialrechnung

Aspekte und Grundvorstellungen



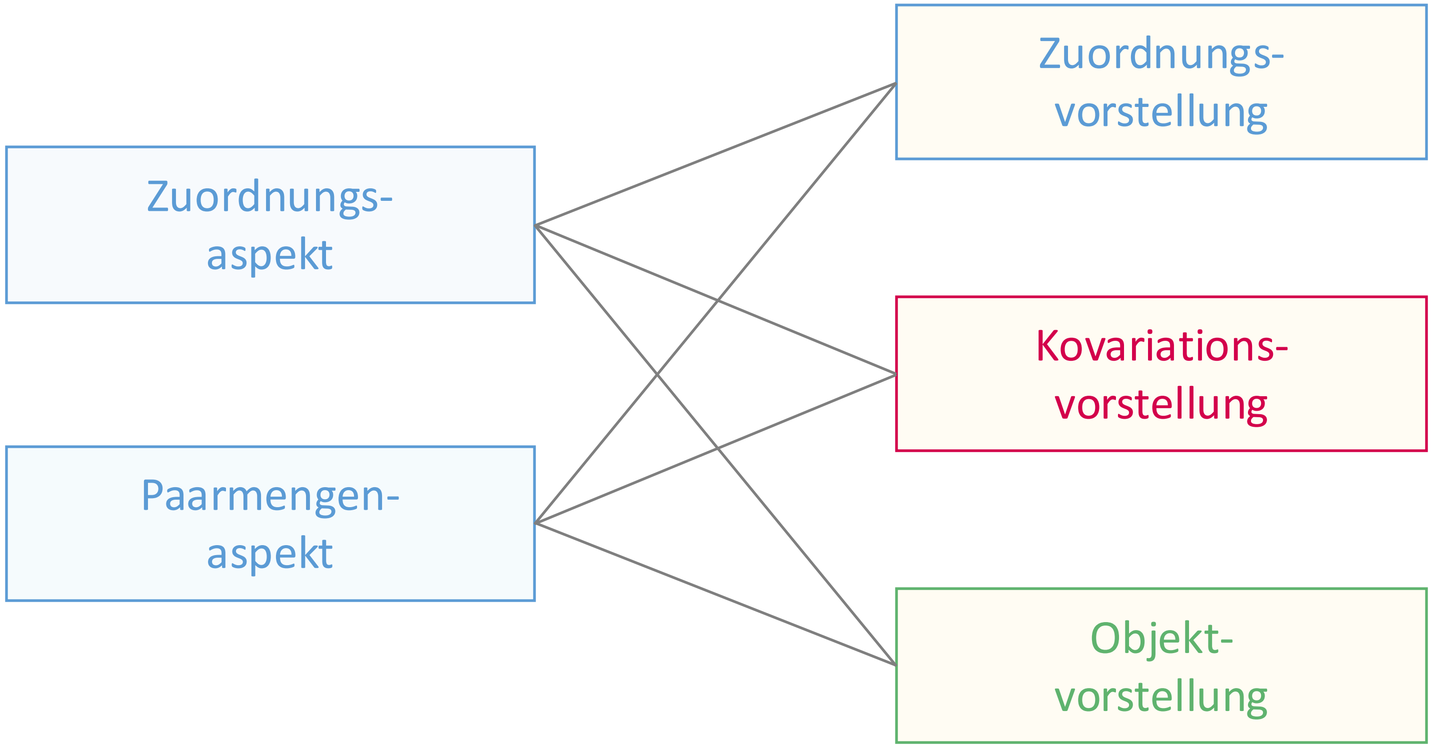
Ziel im Unterricht:
Vermittlung eines umfassenden Bilds von Aspekten und Grundvorstellungen zur Differenzialrechnung.

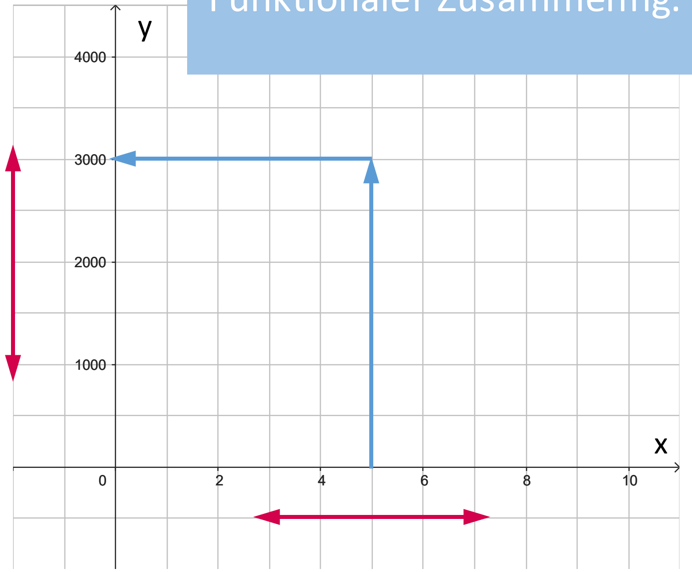
Greefrath, G. u. a. (2016): *Didaktik der Analysis*, Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

Funktionen

Aspekte und Grundvorstellungen

Wdh. aus Modul B2
Funktionaler Zusammenhg.



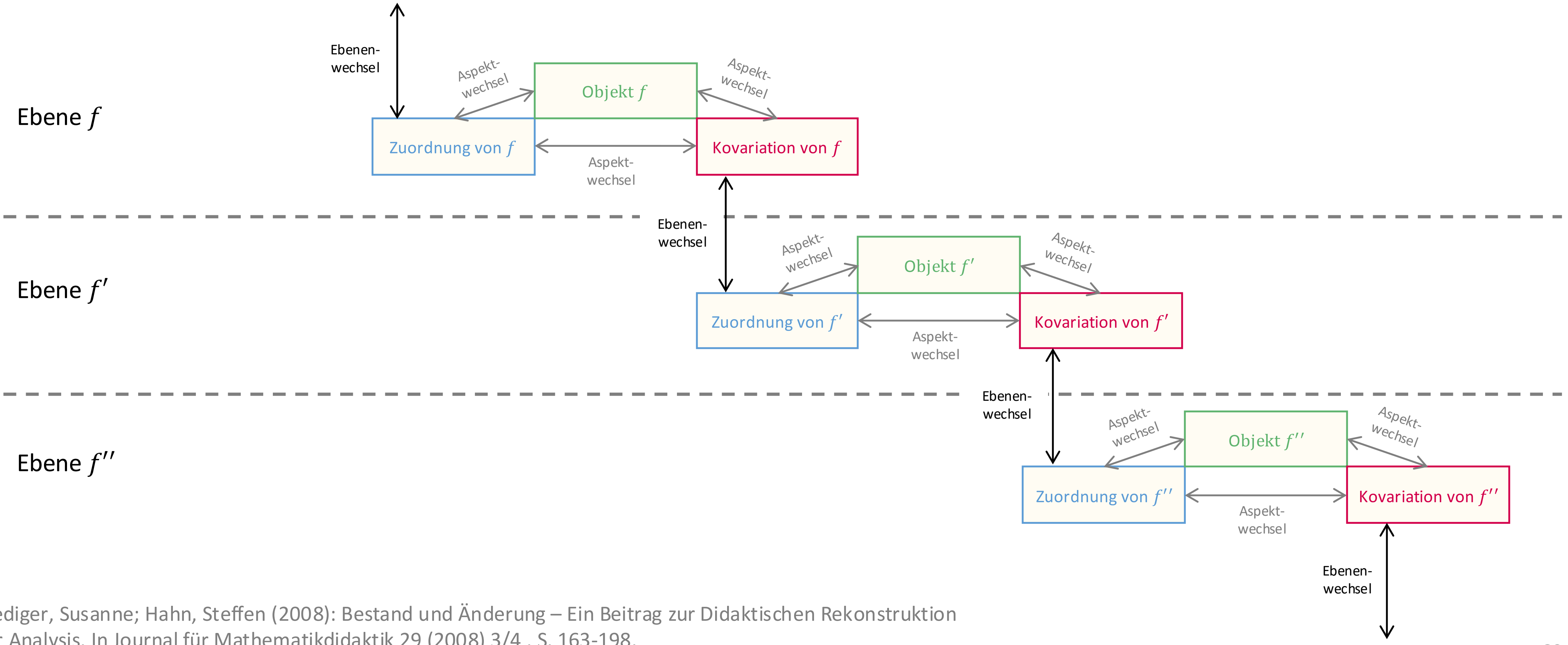


x	y
4,0	2850
4,5	2890
5,0	3000
5,5	2920
6,0	2960

Greefrath, G. u. a. (2016): *Didaktik der Analysis*, Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

Lernendenperspektive

Schwierigkeiten beim Ebenenwechsel im funkt. Zushg.



Prediger, Susanne; Hahn, Steffen (2008): Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. In Journal für Mathematikdidaktik 29 (2008) 3/4 , S. 163-198.

Lernendenperspektive

Schwierigkeiten beim Ebenenwechsel im funktionalen Zusammenhang

Zu den Aspektwechseln im funktionalen Zusammenhang (also dem Zusammenhang der damit verbundenen Grundvorstellungen) kommt nun noch ein Ebenenwechsel zwischen Änderungsrate und Bestand hinzu.

Zwischen den Funktionen auf den verschiedenen Ebenen besteht ein (übrigens auch **funktionaler**) **Zusammenhang**. Der **Kovariationsaspekt von f** wird also in Zusammenhang gebracht mit dem **Zuordnungsapekt von f‘ oder F**.

D.h., die Lernenden müssen nicht nur erfassen, wie sich beide Größen der Funktion f miteinander verändern, sondern dieser Veränderung auch noch einen Wert zuordnen (eben den Funktionswert von f‘ bzw. F).

Prediger, Susanne; Hahn, Steffen (2008: Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. In Journal für Mathematikdidaktik 29 (2008) 3/4 , S. 163-198.

Differenzialrechnung

Ergänzende Hinweise

- Verschiedene Grenzwertbildungen vornehmen lassen (natürlicher Übergang zum Differenzialquotienten)
- Schreibweise des Differenzialquotienten genau überlegen
- Nichtexistenz des Differenzialquotienten (Beispiel)
- Behutsamer Übergang von Ableitung an einer Stelle zur Ableitungsfunktion
- Ableitungsfunktion f‘ hat eine Bedeutung im Thema
- Graphisches Differenzieren

Differenzialrechnung

Wann darf man (muss man) den Themenbereich verlassen?

- Innermathematische Betrachtungen sind weiter zulässig und notwendig (z. B. Ableitungsregeln einführen).
- Techniken müssen auch außerhalb von Sachzusammenhängen geübt werden.
- Das Thema sollte nicht zu lang verwendet werden (Ermüdungseffekt).

Bedingungen finden & nutzen

Bedingungen finden

Aufgabe: Null-, Extrem-; Wendestellen

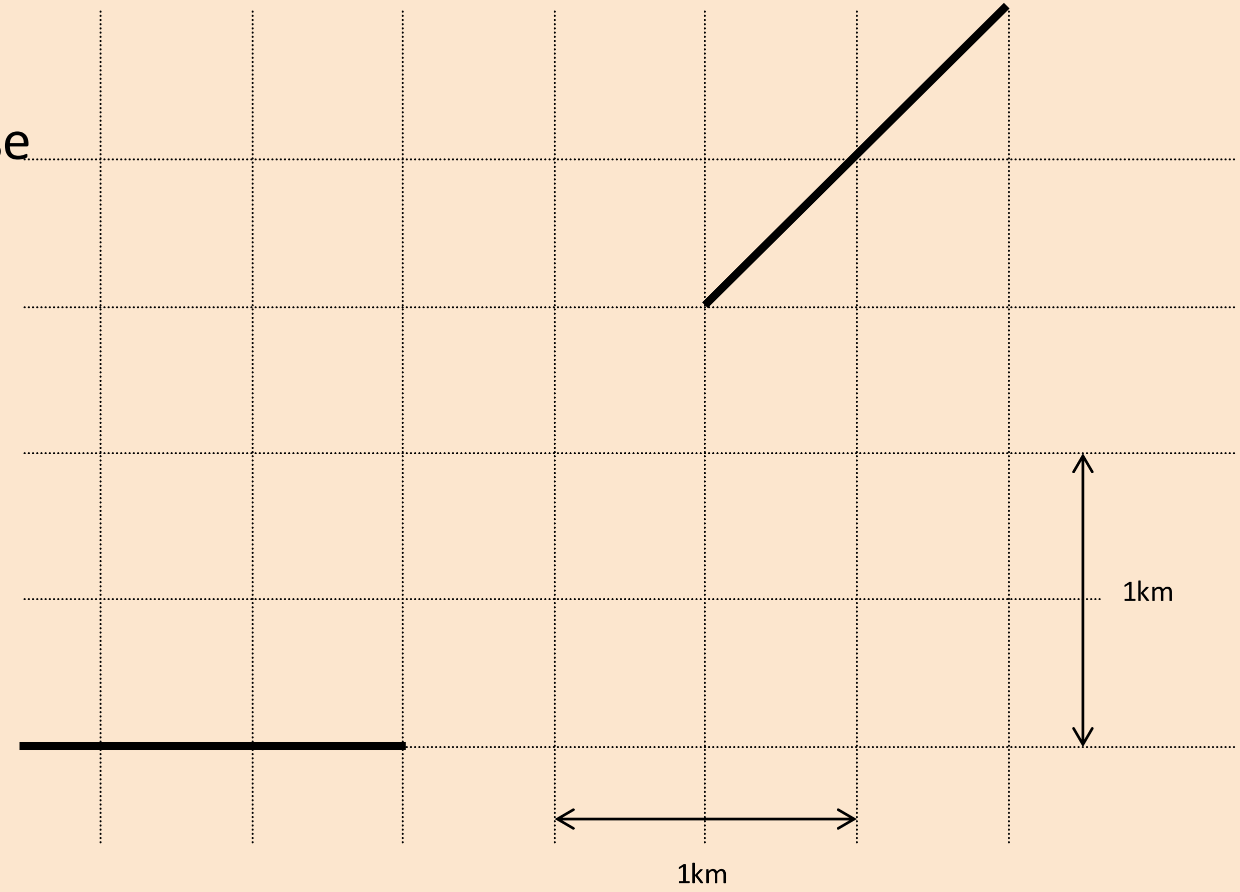
- Bearbeitet die Datei Zusammenhänge (Begriffe)
- Diskussion über die Ergebnisse (!?)

10 min

Bedingungen nutzen

Aufgabe: Trassierung

Es soll eine geeignete Verbindung zweier geradlinig verlaufender Gleise bestimmt werden. Den Plänen können folgende Maße entnommen werden:



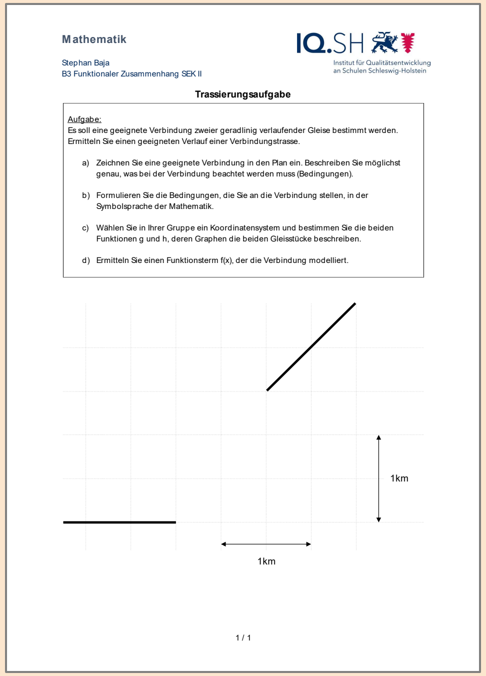
Bedingungen nutzen

Aufgabe: Trassierung

1. Bearbeiten Sie die Aufgaben aus SuS-Perspektive.

2. Reflektieren Sie, welche Chancen zur Schulung der Modellierungskompetenz in dieser Aufgabe stecken.

3. Das Aufgaben-Material ist als methodische Großform (nicht für eine 45-Minuten-Stunde) angelegt. Entwickeln Sie Ideen für eine gelingende konstruktive Unterstützung.


Mathematik

Stephan Baja
B3 Funktionaler Zusammenhang SEK II

Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Trassierungsaufgabe

Aufgabe:
Es soll eine geeignete Verbindung zweier geradlinig verlaufender Gleise bestimmt werden. Ermitteln Sie einen geeigneten Verlauf einer Verbindungstrasse.

a) Zeichnen Sie eine geeignete Verbindung in den Plan ein. Beschreiben Sie möglichst genau, was bei der Verbindung beachtet werden muss (Bedingungen).

b) Formulieren Sie die Bedingungen, die Sie an die Verbindung stellen, in der Symbolsprache der Mathematik.

c) Wählen Sie in Ihrer Gruppe ein Koordinatensystem und bestimmen Sie die beiden Funktionen g und h, deren Graphen die beiden Gleisstücke beschreiben.

d) Ermitteln Sie einen Funktionsterm f(x), der die Verbindung modelliert.

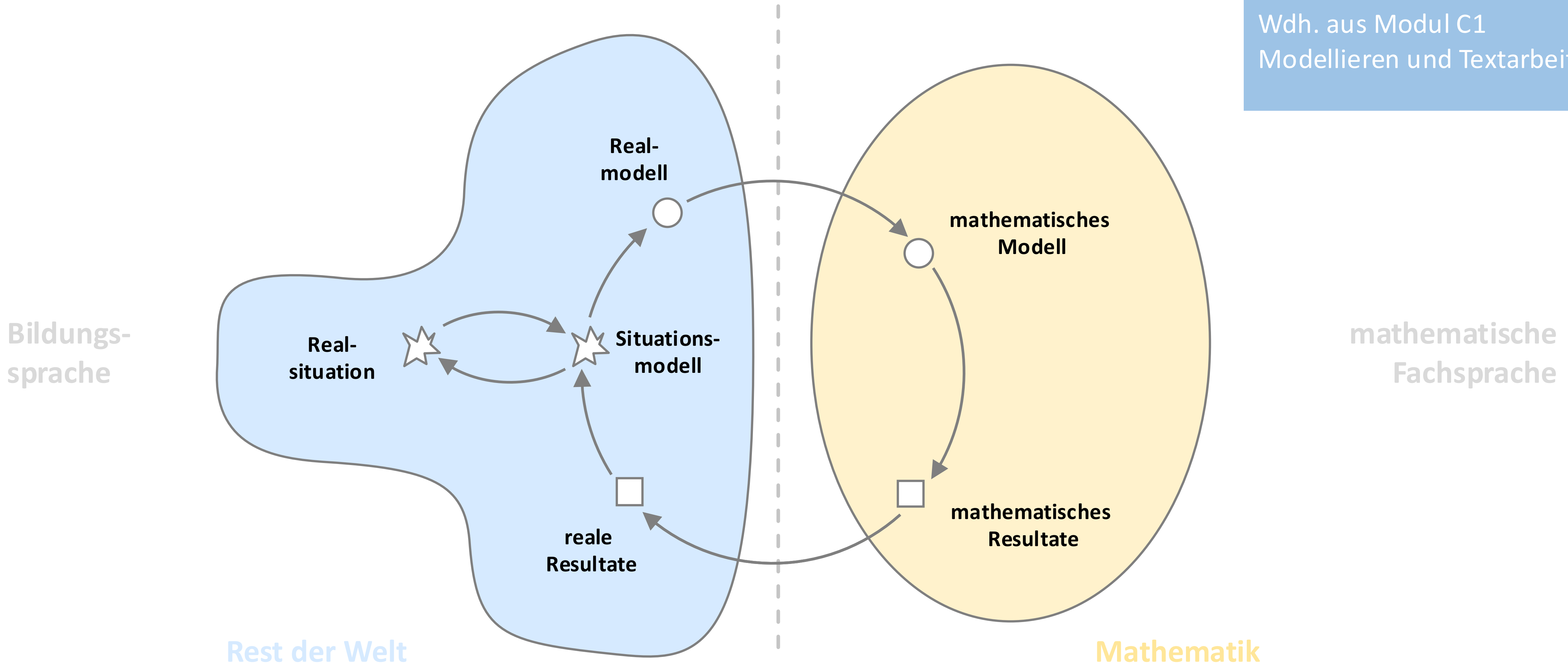
1 / 1

20 min

Modellierung

Phasen des Kreislaufs

Wdh. aus Modul C1
Modellieren und Textarbeit



Blum, W., & Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken"-Aufgabe. *mathematik lehren*, *128*, 18–21.

Modellierung

Kreislauf im Unterricht - Lösungsplan

Wdh. aus Modul C1
Modellieren und Textarbeit

1. Aufgabe verstehen

- Lies den Aufgabentext genau durch und stell dir dabei die Situation ganz konkret vor!
- Mach dir eine Skizze dazu!
- Mach dir klar: Was wird hier von dir verlangt?

2. Mathematik suchen

- Suche die Angaben, die du zur Lösung brauchst, und ergänze sie falls nötig!
- Suche mathematische Zusammenhänge zwischen den Angaben (z.B. Gleichung oder Formel oder Graph)!

3. Mathematik benutzen

- Verwende ein passendes mathematische Verfahren!

4. Ergebnis erklären

- Runde dein Ergebnis sinnvoll!
- Überschlage, ob dein Ergebnis ungefähr passt! Falls nein: zurück zu **1**! Falls ja: Schreib einen Antwortsatz auf!

Blum, W.: Lösungsplan für SuS aus dem DISUM-Projekt.

Anwendungsorientierung

Lernziele

Die Schülerinnen und Schüler sollen…

(1) … den Modellbildungsvorgang beschreiben können,

(2) … die einzelnen Schritte des Modellbildungsprozesses an Beispielen kennen lernen und selbst durchführen,

(3) … an Beispielen erfahren, dass in einer realen Situation zunächst auch verschiedene mathematische Modelle sinnvoll sein können,

(4) … von überzeugenden mathematischen Anwendungen in vielen unterschiedlichen Bereichen etwas erfahren,

(5) … für einzelne zentrale Begriffe des Oberstufenunterrichts Anwendungsbeispiele angeben können,

(6) … den gesamten Modellbildungsprozess für eine komplexe reale Situation im Unterricht selbst durchführen,

Anwendungsorientierung

Lernziele

Die Schülerinnen und Schüler sollen…

(7) … den lernen, mit sehr umfangreichen Aufgabentexten umzugehen (Lesekompetenz, Sprachbildung),

(8) … erkennen können, welche Genauigkeit sinnvoll und nicht sinnvoll ist,

(9) … an Beispielen erfahren, dass Mathematik sich nicht nur am unmittelbaren Nutzen orientiert, sondern dass auch reine Mathematik sinnvoll ist und viel Freude bereiten kann.

Wünschenswert wäre noch…

(10) beispielhaft einige Modelle als Realitätsersatz bei Simulationen zu verwenden.

(11) einiges über die Anwendung von Mathematik im Laufe der Geschichte zu wissen.

(12) einiges über die Verwendung von Mathematik im Berufsleben zu wissen.

Graphisches Differenzieren

Aufgabe

1. Bearbeiten Sie einen der folgenden Ansätze zum graphischen Differenzieren:

   a. konzeptionell
   b. mit einem (Rasier-)Spiegel
   c. mit Geogebra (zwei Dateien vergleichend).

2. Bewerten Sie den von Ihnen gewählten Ansatz für einen Einsatz im Unterricht.

15 min

Abschluss

Feedback

1. Folgendes will ich im Unterricht ausprobieren…
2. Das war für mich neu…
3. Das war für mich die zentrale Botschaft…
4. Das kam für mich heute zu kurz…