Grundvorstellungen zu Bruchzahlen

Bruchrechnen ohne dahinter stehende Vorstellungen ist ein totes Wissen, das man nicht anwenden kann. Welche Vorstellungen sind dabei so wichtig, dass man sie als Grundvorstellungen bezeichnen kann?

Günther Malle

Professor für Mathematik und ihre Didaktik an der Universität Wien

Der wahrscheinlich größte Fehler des traditionellen Mathematikunterrichts besteht darin, dass zu schnell auf eine formal-regelhafte Ebene aufgestiegen wird, bevor noch ausreichende intuitive und anschauliche Vorstellungen vom jeweiligen Stoff erworben wurden. Diesen Fehler kann man an fast allen Stoffgebieten der Schulmathematik beobachten. Die Bruchrechnung ist aber ein besonders geeignetes Studienobjekt. Wenn man Schülerhefte durchsieht, kann man oft bemerken, dass schon auf der ersten Seite gelernt wird: „Man multipliziert zwei Brüche, indem man ..." und Ähnliches. Diese Regeln werden anhand vieler Rechenaufgaben eingeübt (wobei die Länge solcher Aufgaben anscheinend nur dadurch begrenzt wird, dass sie nicht über den rechten Heftrand hinausgehen sollen), doch findet man oft im gesamten Heft weder eine Torte noch eine Schokoladentafel noch irgendwelche anderen Zeichnungen. Ein solches Vorgehen ist im Grunde sinnlos. Wenn keine intuitiven und anschaulichen Vorstellungen zu Bruchzahlen und zum Rechnen mit Bruchzahlen entwickelt wurden, bleibt das gesamte regelhafte Rechnen nur eine sinnentleerte, auswendig gelernte, aber letztlich unverstandene Angelegenheit.

Das vorliegende Heft versteht sich als ein Plädoyer für eine Stärkung der hinter dem Bruchrechnen stehenden intuitiven und anschaulichen Vorstellungen. Aus meiner Sicht ist ein zweiphasiges Vorgehen im Unterricht empfehlenswert. In einer ersten Phase, einer **inhaltlich-anschaulichen Phase**, geht es darum, grundlegende Vorstellungen zu Bruchzahlen und zum Rechnen mit Bruchzahlen zu entwickeln. Erst wenn dies erfolgt ist, wird eine zweite Phase, eine **formal-regelhafte Phase**, angeschlossen, in der das formale Bruchrechnen mit Hilfe von Regeln erlernt werden soll. Idealerweise fällt die erste Phase in die Klasse 5, die zweite in die Klasse 6. Wie jedoch auch immer vorgegangen wird, wichtig ist, dass die erste Phase nicht unter den Tisch fällt. Im vorliegenden Heft wird der Schwerpunkt fast ausschließlich auf diese erste Phase gelegt.

Was kann eine Bruchzahl bedeuten?

Im Folgenden liste ich – ohne Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben – einige Grundvorstellungen über Bruchzahlen auf, die aus meiner Sicht jede Schülerin und jeder Schüler am Ende eines Bruchrechenlehrganges besitzen sollte. Im **Kasten 1** sind diese Grundvorstellungen nochmals kurz zusammengefasst.

▶ Grundvorstellung 1
Bruchzahl als Teil (eines Ganzen): $\frac{a}{b}$ (von 1)

Das Ganze kann ein Objekt oder eine Größe sein. Es wird meist nicht explizit erwähnt, wenngleich es, streng genommen, stets hinzugedacht werden muss. Dadurch erhält der Teil selbst den Charakter eines eigenständigen Objekts.

Beispiele:

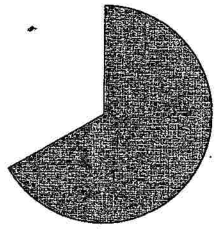


Abb. 1a: Eine Zweidritteltorte

Abb. 1b: Eine Viertelnote

▶ Grundvorstellung 2
Bruchzahl als relativer Anteil: $\frac{a}{b}$ von c

Beispiel:

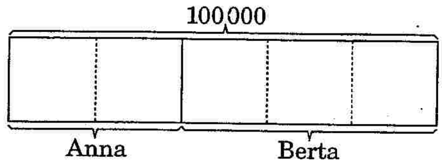


Abb. 2: Anna erbt $\frac{2}{5}$ von 100000 €, Berta erbt $\frac{3}{5}$ von 100000 €

Die Grundvorstellung 1 kann bei gröberer Betrachtung als ein Spezialfall dieser Grundvorstellung angesehen werden.

▶ Grundvorstellung 3
Bruchzahl als Vergleichsoperator:
$\frac{a}{b}$ mal so viel wie c, $\frac{a}{b}$ mal so groß wie c, $\frac{a}{b}$ mal so schwer wie c, ...

Beispiel:

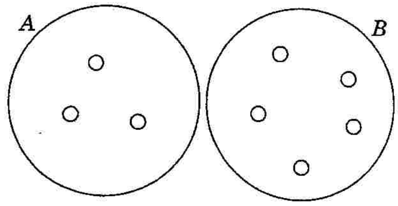
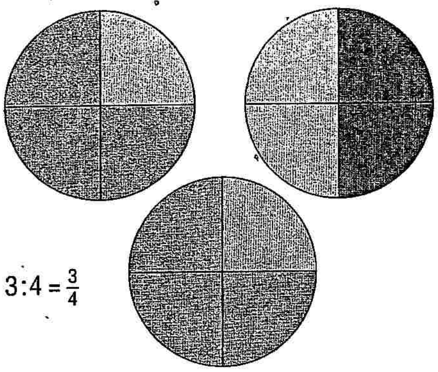


Abb. 3: Die Menge A enthält $\frac{3}{5}$ mal so viele Kugeln wie die Menge B

▶ Grundvorstellung 4
Bruchzahl als Resultat einer Division:
$\frac{a}{b} = a:b$

Beispiel:



$3:4 = \frac{3}{4}$

Abb. 4: Drei Pizzen sollen auf vier Personen aufgeteilt werden. Wie viel erhält jeder?

Grundvorstellung 5
Bruchzahl als Verhältnis:
$\frac{a}{b} = a:b$ **[*a* zu *b*]**

Beispiel:

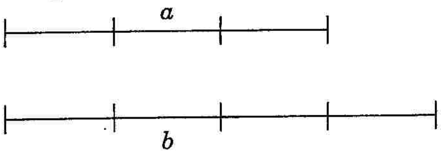


Abb. 5: Die Längen zweier Landebahnen verhalten sich wie 3:4.

Der Doppelpunkt ist hier nicht als Divisionszeichen, sondern als Verhältniszeichen aufzufassen. Hinter der Gleichung $\frac{a}{b} = a : b$ verbirgt sich ein dramatischer kognitiver Prozess. Aus unserer heutigen Sicht ist beipielsweise die Proportion $a:b = 3:4$ äquivalent zur Bruchgleichung $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$. Dies war jedoch in der Geschichte der Mathematik nicht immer so. Für die alten Griechen war das Verhältnis $a:b$ (a zu b) kein eigenständiges Denkobjekt. Es hatte nur im Rahmen einer Proportionsaussage eine Existenzberechtigung und konnte für sich allein nicht bestehen. Die Proportionsaussage $a:b = 3:4$ wurde demgemäß nicht als Gleichheit zweier eigenständiger Denkobjekte aufgefasst, sondern als eine Beziehung zwischen vier eigenständigen Denkobjekten, nämlich den natürlichen Zahlen a, b, 3 und 4. Die Bruchgleichung $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ hingegen fassen wir heute als Beziehung zweier eigenständiger Denkobjekte auf, nämlich als numerische Gleichheit der Bruchzahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{3}{4}$. Hinter dem Übergang von der Proportionsaussage zur Bruchgleichung steckt also ein Objektivierungsschritt, nämlich die Bildung von Bruchzahlen als eigenständige Denkobjekte. Diesen Schritt haben die alten Griechen nicht bewältigt. Sie haben deshalb auch keine Bruchrechnung entwickelt, sondern sind in der Proportionenlehre und damit im Denken mit natürlichen Zahlen stecken geblieben (obwohl die Babylonier und Ägypter schon wenigstens ansatzweise eine Bruchrechnung entwickelt hatten). Bis zur Anerkennung der Bruchzahlen als eigenständige Zahlen hat es in der Geschichte der Mathematik sehr lange gedauert (die erste offizielle Anerkennung findet man bei Petrus Ramus im 15. Jahrhundert). Aus Ergebnissen der empirischen didaktischen Forschung geht hervor, dass auch unsere heutigen Schülerinnen und Schüler große Probleme mit diesem Objektivierungsschritt haben. Es fällt ihnen häufig schwer, Bruchzahlen als eigenständige Zahlen anzuerkennen. Demgemäß vermeiden sie das Denken in Bruchzahlen, wo immer sie können, und weichen auf ein Denken in natürlichen Zahlen aus.

▶ Grundvorstellung 6
Bruchzahl als Quasikardinalzahl:
$\frac{2}{3}$ **= 2 Drittel**

Dabei wird ein Drittel als eine neue Einheit aufgefasst. Mit diesem Trick kann man in manchen Fällen das Rechnen mit Bruchzahlen auf das Rechnen mit natürlichen Zahlen zurückführen.

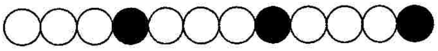
Beispiel:

$\frac{1}{5} + \frac{3}{5}$ = 1 Fünftel + 3 Fünftel
= 4 Fünftel
$= \frac{4}{5}$

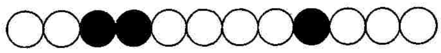
▶ Grundvorstellung 7
Bruchzahl als Quasiordinalzahl:
$\frac{1}{4}$ **... jeder Vierte**

Diese Deutung ist nur auf Bruchzahlen in Stammbruchdarstellung anwendbar. Der Satz „Jede vierte Perle ist schwarz" kann zwei Bedeutungen haben:

a im strikten Sinn: auf drei weiße Perlen folgt stets eine schwarze Perle.



b im statistischen Sinn: ein Viertel aller Perlen ist schwarz.



▶ Grundvorstellung 8
Bruchzahl als absoluter Anteil:
$\frac{2}{3}$ **... zwei von drei**

Diese Deutung ist in der Praxis üblich (vor allem bei statistischen Erhebungen), sie ist jedoch nur anwendbar, wenn mit Bruchzahlen nicht gerechnet wird. Würde man diese Deutung etwa bei der Addition von Bruchzahlen verwenden, könnte man den folgenden Standardschülerfehler rechtfertigen:

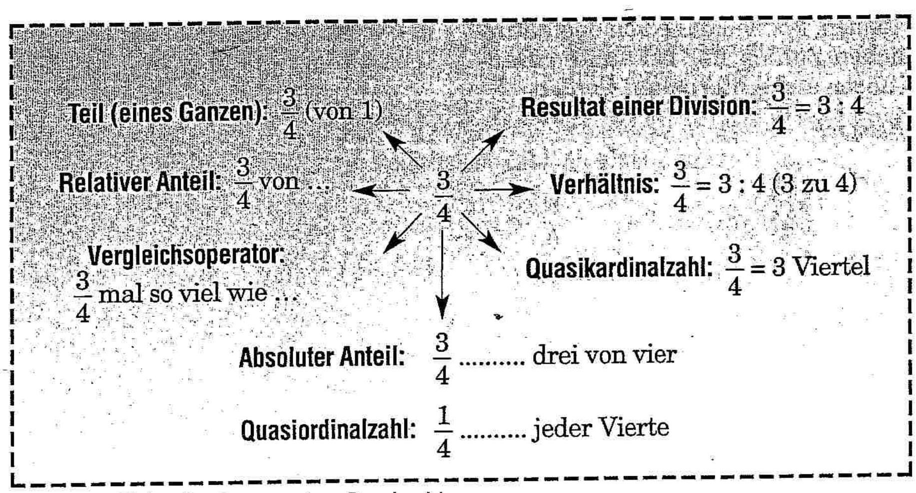
$$\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{5}{7}$$

Denn: drei von vier plus zwei von drei ergibt fünf von sieben.

Erweitern und Kürzen

▶ Grundvorstellung 9
Erweitern als Verfeinerung und Kürzen als Vergröberung der Einteilung

Erweitern und Kürzen sind Umkehroperationen voneinander (Verfeinern und Vergröbern heben einander auf), vgl. **Abbildung 7**, S. 6.



Kasten 1: Einige Deutungen einer Bruchzahl

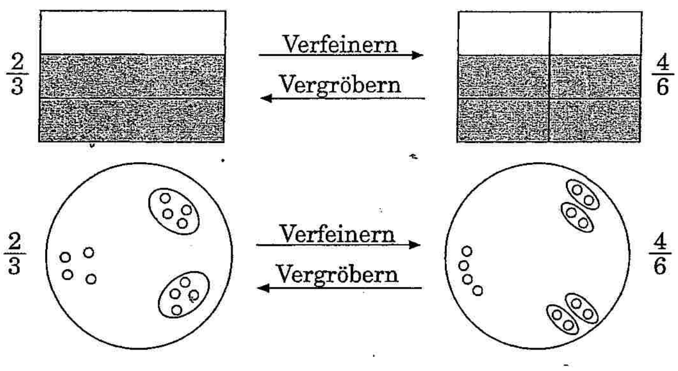


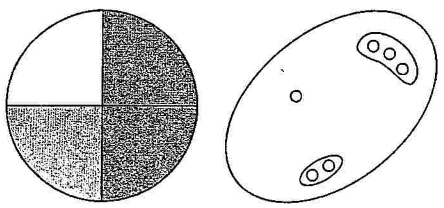
Abb. 7: Verfeinern und Vergröbern

Die Termini „Erweitern" und „Kürzen" sollten in der ersten (inhaltlich-anschaulichen) Phase eines Bruchrechenlehrganges gar nicht eingeführt werden. Sie bezeichnen ja üblicherweise eine regelhafte Technik, nämlich die Multiplikation von Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl bzw. die Division von Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl. Mit Regeln soll aber vorerst nicht gearbeitet werden. Wichtiger ist zunächst, dass der Prozess des Umwandelns einer Bruchdarstellung in eine andere mit der Vorstellung des Verfeinerns bzw. Vergröberns verbunden wird und dabei eingesehen wird, dass man eine Bruchzahl auf unendlich viele Arten durch Brüche darstellen kann. Dies kann dadurch unterstützt werden, dass ein und derselbe Punkt auf einem Zahlenstrahl mit unterschiedlichen Brüchen beschriftet wird.

Addition und Subtraktion von Bruchzahlen

▶ Grundvorstellung 10
Addieren als Zusammenfügen oder Hinzufügen, Subtrahieren als Wegnehmen
Obwohl Bruchzahlen im Allgemeinen nicht als Mächtigkeiten (Anzahlen von Elementen) gedeutet werden können, können diese von den natürlichen Zahlen her bekannten Deutungen aufrechterhalten werden.

Beispiel:



$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ $\quad$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

Abb. 8: Zur Addition und Subtraktion

Bei genauerer Betrachtung unterscheiden sich Zusammenfügen und Hinzufügen. Beim Zusammenfügen wird die Addition als eine zweistellige Operation aufgefasst (**Abb. 9a**), beim Hinzufügen jedoch eher als eine einstellige Operation (**Abb. 9b**). Letzteres gilt auch für die Subtraktion.

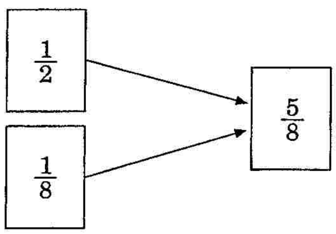


Abb. 9a: Zweistellige Operation

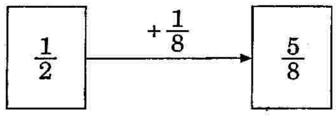


Abb. 9b: Einstellige Operation

▶ Grundvorstellung 11
Addieren als Vorwärtsschreiten, Subtrahieren als Rückwärtsschreiten
Auch diese Deutungen sind von natürlichen Zahlen auf Bruchzahlen übertragbar, sofern man den quasikardinalen Aspekt von Bruchzahlen zugrunde legt. Zum Beispiel kann man die Rechnungen in **Abbildung 10** als Vorwärts- bzw. Rückwärtsschreiten in Fünftelschritten auffassen.

$\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{9}{10}$

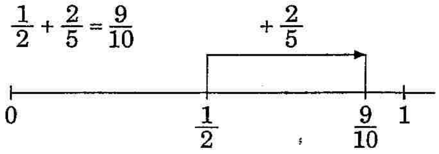


Abb. 10a: Vorwärtsschreiten

$\frac{9}{10}-\frac{2}{5}=\frac{1}{2}$

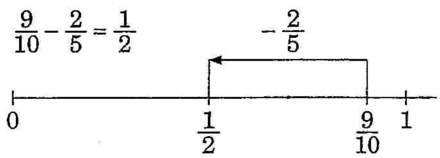


Abb. 10b: Rückwärtsschreiten

Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einer Bruchzahl

▶ Grundvorstellung 12
Multiplikation als abgekürzte Addition
Beispiel:

$3\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}$ $\qquad$ $n\cdot\frac{a}{b}=\underbrace{\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\ldots+\frac{a}{b}}_{n\text{ Summanden}}$

▶ Grundvorstellung 13
Von-Deutung der Multiplikation
Beispiel:

$\frac{4}{5}\cdot 3=\frac{4}{5}$ von 3 $\qquad$ $\frac{a}{b}\cdot n=\frac{a}{b}$ von n

Diese Deutung ist nur möglich, wenn der erste Faktor eine Bruchzahl ist, die keine natürliche Zahl ist. Man kann beispielsweise nicht $3\cdot 5$ als 3 von 5 oder $3\cdot\frac{4}{5}$ als 3 von $\frac{4}{5}$ deuten. Dies scheint allerdings in erster Linie ein Problem unserer Sprache zu sein, denn die Deutung erscheint uns sofort sinnvoll, wenn wir $\frac{4}{5}\cdot 3$ als das $\frac{4}{5}$-fache von 3 und demgemäß $3\cdot 5$ als das Dreifache von 5 bzw. $3\cdot\frac{4}{5}$ als das Dreifache von $\frac{4}{5}$ deuten. (Man beachte: Im Gegensatz zu manchen Schulbüchern schreibe ich den Operator immer vor dem Operanden an, was auch der sprachlichen Formulierung besser entspricht.)

Die Multiplikation $\frac{4}{5}\cdot 3$ kann nicht als abgekürzte Addition gedeutet werden, denn man kann den Summanden 3 nicht $\frac{4}{5}$mal anschreiben. In der Praxis wird zwar auch oft $\frac{4}{5}\cdot 3$ als $\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}$ gedeutet, doch wird dabei stillschweigend die Kommutativität vorausgesetzt. Es ist aber zunächst noch nicht sicher, ob das Kommutativgesetz auch in diesem Fall gilt. Dieses muss erst begründet werden (natürlich nur auf einer Vorstellungsebene). Dazu braucht man sowohl die Grundvorstellung 12 als auch die Grundvorstellung 13. Wir überlegen uns dies an einem paradigmatischen Beispiel, nämlich $3\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\cdot 3$ (**Abb. 11**).

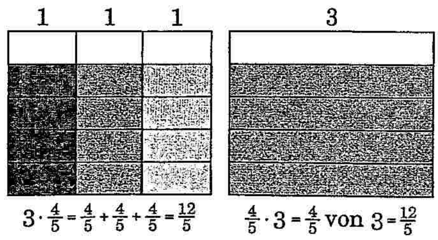


Abb. 11: Zur Kommutativität der Multiplikation

Multiplikation von Bruchzahlen

Von den beiden vorhin besprochenen Grundvorstellungen lässt sich nur die Von-Deutung aufrecht erhalten.

▶ Grundvorstellung 14
Von-Deutung der Multiplikation

$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7} = \frac{2}{3}$ von $\frac{5}{7}$

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$ von $\frac{c}{d}$

Die Gültigkeit des Kommutativgesetzes überlegen wir uns wiederum anhand eines paradigmatischen Beispiels, nämlich $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$.

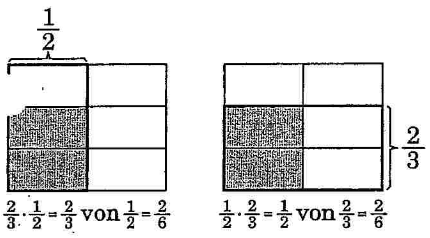


Abb. 12: Zur Kommutativität der Multiplikation

Für natürliche Zahlen gilt: Das Produkt zweier natürlicher Zahlen ist stets größer als jede der beiden Ausgangszahlen. Diese Vorstellung muss bei Bruchzahlen aufgegeben werden, z. B. bei $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$. (Zur Frage, welche Vorstellungen beim Übergang von natürlichen Zahlen zu Bruchzahlen sonst noch aufgegeben werden müssen, verweise ich auf die Beiträge von S. Prediger und H. Winter in diesem Heft.)

Division von Bruchzahlen

Für natürliche Zahlen gibt es zwei wichtige Vorstellungen zur Division: Teilen und Messen (in Schulbüchern und der mathematikdidaktischen Literatur sind dafür auch andere Namen gebräuchlich, z. B. Verteilen und Aufteilen). Beide Vorstellungen lassen sich auf Bruchzahlen übertragen, aber mit leichten Einschränkungen.

▶ Grundvorstellung 15
Dividieren als Teilen (bzw. Verteilen)
Eine durch eine Bruchzahl beschriebene Größe soll in mehrere Teile geteilt und entsprechend verteilt werden. Wie groß ist ein Teil?

Beispiel:
$\frac{4}{9}$ Liter Saft sollen auf 2 Personen verteilt werden. Wie viel Liter erhält jeder?

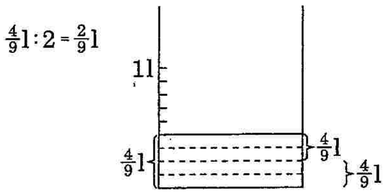


Abb. 13: Jeder erhält $\frac{2}{9}$l Saft

Diese Vorstellung ergibt nur einen Sinn, wenn der Divisor eine natürliche Zahl ist. Beispielsweise kann die Division $\frac{4}{9}:\frac{3}{5}$ nicht so gedeutet werden, weil es keinen Sinn ergibt, $\frac{4}{9}$l Saft auf $\frac{3}{5}$ Personen zu verteilen.

▶ Grundvorstellung 16
Dividieren als Messen (bzw. Aufteilen)
Eine Größe und ein Maß werden beide durch Bruchzahlen beschrieben. Wie oft ist das Maß in der Größe enthalten?

Beispiel:
$\frac{7}{2}$ Liter Wein sollen in $\frac{7}{10}$-Liter-Flaschen abgefüllt werden. Wie viele Flaschen können gefüllt werden?

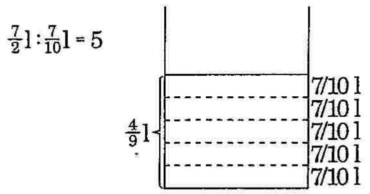


Abb. 14: 5 Flaschen können gefüllt werden

Diese Vorstellung ergibt im Grunde nur einen Sinn, wenn der Dividend größer oder gleich dem Divisor ist. Falls der Quotient keine natürliche Zahl ist, gibt es auch Probleme. Im vorliegenden Beispiel müsste man entweder das Ergebnis auf eine natürliche Zahl abrunden oder zulassen, dass eine Flasche nicht vollständig gefüllt wird.

In der letzten Aufgabe könnte man die Division auch als fortlaufende Subtraktion auffassen. Ich denke mir, dass die vorliegenden $\frac{7}{2}$l Wein so lange in $\frac{7}{10}$l–Flaschen abgefüllt werden, bis nichts mehr übrig bleibt:

$$\frac{7}{2}\text{l} \underbrace{- \frac{7}{10}\text{l} - \frac{7}{10}\text{l} - \frac{7}{10}\text{l} - \frac{7}{10}\text{l} - \frac{7}{10}\text{l}}_{\text{5 Subtrahenden}} = 0,$$

also: $\frac{7}{2}\text{l} : \frac{7}{10}\text{l} = 5$.

Man könnte die Aufgabe auch als Additions- bzw. Multiplikationsaufgabe lösen (wobei die Multiplikation

Erweitern und Kürzen

$\frac{1}{2}$ —Verfeinerung der Einteilung→ $\frac{2}{4}$

$\frac{2}{4}$ —Vergröberung der Einteilung→ $\frac{1}{2}$

Addition und Subtraktion von Bruchzahlen

Zusammenfügen, Hinzufügen ← Addieren → Vorwärtsbewegen, Vorwärtsschreiten (z. B. in Fünftelschritten)

Subtrahieren → Wegnehmen; Subtrahieren → Rückwärtsbewegen, Rückwärtsschreiten (z. B. in Fünftelschritten)

Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einer Bruchzahl

Abgekürzte Addition: $\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5} \longleftarrow 3\cdot\frac{4}{5}$ $\frac{4}{5}\cdot 3 \longrightarrow$ Von-Deutung: $\frac{4}{5}$ von 3

Multiplikation von Bruchzahlen

Von-Deutung: $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7} = \frac{2}{3}$ von $\frac{5}{7}$

Division von Bruchzahlen

$\frac{4}{9}:2$ → Teilen (Verteilen)

$\frac{7}{2}:\frac{7}{10}$ → Messen (Aufteilen)

Kasten 2: Einige Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen für Bruchzahlen als fortlaufende Addition aufgefasst wird). Ich denke mir die Inhalte der $\frac{7}{10}$l–Flaschen so lange zusammengefügt, bis ich $\frac{7}{2}$l erreicht habe:

$$\underbrace{\frac{7}{10}l + \frac{7}{10}l + \frac{7}{10}l + \frac{7}{10}l + \frac{7}{10}l}_{\text{5 Summanden}} = \frac{7}{2}l$$

bzw. $5 \cdot \frac{7}{10}l = \frac{7}{2}l$, also: $\frac{7}{2}l : \frac{7}{10}l = 5$

Für natürliche Zahlen gilt: Das Ergebnis einer Division ist nie größer als der Dividend. Diese Vorstellung muss bei Bruchzahlen aufgegeben werden (z. B. gilt $\frac{1}{2} : \frac{1}{8} = 4$).

Es gibt Divisionen, die sich weder sinnvoll als Teilen noch als Messen deuten lassen, z. B. $\frac{4}{9} : \frac{3}{5}$. Wir stoßen hier zum ersten Mal auf eine Rechnung, für die keine sinnvolle Grundvorstellung existiert. Diese Division kann daher nur als eine formale Rechnung betrachtet werden, die nach bestimmten Regeln ausgeführt werden kann. Grundvorstellungen haben ihre Grenzen, das Formale trägt weiter als sie. Eine gute Motivation, sich anschließend den Regeln der Bruchrechnung zuzuwenden.

Grundvorstellungen als Voraussetzung für Anwendungen

Eine Anwendung des Bruchrechnens auf eine bestimmte Situation besteht im Wesentlichen darin, dass gewissen in der Situation vorkommenden Größen bestimmte Bruchzahlen zugeordnet werden und dass diese Zahlen durch richtig gewählte Rechenoperationen verknüpft werden. Es ist bekannt und wird durch die empirische didaktische Forschung vielfach bestätigt, dass Schülerinnen und Schüler häufig Schwierigkeiten haben, die richtigen Rechenoperationen auszuwählen. Woher weiß man eigentlich, welche Rechenoperationen anzuwenden sind?

Die Mittlerrolle zwischen der Situation und den zu wählenden Rechenoperationen spielen die Grundvorstellungen:

Situation ↔ Grundvorstellungen
↔ Rechenoperationen

Die vorliegende Situation legt gewisse Grundvorstellungen nahe, diese wiederum führen zur richtigen Rechenoperation. Umgekehrt ruft eine Rechenoperation gewisse Grundvorstellungen auf, die wiederum in der Situation als passend erkannt werden können. Fehlen diese Grundvorstellungen, kann der Prozess nicht funktionieren. **Es gibt kein Anwenden ohne Grundvorstellungen!** Auch wenn die Schülerinnen und Schüler die Regeln und formalen Techniken des Bruchrechnens noch so gut beherrschen, ohne Grundvorstellungen bleibt dies ein totes Wissen, mit dem man nichts anfangen kann. Ein solches Wissen ist nutzlos und stellt nur einen Ballast dar, den man berechtigterweise schnell vergisst.

Die Rolle der Grundvorstellungen beim Anwenden sei an zwei sehr einfachen Beispielen verdeutlicht.

Beispiel 1

Eine Katze trinkt täglich $\frac{1}{4}$ Liter Milch. Wie viel Liter Milch trinkt sie in einer Woche?

Man kann die Aufgabe durch siebenmalige Addition von $\frac{1}{4}$ lösen. Im Allgemeinen wird man sie jedoch durch eine Multiplikation lösen:
$7 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$. Woher aber weiß man, dass man 7 mit $\frac{1}{4}$ *multiplizieren* muss? Ganz einfach, man benutzt die Grundvorstellung der Multiplikation als abgekürzte Addition. Die numerische Rechnung kann mit der Grundvorstellung der Bruchzahlen als Quasikardinalzahlen bewerkstelligt werden: $7 \cdot \frac{1}{4} = 7$ Viertel $= \frac{7}{4}$.

Beispiel 2 (siehe obige Aufgabe zur Grundvorstellung 16)

$\frac{7}{2}$ Liter Wein sollen in $\frac{7}{10}$-Liter-Flaschen abgefüllt werden. Wie viele Flaschen können gefüllt werden?

Die Aufgabe kann mit einer Kombination von Grundvorstellungen gelöst werden:

$\frac{7}{2} : \frac{7}{10}$ (Dividieren als Messen)
$= \frac{35}{10} : \frac{7}{10}$ (Verfeinerung der Einteilung, evtl. Zeichnung)
= 35 Zehntel : 7 Zehntel (Bruchzahlen als Quasikardinalzahlen)
= 5

Es können 5 Flaschen gefüllt werden.

Literatur

Hefendehl-Hebeker, L.: Brüche haben viele Gesichter. – In: mathematik lehren 78 (1996), S. 20–48.

Padberg, F.: Didaktik der Bruchrechnung. – Spektrum, Heidelberg 2002.