

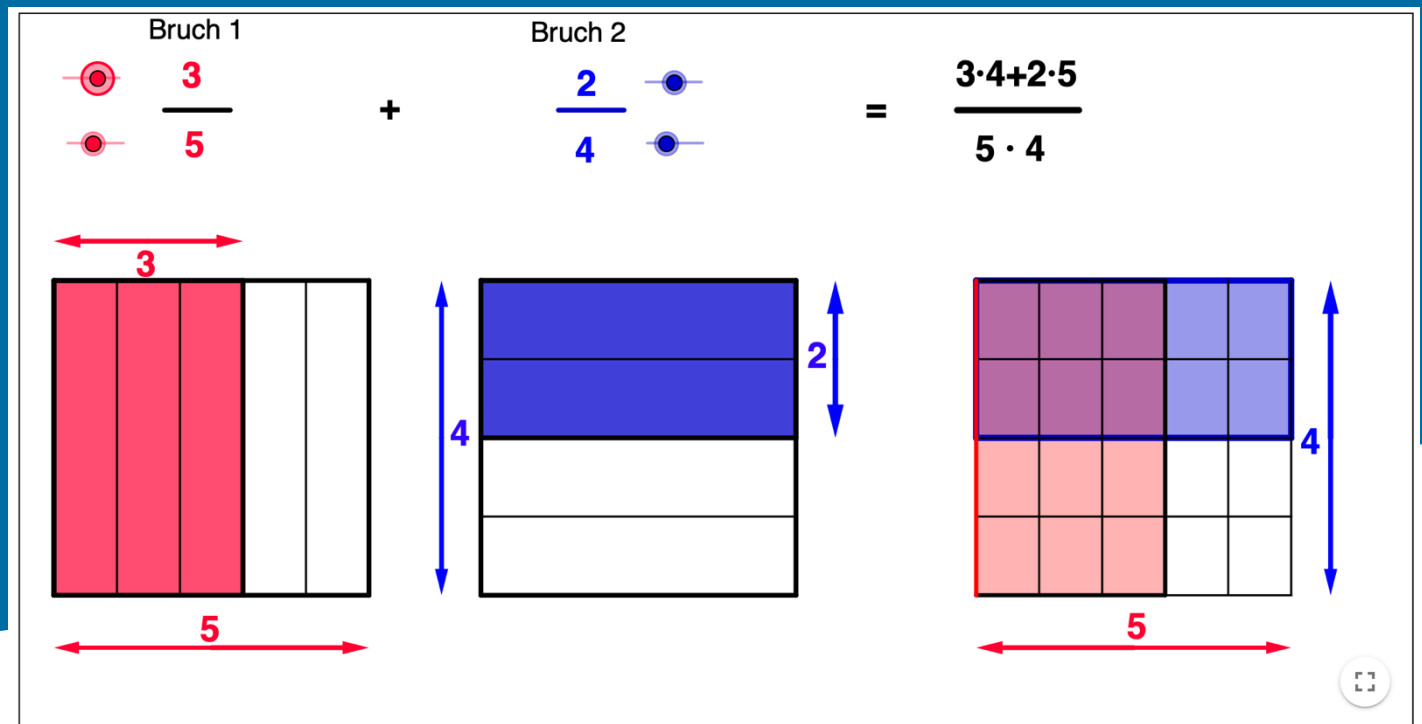
AT 06

Zahlbereichserweiterungen

Willst du Bruch mit Bruch addieren,
Bruch von Bruch gar subtrahieren,
musst du sie vor allen Dingen
auf denselben Nenner bringen.
Zähler dann zusammenfassen
Nenner unverändert lassen.

Bruch mal Bruch, das ist für Kenner
Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner.
Teilst du durch die gebrochene Zahl,
nimmst du mit dem Kehrwert mal.

Und zum Schluss als feine Würze –
Wenn es möglich ist, dann kürze !!!



Sonja Tscheu

September 2025

Aus dem Ausbildungscurriculum

Zahlbereichserweiterungen

Ziel: Die LiV kennen die Grundvorstellungen, die die Lernenden **vor** der jeweiligen Erweiterung des Zahlbereichs aufgebaut haben und entwickeln diese tragfähig für $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}$ weiter.

Die **in der Grundschule aufgebauten Grundvorstellungen** von Zahlen werden thematisiert und die mit den Erweiterungen des Zahlbereichs verbundenen **Anpassungen und Veränderungen** dieser Grundvorstellungen diskutiert.

Es werden **unterschiedliche didaktische Konzepte** sowie verschiedene handlungsorientierte Zahlbereichserweiterungen vorgestellt (EIS-Prinzip als didaktische Leitlinie), von denen mindestens einer von den LiV erprobt wird.

Anhand verschiedener Beispiele wird auf die Notwendigkeit der **wiederholten Thematisierung von Rechenregeln und Rechengesetze** bei jeder Zahlbereichserweiterung eingegangen.

Das Ausbildungscurriculum im Fachportal:

<https://fachportal.lernnetz.de/sh/faecher/mathematik/wissenswertes/ausbildung.html>

Ablauf

- ❖ Aktuelles und Allgemeines
- ❖ Unterrichtsbesuch und Besprechung
- ❖ Brüche, Bruchzahlen, Dezimalbrüche
- ❖ Die ganzen Zahlen
- ❖ Reelle Zahlen und Beweise

Aktuelles und Allgemeines

- BASISWISSEN-Bücher
- Übermittlung von Unterrichtsentwürfen via Exabis
- Termine für Ausbildungsberatungen
- Fortbildungsveranstaltungen





Bitte weitergeben:

Einladung

zur Veranstaltung AUS0624
**„Gemeinsam ausbilden
im Fach Mathematik“**
(Lehramt an Gymnasien)
für Ausbildungslehrkräfte
am 18.11.2025
16:00 – 18:00 Uhr
online

„Das Ziel der Veranstaltung ist es, die Arbeit, die Ausbildende an den Schulen und am IQSH leisten, weiter aufeinander abzustimmen und dadurch denen, die ausgebildet und qualifiziert werden, eine noch bessere Unterstützung zu ermöglichen.“



Zur Unterrichtshospitation

Kompetenzorientierte Bewertungskriterien Mathematik

- **Fachkompetenz**

-> Hat die LiV sachlich und fachlich korrekt unterrichtet?

- **Didaktische Kompetenz**

-> Hat die LiV den Unterricht sinnvoll strukturiert und flexibel auf sich verändernde Situationen reagiert?

-> Konnte die LiV ihr didaktisches Konzept und dessen Realisierung angemessen reflektieren?

- **Methodische Kompetenz**

-> Hat die LiV die Selbstständigkeit der Lernenden u.a. durch schüleraktivierende Unterrichtsformen gefördert?

-> Hat die LiV präzise und verständlich formuliert?

- **Diagnostische Kompetenz**

-> Hat die LiV die unterrichtlichen Voraussetzungen und Kompetenzen der Lernenden berücksichtigt?

- **Leitungskompetenz**

-> Ist die LiV überzeugend und als Vorbild aufgetreten?

-> Ist die LiV mit den Lernenden respektvoll und wertschätzend umgegangen?

Beobachtungsaufträge

Qualität des fachlichen Lernens / kognitive Aktivierung Gelingensmerkmale: • Aufgabenstellungen sind ergiebig und weisen tragfähige Alltagsbezüge oder innermathematische Bedeutung auf. • Übungsphasen gehen über Routinetätigkeiten hinaus. • SuS erhalten die Möglichkeit, eigene Ideen, Thesen und Lösungswege zu entwickeln. • Die SuS erstellen angemessene Lösungen. • In Unterrichtsgesprächen beziehen sich SuS argumentativ aufeinander. • Vorerfahrung und Interessen der SuS werden berücksichtigt.	Strukturierung des Unterrichts Gelingensmerkmale: • Die Lernumgebung ist vorbereitet. • Verschiedene Unterrichtsphasen (Einstieg – Erarbeitung – Sicherung) sind deutlich zu erkennen. • Lern- und Leistungserwartungen sind für SuS transparent (→ Zielorientierung). • Regeln sind offensichtlich etabliert und werden eingehalten. • Das Zeitmanagement gelingt, die Lernzeit wird effektiv genutzt.
Didaktik Anforderungen: • Es gibt einen erkennbaren Bezug zu den Fachanforderungen und zum SiFC wird (auch im Entwurf). • Die Unterrichtsplanung ermöglicht die Weiterentwicklung von allgemeinen und prozessbezogenen Kompetenzen. • Die Aufgabenstellungen sind fachlich korrekt und sinnvoll didaktisch reduziert. • Aspekte der durchgängigen Sprachbildung werden (nach Möglichkeit) berücksichtigt.	Methodik Anforderungen: • Unterrichtsorganisation und Aufgabenstellungen sind so angelegt, dass SuS zur Eigenaktivität und/oder zur Kooperation herausgefordert werden. • In der Stunde finden (sinnvolle) Methodenwechsel statt. • Die Wahl der Sozialform(en) entspricht der didaktischen Zielsetzung. • Maßnahmen zur Individualisierung und Differenzierung werden berücksichtigt (auch im Entwurf).

Beobachtungsaufträge

Auftreten der Lehrkraft / Lehrerverhalten

Erwünschte Aspekte:

- Die Lehrkraft zeigt Freude und Interesse am Fach.
- Die Lehrkraft zeigt Respekt und Geduld bei Verständnisproblemen von SuS.
- Die Lehrkraft unterstützt den Lernprozess individuell-fördernd.
- Die Lehrkraft agiert störungspräventiv bzw. reagiert angemessen auf Störungen.
- Die Lehrkraft hat einen guten Überblick über die Situation in der Lerngruppe und die Aktivitäten der einzelnen SuS.
- Verbale und nonverbale Kommunikation der Lehrkraft erscheinen stimmig.

Schülerverhalten

Erwünschte Aspekte:

- Die SuS arbeiten konzentriert und aufgabenorientiert.
- Das Unterrichtsgespräch erreicht eine breite Beteiligung.
- Unterrichtsbeiträge von SuS sind fachlich und sprachlich reichhaltig.
- Die SuS arbeiten routiniert mit Methoden und Strategien.
- Gegenseitige Wertschätzung prägt das Klima in der Lerngruppe.

Medien und Arbeitsmittel

Anforderungen:

- Der Medieneinsatz erfolgt funktional und wohlüberlegt (siehe auch Entwurf).
- Nach Möglichkeit werden die Medienkompetenzen der SuS gefördert.
- Medien werden organisch in die Stunde integriert.
- Arbeitsbögen sind übersichtlich gestaltet und ergiebig zusammengestellt.

Kommunikation

(Arbeitsaufträge, Fragetechnik, Gesprächsführung)

Gelingsmerkmale:

- Arbeitsaufträge und Anweisungen sind klar formuliert und idR visualisiert.
- Die Lehrkraft agiert als sprachliches Vorbild.
- Im Unterrichtsgespräch werden Gliederungen und Ergebnisse kenntlich gemacht.
- Die Lehrkraft vermeidet „typische Fehler“ wie Fragenkolonnen, Lehrer-Echo, L-S-Ping-Pong, ..
- Fehler oder alternative Lösungsansätze werden als Anlass zum Weiterdenken konstruktiv aufgegriffen (Stärkenorientierung).

Verabredungen zur Stundenbesprechung

- ❖ Das erste Wort hat immer die aktive Lehrkraft der Stunde.
- ❖ Blitzlicht: Positivrunde
Jede(r) darf, keine(r) muss – bitte kurz!
- ❖ Beobachtungsaufträge:
Je eine Person trägt vor,
Team ergänzt (nur) bei Bedarf

1. Das war meine Intention:
2. Aus diesem Grund waren bei der Planung der Stunde für mich wesentlich:
3. In der Durchführung verlief gemäß der Planung, abgewichen bin ich
4. In der Rückschau waren richtig, dagegen würde ich etwa in folgender Art anders durchführen:

- Feedback sollte immer...
- konstruktiv
 - beschreibend (nicht wertend)
 - subjektiv formuliert
 - nicht nur negativ sein.

Fragen zu Zahlbereichserweiterungen

Im Vorfeld einer Zahlbereichserweiterung zu klären

- 1) Warum ist die angestrebte ZBE notwendig (fachliche Motivation – Motivation der SuS)?
- 2) Wie wird die ZBE in der Fachwissenschaft durchgeführt? Was lässt sich davon für den Unterricht nutzen, was nicht?
- 3) Welche sinnstiftenden Vorstellungen der einzuführenden Zahlen gibt es, wofür gibt es keine sinnstiftenden Vorstellungen? Grenzen der Veranschaulichung?
- 4) Welche Darstellungsformen gibt es für die „neuen“ Zahlen?
- 5) Welche Möglichkeiten zur Einführung der „neuen“ Zahlen ergeben sich für den Unterricht? Warum entscheide ich mich für ein bestimmtes Vorgehen, warum gegen ein anderes?
- 6) Wie rechnet man mit den „neuen“ Zahlen? Wie erweitert man die Regeln für die Grundrechenarten so, dass man in dem erweiterten Zahlbereich rechnen kann?
- 7) Welche Veränderungen (bei den Vorstellungen der SuS) bringt die ZBE mit sich?
- 8) Welche typischen SuS-Fehler sind zu erwarten? Wie kann man darauf reagieren?

Brüche, Bruchzahlen, Dezimalbrüche

Was ist eigentlich ein Bruch?

(Und was ist eine Bruchzahl?)

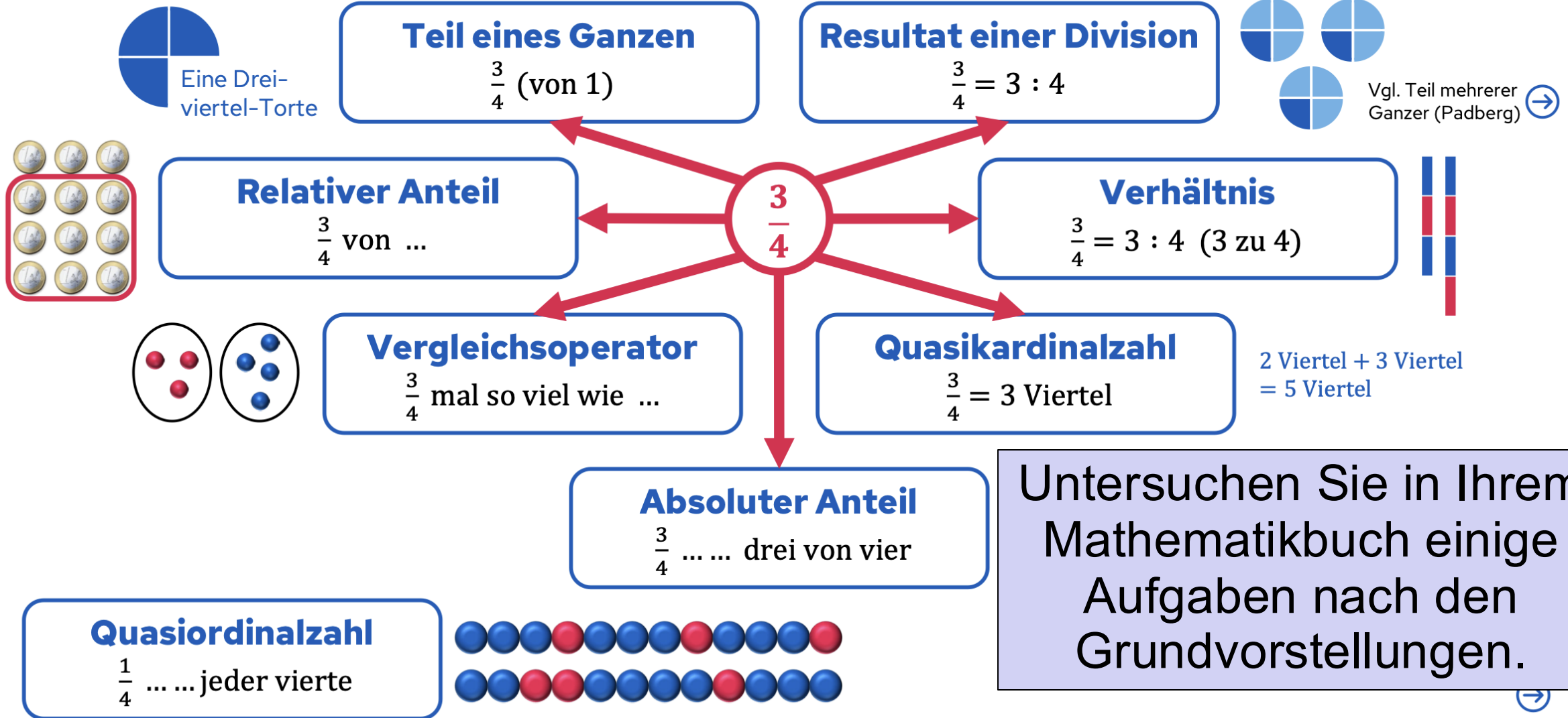
Formuliere eine Antwort für einen Fünftklässler
und
eine Antwort für einen Kollegen.



Im Vorfeld einer Zahlbereichserweiterung zu klären

- 1) Warum ist die angestrebte ZBE notwendig (fachliche Motivation – Motivation der SuS)?
- 2) Wie wird die ZBE in der Fachwissenschaft durchgeführt? Was lässt sich davon für den Unterricht nutzen, was nicht?
- 3) Welche sinnstiftenden Vorstellungen der einzuführenden Zahlen gibt es, wofür gibt es keine sinnstiftenden Vorstellungen? Grenzen der Veranschaulichung?
- 4) Welche Darstellungsformen gibt es für die „neuen“ Zahlen?
- 5) Welche Möglichkeiten zur Einführung der „neuen“ Zahlen ergeben sich für den Unterricht? Warum entscheide ich mich für ein bestimmtes Vorgehen, warum gegen ein anderes?
- 6) Wie rechnet man mit den „neuen“ Zahlen? Wie erweitert man die Regeln für die Grundrechenarten so, dass man in dem erweiterten Zahlbereich rechnen kann?
- 7) Welche Veränderungen (bei den Vorstellungen der SuS) bringt die ZBE mit sich?
- 8) Welche typischen SuS-Fehler sind zu erwarten? Wie kann man darauf reagieren?

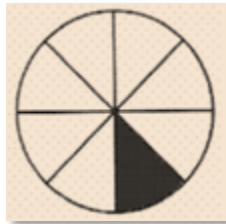
Grundvorstellungen zu Bruchzahlen



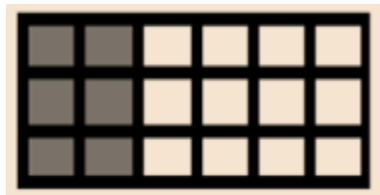
Darstellungen im Überblick

- Jede neue (auch grafische) Darstellung ist für Lernende ein neuer Lernstoff
- Grafische Darstellungen sollten daher bewusst gewählt werden

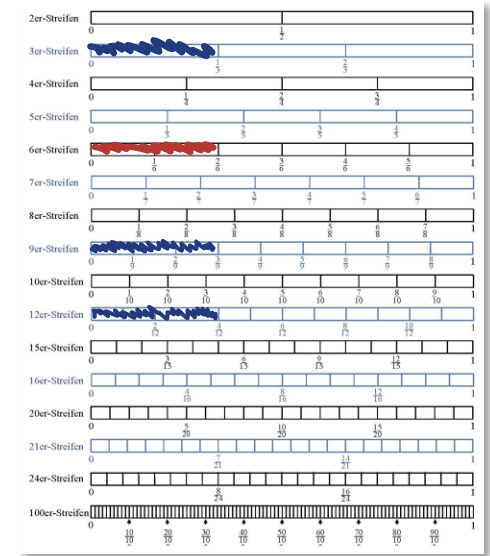
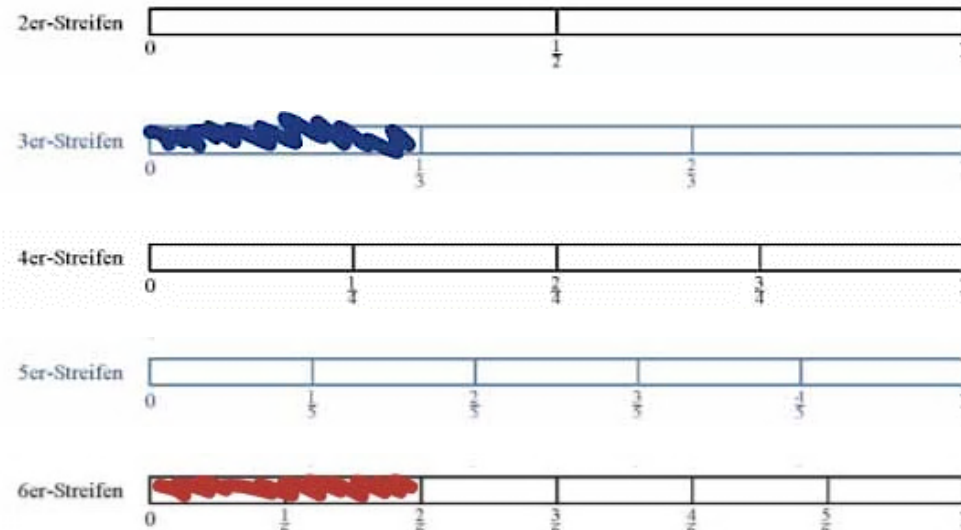
Kreisdarstellung



Rechteckbild



Bruchstreifen und
Bruchstreifentafel



Vergleich von Brüchen mit Bruchstreifen

Welcher Bruch ist größer?

a) $\frac{4}{7}$ oder $\frac{3}{5}$

b) $\frac{10}{12}$ oder $\frac{6}{7}$

c) $\frac{6}{15}$ oder $\frac{1}{4}$

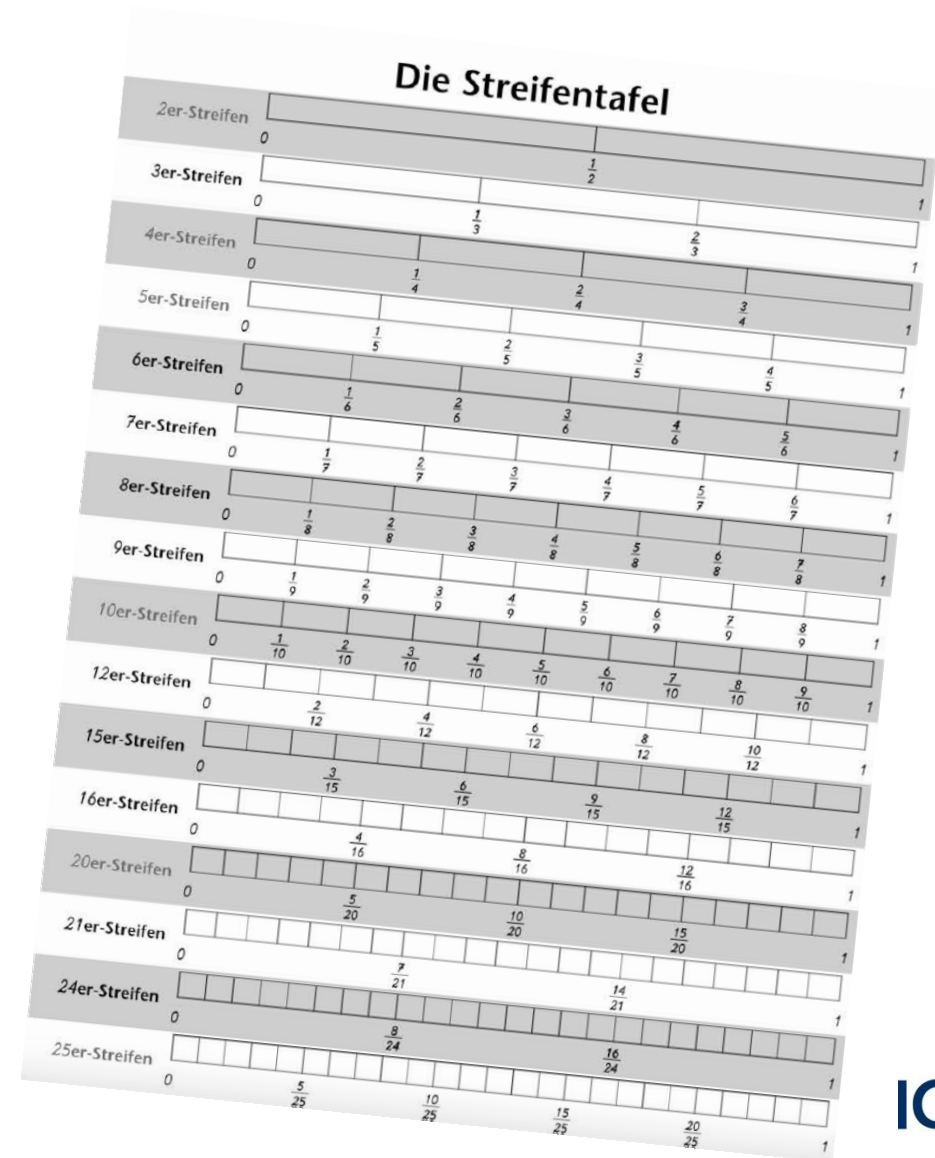
d) $\frac{3}{8}$ oder $\frac{3}{4}$

e) $\frac{5}{15}$ oder $\frac{1}{3}$

f) $\frac{2}{5}$ oder $\frac{4}{10}$

g) $\frac{7}{16}$ oder $\frac{7}{9}$

h) $\frac{2}{3}$ oder $\frac{1}{2}$



Zur Rechteckdarstellung von Brüchen

In dem Beispiel soll zunächst die Länge des Rechtecks in fünf gleichlange Strecken unterteilt werden.

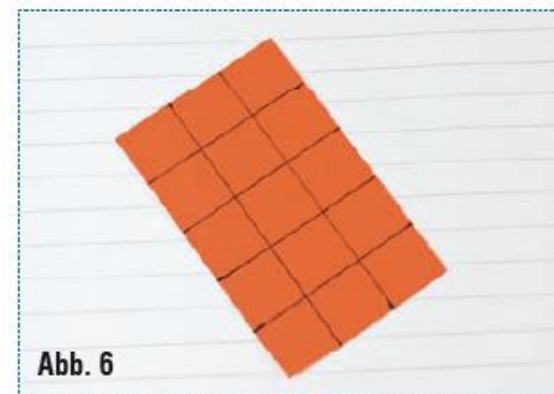
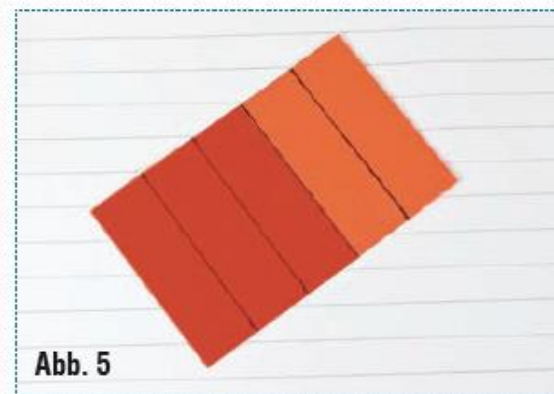
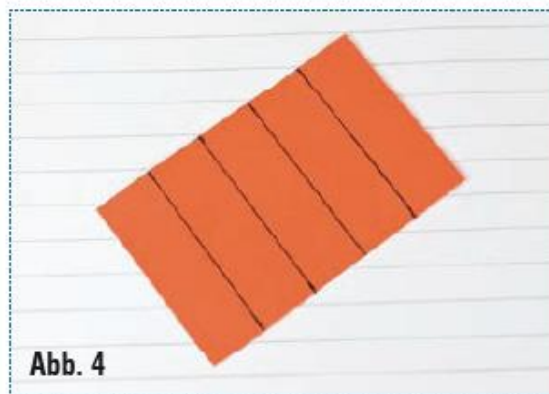
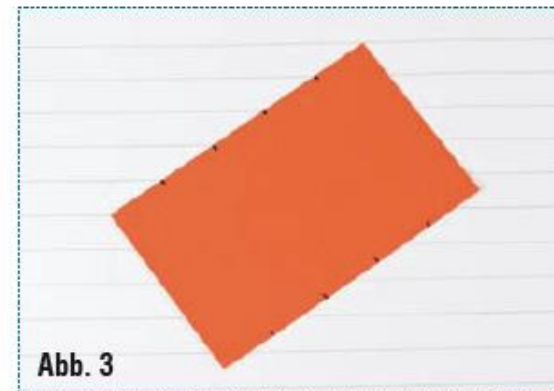
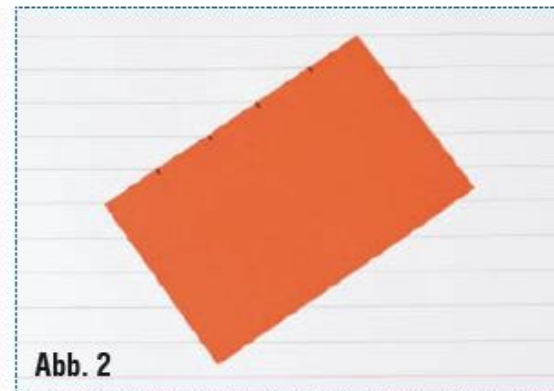
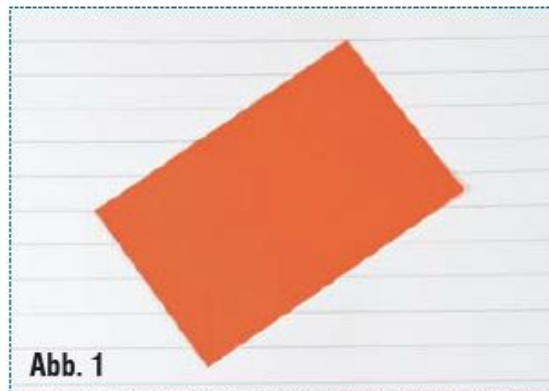
Abb.1: Lege das Rechteck so auf das Linienblatt, dass die lange Rechteckseite genau 6 Linien abdeckt. Die Ecken müssen dabei jeweils genau auf einer Linie liegen!

Abb. 2: Markiere die Stellen, an denen die Linien an das farbige Blatt stoßen.

Abb. 3: Wiederhole das Ganze für die gegenüber liegende Rechteckseite.

Abb. 4: Verbinde die Markierungen geeignet.

Abb. 5: Ergänze entsprechend die Einteilung der anderen Rechteckseiten.



Stelle durch Unterteilen und Färben die folgenden Anteile von Rechtecken dar:

a) $\frac{4}{15}$

b) $\frac{7}{20}$

c) $\frac{6}{9}$

Verstehensgrundlagen beim Bruch als Teil eines Ganzen

Symbole



Bilder

$$\frac{1}{3}$$



Das **Ganze** in 3 Stücke zerlegen

Der **Teil** ist 1 Stück groß

Der **Anteil** ist **1 von 3** Stücken

Sprache

Sprache als zusätzliches
Darstellungsmittel

Alltagskontext

Kuchen verteilen

Anteile von verschiedenen Kuchen

a) Hier sind verschiedene Kuchen. Die Kinder bekommen immer das dunkle Stück. Welcher Anteil vom Kuchen ist das jeweils?

Jonas' Anteil:

Tims Anteil:

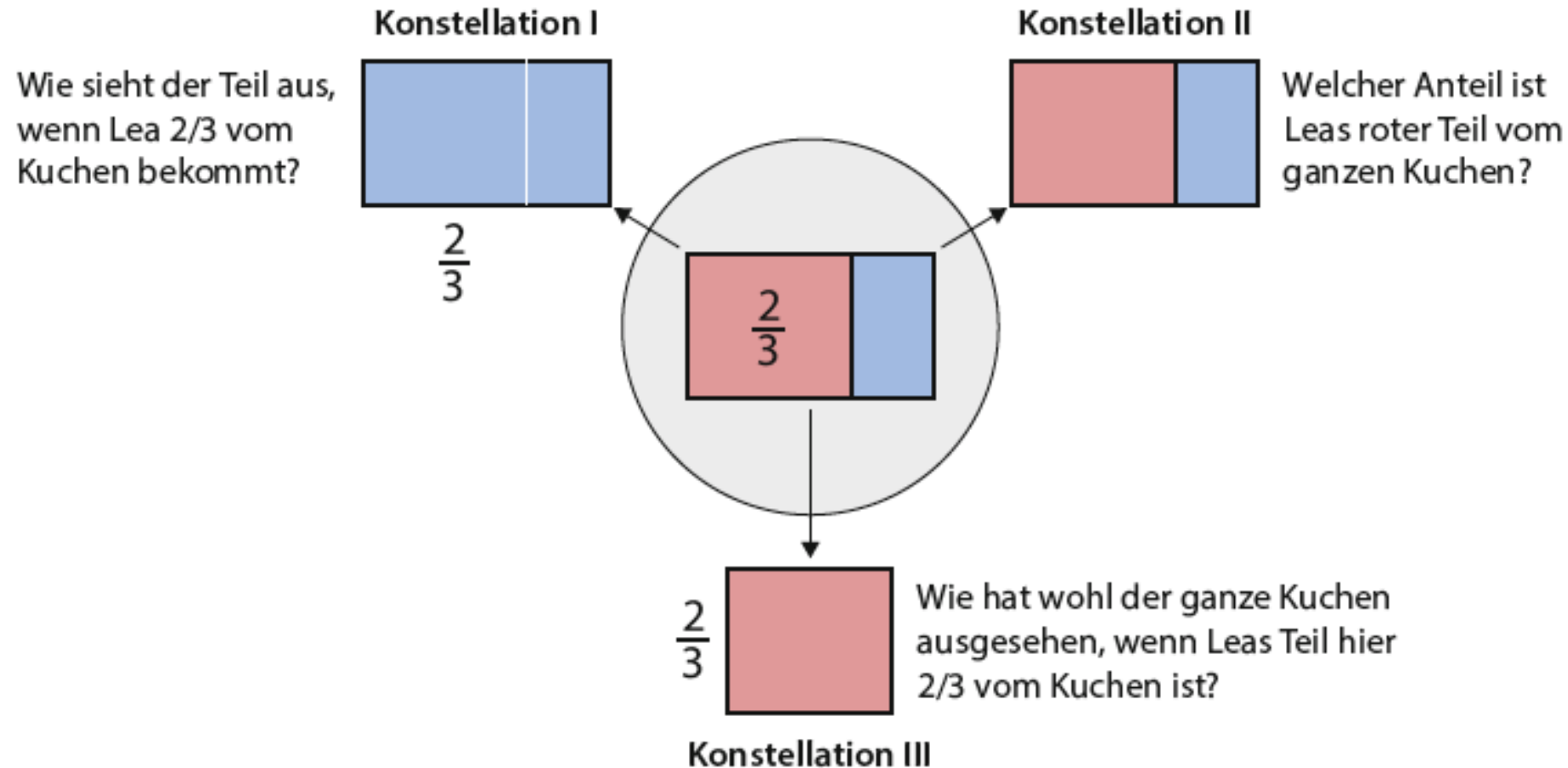
Leonies Anteil:

Kenans Anteil:

- Denken in Anteilen erfordert, Teil und Ganzes in Beziehung zu setzen
- Für die Grundvorstellung des Anteils als Teil eines Ganzen ist also stets die Beziehung von Teil, Ganzem und Anteil zu betrachten



Drei Grundaufgaben der Bruchrechnung



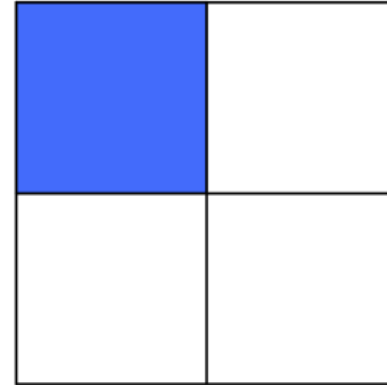
Zusammenhang zu den Grundaufgaben der Prozentrechnung

aus: PADBERG (2017): Didaktik der Bruchrechnung, 5. Auflage. Springer Spektrum

Wir sind uns einig:



$$\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$$



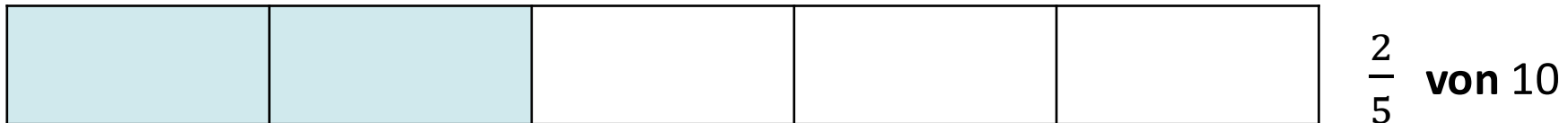
Brüche als Anteile von Mengen

- Wo liegt der Unterschied zwischen $\frac{2}{5}$ und $\frac{2}{5}$ von 10?
- Welche Vorstellungen müssen aktiviert werden?

Vorstellung von Brüchen als Anteil **eines Ganzen**



Vorstellung von Brüchen als **relativer Anteil** oder Anteil von Mengen



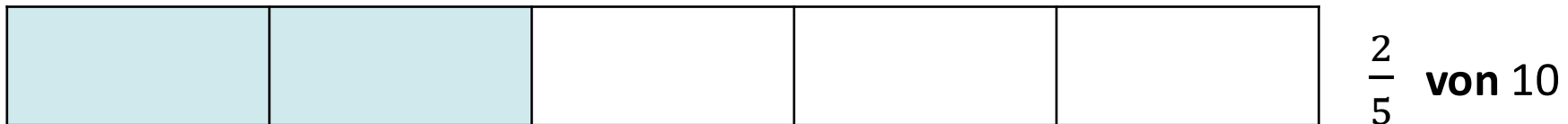
Brüche als Anteile von Mengen

- Wo liegt der Unterschied zwischen $\frac{2}{5}$ und $\frac{2}{5}$ von 10?
- Welche Vorstellungen müssen aktiviert werden?

Vorstellung von Brüchen als Anteil **eines Ganzen**



Vorstellung von Brüchen als **relativer Anteil** oder Anteil von Mengen



Brüche als Anteile von Mengen – rechnerisch bestimmen

2 von 5 Feldern im 5er Streifen markiert

$$\leftarrow \frac{2}{5}$$

Vorstellung vom Bruch
als **Teil eines Ganzen**

10 Plättchen werden auf 5 Gruppen aufgeteilt

→ Grundvorstellung der Division aktivieren:
Verteilen

2 Plättchen liegen in jeder Gruppe

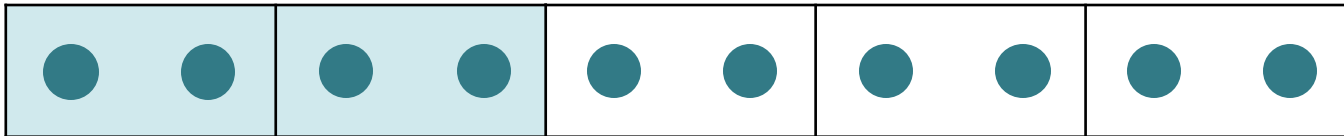
$$\leftarrow 10 : 5 = 2$$

2 Felder mit jeweils 2 Plättchen sind markiert

→ Grundvorstellung der Multiplikation
aktivieren:

$\frac{2}{5}$ von 10 sind also 4

$$\leftarrow 2 \cdot 2 = 4$$

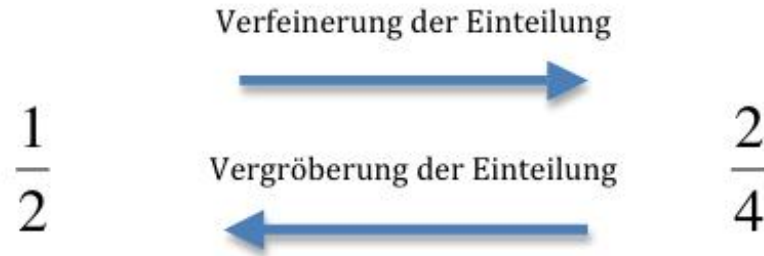


$\frac{2}{5}$ **von 10**

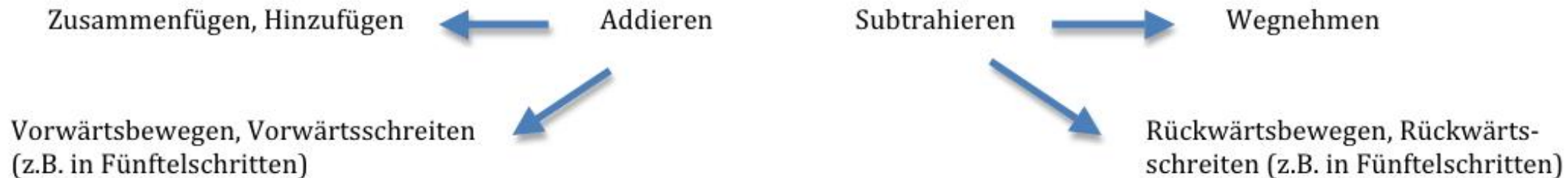
Grundvorstellungen zum Rechnen mit Bruchzahlen:

(nach Malle 2004)

Erweitern und Kürzen



Addition und Subtraktion von Bruchzahlen



Brüche addieren

oder auch mal so ?

So ...

1) Berechne; gib das Ergebnis vollständig gekürzt an:

a) $\frac{1}{12} + \frac{2}{12} =$

b) $\frac{1}{2} + \frac{9}{20} =$

d) $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} =$

e) $\frac{1}{3} + \frac{12}{27} =$

g) $\frac{1}{22} + \frac{1}{3} =$

h) $\frac{5}{6} + \frac{7}{12} =$

k) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} =$

l) $\frac{1}{1} + \frac{2}{2} =$

n) $\frac{1}{28} + \frac{1}{28} =$

o) $\frac{16}{130} + \frac{4}{2} =$

q) $\frac{1}{18} + \frac{1}{12} =$

r) $\frac{46}{135} + \frac{4}{5} =$

3) Gib jeweils zwei Brüche an, so dass die Rechnung stimmt.

a) $\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = \frac{2}{7}$

b) $\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = \frac{1}{7}$

c) Gib zu a) und b) mindestens drei weitere Paare von Brüchen an, mit denen die Rechnung ebenfalls stimmt.

d) Denke dir andere Ergebnisse aus. Kannst du Ergebnisse nennen, mit denen die Aufgabe besonders einfach bzw. besonders schwierig zu lösen ist? Begründe deine Ansicht.

e) $\frac{1}{\square} + \frac{1}{\square} = \frac{1}{7}$ Wie viele Lösungen kannst Du finden?

$\frac{1}{\square} + \frac{1}{\square} = \frac{1}{6}$ Wie viele Lösungen kannst Du hier finden?

Untersuche weitere Nenner. Formuliere eine Regel.

Interessantes zu Stammbrüchen:

WALTER, Ch.: "Darstellung rationaler Zahlen durch Stammbrüche"

<https://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/files/vortrag-4.pdf>

Grundvorstellungen zum Rechnen mit Bruchzahlen:

(nach Malle 2004)

Multiplikation einer natürlichen Zahl mit einer Bruchzahl

Abgekürzte Addition: $\frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \leftarrow 3 \cdot \frac{4}{5}$ $\frac{4}{5} \cdot 3 \rightarrow$ Von-Deutung: $\frac{4}{5}$ von 3

Multiplikation von Bruchzahlen

Von-Deutung: $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2}{3}$ von $\frac{5}{7}$

Division von Bruchzahlen

$$\frac{4}{9} : 2$$



Teilen (Verteilen)

$$\frac{7}{2} : \frac{7}{10}$$



Messen (Aufteilen)

Division von Brüchen

Wie oft passt...

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{14}{21} : \frac{15}{21} = \frac{14}{15}$$

„mit dem Kehrwert multiplizieren“ wird erkennbar und ist keine stumpf auswendig gelernte Regel

Handlungsorientiertes Operieren mit Brüchen

- eine Partnerarbeit ☺ -



Option 1: Rechteckdarstellung

JedeR erläutert der Partnerin/dem Partner unter Verwendung des Verfahrens zur Rechteckeinteilung einen anschaulichen Lösungsweg für zwei der folgenden Aufgaben:

a) $\frac{6}{8} = \frac{3}{12}$

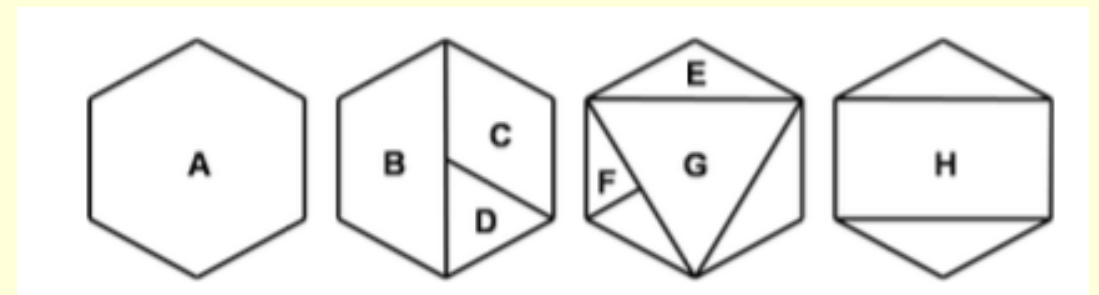
b) $\frac{2}{7} + \frac{3}{5}$

c) $\frac{3}{5} - \frac{1}{4}$

d) $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3}$

Option 2: Exis

Stellt die euch zugeteilten Operationen mit den Exis dar und erläutert dabei den Lösungsweg in schülergerechter Sprache.



Konzepte zur Behandlung der Bruchrechnung

Größenkonzept

Äquivalenzklassenkonzept

Gleichungskonzept

Operatorkonzept

Äquivalenzklassenkonzept

- Für die Menge der geordneten Paare (a, b) definiere die Relation $\sim$ durch:
 $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

- $\sim$ ist Äquivalenzrelation (reflexiv, symmetrisch und transitiv)

- Die Äquivalenzklasse, in der $(3, 4)$ liegt, heißt $\frac{3}{4}$,
also $\frac{3}{4} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{N} \text{ und } 3 \cdot b = 4 \cdot a\} = \{(3, 4), (6, 8), (9, 12), \dots\}$

- Def. Addition & Multiplikation durch

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q + n \cdot p}{n \cdot q} \quad \text{bzw.} \quad \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$$

- Gleichwertige Brüche werden zu einer Bruchzahl zusammengefasst
- Def. Bruchzahl und Rechenoperationen unmotiviert / rein formal für SuS
- Kaum mögl. anschauliche Grundvorstellungen von Bruchzahlen und Verknüpfungen zu vermitteln
- Keine Anknüpfung an Vorwissen
- Addition künstlich $\rightarrow$ komponentenweise Addition liegt näher, fördert daher Schülerfehler

Gleichungskonzept

Die Bruchzahl $\frac{m}{n}$ ist die Lösung der

linearen Gleichung $n \cdot x = m$ mit $m, n \in \mathbb{N}$

Größenkonzept

Ausgegangen wird von konkreten Brüchen mit Maßeinheit

- viele Anwendungen im Alltag
- Rückgriff auf Vorkenntnisse der Schüler
- Erweitern, Kürzen, Anordnung, Addition, Subtraktion gut behandelbar, aber...

Was ist $\frac{3}{4}$ Torte • $\frac{1}{2}$ Torte?

Operatorkonzept

$$\frac{2}{3} \text{ von } 6$$

$$\frac{1}{2} \text{ von } \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} \text{ von } 6 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{2} \text{ von } \frac{1}{3} \text{ Torte}$$

Verschmelzung von Größen- und Operatorkonzept

Keine Methodenreinheit

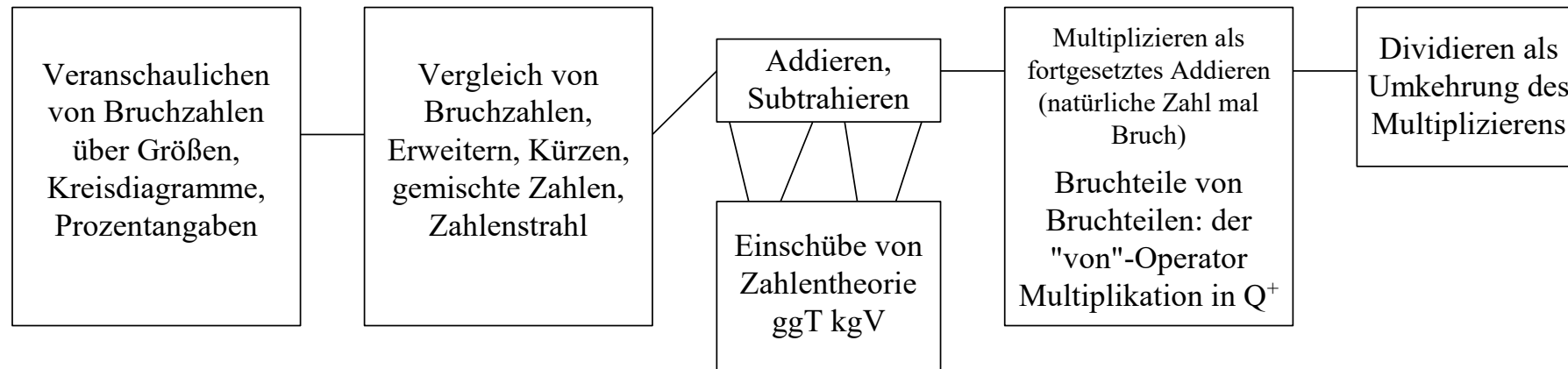
Eine Bruchzahl kann als Größe und als Operator interpretiert werden.

Empfehlung:

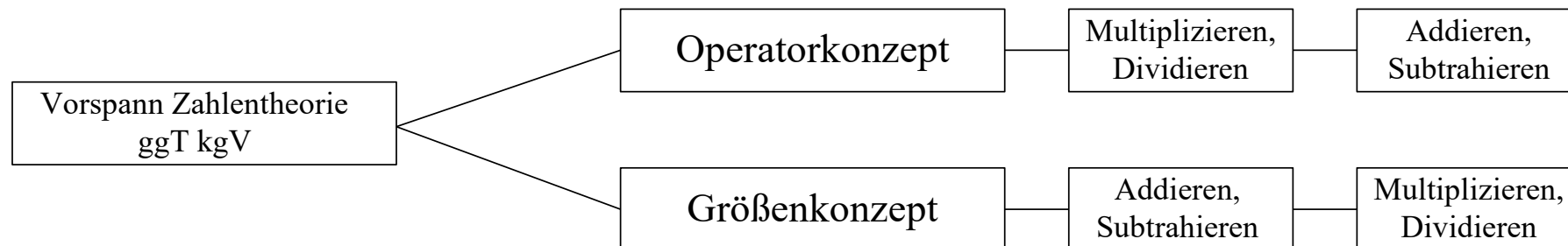
Zunächst Größenkonzept, dann Operatorkonzept

Didaktische Entscheidungen für die UE Bruchrechnung

Didaktische Entscheidungen für die UE Bruchrechnung



früher:



Neue Erkenntnisse für SuS

Multiplizieren macht manchmal kleiner!

Dividieren macht manchmal größer!



Wie viele Bruchzahlen liegen zwischen zwei gegebenen Bruchzahlen?

Bruchrechnen

Das kann das E-Book

Aufgebaut wie ein Schulbuch, lassen sich Kapitel wählen und Aufgaben zuweisen. Eingaben sind direkt via Touchscreen möglich. Feedback und gestufte Hilfen stehen zur Verfügung.

Das E-Book ...

- ... ist ein digitales, interaktives Lehrbuch zu Basiskonzepten des Bruchzahlverständnisses.
- ... basiert auf dem Stand der Forschung in der Mathematikdidaktik und Kognitionspsychologie.
- ... setzt adaptives und handlungsorientiertes Lernen um.

Hier geht's zum E-Book für iOS (kostenfrei):

<https://itunes.apple.com/de/book/bruchrechnen/id1383462561>

Arbeitsheft (pdf, kostenfrei):

<https://mediatum.ub.tum.de/1436808>

Weitere Informationen: <http://www.doc.ma.edu.tum.de/tabletpc/>



Link zum Buch: <https://www.alice.edu.tum.de/bruchrechnen.html>

**In welcher Reihenfolge sollte man
Bruchzahlen und Dezimalbrüche
behandeln?**



Tendenz: Brüche vor Dezimalbrüchen

Liebe MathematikerInnen,

ich bin in der 6. Klasse und wir haben gerade periodische Dezimalbrüche durchgenommen. Wir haben gelernt: $1/9 = 0,111\dots$, $3/9 = 0,333\dots$ usw.

Was aber ist dann $0,999\dots$? Unsere Lehrerin hat gesagt, das wäre $9/9$. Das kann aber doch nicht sein. Das wäre doch 1 und $0,999\dots$ ist doch ein Unendlichstel kleiner als 1. Gibt es $0,999\dots$ überhaupt? Aber eine Zahl, die ich mir ausdenken kann, muss es doch geben.

Wie kommt man an $0,999\dots$?

Ich würde mich über eine Antwort freuen.

Lina

(Aus einer E-Mail an www.mathematik.de, 2003)



-> Quelle und Tipp:

„Ist $0,999\dots$ wirklich 1? (Das Rätsel des Kontinuums)“ Video von Edmund Weitz:

<https://www.youtube.com/watch?v=6dHvuaBDD18>

Die ganzen Zahlen

Im Vorfeld einer Zahlbereichserweiterung zu klären

- 1) Warum ist die angestrebte ZBE notwendig (fachliche Motivation – Motivation der SuS)?
- 2) Wie wird die ZBE in der Fachwissenschaft durchgeführt? Was lässt sich davon für den Unterricht nutzen, was nicht?
- 3) Welche sinnstiftenden Vorstellungen der einzuführenden Zahlen gibt es, wofür gibt es keine sinnstiftenden Vorstellungen? Grenzen der Veranschaulichung?
- 4) Welche Darstellungsformen gibt es für die „neuen“ Zahlen?
- 5) Welche Möglichkeiten zur Einführung der „neuen“ Zahlen ergeben sich für den Unterricht? Warum entscheide ich mich für ein bestimmtes Vorgehen, warum gegen ein anderes?
- 6) Wie rechnet man mit den „neuen“ Zahlen? Wie erweitert man die Regeln für die Grundrechenarten so, dass man in dem erweiterten Zahlbereich rechnen kann?
- 7) Welche Veränderungen (bei den Vorstellungen der SuS) bringt die ZBE mit sich?
- 8) Welche typischen SuS-Fehler sind zu erwarten? Wie kann man darauf reagieren?

Wege zu den negativen Zahlen

Beispiele aus dem Alltag:

- Negative Temperaturen
- Kontostände (nicht Schulden)
- Zeitleisten
- Höhenangaben

Untersuchungen zeigen:

„Kinder besitzen aus der Erfahrung heraus Schemata zur Lösung von alltagsbezogenen Aufgaben mit negativen Zahlen.

Dazugehörige Darstellungen auf der Zahlengeraden ergeben sich daraus aber nicht von selbst, sondern müssen erst mühsam (im Unterricht) erlernt werden.

Quelle: MALLE: Die Entstehung negativer Zahlen, ml 142, 2007

Wege zu den negativen Zahlen

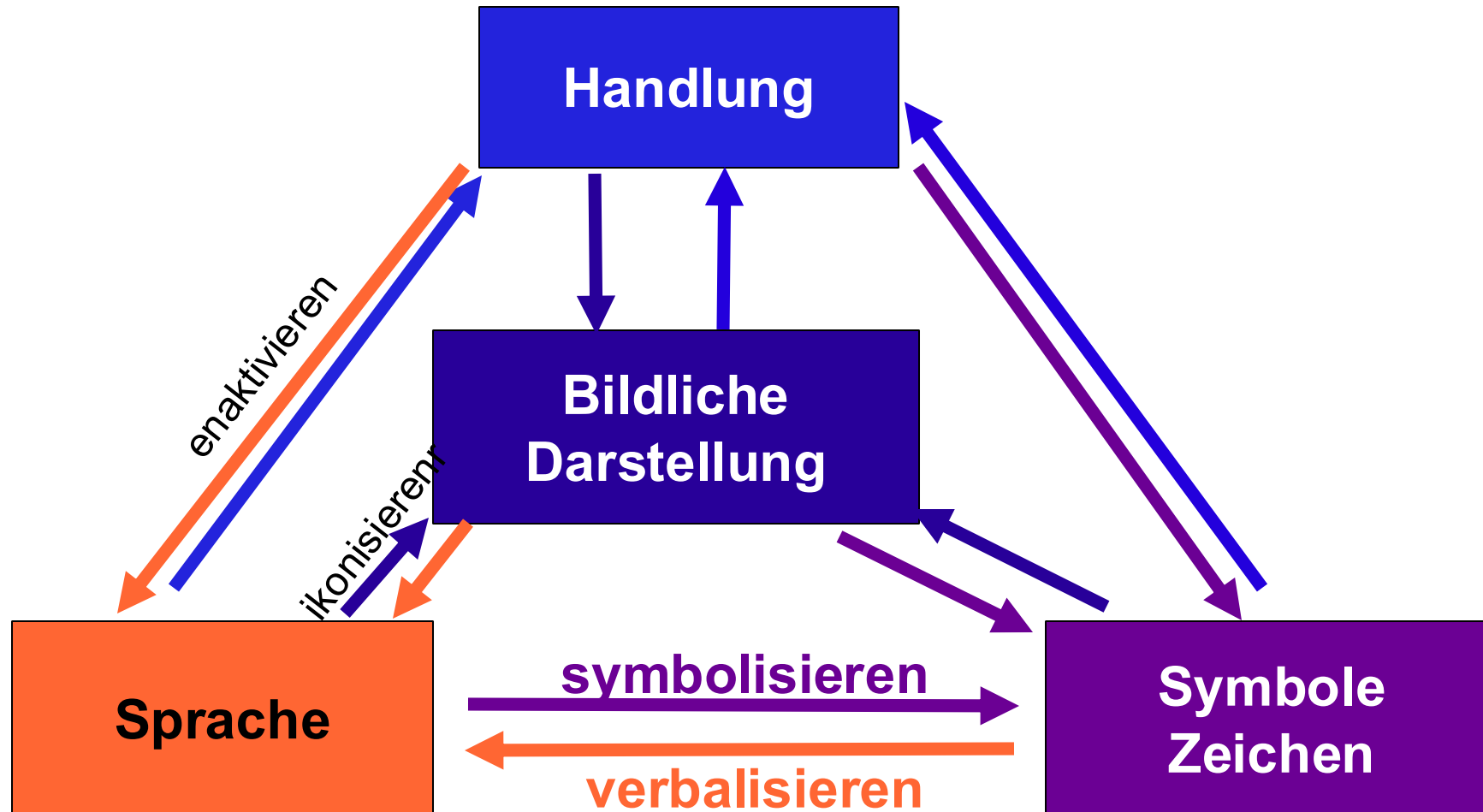
- 1) Vorkenntnisse und Alltagsverständnis negativer Zahlen aktivieren
- 2) Ordnung negativer Zahlen
Was ist kleiner -5 oder -3?
- 3) Addition und Subtraktion mit negativen Zahlen
mit Unterscheidung zwischen Vorzeichen und Rechenzeichen
- 4) Multiplikation (und Division)
nach dem Permanenzprinzip

Theorie der Darstellungsebenen nach Bruner

E naktive Darstellung	Erfassen von Sachverhalten durch eigene Handlungen
I konische Darstellung	Erfassen von Sachverhalten durch Bilder oder Graphiken
S ymbolische Darstellung	Erfassen von Sachverhalten durch abstrakte Zeichen

Das E-I-S – Prinzip:

Übergänge zwischen den Darstellungsebenen



Enaktives Addieren und Subtrahieren mit negativen Zahlen

Erprobt die beiden nachfolgenden Methoden und löst jeweils einige der abgebildeten Aufgaben.

- Laufen auf dem Zahlenstrahl
- Legotürme bauen

Kommentiert euer Vorgehen jeweils.

- Treppe laufen

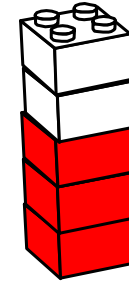


1)	$(+4) + (+3) =$
2)	$(+5) + (-4) =$
3)	$(-4) + (+7) =$
4)	$(-2) + (-3) =$
5)	$(+1) + (+8) =$
6)	$(-5) + (+5) =$
7)	$(+3) + (-1) =$
8)	$(+2) + (-3) =$
9)	$(+1) + (-8) =$
10)	$(-5) + (+2) =$
11)	$(-4) + (-8) =$
12)	$(-9) + (+2) =$
13)	$(+7) + (-9) =$
14)	$(+7) + (-6) =$
15)	$(-1) + (+1) =$

1)	$(+8) - (+6) =$
2)	$(+3) - (+1) =$
3)	$(+10) - (+10) =$
4)	$(+2) - (-4) =$
5)	$(+8) - (-3) =$
6)	$(-13) - (-4) =$
7)	$(-14) - (-2) =$
8)	$(-14) - (+11) =$
9)	$(+8) - (-6) =$
10)	$(-11) - (+13) =$
11)	$(-8) - (-12) =$
12)	$(-9) - (-4) =$
13)	$(-4) - (-15) =$
14)	$(-7) - (+3) =$
15)	$(-2) - (-9) =$

Das Doppelturmmodell

Das Doppelturmmodell kann im Unterricht durch die Verwendung von Legosteinen realisiert werden.

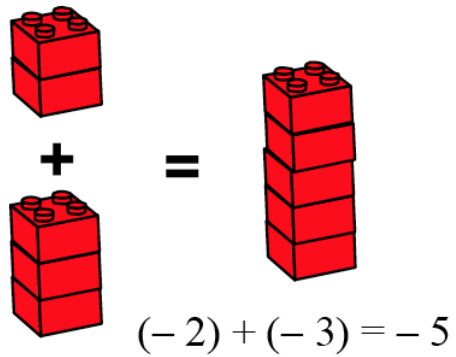


Für die Addition und Subtraktion mit Legosteinen gelten folgende Regeln:

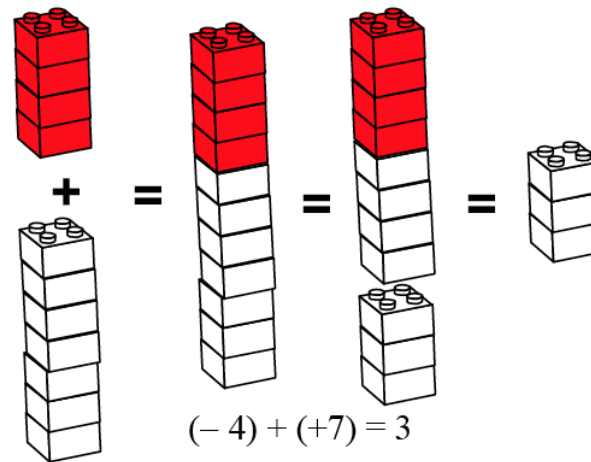
1. Addieren bedeutet das Hinzufügen, Subtrahieren bedeutet das Wegnehmen von Legosteinen.
2. Ein roter Legostein hat den Wert -1, ein weißer Legostein hat den Wert +1.
3. Ein roter und ein weißer Legostein zusammen neutralisieren sich und haben somit den Wert 0.
4. Das Ergebnis wird nur durch Legosteine gleicher Farbe dargestellt.

Addition rationaler Zahlen mit dem Doppelturmmodell:

Beispiel 1:

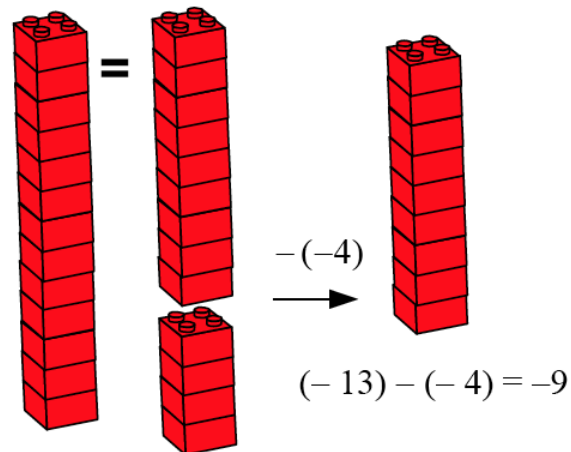


Beispiel 2:

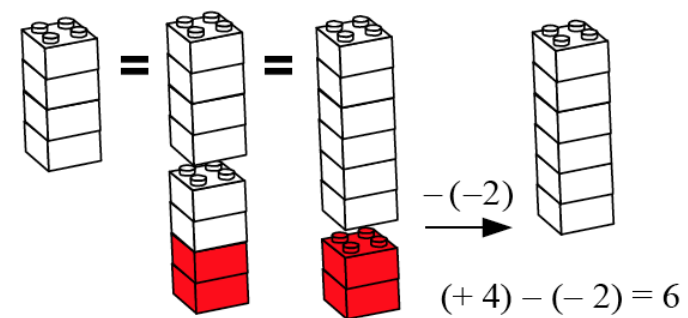


Subtraktion rationaler Zahlen mit dem Doppelturmmodell:

Beispiel 1:



Beispiel 2:



Zahlenstrahl laufen

Rechenzeichen:

+ heißt

„schaue in die positive Richtung“

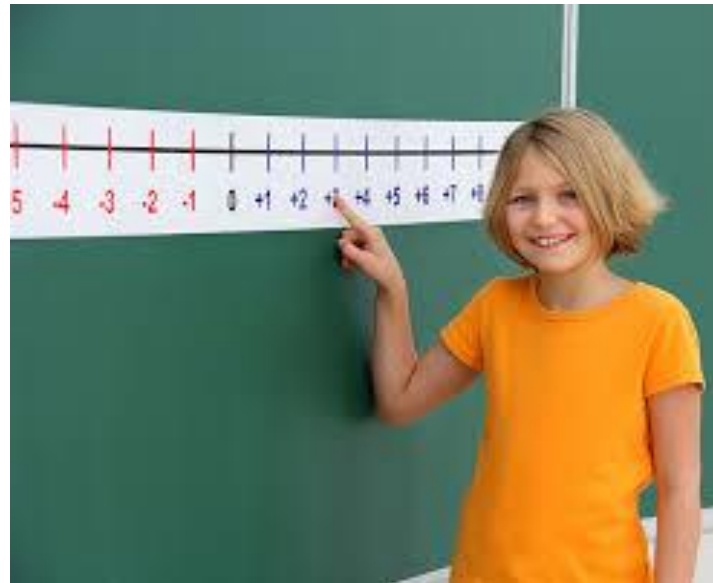
– heißt

„schaue in die negative Richtung“

Vorzeichen:

$3 = (+3)$ heißt „gehe vorwärts“

(-3) heißt „gehe rückwärts“



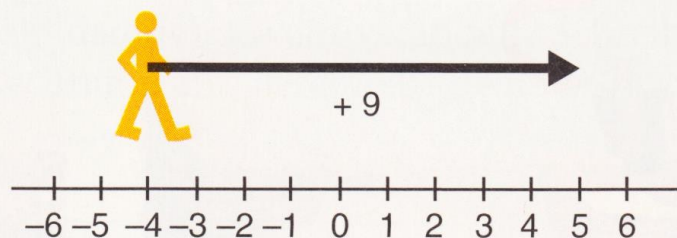
Das Schrittmodell

Addition rationaler Zahlen

Addieren bedeutet: Du wendest dich nach rechts. Addierst du ...

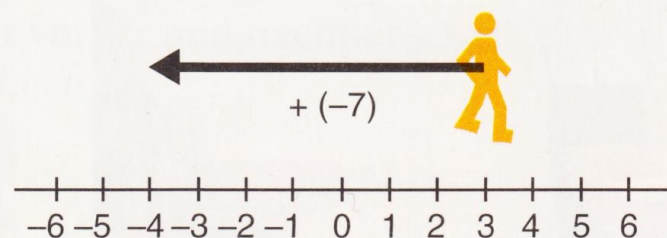
... eine **positive** Zahl, so gehst du vorwärts,
d.h. auf der Zahlengeraden nach **rechts**.

$$-4 + 9 = 5$$



... eine **negative** Zahl, so gehst du rückwärts,
d.h. auf der Zahlengeraden nach **links**.

$$3 + (-7) = -4$$

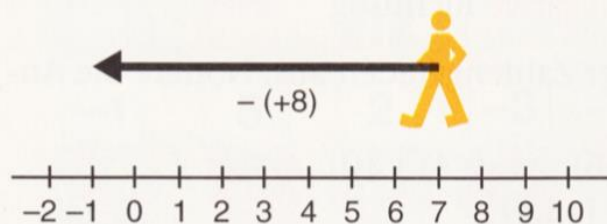


Subtrahieren rationaler Zahlen

Subtrahieren bedeutet: Du wendest dich nach links. Subtrahierst du ...

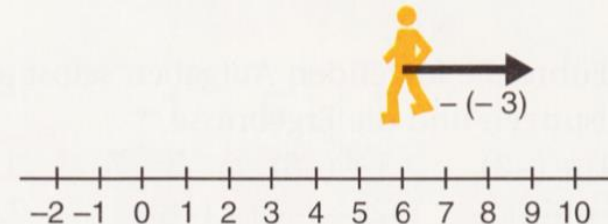
... eine **positive** Zahl, so gehst du vorwärts,
d.h. auf der Zahlengeraden nach **links**.

$$7 - (+8) = -1$$



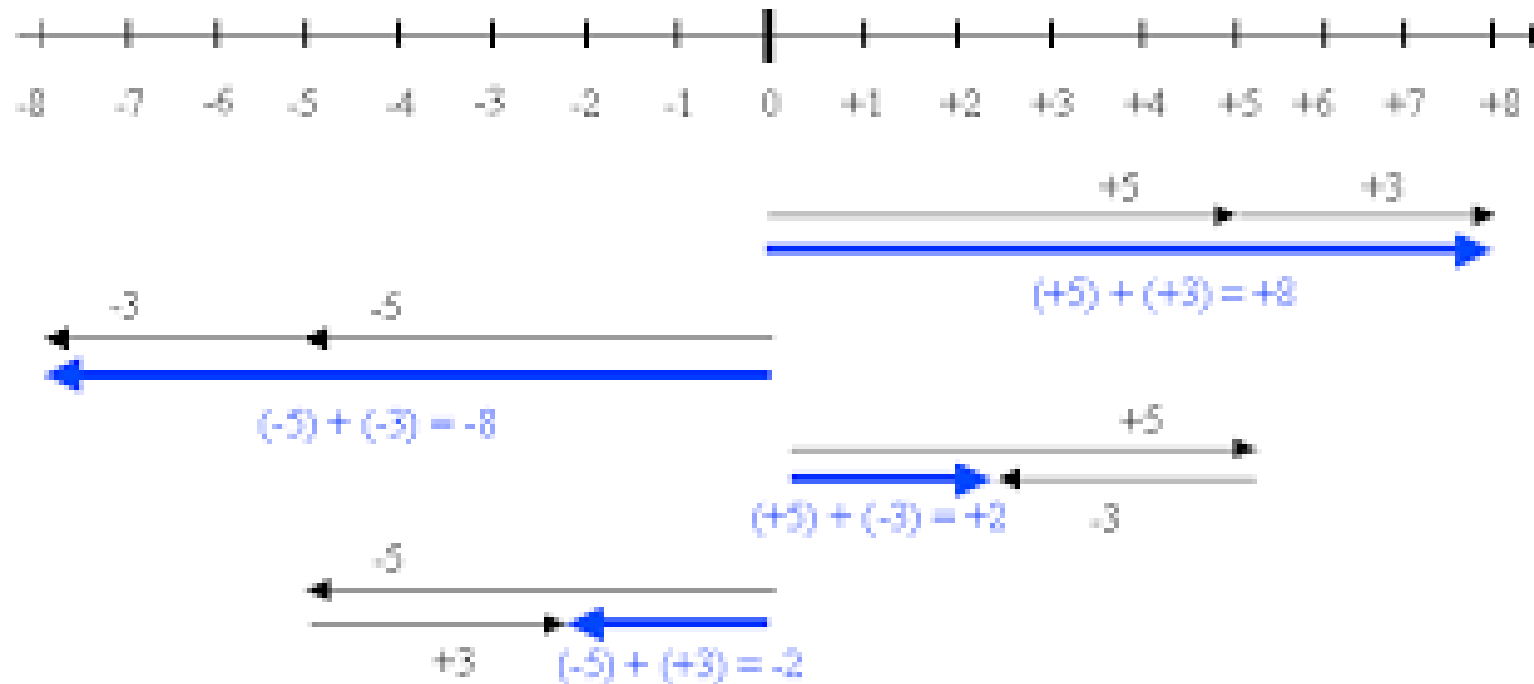
... eine **negative** Zahl, so gehst du rückwärts,
d.h. auf der Zahlengeraden nach **rechts**.

$$6 - (-3) = 9$$



Zahlenstrahl laufen

Addition und Subtraktion



Zahlenstrahl laufen

Spielen: „Hin und Her“

Material:

- 3 Spielfiguren mit Gesicht
- Ein Würfel mit den Rechezeichen + und -
- Ein Würfel mit den Zahlen 0, -1, -2, +3, +4, +5
- Spielplan



So geht's

Jede Person erhält 3 Spielfiguren. Nun wird der Reihe nach mit beiden Würfeln gewürfelt und die Figur entsprechend bewegt.

Beim **Rechenwürfel** bedeutet

- + stelle deine Figur so, dass sie in die positive Richtung schaut
- stelle deine Figur so, dass sie in die negative Richtung schaut

Beim **Zahlenwürfel** bedeutet z.B.

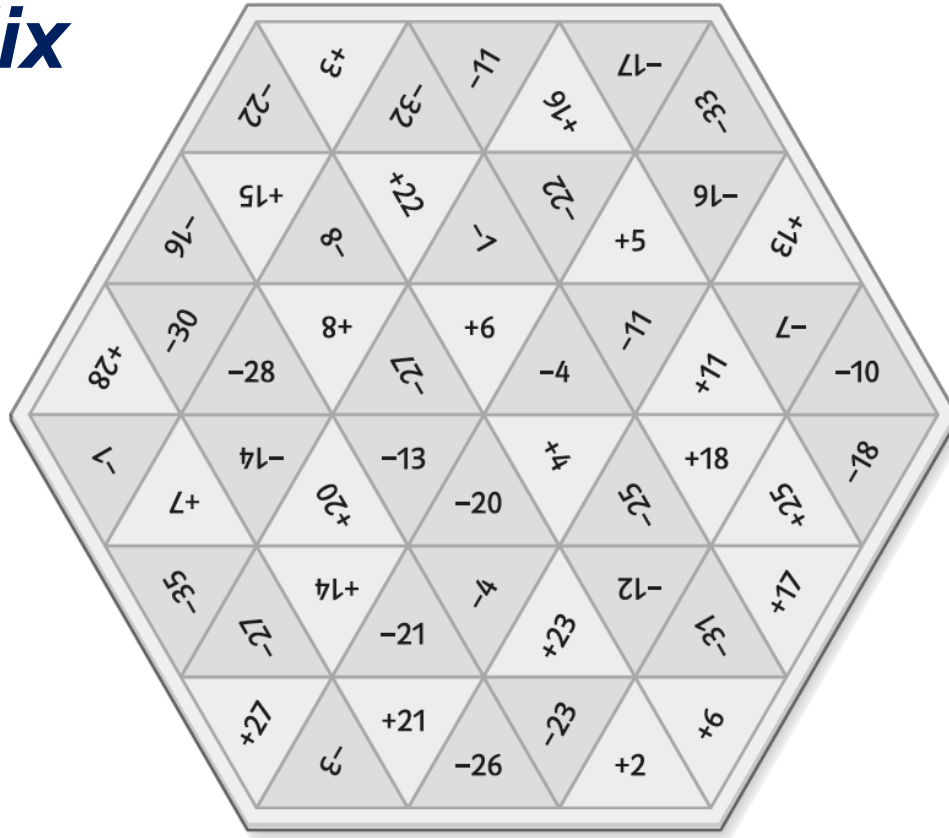
- +3 gehe drei Felder **vorwärts**
- 4 gehe vier Felder **rückwärts**



Beispiel:

- + (-2) bedeutet: „Schau in die positive Richtung und gehe 2 Felder rückwärts“
- (-4) bedeutet: „Schau in die negative Richtung und gehe 4 Felder rückwärts“

Saldix



Punktestand bisher	Punkte dazu	Neuer Punktestand
+21	-27	+21 -27= -6
-6		

Spielregeln

Jeder TN wählt eine andere Stiftfarbe. Reihum wird jeweils ein Punkt auf eine beliebige Ecke eines Dreiecksfeldes gesetzt. Dabei darf man nicht aussetzen; wenn man dran ist, **muss** man setzen!

Wenn ein neuer Punkt ein oder mehrere Dreiecke schließt (so dass an jeder Ecke des Dreiecks ein Punkt ist), dann werden dem TN, der diesen Punkt gesetzt hat, die Zahlenwerte aller durch den Stein geschlossenen Dreiecke zugeschrieben. Dabei bringen die Felder Plus - bzw. Minuspunkte.

Das Spiel endet, wenn alle Ecken besetzt sind.

Wer den höchsten Punktestand hat, gewinnt.

Multiplikation $(-a) \cdot (-b)$

Zugänge zu den Vorzeichenregeln bei der Multiplikation:

- Verwendung des Vektormodells
(zentrische Streckung, orientiert, eindimensional auf dem Zahlenstrahl)
- Verwendung des **Permanenzprinzips**

- unter Verwendung des **Distributivgesetzes**
- unter Verwendung von „**Gleichungsketten**“

$$\begin{aligned} 0 &= (-3) \cdot 0 \\ &= (-3) \cdot (5 + (-5)) \\ &= (-3) \cdot 5 + (-3) \cdot (-5) \end{aligned}$$

$$3 \cdot 5 = 15$$

$$3 \cdot (-5) = -15$$

$$2 \cdot 5 = 10$$

$$2 \cdot (-5) = -10$$

$$1 \cdot 5 = 5$$

$$1 \cdot (-5) = -5$$

$$0 \cdot 5 = 0$$

$$0 \cdot (-5) = 0$$

$$(-1) \cdot 5 = -5$$

$$(-1) \cdot (-5) = 5$$

$$(-2) \cdot 5 = -10$$

$$(-2) \cdot (-5) = 10$$

$$\begin{aligned} (-3) \cdot (-5) &= - [(-3) \cdot 5] \\ &= - [-15] \\ &= 15 \end{aligned}$$

Permanenzreihen

Addition und Subtraktion:

$4 + 2 = 6$		$4 - 2 = 2$	
$4 + 1 = 5$	$\downarrow -1$	$4 - 1 = 3$	$\downarrow +1$
$4 + 0 = 4$	$\downarrow -1$	$4 - 0 = 4$	$\downarrow +1$
$4 + (-1) = ?$	$\downarrow -1$	$4 - (-1) = ?$	$\downarrow +1$
$4 + (-2) = ?$		$4 - (-2) = ?$	
...		...	

Multiplikation:

$4 \cdot 2 = 8$		$2 \cdot (-4) = -8$	
$4 \cdot 1 = 4$	$\downarrow -4$	$1 \cdot (-4) = -4$	$\downarrow +4$
$4 \cdot 0 = 0$	$\downarrow -4$	$0 \cdot (-4) = 0$	$\downarrow +4$
$4 \cdot (-1) = ?$	$\downarrow -4$	$(-1) \cdot (-4) = ?$	$\downarrow +4$
$4 \cdot (-2) = ?$		$(-2) \cdot (-4) = ?$	
...		...	

Reelle Zahlen und Beweise

Im Vorfeld einer Zahlbereichserweiterung zu klären

- 1) Warum ist die angestrebte ZBE notwendig (fachliche Motivation – Motivation der SuS)?
- 2) Wie wird die ZBE in der Fachwissenschaft durchgeführt? Was lässt sich davon für den Unterricht nutzen, was nicht?
- 3) Welche sinnstiftenden Vorstellungen der einzuführenden Zahlen gibt es, wofür gibt es keine sinnstiftenden Vorstellungen? Grenzen der Veranschaulichung?
- 4) Welche Darstellungsformen gibt es für die „neuen“ Zahlen?
- 5) Welche Möglichkeiten zur Einführung der „neuen“ Zahlen ergeben sich für den Unterricht? Warum entscheide ich mich für ein bestimmtes Vorgehen, warum gegen ein anderes?
- 6) Wie rechnet man mit den „neuen“ Zahlen? Wie erweitert man die Regeln für die Grundrechenarten so, dass man in dem erweiterten Zahlbereich rechnen kann?
- 7) Welche Veränderungen (bei den Vorstellungen der SuS) bringt die ZBE mit sich?
- 8) Welche typischen SuS-Fehler sind zu erwarten? Wie kann man darauf reagieren?

Was eine reelle Zahl?



Eine Zahl, deren Dezimalentwicklung unendlich und nicht - periodisch ist, heißt irrationale Zahl.

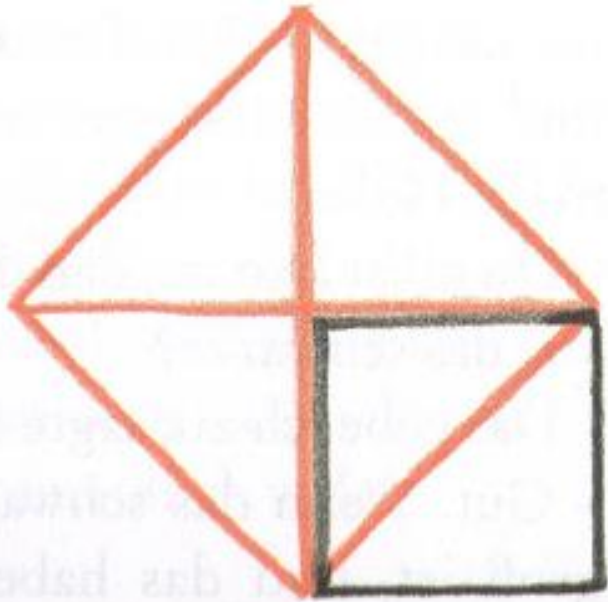
Alle inneren Zahlen von Intervallschachtelungen bilden die Menge der reellen Zahlen.

Alle Zahlen, die Punkte auf der Zahlengeraden bezeichnen, fasst man als reelle Zahlen auf.

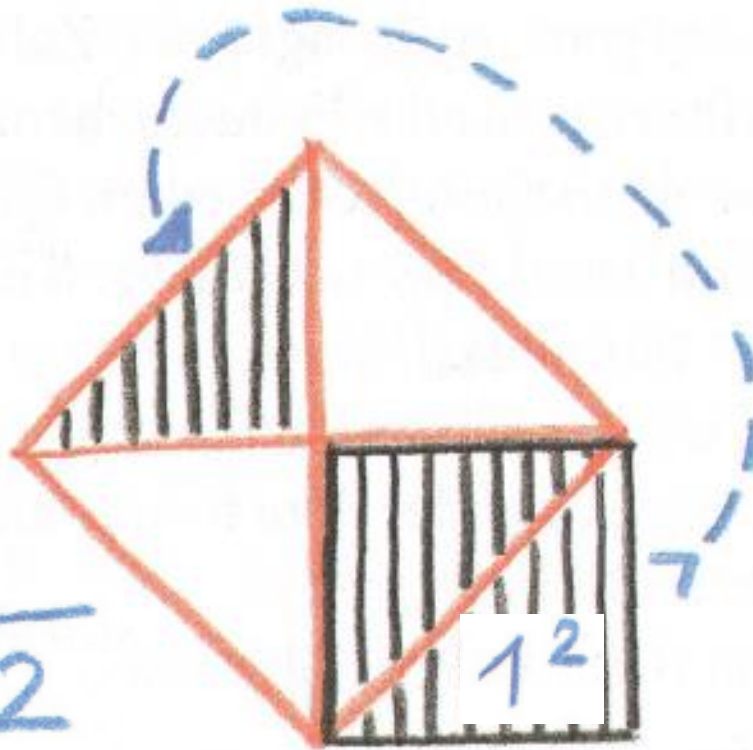
Die reellen Zahlen, die keine rationalen Zahlen sind, schließen die Lücken auf der rationalen Zahlengerade.

Man nennt sie irrationale Zahlen.

Gehopste Zahlen und Rettiche



$\sqrt{2}$



14 142 13

Aus:

ENZENSBERGER, H. M.:

Der Zahlenteufel

Reihe Hanser

Die reellen Zahlen - Einstiegsprobleme

Bestimme alle Zahlen, deren Quadrat 2 ist.

Problem der Quadratverdopplung

Bestimme die Länge der Diagonale im Einheitsquadrat.

...

1. Analysiert den vorgelegten Beweis für die Irrationalität der reellen Zahl $\sqrt{2}$.
2. Welche unterrichtlichen Voraussetzungen sind für die Erarbeitung dieses Beweises erforderlich?
3. Entwickle einen Unterrichtsgang zur Behandlung dieses Themas.

AV

„Leistungsüberprüfung und Diagnostik“ *ohne Termin*

Aus dem Ausbildungscurriculum

Leistungsüberprüfung

Ziel: Die LiV kennen die rechtlichen Rahmenbedingungen für Leistungsmessung und Bewertung und können diagnostische Verfahren im Unterricht einsetzen.

Anhand von Schülerbeispielen wird erarbeitet, wie zwischen sprachlichen und fachlichen Schwierigkeiten zu unterscheiden ist, und wie der **Ausbau der Bildungs- und Fachsprache parallel zum Erwerb der Fachinhalte** geplant werden kann. Die Gestaltung von **ziendifferenten Klassenarbeiten** wird exemplarisch umgesetzt. Im Hinblick auf das gemeinsame Lernen wird die Bedeutung der drei in den Fachanforderungen beschriebenen Anforderungsbereiche und Anforderungsebenen für die Wahl geeigneter Aufgabenformate deutlich gemacht und das Heranführen der Schülerinnen und Schüler an die in Arbeitsaufträgen zu verwendenden Operatoren konkretisiert. Die rechtlichen Rahmenbedingungen für die Leistungsbewertung werden thematisiert. Auch die Beurteilung von mündlichen Leistungen und die Arbeit mit Selbsteinschätzungsbögen werden thematisiert.

Was zählt in Mathe?

Fachspezifische Beurteilungskriterien

- Verständnis von mathematischen Begriffen und Operationen
- Schnelligkeit im Abrufen von Kenntnissen
- Sicherheit im Ausführen von Fertigkeiten
- Richtigkeit bzw. Angemessenheit von Ergebnissen bzw. Teilergebnissen
- Flexibilität und Problemangemessenheit des Vorgehens
- Fähigkeit zur Nutzung vorhandenen Wissens und Könnens in ungewohnten Situationen
- Selbstständigkeit und Originalität der Vorgehensweisen
- Fähigkeit zum Anwenden von Mathematik bei lebensweltlichen Aufgabenstellungen
- Schlüssigkeit der Lösungswege und Überlegungen
- mündliche und schriftliche Darstellungsfähigkeit
- Ausdauer beim Bearbeiten mathematischer Fragestellungen
- Fähigkeit zur Kooperation bei der Lösung mathematischer Aufgaben

Rechtliche Grundlagen

Transparenz:

Lehrkräfte geben den SuS bzw. deren Eltern die Kriterien für die Beurteilung der Unterrichtsbeiträge zu Beginn des Schuljahres bekannt.

Lehrkräfte sprechen mindestens zweimal pro Halbjahr mit den SuS über den derzeitigen Leistungsstand, davon einmal vor der ersten Klausur/KA.

-> Beides ist im Kursbuch/Klassenbuch festzuhalten.

Fachanforderungen, S. 11

Kriterien und Verfahren der Leistungsbewertung werden den Schülerinnen, Schülern und Eltern vorab offengelegt und erläutert. Schülerinnen und Schüler erhalten eine kontinuierliche Rückmeldung über den Leistungsstand. Diese erfolgt so rechtzeitig, dass die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit haben, aus der Rückmeldung zukünftige Lern- und Arbeitsstrategien abzuleiten.

Fachanforderungen, S. 42

In Bezug auf die Beurteilung und gegebenenfalls die Bewertung von Unterrichtsbeiträgen gewährleistet die Lehrkraft die Transparenz der Kriterien. Das kann eine

Konkrete Festlegung nur für Sek II,
ABER:
Elternrechte auf Beratung fordern
ein ähnliches Vorgehen in der Sek I
(§34 Abs. 1 SchulG)

Unterrichtsbeiträge beurteilen und bewerten

Tauscht euch zu folgenden Fragen aus:

Wir sammeln im Anschluss Erkenntnisse, Tipps und Fragen

1. Wie geht ihr konkret vor, um eine Note für die Unterrichtsbeiträge festzulegen?
Welche Varianten habt ihr bereits erprobt?
2. Wer ist eigentlich verantwortlich dafür, dass der Lehrkraft beurteilbare Leistungen vorliegen?
(Wie) verändert sich diese Verantwortung im zeitlichen Verlauf von Klasse 5 bis 13?
3. Wie sorgt ihr für Transparenz bei der Leistungsbewertung?

Klassenarbeiten erstellen

Zeitlicher Umfang:

45, 60, 90 Minuten?

Zeitpunkt:

Am Ende einer Einheit oder mittendrin?

Inhaltlicher Umfang:

Nur der aktuelle Stoff oder mehrere Bereiche?

Formaler Umfang:

Anzahl der Aufgaben?

Kontext(e):

Für alle neu oder allen vertraut?
(Wie viele) verschiedene Kontexte?

(allg.)

Kompetenzen:

Eine im Fokus oder mehrere oder alle?

Reihenfolge:

Von „einfach“ zu „schwierig“?
Chronologisch?
Gemischt?

Punkteverteilung:

Schwierige Aufgabe – viele Punkte?

Diskutiert zu dritt einige der Aspekte.
(ca.10 Minuten)

Differenzierung?

Wie?

Punkteverteilung vorab bekannt geben?

... ?

Wir sammeln im Anschluss ...

Konstruktionsprinzipien für KA

- Im Laufe des Schuljahres alle prozessbezogenen Kompetenzen berücksichtigen
- Alle drei Anforderungsbereiche abdecken
- Nicht nur das letzte Unterrichtsvorhaben abfragen, sondern auch grundlegendes Wissen und Können einfordern (-> Vernetzung)
- Sprachliche Anforderungen in Aufgabentexten nicht vermeiden, wohl aber unnötige Verständnisschwierigkeiten beim Erfassen der Aufgabenstellung
- Mit den Klassenstufen zunehmenden Anteil von Aufgaben zum Begründen, Interpretieren, Erläutern, Reflektieren stellen
- Offene Aufgaben aufnehmen
- Aufgabenteile müssen unabhängig voneinander lösbar sein (ggf. Zwischenlösungen angeben oder nur nach einem Ansatz fragen)
- ...

Quelle:

DRÜKE-NOE, C.; SCHMIDT, U.: *Klassenarbeiten analysieren, gestalten, auswerten*,
PM 63, Juni 2015

Leistungsnachweise im Mathematikunterricht der Sek I ab 08.2025

(Neue) Vorgaben:

- Zielvereinbarungen und Maßnahmen zur Verbesserung der Ergebnisse
- Prüfung der Einhaltung der standardsprachlichen Normen
- Wiederholungsteil zu grundlegenden Kompetenzen in jeder Klassenarbeit
- Medien- und materialgestütztes Arbeiten unter Aufsicht als neues Prüfungsformat
- Stärkere Berücksichtigung prozessbezogener Kompetenzen und future skills
- Weniger Leistungsnachweise pro Jahr

Kompetenzen für den erfolgreichen Übergang von der Sekundarstufe I in die berufliche Ausbildung sichern

Gutachten der Ständigen Wissenschaftlichen Kommission der
Kultusministerkonferenz

Basale Kompetenzen:
für das schulische
Weiterlernen unabdingbar

Beispiele für basale Kompetenzen fürs
Weiterlernen in jeder Doppeljahrgangsstufe

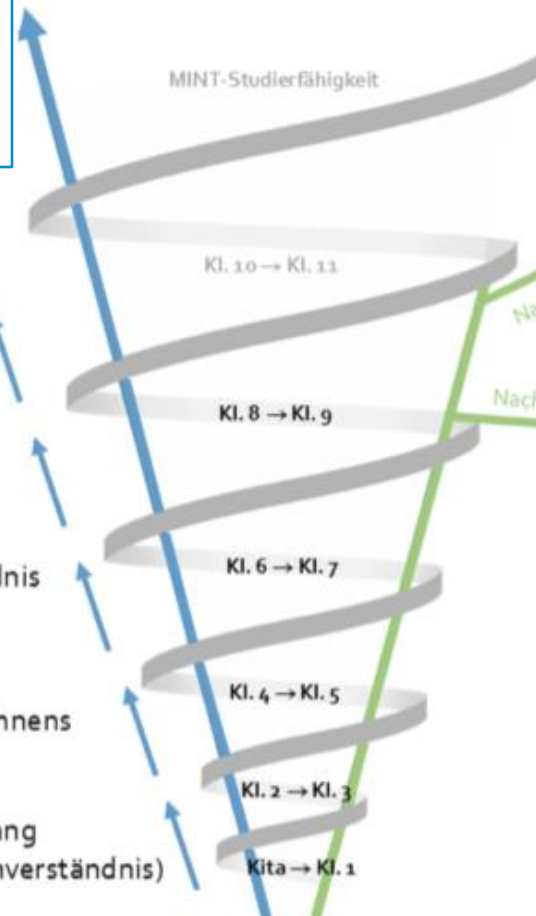
Variablen- und
Funktionsverständnis

Stellenwert- und Operationsverständnis
für Brüche und Dezimalzahlen

Stellenwert- und Operationsverständnis
für natürliche Zahlen, Flüssigkeit im
verständigen Rechnen

Überwindung des zählenden Rechnens
mit Zahlerlegungen

Basisfähigkeiten am Schulanfang
(z. B. Zählfähigkeiten, Mengenverständnis)



**(unverzichtbare)
funktionale Kompetenzen:**
ermöglichen Ausbildung und
gesellschaftliche Teilhabe

Mindeststandards MSA zusätzlich, z. B.

- Tabellenkalkulation mit Variablen
- Umgang mit Zufall
- Angebotsvergleiche, Zinsen
- ...

Mindeststandards ESA, z. B.

- Überschlagsrechnen
- Umgang mit Größen
- Tabellen und Diagramme lesen
- Mittelwerte
- Proportionales Denken
- Prozentrechnung
- ...

Zu SWK und Gutachten:
<https://t1p.de/vtqwq>

SWK-Gutachten und KA-Erlass

„Wiederholungsteil zu **grundlegenden Kompetenzen** in jeder Klassenarbeit“

Basale Kompetenzen:

in jeder Doppeljahrgangsstufe diejenigen Kompetenzen, die für das schulische Weiterlernen nachweislich unabdingbar sind (nach SWK-Gutachten)

(unverzichtbare)

funktionale Kompetenzen:

am Ende der Pflichtschulzeit ermöglichen Ausbildung und gesellschaftliche Teilhabe, sind flexibel in komplexeren Situationen nutzbar zum Problemlösen und Modellieren

Elementare Modellierungs- und Problemlösekompetenzen sind für alle Schülerinnen und Schüler relevant, nicht nur für leistungsstärkere!

Quellen: Erlass „Leistungsnachweise in der Sekundarstufe I“ und
SWK-Gutachten „Kompetenzen für einen erfolgreichen Übergang ...“

Austausch zu Leistungsnachweisen im Mathematikunterricht der Sek I

Leistungsnachweise
in der laufenden
Unterrichtseinheit

Fokus auf
prozessbezogene
Kompetenzen im
Wiederholungsteil

...

Wiederholungsteil
=
Hilfsmittelfreier Teil

