Aufgabe 1: Analysis

Zwischen zwei Orten A und B befindet sich ein Tal mit einem tiefsten Punkt T. Der Querschnitt des Tals kann durch den Graphen einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades beschrieben werden, wobei $f(x)$ die Höhe über dem Meeresspiegel in Kilometern angibt. Im dargestellten Koordinatensystem entspricht eine Einheit einem Kilometer in der Wirklichkeit. Die Orte A und B sowie der Tiefpunkt T haben die Koordinaten $A(0 \mid 0{,}2)$, $B(1 \mid 0{,}3)$ und $T(0{,}5 \mid 0{,}13)$ (vgl. Abb. 1).

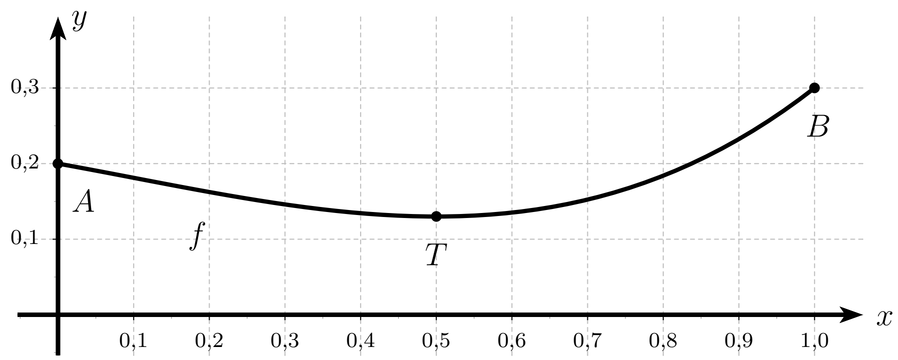


Abb. 1

Der Graph der Funktion f ist zusätzlich auf dem Beiblatt (Abb. 2) vergrößert dargestellt.

a) a1) Leiten Sie eine Gleichung der Funktion f her. (5 P)

Verwenden Sie im Folgenden $f(x) = 0{,}4\,x^3 - 0{,}12\,x^2 - 0{,}18\,x + 0{,}2$.

a2) Bestimmen Sie die Stelle, an der der Querschnitt des Tals eine Höhe von $240\,\mathrm{m}$ über dem Meeresspiegel aufweist, und bestimmen Sie die Steigung an dieser Stelle. (2 P)

a3) Eine Person wandert von A nach T. Bestimmen Sie das durchschnittliche und das maximale Gefälle auf diesem Weg. (7 P)

Als Touristenattraktion soll zwischen den Punkten A und B eine Hängebrücke errichtet werden. Der Verlauf der Hängebrücke kann durch den Graphen einer Funktion g mit

$$g(x) = 0{,}2\,x^2 - 0{,}1\,x + 0{,}2$$

beschrieben werden.

b) b1) Ergänzen Sie die auf dem Beiblatt abgedruckte Wertetabelle und zeichnen Sie den Graphen auf das Beiblatt. (4 P)

b2) Berechnen Sie den Winkel α zwischen dem Verlauf der Hängebrücke und dem Querschnitt des Tals im Punkt B. (3 P)

c) c1) Es gibt Punkte auf der Hängebrücke, deren Höhe über dem Boden $50\,\mathrm{m}$ beträgt. Zeichnen Sie diese Punkte auf dem Beiblatt ein. (2 P)

c2) Ermitteln Sie rechnerisch die größte Höhe der Hängebrücke über dem Boden. (5 P)

Die Länge L des Graphen der Funktion g über dem Intervall $[a;b]$ kann durch

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (g'(x))^2}\, dx$$

berechnet werden.

c3) Berechnen Sie die Länge der Hängebrücke. (2 P)

c4) Begründen Sie, dass $\int\limits_0^b \sqrt{1 + (g'(x))^2}\, dx > \sqrt{b^2 + (g(b) - g(0))^2}$ für alle $0 < b \leq 1$ gilt. (3 P)

d) Auch die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion h mit $h(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x})$ kann zur Beschreibung von Hängebrücken verwendet werden.

Es gilt $h''(x) = h(x)$.

d1) Weisen Sie rechnerisch nach, dass $(h(x))^2 - (h'(x))^2 = 1$ gilt. (4 P)

d2) Leiten Sie her, dass $\int\limits_a^b \sqrt{1 + (h'(x))^2}\, dx = h'(b) - h'(a)$ ist. (3 P)

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$g(x)$		0,192								0,272	

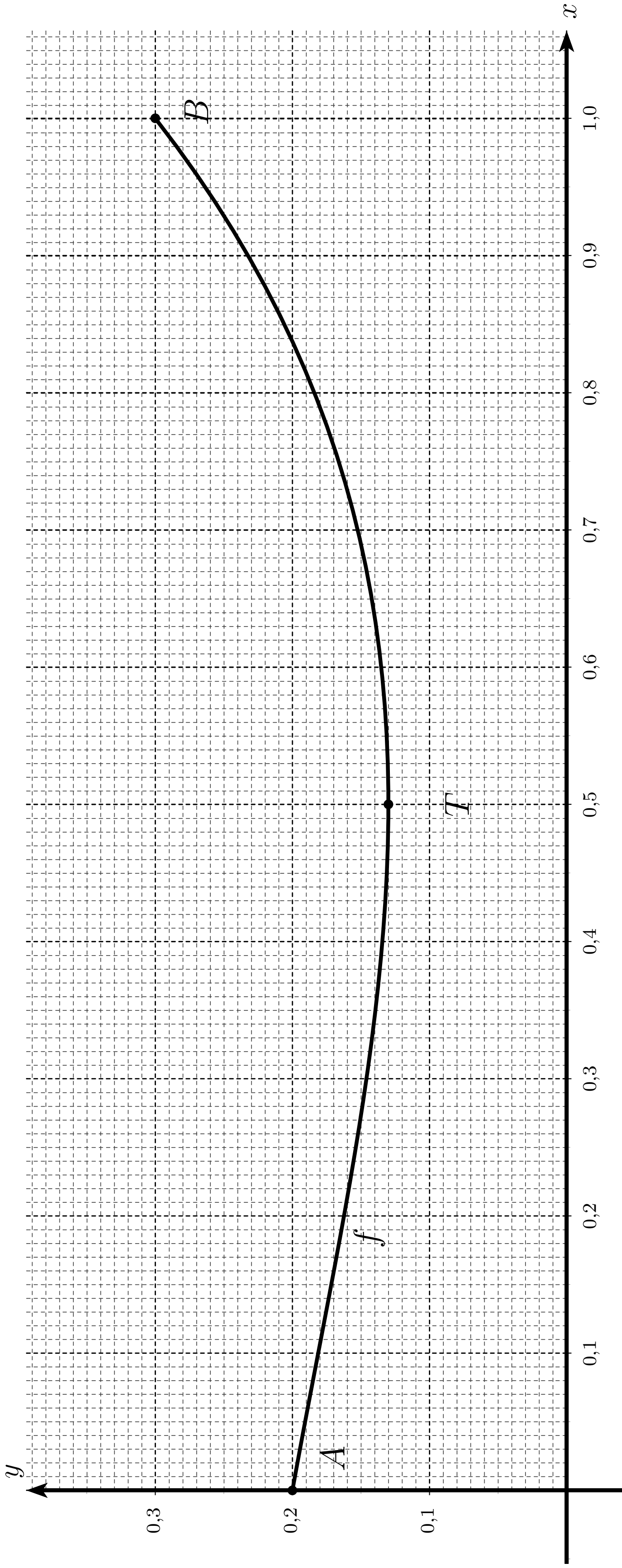


Abb. 2

<table>
<tr><th rowspan="2">Erwartete Schülerleistung</th><th colspan="3">Bewertung Zuordnung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>

Teilaufgabe a)
Eine Gleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades lautet $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Mit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ folgt

$$\left|\begin{array}{l} f(0) = 0{,}2 \\ f(1) = 0{,}3 \\ f(0{,}5) = 0{,}13 \\ f'(0{,}5) = 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} d = 0{,}2 \\ a + b + c + d = 0{,}3 \\ 0{,}125\,a + 0{,}25\,b + 0{,}5\,c + d = 0{,}13 \\ 0{,}75\,a + b + c = 0 \end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} d = 0{,}2 \\ a + b + c = 0{,}1 \\ 0{,}125\,a + 0{,}25\,b + 0{,}5\,c = -0{,}07 \\ 0{,}75\,a + b + c = 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a = 0{,}4 \\ b = -0{,}12 \\ c = -0{,}18 \\ d = 0{,}2 \end{array}\right|.$$

Eine Gleichung der Funktion f lautet $f(x) = 0{,}4x^3 - 0{,}12x^2 - 0{,}18x + 0{,}2$.
</td><td>3

2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

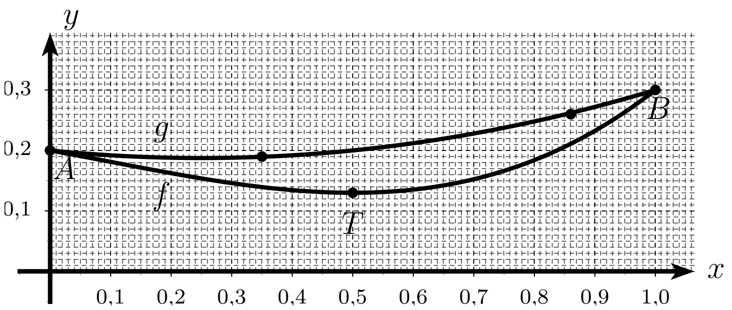
Der Ansatz $f(x) = 0{,}24 \Leftrightarrow 0{,}4x^3 - 0{,}12x^2 - 0{,}18x + 0{,}2 = 0{,}24$ liefert $x \approx 0{,}9129$. Dies ist die Stelle, an der der Querschnitt des Tals eine Höhe von $240\,\mathrm{m}$ über dem Meeresspiegel aufweist.
Wegen $f'(0{,}9129) \approx 0{,}601$ beträgt die Steigung dort ca. $60{,}1\,\%$.
</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

Wegen $\frac{f(0{,}5)-f(0)}{0{,}5-0} = \frac{-0{,}07}{0{,}5} = -0{,}14$ ist das durchschnittliche Gefälle $14\,\%$.
Zu ermitteln ist das globale Minimum von f' im Intervall $[0; 0{,}5]$.
Es gilt $f'(x) = 1{,}2\,x^2 - 0{,}24\,x - 0{,}18$ und $f''(x) = 2{,}4\,x - 0{,}24$.
Notwendig für eine lokale Extremstelle x von f' ist $f''(x) = 0$.
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2{,}4\,x - 0{,}24 = 0 \Leftrightarrow x = 0{,}1$
Da zusätzlich $f'(0) = -0{,}18$, $f'(0{,}1) = -0{,}192$ und $f'(0{,}5) = 0$ gilt, beträgt das größte Gefälle auf dem Weg von A nach T $19{,}2\,\%$.
</td><td>1</td><td>4

2</td><td></td></tr>
<tr><td>

Teilaufgabe b)

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$g(x)$	0,2	0,192	0,188	0,188	0,192	0,2	0,212	0,228	0,248	0,272	0,3



</td><td>2

2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

Aus $\tan(\alpha_2) = f'(1) = 0{,}78$ folgt $\alpha_2 \approx 37{,}95°$.
Aus $\tan(\alpha_1) = g'(1) = 0{,}3$ folgt $\alpha_1 \approx 16{,}70°$.
Wegen $\alpha_2 - \alpha_1 \approx 21{,}25°$ beträgt der Winkel zwischen dem Verlauf der Hängebrücke und dem Querschnittsverlauf ungefähr $21{,}25°$.
</td><td></td><td>3</td><td></td></tr>
</table>

Erwartete Schülerleistung	Bewertung Zuordnung		
	I	II	III
Teilaufgabe c) Einzeichnen der beiden Punkte auf dem Beiblatt, vgl. b1).		2	
Zu ermitteln ist das globale Maximum der Differenzfunktion d mit $d(x) = g(x) - f(x) = -0{,}4\,x^3 + 0{,}32\,x^2 + 0{,}08\,x$ im Intervall $[0;1]$. Notwendig für eine lokale Extremstelle x von d ist $d'(x) = 0$. Es ist $d'(x) = -1{,}2\,x^2 + 0{,}64\,x + 0{,}08$. $d'(x) = 0 \Leftrightarrow -1{,}2\,x^2 + 0{,}64\,x + 0{,}08 = 0$ Damit ergibt sich $x \approx -0{,}105 \vee x \approx 0{,}638$. Da zusätzlich $d(0) = 0$, $d(0{,}638) \approx 0{,}077$ und $d(1) = 0$ gilt, liegt ungefähr an der Stelle $0{,}638$ ein globales Maximum vor. Demnach beträgt die größte Höhe der Hängebrücke über dem Boden ungefähr $77\,\mathrm{m}$.		2 3	
Wegen $L = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + (g'(x))^2}\,dx = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + (0{,}4\,x - 0{,}1)^2}\,dx \approx 1{,}012$ ist die Hängebrücke ungefähr $1012\,\mathrm{m}$ lang.		2	
Der Term $\sqrt{b^2 + (g(b) - g(0))^2}$ gibt nach dem Satz des Pythagoras die Länge der direkten Verbindungsstrecke zwischen den Punkten $(0 \mid g(0))$ und $(b \mid g(b))$ an, während der Term $\int\limits_0^b \sqrt{1 + (0{,}4\,x - 0{,}1)^2}\,dx$ die Länge der Hängebrücke von $(0 \mid g(0))$ bis zum Punkt $(b \mid g(b))$ angibt. Da die Brücke nicht geradlinig verläuft, ist ihre Länge größer als die Länge der direkten Verbindungsstrecke.			3
Teilaufgabe d) Mit $h'(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^x + (-1) \cdot e^{-x}) = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x})$ folgt $(h(x))^2 - (h'(x))^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x})\right)^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x})\right)^2$ $= \frac{1}{4} \cdot (e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4} \cdot (e^x - e^{-x})^2 = \frac{1}{4} \cdot (4 \cdot e^x \cdot e^{-x}) = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot e^0 = 1$			4
$\int\limits_a^b \sqrt{1 + (h'(x))^2}\,dx = \int\limits_a^b \sqrt{(h(x))^2}\,dx = \int\limits_a^b \lvert h(x) \rvert\,dx$ $= \int\limits_a^b h(x)\,dx = \int\limits_a^b h''(x)\,dx = [h'(x)]_a^b = h'(b) - h'(a)$			3
Punktsummen	12	18	10