AT 07
Funktionaler Zusammenhang, Darstellungen wechseln

Dr. Maike Tesch (Sonja Tscheu)

November 2025

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Aus dem Ausbildungscurriculum

Funktionaler Zusammenhang – Darstellungen verwenden

Ziel: Die LiV können die Einführung von neuen Funktionsklassen unter Berücksichtigung der Darstellungsformen Text, Term, Tabelle und Graph planen.

Verschiedene handlungsorientierte Zugänge zur Einführung von Funktionen werden vorgestellt und mindestens einer von den LiV ausprobiert. Anhand verschiedener Beispiele wird der Wechsel der Darstellungsformen (Text, Tabelle, Graph, Term) thematisiert und auf die Grundvorstellungen des funktionalen Zusammenhangs (Zuordnung, Kovariation, Funktion als Ganzes) eingegangen. Die Erweiterung einer Funktionsklasse wird exemplarisch besprochen und der Einfluss der einzelnen Parameter in der Funktionsgleichung mithilfe von GeoGebra von den LiV animiert.
Ein DGS (GeoGebra) wird zur Lösung ausgewählter Probleme herangezogen.

Das Ausbildungscurriculum im Fachportal:
https://fachportal.lernnetz.de/sh/faecher/mathematik/wissenswertes/ausbildung.html

Ablauf

- Aktuelles und Allgemeines
- Didaktische Grundlagen zum Funktionsbegriff
- Unterrichtsbesuch und Besprechung
- Handlungsorientierte Zugänge
- Mittagspause
- Parametervariation

Aktuelles und Allgemeines

Bitte weitergeben:

Einladung

zur Veranstaltung AUS0624
„Gemeinsam ausbilden im Fach Mathematik“
(Lehramt an Gymnasien)
für Ausbildungslehrkräfte
am 18.11.2025
16:00 – 18:00 Uhr
online

„Das Ziel der Veranstaltung ist es, die Arbeit, die Ausbildende an den Schulen und am IQSH leisten, weiter aufeinander abzustimmen und dadurch denen, die ausgebildet und qualifiziert werden, eine noch bessere Unterstützung zu ermöglichen.“

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Kompetenzorienterte Bewertungskriterien Mathematik

- **Fachkompetenz**
  -> Hat die LiV sachlich und fachlich korrekt unterrichtet?
- **Didaktische Kompetenz**
  -> Hat die LiV den Unterricht sinnvoll strukturiert und flexibel auf sich verändernde Situationen reagiert?
  -> Konnte die LiV ihr didaktisches Konzept und dessen Realisierung angemessen reflektieren?
- **Methodische Kompetenz**
  -> Hat die LiV die Selbstständigkeit der Lernenden u.a. durch schüleraktivierende Unterrichtsformen gefördert?
  -> Hat die LiV präzise und verständlich formuliert?
- **Diagnostische Kompetenz**
  -> Hat die LiV die unterrichtlichen Voraussetzungen und Kompetenzen der Lernenden berücksichtigt?
- **Leitungskompetenz**
  -> Ist die LiV überzeugend und als Vorbild aufgetreten?
  -> Ist die LiV mit den Lernenden respektvoll und wertschätzend umgegangen?

Beobachtungsaufträge

Qualität des fachlichen Lernens / kognitive Aktivierung Gelingensmerkmale: • Aufgabenstellungen sind ergiebig und weisen tragfähige Alltagsbezüge oder innermathematische Bedeutung auf. • Übungsphasen gehen über Routinetätigkeiten hinaus. • SuS erhalten die Möglichkeit, eigene Ideen, Thesen und Lösungswege zu entwickeln. • Die SuS erstellen angemessene Lösungen. • In Unterrichtsgesprächen beziehen sich SuS argumentativ aufeinander. • Vorerfahrung und Interessen der SuS werden berücksichtigt.	***Stukturierung des Unterrichts*** Gelingensmerkmale: • Die Lernumgebung ist vorbereitet. • Verschiedene Unterrichtsphasen (Einstieg – Erarbeitung – Sicherung) sind deutlich zu erkennen. • Lern- und Leistungserwartungen sind für SuS transparent (→ Zielorientierung). • Regeln sind offensichtlich etabliert und werden eingehalten. • Das Zeitmanagement gelingt, die Lernzeit wird effektiv genutzt.
Didaktik Anforderungen: • Es gibt einen erkennbaren Bezug zu den Fachanforderungen und zum SiFC wird (auch im Entwurf). • Die Unterrichtsplanung ermöglicht die Weiterentwicklung von allgemeinen und prozessbezogenen Kompetenzen. • Die Aufgabenstellungen sind fachlich korrekt und sinnvoll didaktisch reduziert. • Aspekte der durchgängigen Sprachbildung werden (nach Möglichkeit) berücksichtigt.	***Methodik*** Anforderungen: • Unterrichtsorganisation und Aufgabenstellungen sind so angelegt, dass SuS zur Eigenaktivität und/oder zur Kooperation herausgefordert werden. • In der Stunde finden (sinnvolle) Methodenwechsel statt. • Die Wahl der Sozialform(en) entspricht der didaktischen Zielsetzung. • Maßnahmen zur Individualisierung und Differenzierung werden berücksichtigt (auch im Entwurf).

Beobachtungsaufträge

Auftreten der Lehrkraft / Lehrerverhalten

Erwünschte Aspekte:

- Die Lehrkraft zeigt Freude und Interesse am Fach.
- Die Lehrkraft zeigt Respekt und Geduld bei Verständnisproblemen von SuS.
- Die Lehrkraft unterstützt den Lernprozess individuell-fördernd.
- Die Lehrkraft agiert störungspräventiv bzw. reagiert angemessen auf Störungen.
- Die Lehrkraft hat einen guten Überblick über die Situation in der Lerngruppe und die Aktivitäten der einzelnen SuS.
- Verbale und nonverbale Kommunikation der Lehrkraft erscheinen stimmig.

Schülerverhalten

Erwünschte Aspekte:

- Die SuS arbeiten konzentriert und aufgabenorientiert.
- Das Unterrichtsgespräch erreicht eine breite Beteiligung.
- Unterrichtsbeiträge von SuS sind fachlich und sprachlich reichhaltig.
- Die SuS arbeiten routiniert mit Methoden und Strategien.
- Gegenseitige Wertschätzung prägt das Klima in der Lerngruppe.

Medien und Arbeitsmittel

Anforderungen:

- Der Medieneinsatz erfolgt funktional und wohlüberlegt (siehe auch Entwurf).
- Nach Möglichkeit werden die Medienkompetenzen der SuS gefördert.
- Medien werden organisch in die Stunde integriert.
- Arbeitsbögen sind übersichtlich gestaltet und ergiebig zusammengestellt.

Kommunikation
(Arbeitsaufträge, Fragetechnik, Gesprächsführung)

Gelingensmerkmale:

- Arbeitsaufträge und Anweisungen sind klar formuliert und idR visualisiert.
- Die Lehrkraft agiert als sprachliches Vorbild.
- Im Unterrichtsgespräch werden Gliederungen und Ergebnisse kenntlich gemacht.
- Die Lehrkraft vermeidet „typische Fehler“ wie Fragenkolonnen, Lehrer-Echo, L-S-Ping-Pong, ..
- Fehler oder alternative Lösungsansätze werden als Anlass zum Weiterdenken konstruktiv aufgegriffen (Stärkenorientierung).

Verabredungen zur Stundenbesprechung

- Das erste Wort hat immer die aktive Lehrkraft der Stunde.

- Blitzlicht: Positivrunde
  Jede(r) darf, keine(r) muss – bitte kurz!

- Beobachtungsaufträge:
  Je eine Person trägt vor,
  Team ergänzt (nur) bei Bedarf

1. Das war meine Intention: .....
2. Aus diesem Grund waren bei der Planung der Stunde für mich wesentlich: ....
3. In der Durchführung verlief .... gemäß der Planung, abgewichen bin ich ......
4. In der Rückschau waren .... richtig, dagegen würde ich .... etwa in folgender Art anders durchführen: ....

Feedback sollte immer…

- konstruktiv
- beschreibend (nicht wertend)
- subjektiv formuliert
- nicht nur negativ

sein.

Didaktische Grundlagen zum Funktionsbegriff

Relation

A und B seien zwei Mengen; eine Teilmenge R des °kartesischen Produkts $A \times B$ (→ Mengenlehre) heißt *Relation* zwischen A und B

Abbildung

map, mapping; application

Sind X und Y Mengen und $F \subset X \times Y$ eine °Relation zwischen X und Y, die die beiden folgenden Bedingungen erfüllt

(I) zu jedem $x \in X$ gibt es ein $y \in Y$, so daß $(x, y) \in F$ gilt. (*Linksvollständigkeit* der Relation F)

(II) für alle (x, y), $(x', y') \in F$ gilt: aus $x = x'$ folgt $y = y'$ (*Rechtseindeutigkeit* der Relation F)

so nennt man das Tripel $f := (X, Y, F)$ eine *Abbildung* von X nach Y; man nennt die Relation F den *Graphen* von f, X den *Definitionsbereich* (Quelle) von f und Y den *Wertebereich* (Ziel, Bildbereich) von f. Für jedes $x \in X$ bezeichnet man das eindeutig bestimmte $y \in Y$, so daß $(x, y) \in F$ gilt, meist mit $f(x)$; die Zuordnung, die zu jedem $x \in X$ das Element $f(x)$ eindeutig bestimmt, wird durch die Symbole $x \mapsto f(x)$ beschrieben und die *Zuordnungsvorschrift* (Abbildungsvorschrift) von f genannt. Man beachte: eine Abbildung ist allein durch ihre Abbildungsvorschrift nicht vollständig beschrieben.

Ist der Wertebereich einer Abbildung eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, so spricht man statt von einer Abbildung auch von einer (reellwertigen bzw. komplexwertigen) *Funktion*.

Quelle: Vieweg Mathematik Lexikon – Begriffe/Definitionen/Sätze/Beispiele für das Grundstudium

Was ist eigentlich eine Funktion

► **Funktion (Definition):** Wenn zwei Größen so zusammenhängen, dass jedem Wert der ersten Größe genau ein Wert der zweiten Größe zugeordnet wird, dann nennt man diese Zuordnung *Funktion*.

► **Funktion (Definition):** Seien A und B Mengen. Eine Zuordnung, die jedem Element der Menge A genau ein Element der Menge B zuordnet, nennt man *Funktion*.

► **Funktion (Definition):** Seien A und B Mengen. Eine Teilmenge f des kartesischen Produkts $A \times B$ heißt *Funktion*, wenn für alle $x \in A$ genau ein $y \in B$ existiert mit $(x, y) \in f$.

Quelle: GREEFRATH u.a.: Didaktik der Analysis, Springer Spektrum Berlin Heidelberg, 2016

Expertendiskussion

zum Sinn einer Definition des Funktionsbegriffs in der Schule:

vs.

Eine formale Definition einer Funktion ist im Schulunterricht anzustreben.

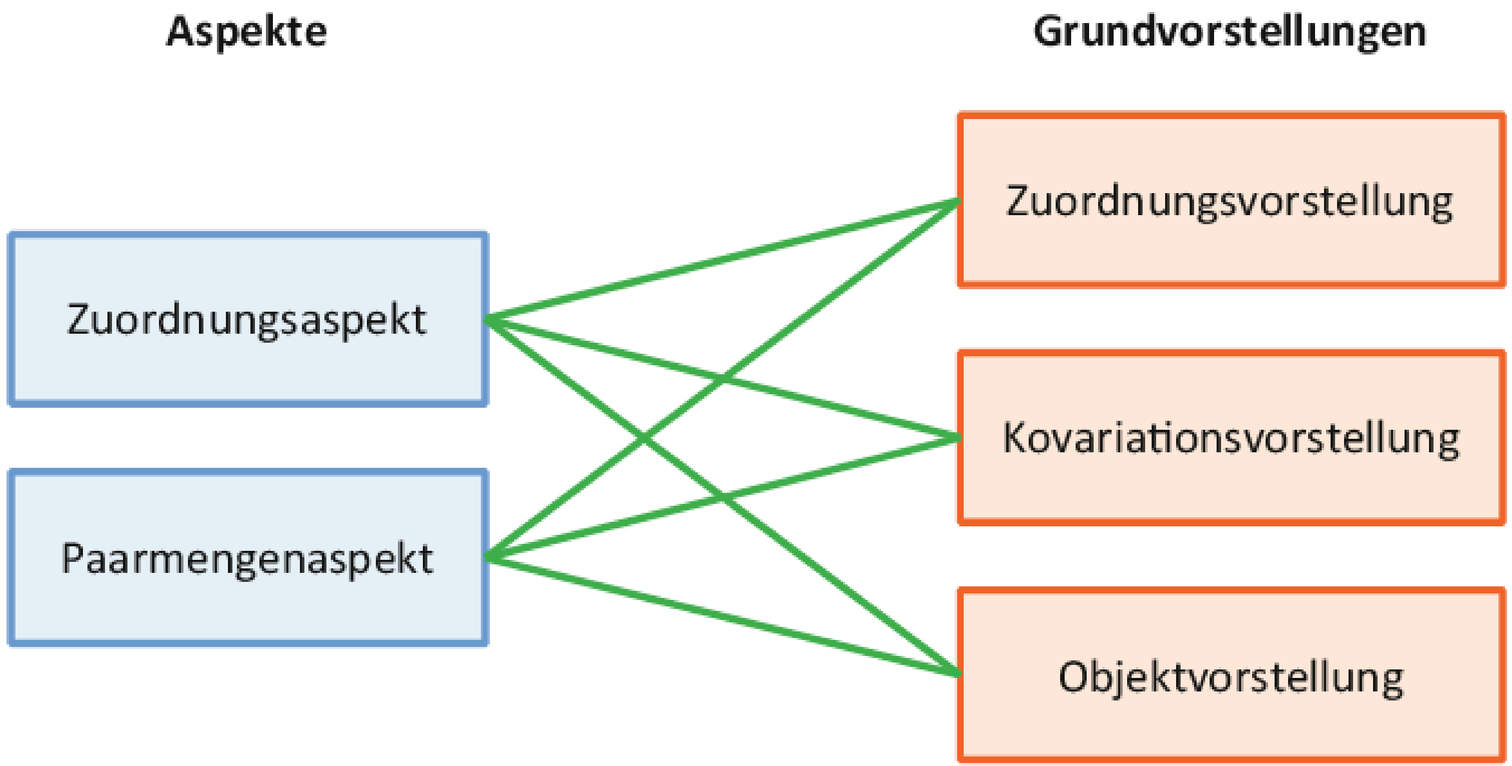
Für den Schulunterricht genügt ein intuitiver, mit Beispielen entwickelter Funktionsbegriff aus.

Literatur: Greefrath: Didaktik der Analysis, S. 42 – 46

Aspekte und Grundvorstellungen zu Funktionen

Teilbereich des Begriffs, mit dem dieser fachlich charakterisiert werden kann

Inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt



Drei Grundvorstellungen zur Funktion

Kovariation

Man betrachtet, wie sich die Veränderung (Kovariation) der unabhängige Größe auf die abhängige auswirkt.

global - dynamisch

Zuordnung

Man betrachtet die Zuordnung einzelner Werte.

lokal - statisch

Objekt

Man betrachtet die Funktion als Ganzes, als eigenständiges Objekt.

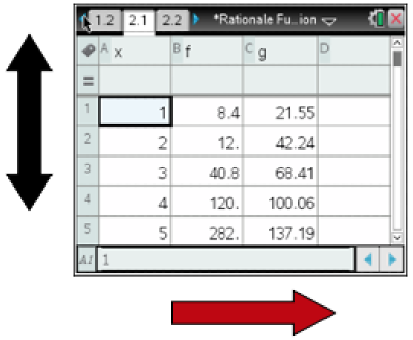
global - statisch

Typische Fragen

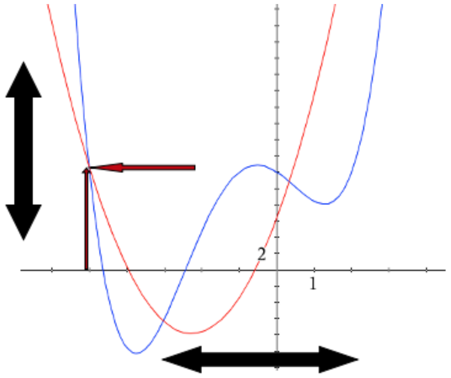
Wie ändert sich f(x), wenn sich x (oder ein Parameter) ändert? Wie muss sich x ändern, damit f(x) fällt?

Welches f(x) zu einem x?
Welches x zu einem f(x)?

Was ist die typische Form?
Was macht die Form aus?



	A x	B f	C g	D
=				
1	1	8.4	21.55	
2	2	12.	42.24	
3	3	40.8	68.41	
4	4	120.	100.06	
5	5	282.	137.19	



IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Eure Aufgaben

Kovariation

Man betrachtet, wie sich die Veränderung (Kovariation) der unabhängige Größe auf die abhängige auswirkt.

global - dynamisch

Zuordnung

Man betrachtet die Zuordnung einzelner Werte.

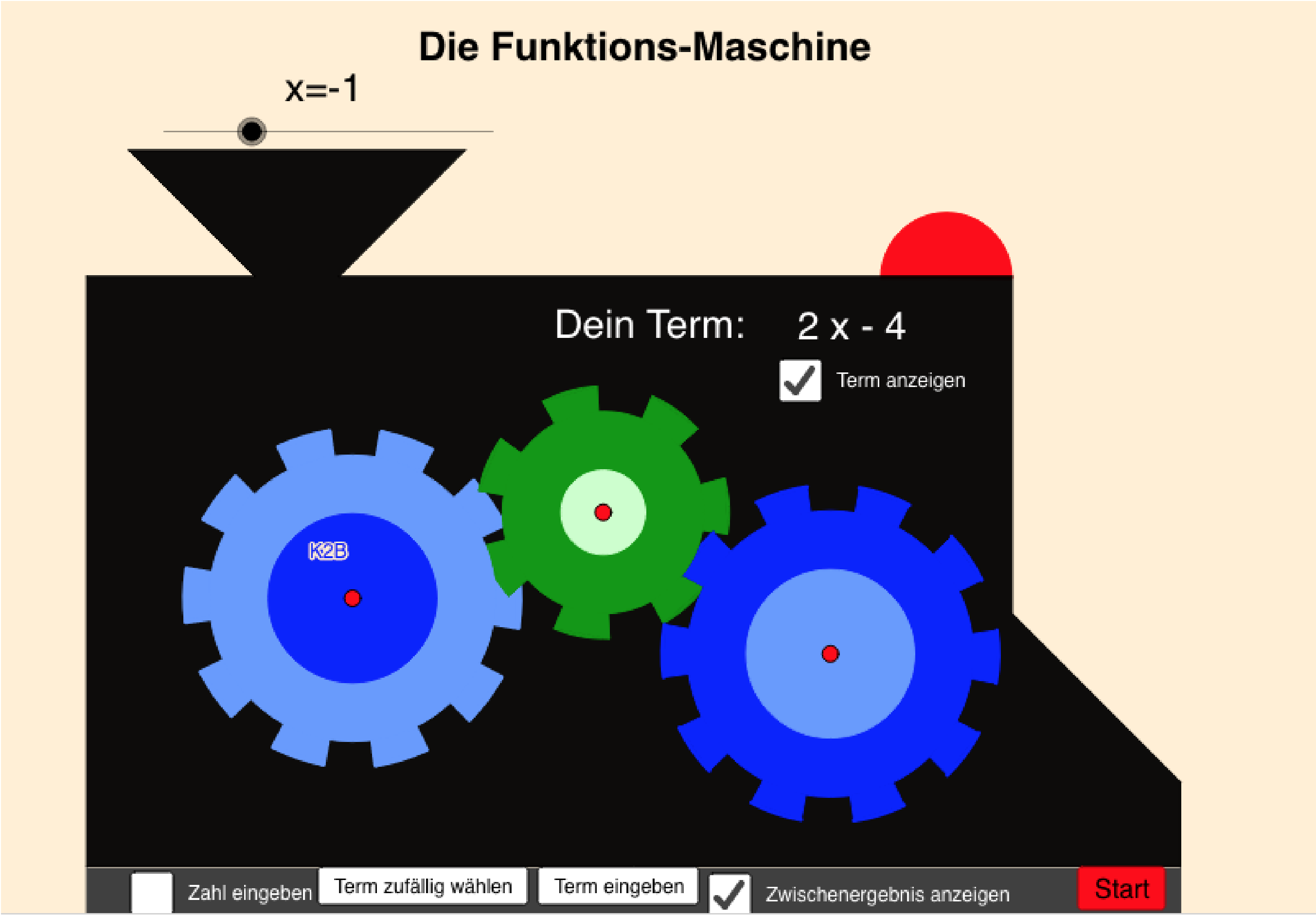
lokal - statisch

Objekt

Man betrachtet die Funktion als Ganzes, als eigenständiges Objekt.

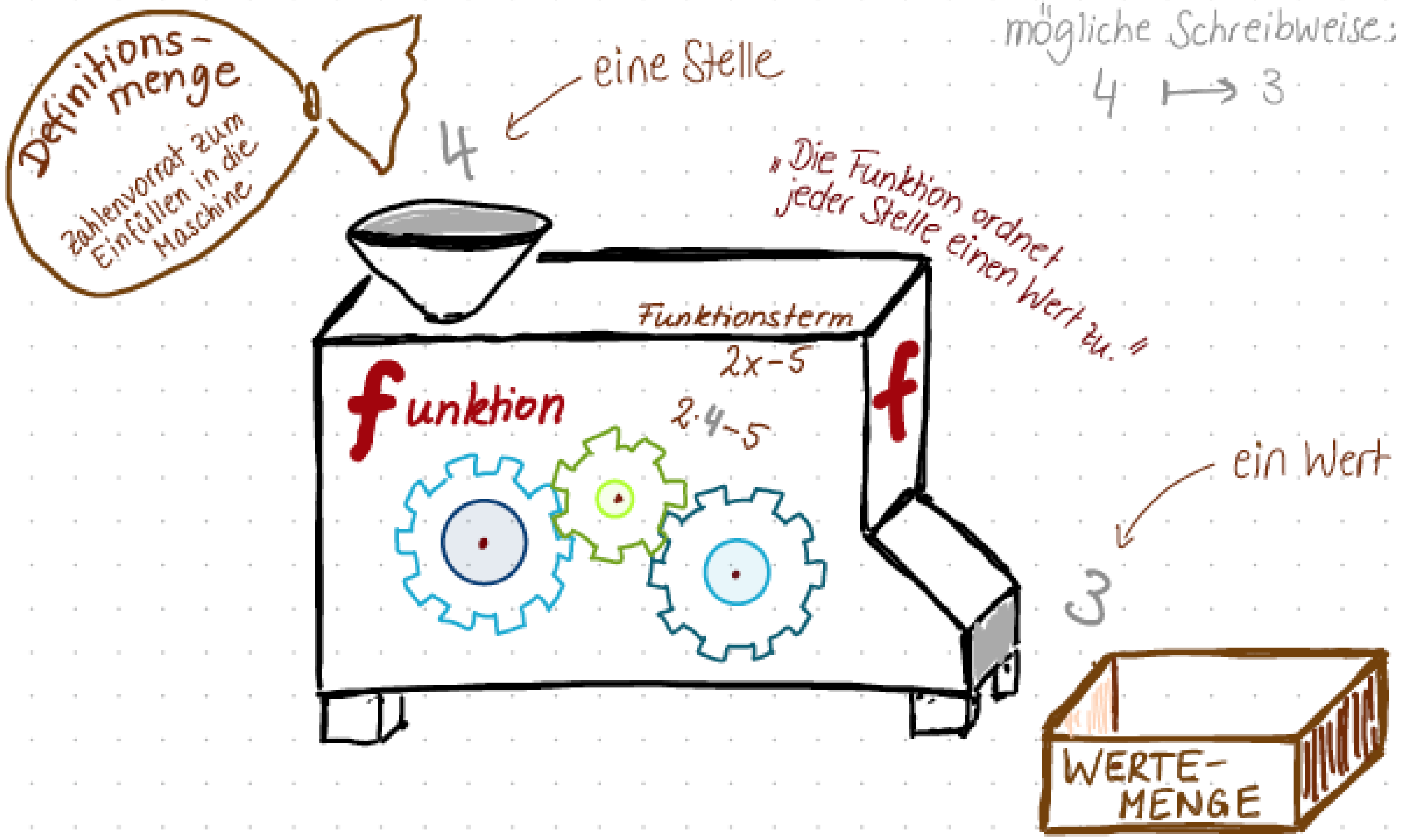
global - statisch

Zuordnungsvorstellung



https://www.geogebra.org/m/K3vAYx2z

Funktions-Maschine



Funktionsgleichung $f(x) = 2x-5$

„f von x"

„Funktionswert an der Stelle x"

$f(4) = 3$

„f von 4 ist gleich 3"

Exkurs: sprachsensibler MU

WEGE - Konzept

Eine mögliche Herangehensweise sprachsensibler Unterrichtsplanung.

Intention: eingeführten Fachwortschatz einer Unterrichtseinheit durch gestaffelte und differenziert eingesetzte Übungen in den aktiven Wortschatz der SuS überführen

„Ein Kind benötigt ca. 8 bis 10 Wiederholungen, um ein neues Wort aus dem Lautstrom zu **filtern**, ca. 20 Wiederholungen, um dem neuen Wort eine **Bedeutung** zuzuordnen, und ca. 50 bis 80 Wiederholungen, um es dann **eigenständig** zu gebrauchen.“

(Weis, I., 2014)

W – ortspeicher

E – inschleifübungen

G – anzheitliche Übungen

E - igenproduktionen

Einschleifübungen sind grundlegende Übungen zur direkten gedächtnismäßigen Verankerung und korrekten Verwendung der aktuell erworbenen einzelnen Fachbegriffe in einem eng begrenzten inhaltlichen und sprachlichen Rahmen (mit eingegrenzten Satzmustern).

Ziel: Erworbene Fachbegriffe sollen sicher gelernt werden.

Eine (Einschleif-)Übung

Wie heißt deine Funktion?

Meine Funktion heißt ***f.***

Was ist **f(2)**?
"f von zwei"

f(2) = **7**
„f von zwei ist gleich sieben."

Was ist f(…)?

f(…) = …

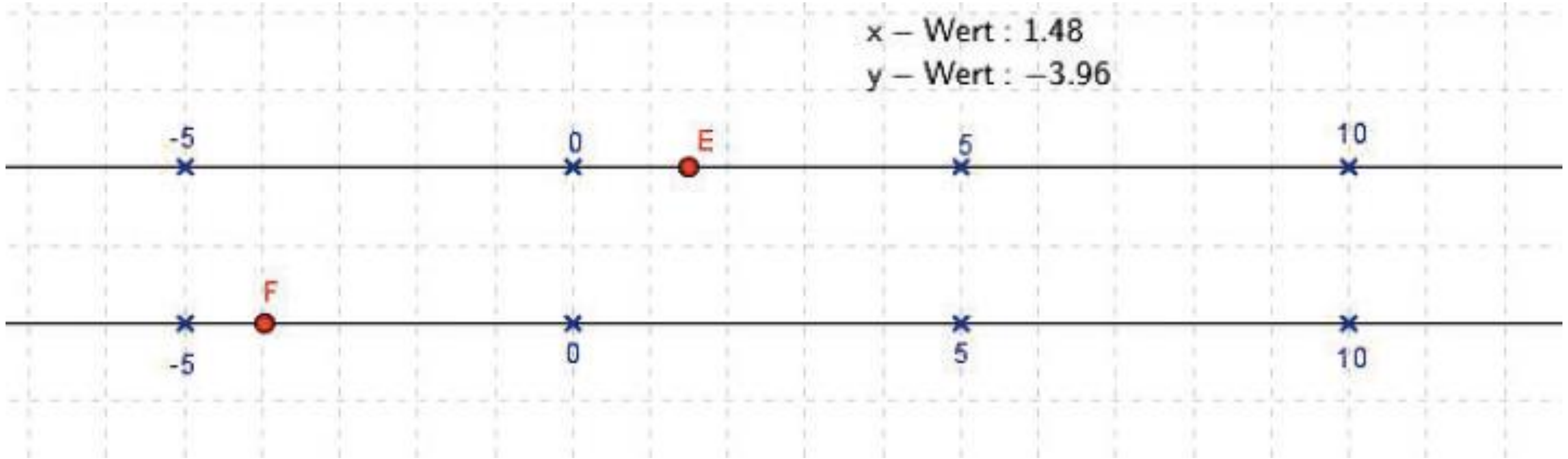
…

Deine Funktionsmaschine multipliziert jede Stelle mit 3 und addiert dann 1.

Stimmt.

Kovariationsvorstellung

1. Beschreibe, wie sich der Punkt F in Abhängigkeit von Punkt E verändert.
2. Sammle Informationen über die Funktion (Nullstellen, Besondere Punkte, Änderungsverhalten).



Quelle:
Tönnies, Koepsel: Funktionen einmal anders – Graphen als Darstellungen dynamischer Prozesse verstehen und analysieren. In: MATHEMATIK 5-10 Nr. 26 (2014)

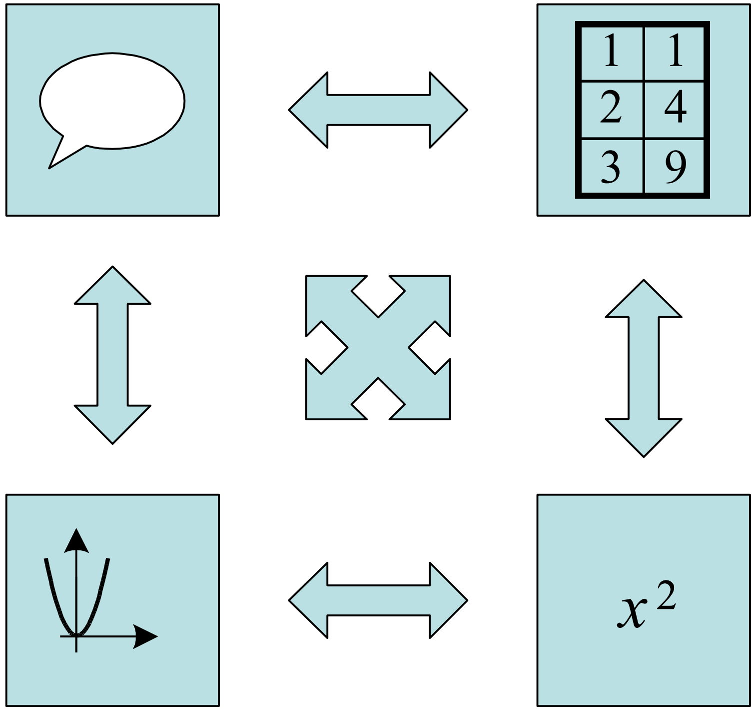
Vier Darstellungsformen einer Funktion

Situation

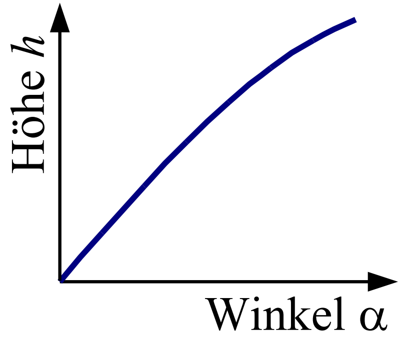
Die über eine Drehleiter der Feuerwehr erreichbare Höhe hängt vom Anstellwinkel ab.

Tabelle

Winkel	Höhe
50	26,8
60	30,3
70	32,9



Graph



Term

$$h(\alpha) = 35 \cdot \sin\alpha$$

Darstellung nach
LEUDERS; PREDIGER (2005): Funktioniert´s? – Denken in Funktionen, in: PM Heft 2, 47. Jahrgang

Grundvorstellungen und Darstellungsformen

Tätigkeiten und vorrangiger Zweck

Grundvorstellung / Darstellung	Kovariation	Zuordnung	Objekt (Funktion als Ganzes)
Sprache / Situation	Dekodieren der Informationen zum Änderungsverhalten, um Änderungsverhalten zu erfassen	Dekodieren von Informationen, um einzelne Werte zu erfassen	Dekodieren der Informationen zu Art und Eigenschaften der Funktion, um Charakteristika zu erfassen
Tabelle	Paarweiser Vergleich hinsichtlich der Art der Änderung, um Änderungsverhalten zu quantifizieren	Einem Eintrag in der ersten Spalte wird ein Wert in der zweiten Spalte zugeordnet, um konkrete Zuordnungen abzulesen oder einzutragen.	Differenzen-, Quotienten-, Produktgleichheit o.ä. aus Wertepaaren bestimmen, um quantifizierbare Regelmäßigkeiten zu erfassen
Graph	Unterteilung in Abschnitte mit unterschiedlichem Änderungsverhalten, um Änderungsverhalten qualitativ zu erfassen	Einer Stelle auf der ersten Achse wird ein Wert auf der zweiten Achse zugeordnet, um markante Punkte zu erfassen.	Mit grafischen Merkmalen die Funktion als Ganzes oder in Teilbereichen typisieren, um den charakteristischen Verlauf zu erfassen
Symbol / Term	Ablesen bzw. Bestimmen der entsprechenden Kenngrößen, um Änderungsverhalten zu quantifizieren	Zu einer Stelle aus dem Definitionsbereich wird der abhängige Wert berechnet, um einzelne Werte zu ermitteln.	Mit Kenngrößen die Funktion als Ganzes typisieren (→ Parameter), um die Charakteristika quantitativ zu erfassen

Die Tabelle entstand auf der Grundlage von
HUẞMANN, S.; LAAKMANN, H. (2011): *Eine Funktion – viele Gesichter – Darstellungen und Darstellungen wechseln*, in: PM Heft 38, 53. Jahrgang

Welche Darstellungswechsel kamen in eurem Unterricht bereits vor?

	Sprache, Situation	Tabelle	Graph	Symbol / Term
Sprache, Situation	Umformulieren	Werte (er)finden	Skizzieren, Zeichnen	Situation algebraisch beschreiben
Tabelle	Lesen, Wertepaare suchen, interpretieren	neue Werte ergänzen	Punkte einzeichnen	Term aufstellen: gezieltes Probieren, Werte bestimmen
Graph	Beschreiben, Interpretieren	Werte ablesen	Wechsel der Skalierung	Term aufstellen: gezieltes Probieren, Werte bestimmen
Symbol / Term	Variablen und Terme interpretieren	Werte berechnen	Skizzieren, evtl. Zeichnen	Umformen

Mathematische Tätigkeiten beim Wechsel der Darstellungsform
- konkretisiert für lineare Funktionen –

nach einer Vorlage von HUßMANN, S.; LAAKMANN, H. (2011)

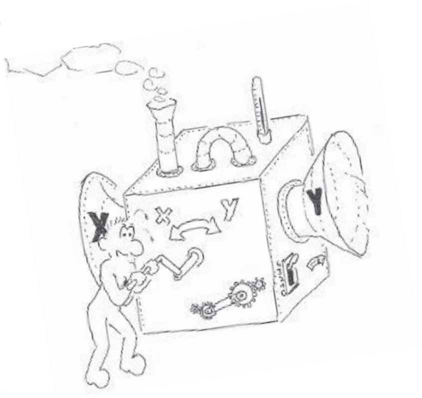
	Sprache, Situation	Tabelle	Graph	Symbol / Term
Sprache, Situation	Umformulieren	Werte (er)finden	• mithilfe zweier konkreter Punkte oder • mithilfe von Steigung und y-Achsenabschnitt den Graphen skizzieren / zeichnen	• Steigung und y-Achsenabschnitt aus einem Text entnehmen • Steigung mithilfe von Textangaben berechnen
Tabelle	• Werte zu den Stellen 0 und 1 interpretieren • Differenzen- und Quotientengleichheit exemplarisch an Wertepaaren erläutern	mithilfe von Differenzen- oder Quotientengleichheit weitere Wertepaare zu einer Tabelle hinzufügen	zwei Punkte einzeichnen und eine Gerade hindurchlegen	• aus zwei Punkten mithilfe eines LGS Steigung und y-Achsenabschnitt ermitteln • mittels Ablesen der Werte an den Stellen 1 und 0 die Funktionsgleichung aufstellen
Graph	• Steigung und y-Achsenabschnitt im Sachkontext deuten • linearen Verlauf des Graphen interpretieren	Werte ablesen	Beim Wechsel der Skalierung Steigungsdreiecke verwenden	y-Achsenabschnitt und Steigung ablesen und Funktionsgleichung aufstellen
Symbol / Term	• Bedeutung der Steigung und des y-Achsenabschnitts im Sachkontext interpretieren • Eigenschaften des Graphen (z.B. fallend / steigend) beschreiben	Werte berechnen	Skizzieren, evtl. Zeichnen	Umformen

Mathematische Tätigkeiten beim Wechsel der Darstellungsform

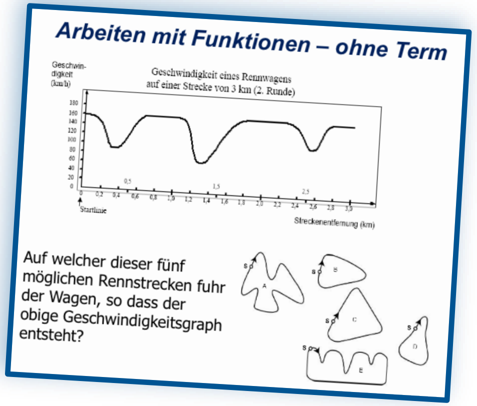
Erstellt eine Konkretisierung für quadratische Funktionen.

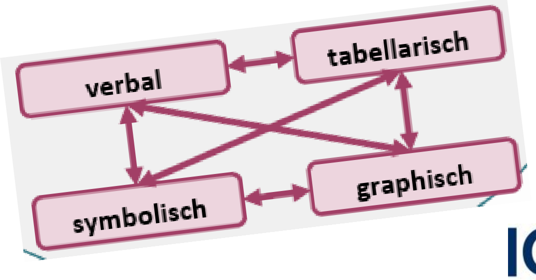
↱	Sprache Situation	Tabelle	Graph	Symbol/ Term
Sprache/ Situation				
Tabelle				
Graph				
Symbol/ Term				

Didaktische Leitideen zum Umgang mit Funktionen in der Schule



- Vielfältige Grundvorstellungen aufbauen und verknüpfen
- Früh anfangen (schon in der Grundschule!)
- Funktionen in der Sek I als Beschreibungsmittel für reale Zusammenhänge erfahrbar machen
- Bei der Entwicklung von Lerngelegenheiten das Verstehen vor den Kalkül setzen. Hierzu kann vor allem das Betrachten reichhaltiger qualitativer Zusammenhänge dienen.
- Durchgehend verschiedene Darstellungsformen von Funktionen nutzen und den Darstellungswechsel produktiv erlebbar machen
- Funktionales Verständnis vernetzen mit Alltagsverständnis, aber auch Abgrenzungen vornehmen





IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Hinweise zu Begriffen und Notationen

Bezeichnungen und Notation konsequent verwenden (SiFC):

Stelle (oder Argument), Wert, Graph, Rechtsachse, Hochachse;

An geeigneter Stelle Zusammenhänge verdeutlichen:

Abbildungen sind Funktionen

Zahlenfolgen sind Funktionen

Operatoren wie „2/3 von“ haben die gleichen Eigenschaften wie Funktionen.
Relation und Funktion nur bei passender Gelegenheit konkret vergleichen

Definitions- und Wertemengen thematisieren, wenn relevant

Sprachlich korrekt?

1. „*f* kann nie kleiner 1 sein.“
2. „Der Funktionswert ist ab der 19. Stelle kleiner als 1.“
3. „Nun fehlen die *x*-Werte.“
4. „Den Graphen einer Funktion bezeichnet man mit *f* oder auch *f*(*x*).“
5. $y = 2x + 3$ oder $f(x) = 2x + 3$?

Begriffe und Notation

$y = 3x + 4$

Das ist eine Aussageform mit zwei Variablen.

Die Lösungsmenge ist die Menge aller Punkte, die den Graphen bilden.

$f(x) = 3x + 4$

Durch diese Form wird die Funktion f definiert.

Mit Hilfe dieser Gleichung kann zu einer vorgegebenen Eingabe die Ausgabe bestimmt werden.

Beide Schreibweisen sollten bereits in der Sek I eingeführt werden!

Funktionsgleichung = Funktionalgleichung

…legt (zusammen mit der Definitions- und Zielmenge) eine konkrete Funktion fest

…ist eine Gleichung, in der eine (oder mehrere) Funktionen als Unbekannte auftreten.
Mit einer Funktionalgleichung können z.B. Eigenschaften einer Klasse von Funktionen beschrieben werden.

Funktionalgleichungen

$f\,(x) = -\,f\,(-x)$	Punktsymmetrie
$f\,(x+1) = f\,(x) + m$	(affin-)lineare Funktion *
$f\,(x+p) = f\,(x)$	periodische Funktion
$f\,(x+1) = f\,(x) \cdot a$	Exponentialfunktion

$$\left.\begin{array}{l} f\,(k \cdot x) = k \cdot f(x) \\[1em] f(a+b) = f(a) + f(b) \end{array}\right\} \text{„Linearität“ *}$$

* Die *lineare Funktion* aus der Schulmathematik ist keine lineare Funktion im Sinne der Fachwissenschaft, weil sie die Bedingung der Linearität nicht erfüllt. Die fachwissenschaftlich korrekte Bezeichnung ist *affin-linear.*

Funktionalgleichungen
- didaktische Umsetzung

a)

		$+1$	$+1$
x	1	2	3
y	4	4,13	
		$+0,13$	$+0,13$

b)

		$\cdot 2$	$\cdot 2$
x	1	2	4
y	0,72	1,44	
		$\cdot 2$	$\cdot 2$

c)

		$+1$	$+1$
x	1	2	3
y	3	4,5	
		$\cdot 1,5$	$\cdot 1,5$

d)

		$\cdot 2$	$\cdot 2$
x	1	2	4
y	12	6	
		$:2$	$:2$

e)

		$\cdot 10$	$\cdot 10$
x	1	10	100
y	0	1	
		$+1$	$+1$

f)

		$\cdot 4$	$\cdot 4$
x	1	4	16
y	1	2	
		$\cdot 2$	$\cdot 2$

Funktionalgleichungen

a) konstante Steigung

	$+1$	$+1$

x	1	2	3
y	4	4,13	4,26

	$+0{,}13$	$+0{,}13$

$f(x) = 0{,}13x + 3{,}87$

lineare Funktion, $f(0) = 3{,}87$

b) Dreisatz

	$\cdot 2$	$\cdot 2$

x	1	2	4
y	0,72	1,44	2,88

	$\cdot 2$	$\cdot 2$

$f(x) = 0{,}72x \quad f(0) = 0$

proportionale Funktion

c) konstanter Wachstumsfaktor

	$+1$	$+1$

x	1	2	3
y	3	4,5	6,75

	$\cdot 1{,}5$	$\cdot 1{,}5$

$f(x) = 2 \cdot 1{,}5^x \quad f(0) = 2$

Exponentialfunktion

d) umgekehrter Dreisatz

	$\cdot 2$	$\cdot 2$

x	1	2	4
y	12	6	3

	$:2$	$:2$

$f(x) = \frac{12}{x} \quad f(0)$ undefiniert

antiproportionale Funktion

e)

	$\cdot 10$	$\cdot 10$

x	1	10	100
y	0	1	2

	$+1$	$+1$

$f(x) = {}_{10}\log x$ Logarithmusfunktion

$f(0)$ undefiniert

f)

	$\cdot 4$	$\cdot 4$

x	1	4	16
y	1	2	4

	$\cdot 2$	$\cdot 2$

$f(x) = \sqrt{x} \quad f(0) = 0$

Wurzelfunktion

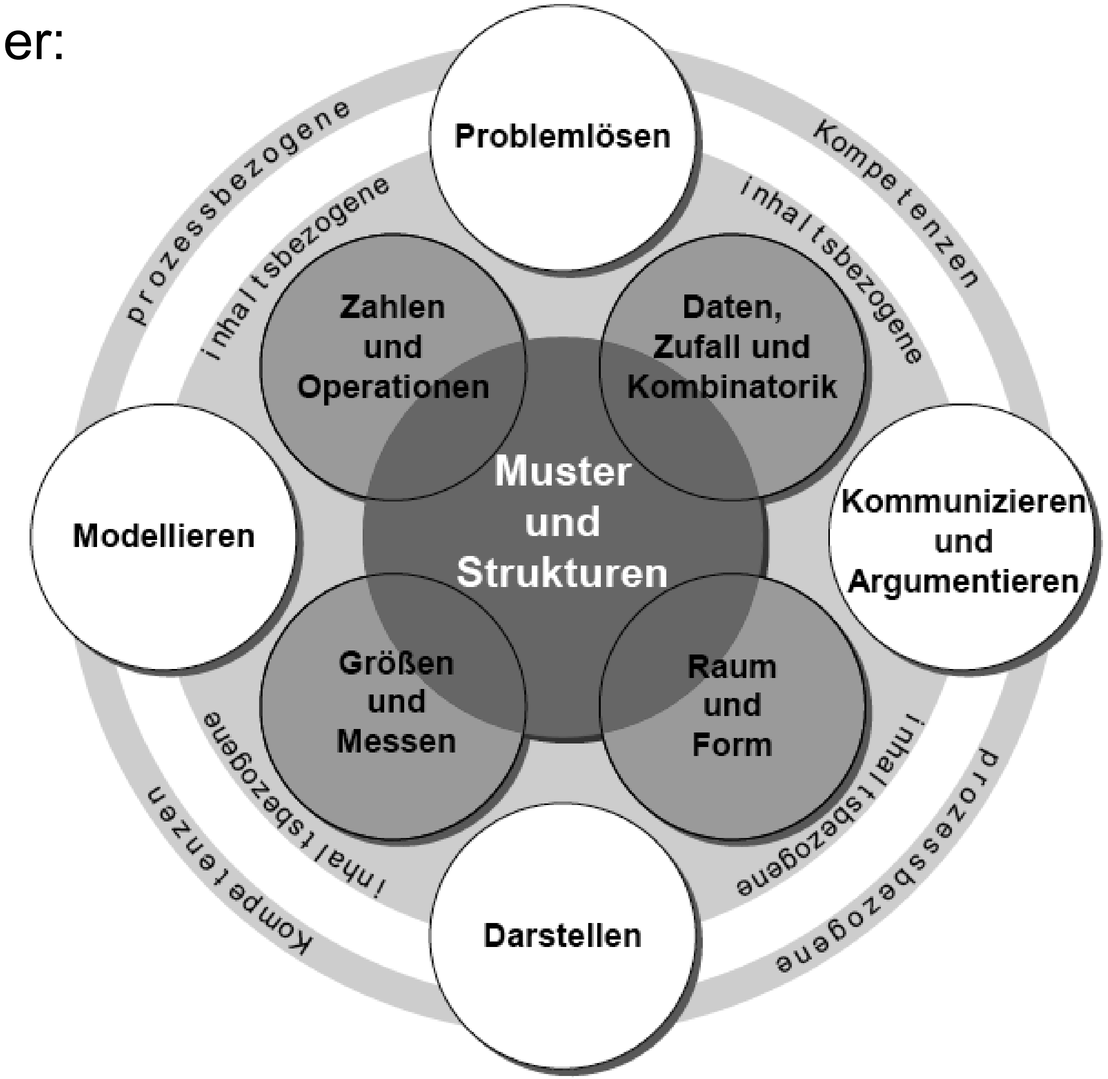
Funktionaler Zusammenhang in den FA

Bisher:
„Leitidee 4: Funktionaler Zusammenhang“

Neu:
„Leitidee Strukturen und funktionaler Zusammenhang“
-> Variablen und Gleichungen nun hier (statt unter Leitidee Zahl)

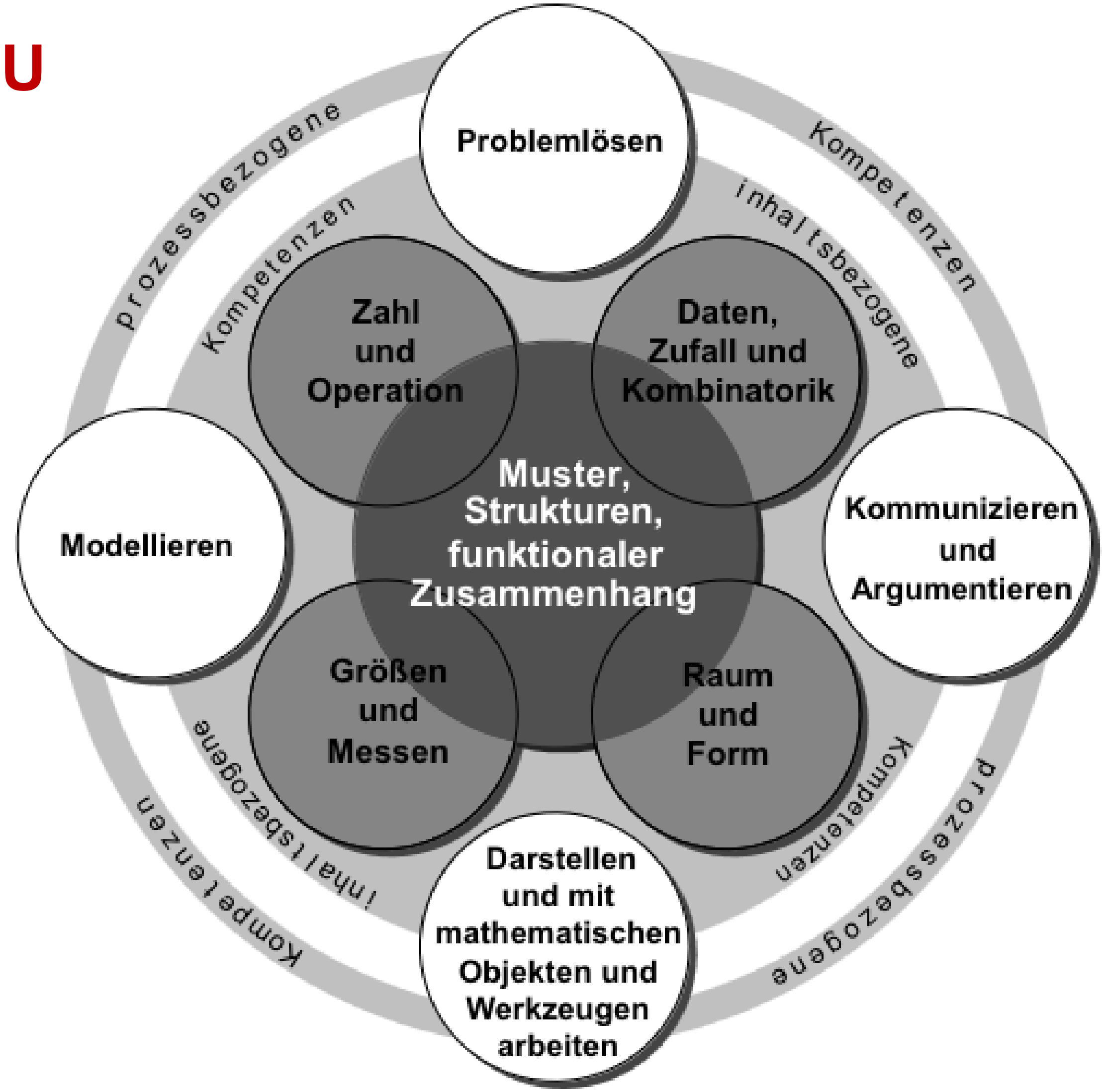
Aus den FA der Grundschule

Bisher:

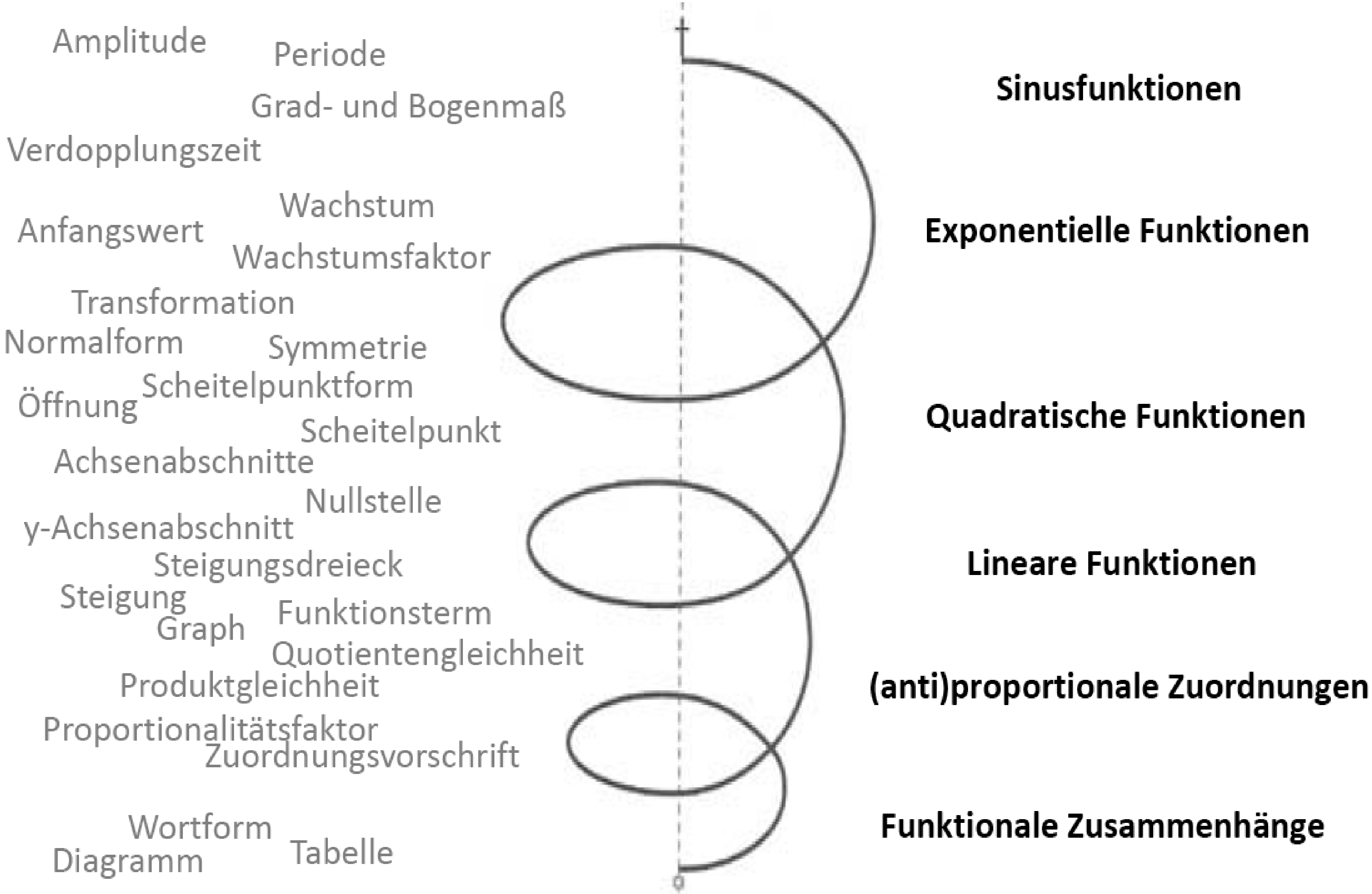


Aus den FA der Grundschule

NEU



Funktionaler Zusammenhang in der Sek I



Quelle: DZLM maco mooc funktionen

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

Handlungsorientierte Zugänge zu Funktionen

Füllstandsgraphen

1. Wählt ein Gefäß und **skizziert eine Prognose** für den Verlauf des Graphen der Funktion *Füllmenge -> Füllhöhe*

2. **Plant euer Vorgehen** zur experimentellen Bestimmung des Zusammenhangs zwischen Füllmenge und Füllhöhe für das von euch gewählte Gefäß.

3. **Bestimmt den Zusammenhang zwischen Füllmenge und Füllhöhe experimentell** und vergleicht ihn mit der Prognose.

4. Sammelt mögliche Erkenntnisse der SuS (insb. im Hinblick auf den GV-Aufbau).

5. Notiert praktische Hinweise und Tipps für die Durchführung des Experiments mit SuS im Unterricht (auf Karten).

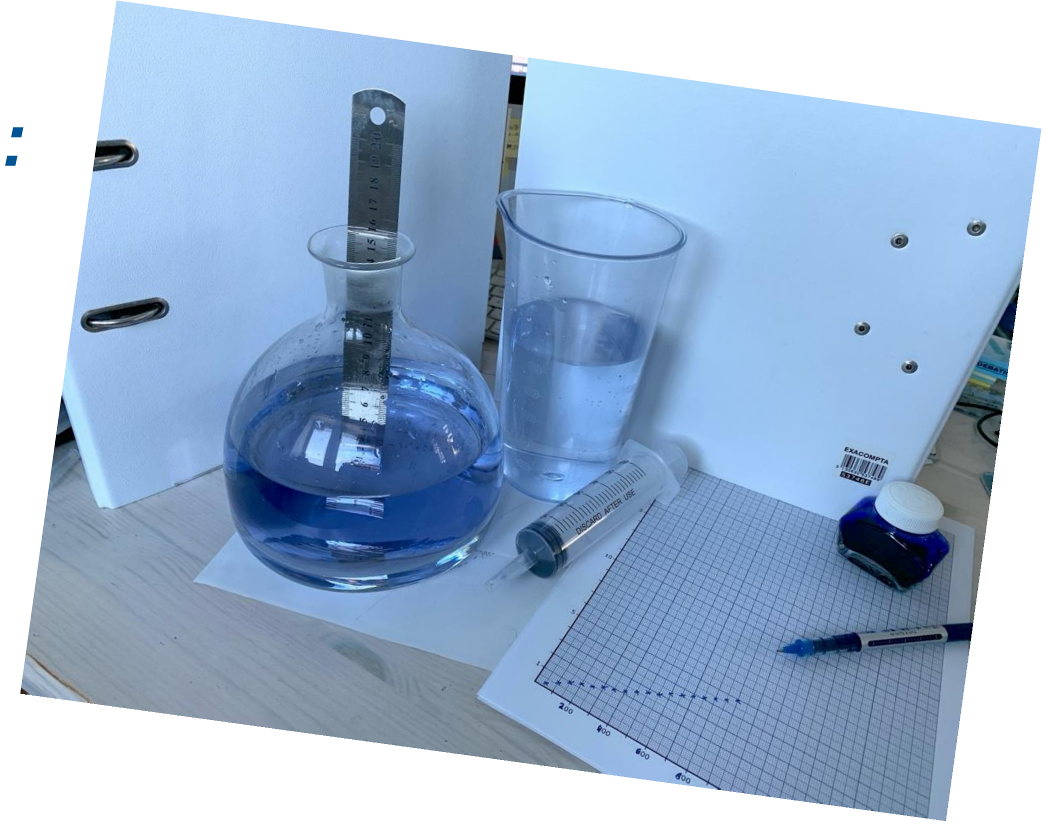
Gefäße befüllen – Graphen erstellen

Darum geht es:

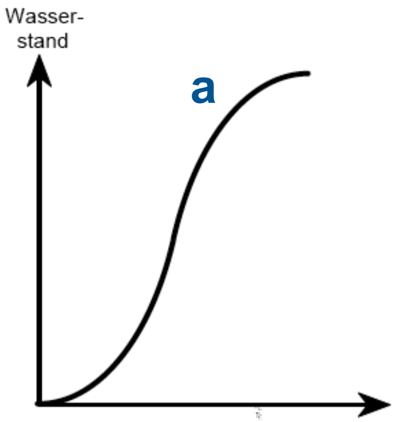
- Beteiligte Größen identifizieren und schätzen
- Richtung der Abhängigkeit identifizieren und erklären
- Veränderung der Größen beschreiben
- Einzelne Wertepaare inhaltlich deuten (als Zuordnung)
- Gemeinsame Veränderung anhand von Wertepaaren inhaltlich deuten (als Kovariation)
- Graphische, tabellarische und situative Darstellung vernetzen

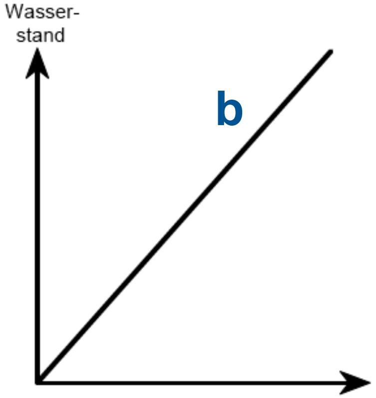
Das sind wesentliche Grundlagen zum Verstehen von funktionalem Zusammenhang!

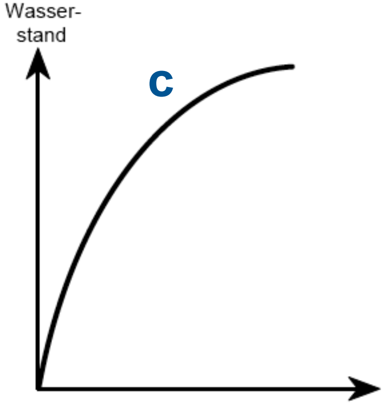
Tipps und Hinweise:

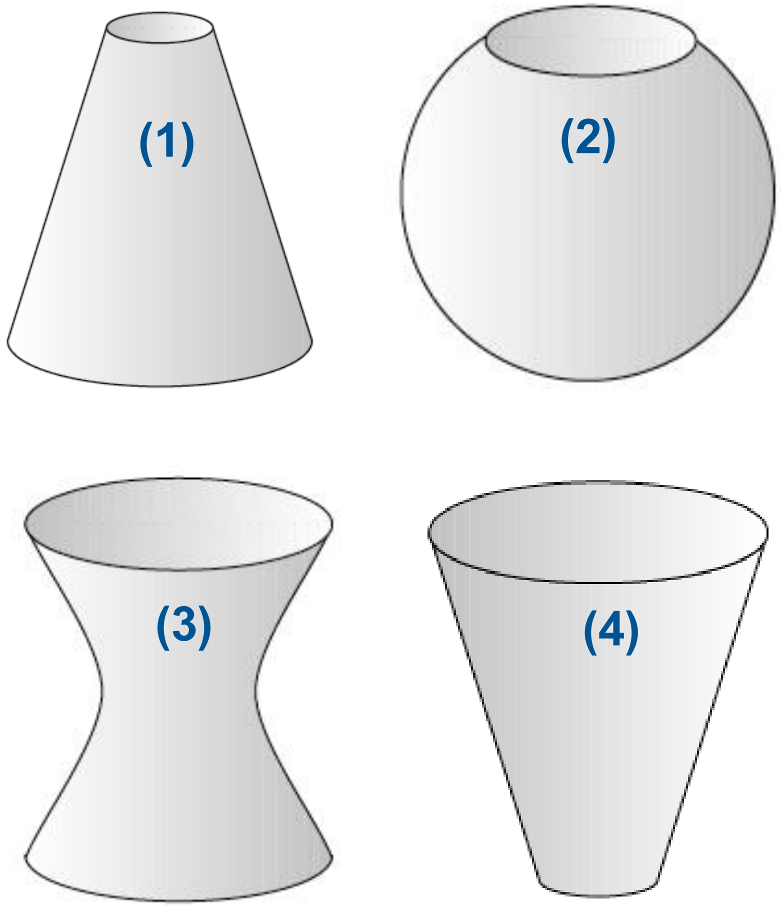


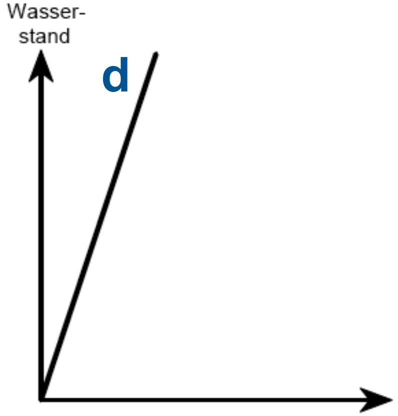
Füllgraphen - Memory

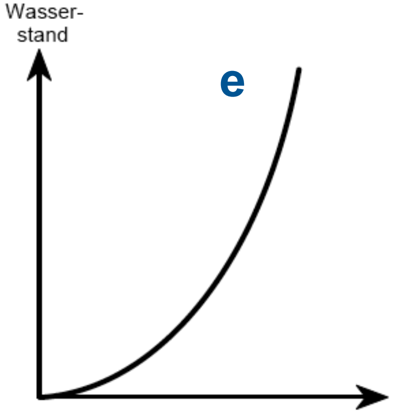


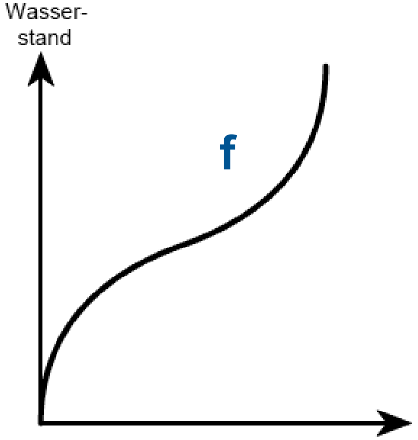






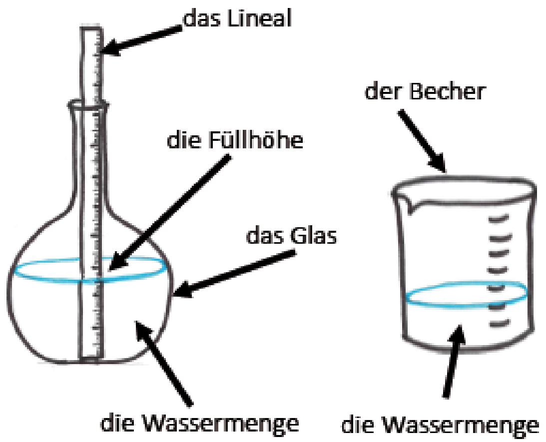






IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Füllgraphen im sprachsensiblen MU



die Tabelle:

die Wassermenge (in ml)	die Füllhöhe (in cm)

Du tust das:

Du füllst 30 ml Wasser ein.
(Wassermenge **insgesamt**: 30 ml)
Wie hoch ist die Füllhöhe?

Du füllst 30 ml Wasser **dazu**.
(Wassermenge **insgesamt**: 60 ml).
Wie hoch ist die Füllhöhe?

Du füllst 30 ml Wasser **dazu**.
(Wassermenge **insgesamt**: ...

Du liest die Tabelle so:

Bei 30 ml Wassermenge:

Die Füllhöhe ist ______ cm.

Bei 60 ml Wassermenge:

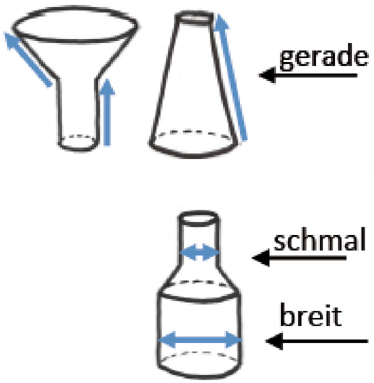
Die Füllhöhe ist ______ cm.

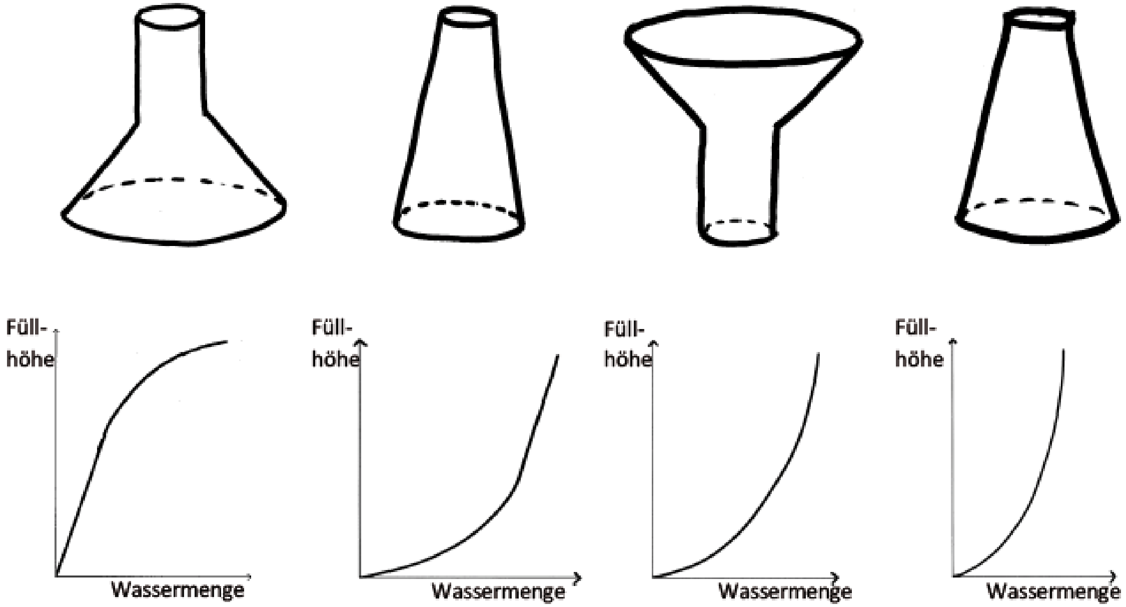
Bei 90 ml Wassermenge:

...

Quelle: DZLM: SiMa Funktionale Zusammenhänge

Füllgraphen im sprachsensiblen MU





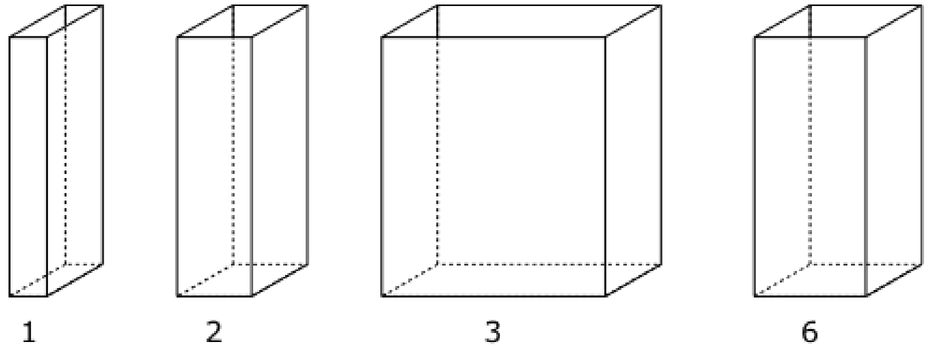
Das Glas Die Füllhöhe Der Graph	ist wächst	unten/oben in der Mitte am Anfang/am Ende	breit/schmal. schnell/langsam. gleichmäßig. immer um Dasselbe. steiler als/flacher als…

Quelle: DZLM: SiMa Funktionale Zusammenhänge

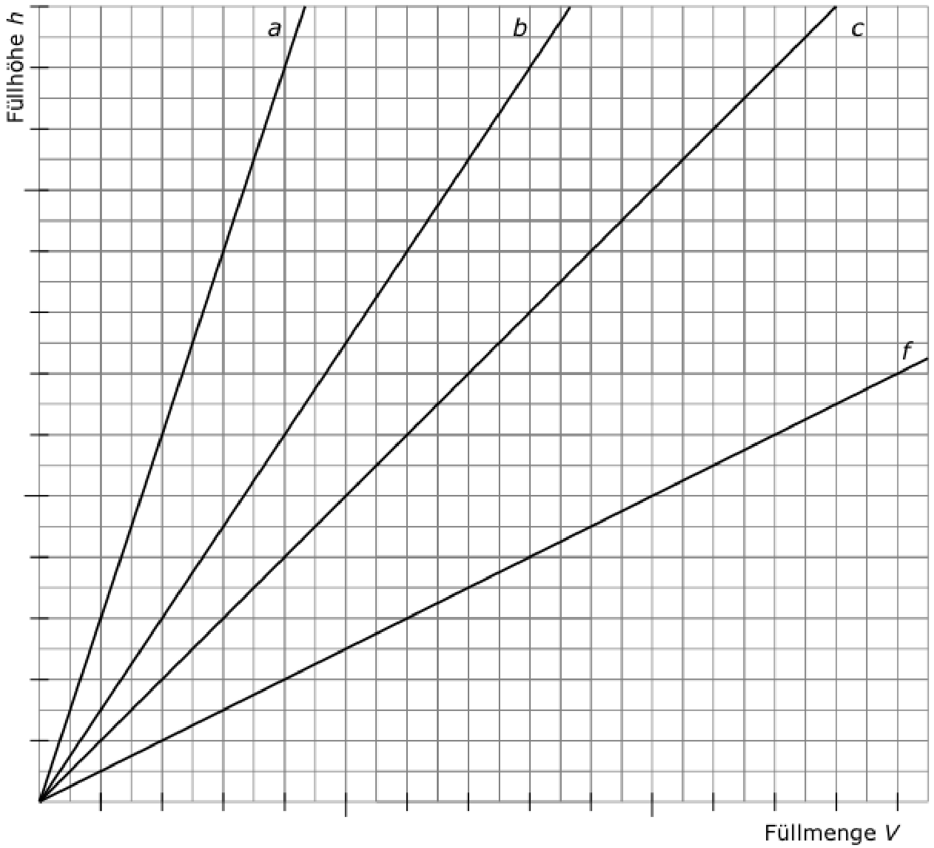
Fachliches Teilziel	Sprachhandlung	Sprachmittel
Inhaltliches Denken: Funktionale Zusammenhänge mathematisieren und interpretieren	**Erklären von Bedeutungen** Die Funktionsgleichung gibt an, wie die Füllhöhe von der Füllmenge abhängt. Wenn die Füllmenge größer ist, dann ist auch die Füllhöhe größer. x steht hier für Füllmenge in ml, f(x) steht für die Füllhöhe in cm, die von der Füllmenge abhängt. Am Graphen kann ich ablesen, dass die Füllhöhe … cm ist, wenn ich … ml Wasser eingefüllt habe.	**Bedeutungsbezogene Sprachmittel** … hängt ab von … Es geht um den Zusammenhang von … und … Der Graph / die Tabelle zeigt, wie … von … abhängt.
Formaler Kalkül: Funktionswerte berechnen	**Erläutern eines Rechenwegs** Um f(x) auszurechnen, muss ich x mit … multiplizieren. Am Graphen kann man ablesen, dass bei x = 2, f(x) = … ist.	**Formalbezogene Sprachmittel** Wenn für x … eingesetzt wird, dann ist f(x) … . Im Graphen/ in der Tabelle ist an der Stelle x=… der Funktionswert f(x) =…

(Details in Prediger, 2020)

Vom Befüllen zur Funktionsgleichung

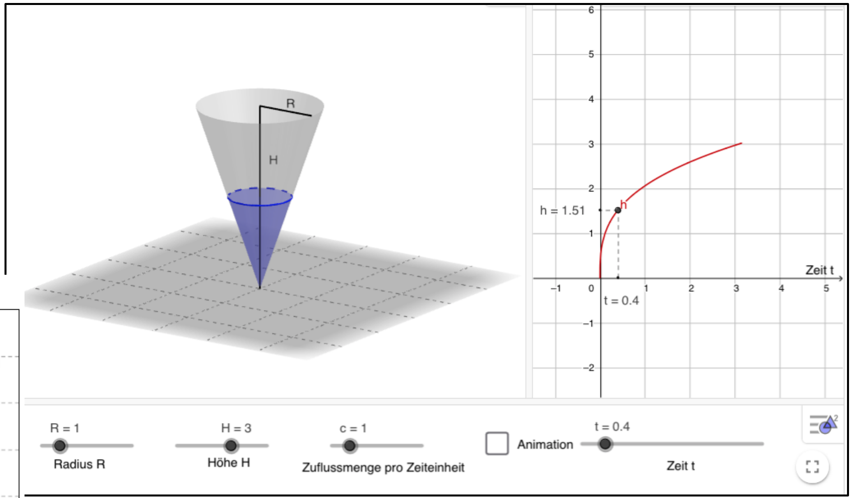


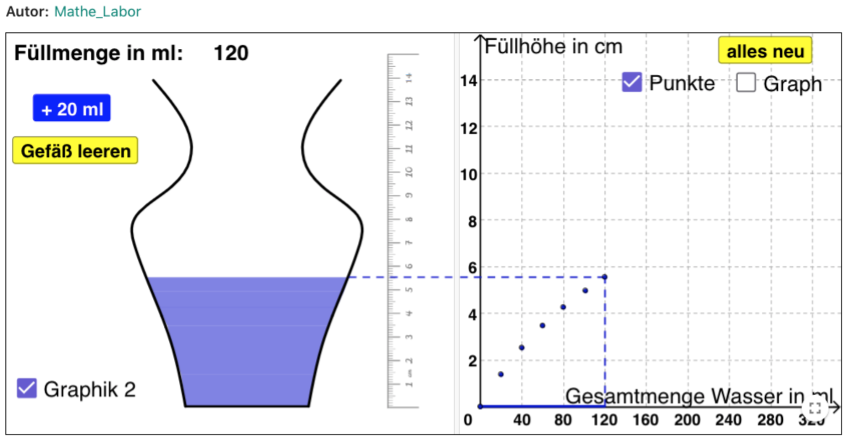
Die Gefäße werden mit Wasser gefüllt. Für jedes Gefäß werden jeweils die eingefüllte Wassermenge und die Füllhöhe gemessen.



Apps zu Füllgraphen bei Geogebra

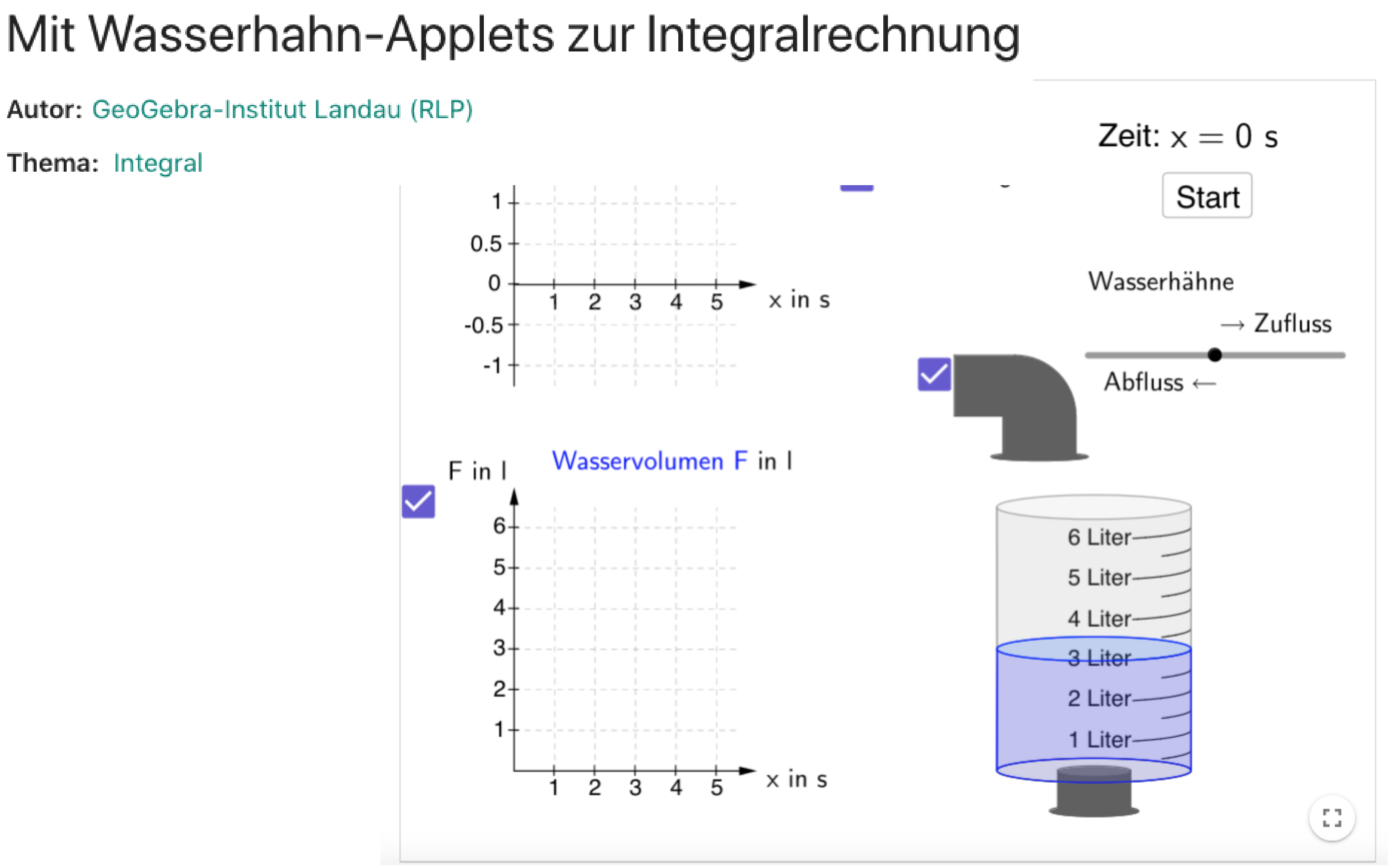
- Füllkurven zu verschiedenen Körpern von Andreas Lindner: https://www.geogebra.org/m/fedyMJKK





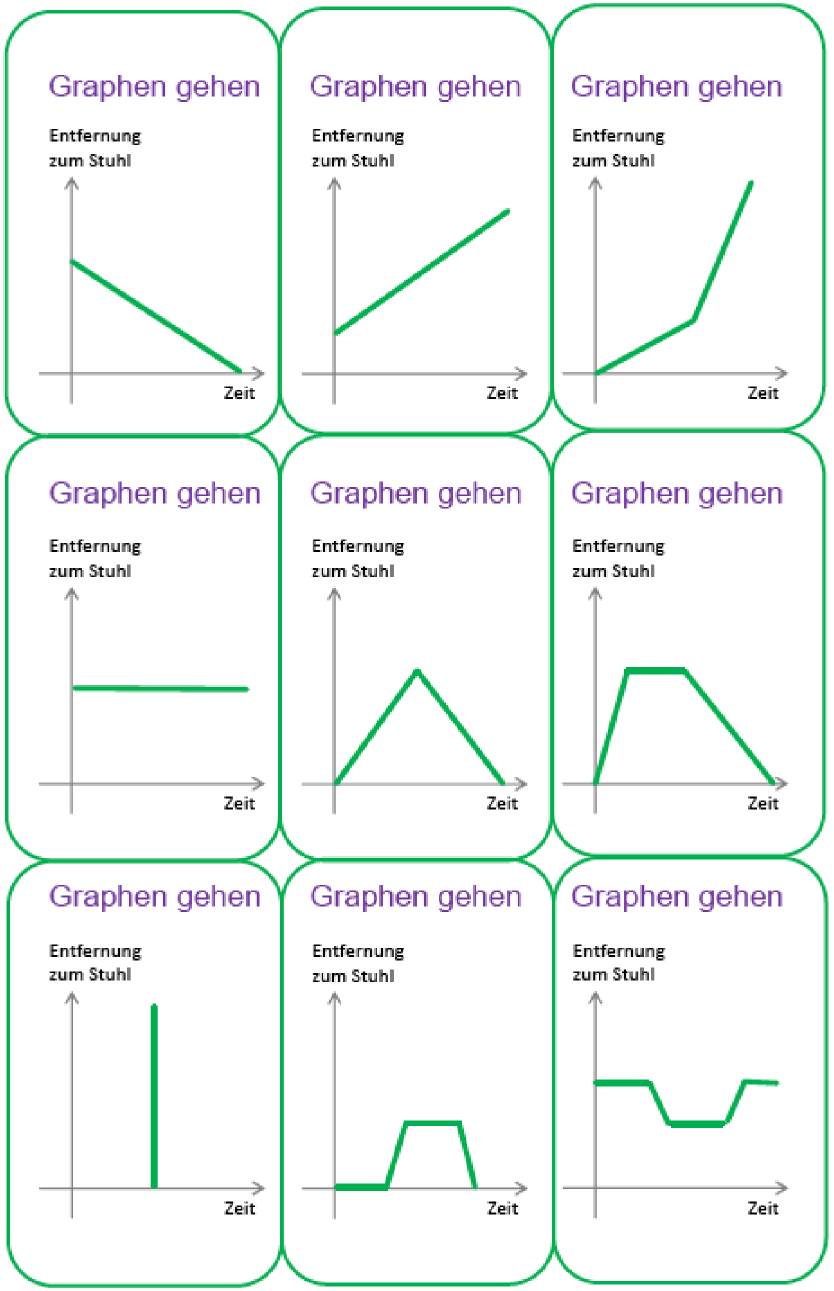
- Funktionale Zusammenhänge vom „Mathe_Labor“ (Simulationen 3 und 4): https://www.geogebra.org/m/VqVxutUB

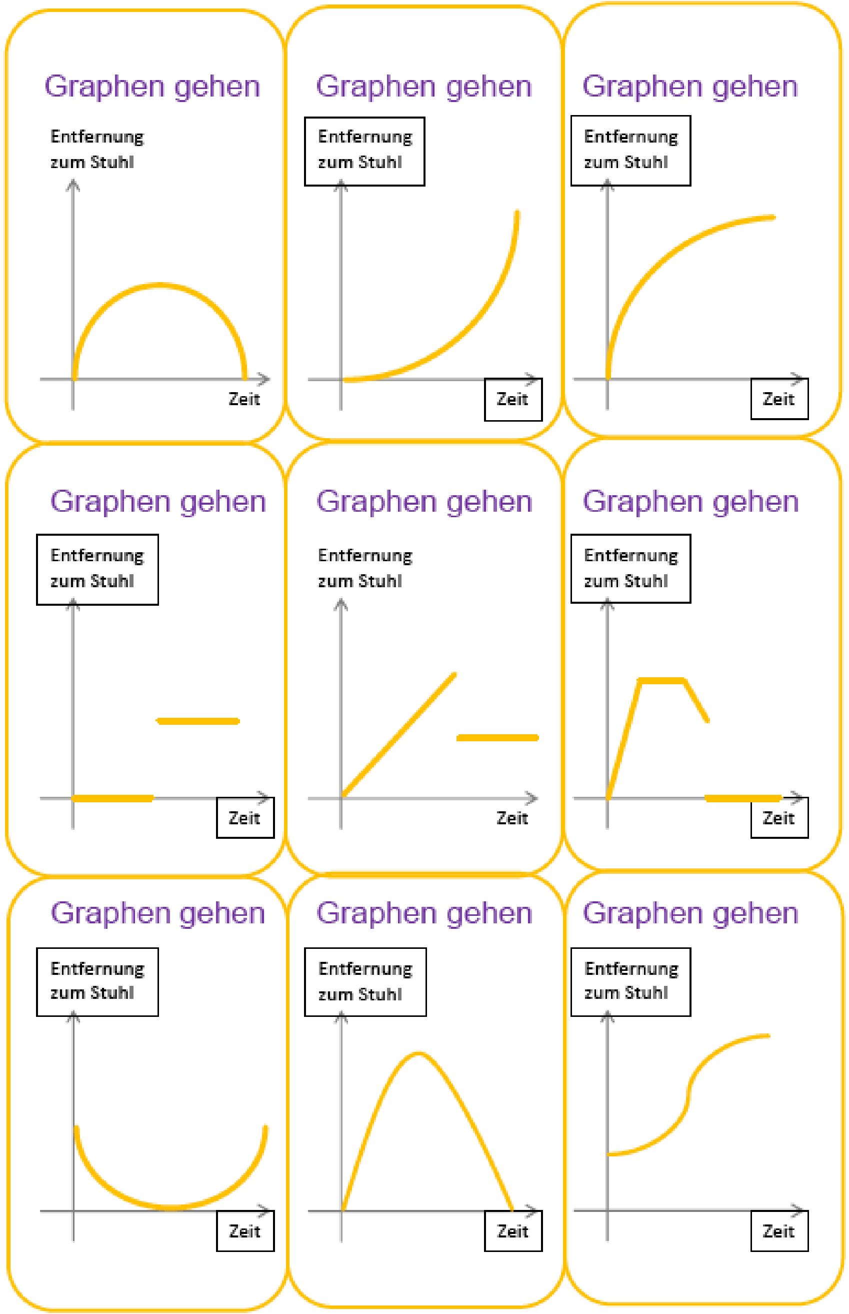
Durchgängigkeit bis zum Integral



https://www.geogebra.org/m/M5tkJrUV

Weitere Ideen für handlungsorientierten Umgang mit funktionalen Zusammenhängen


Graphen gehen
Entfernung zum Stuhl
Zeit
Graphen gehen
Entfernung zum Stuhl
Zeit
Graphen gehen
Entfernung zum Stuhl
Zeit
Graphen gehen
Entfernung zum Stuhl
Zeit
Graphen gehen
Entfernung zum Stuhl
Zeit
Graphen gehen
Entfernung zum Stuhl
Zeit
Graphen gehen
Entfernung zum Stuhl
Zeit
Graphen gehen
Entfernung zum Stuhl
Zeit
Graphen gehen
Entfernung zum Stuhl
Zeit


Graphen gehen
Entfernung zum Stuhl
Zeit
Graphen gehen
Entfernung zum Stuhl
Zeit
Graphen gehen
Entfernung zum Stuhl
Zeit
Graphen gehen
Entfernung zum Stuhl
Zeit
Graphen gehen
Entfernung zum Stuhl
Zeit
Graphen gehen
Entfernung zum Stuhl
Zeit
Graphen gehen
Entfernung zum Stuhl
Zeit
Graphen gehen
Entfernung zum Stuhl
Zeit
Graphen gehen
Entfernung zum Stuhl
Zeit

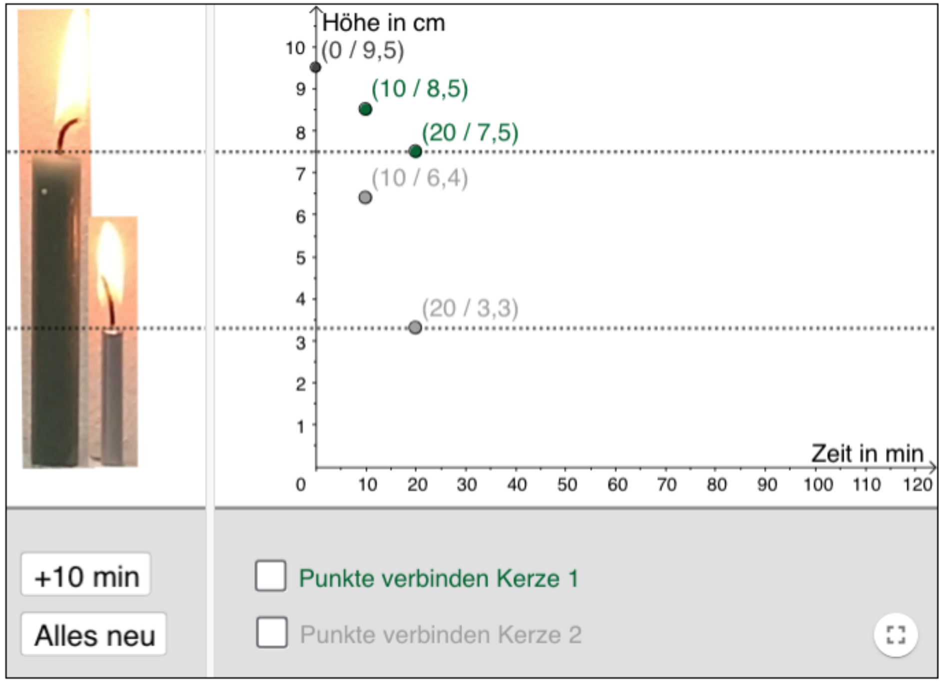
Vielfalt der Sprachmittel

	aktiv	passiv
Abhängigkeit	Die Funktion gibt die Entfernung vom Stuhl in Abhängigkeit von der Zeit an. Die Funktion gibt die von der Zeit abhängige Entfernung vom Stuhl an.	Die Entfernung vom Stuhl wird in Abhängigkeit von der Zeit angegeben. Es wird die Entfernung vom Stuhl angegeben, die von der Zeit abhängt.
Zuordnen	Die Funktion ordnet der Zeit die Entfernung vom Stuhl zu. Die Funktion ordnet der Zeit die Entfernung vom Stuhl zu.	Der Zeit wird die Entfernung vom Stuhl zugeordnet. Die Entfernung vom Stuhl wird der Zeit zugeordnet.
Implizit durch Präpositionen	Die Funktion gibt zu jeder Zeit die Entfernung vom Stuhl an. Die Funktion gibt für jede Zeit die Entfernung vom Stuhl an.	Es wird zu jeder Zeit die Entfernung vom Stuhl angegeben. Es wird für jede Zeit die Entfernung vom Stuhl angegeben.

Vielfalt der Sprachmittel

	aktiv	passiv
Abhängigkeit	Die Funktion gibt die Entfernung vom Stuhl in Abhängigkeit von der Zeit an. Die Funktion gibt die von der Zeit abhängige Entfernung vom Stuhl an	Die Entfernung vom Stuhl wird in Abhängigkeit von der Zeit angegeben. Es wird die Entfernung vom Stuhl angegeben, die von der Zeit abhängt.
Zuordnen	Die Funktion ordnet der Zeit die Entfernung vom Stuhl zu. Die Funktion ordnet der Zeit die Entfernung vom Stuhl zu.	Der Zeit wird die Entfernung vom Stuhl zugeordnet. Die Entfernung vom Stuhl wird der Zeit zugeordnet.
Implizit durch Präpositionen	Die Funktion gibt zu jeder Zeit die Entfernung vom Stuhl an. Die Funktion gibt für jede Zeit die Entfernung vom Stuhl an.	Es wird zu jeder Zeit die Entfernung vom Stuhl angegeben. Es wird für jede Zeit die Entfernung vom Stuhl angegeben.

Kerzen abbrennen (lineare Funktionen)



https://t1p.de/k14t

Füllstandsgraphen

1. Wählt ein Gefäß und **skizziert eine Prognose** für den Verlauf des Graphen der Funktion *Füllmenge -> Füllhöhe*

2. **Plant euer Vorgehen** zur experimentellen Bestimmung des Zusammenhangs zwischen Füllmenge und Füllhöhe für das von euch gewählte Gefäß.

3. **Bestimmt den Zusammenhang zwischen Füllmenge und Füllhöhe experimentell** und vergleicht ihn mit der Prognose.

4. Sammelt mögliche Erkenntnisse der SuS (insb. im Hinblick auf den GV-Aufbau).

5. Notiert praktische Hinweise und Tipps für die Durchführung des Experiments mit SuS im Unterricht.

6. Sammelt mögliche Gesprächsanlässe und Impulse.

Kerzen abbrennen

1. Skizziert für die beiden Kerzen unterschiedlicher Dicke **eine Prognose** für den Verlauf des Graphen der Funktion *Brenndauer* -> Höhe der Kerze

2. **Plant euer Vorgehen** zur experimentellen Bestimmung des Zusammenhangs zwischen der Brenndauer und der Kerzenhöhe.

3. **Bestimmt den Zusammenhang zwischen Brenndauer und Kerzenhöhe experimentell** und vergleicht ihn mit der Prognose.

4. Sammelt mögliche Erkenntnisse von SuS (insb. im Hinblick auf den GV-Aufbau).

5. Notiert praktische Hinweise und Tipps für die Durchführung des Experiments mit SuS im Unterricht (auf Karten).

6. Sammelt mögliche Gesprächsanlässe und Impulse.

Gruppenexploration zum Kreisumfang

1. Messt an verschiedenen runden Gegenständen jeweils einen Kreisdurchmesser und den zugehörigen Kreisumfang.
   Tragt die Messwerte in die Tabelle und das Diagramm ein.

1. Sammelt mögliche Erkenntnisse von SuS sowie geeignete Impulse für ein auswertendes Unterrichtsgespräch.
2. Notiert praktische Hinweise und Tipps für die Durchführung des Experiments mit SuS im Unterricht.

Modellieren mit Geogebra

1. Fügt das Bild „Levensau“ in ein Geogebra-Koordinatensystem ein.
   Findet eine Funktion, deren Graph die Brücke möglichst gut darstellt.

1. Entwerft eine Aufgabe für SuS und sammelt mögliche Erkenntnisse, die SuS beim Bearbeiten eurer Aufgabe haben können (insb. im Hinblick auf den GV-Aufbau).
2. Notiert praktische Hinweise und Tipps für den Einsatz von Geogebra mit SuS im Unterricht.

Parametervariation

Parameter in Funktionstermen

In den unterrichtsrelevanten Funktionsklassen der linearen, quadratischen, Potenz-, Exponential- und trigonometrischen Funktionen gilt für eine Funktion f und ihre Variationen g:

$g(x) = \ldots$	**Beschreibung der Veränderung**	**Der Graph von g geht aus dem Graphen von f hervor durch ...**
$a \cdot f(x)$	Multiplikation des Funktionswerts $f(x)$ mit dem Parameter	Streckung* in y - Richtung um den Faktor a
$f(b \cdot x)$	Multiplikation der Stelle x mit dem Parameter vor dem Anwenden der Funktion f	Streckung in x - Richtung um den Faktor $1/b$ (bzw. Stauchung in x - Richtung um den Faktor b)
$f(x + c)$	Addition des Parameters zur Stelle x vor dem Anwenden der Funktion f	Verschiebung in x - Richtung um $-c$
$f(x) + d$	Addition des Parameters zum Funktionswert $f(x)$	Verschiebung in y - Richtung um d

* Für $|a| > 1$ werden die Funktionswerte von f betragsmäßig größer, der Graph von g wirkt im Vergleich zu dem von f in y-Richtung „in die Länge gezogen".
Für $|a| < 1$ werden die Funktionswerte von f betragsmäßig kleiner, der Graph von g wirkt im Vergleich zu dem von f in y-Richtung „zusammengedrückt".
Eine Änderung des Vorzeichens von a bewirkt eine Spiegelung des Graphen an der x-Achse.

Fragen zu Parametervariationen

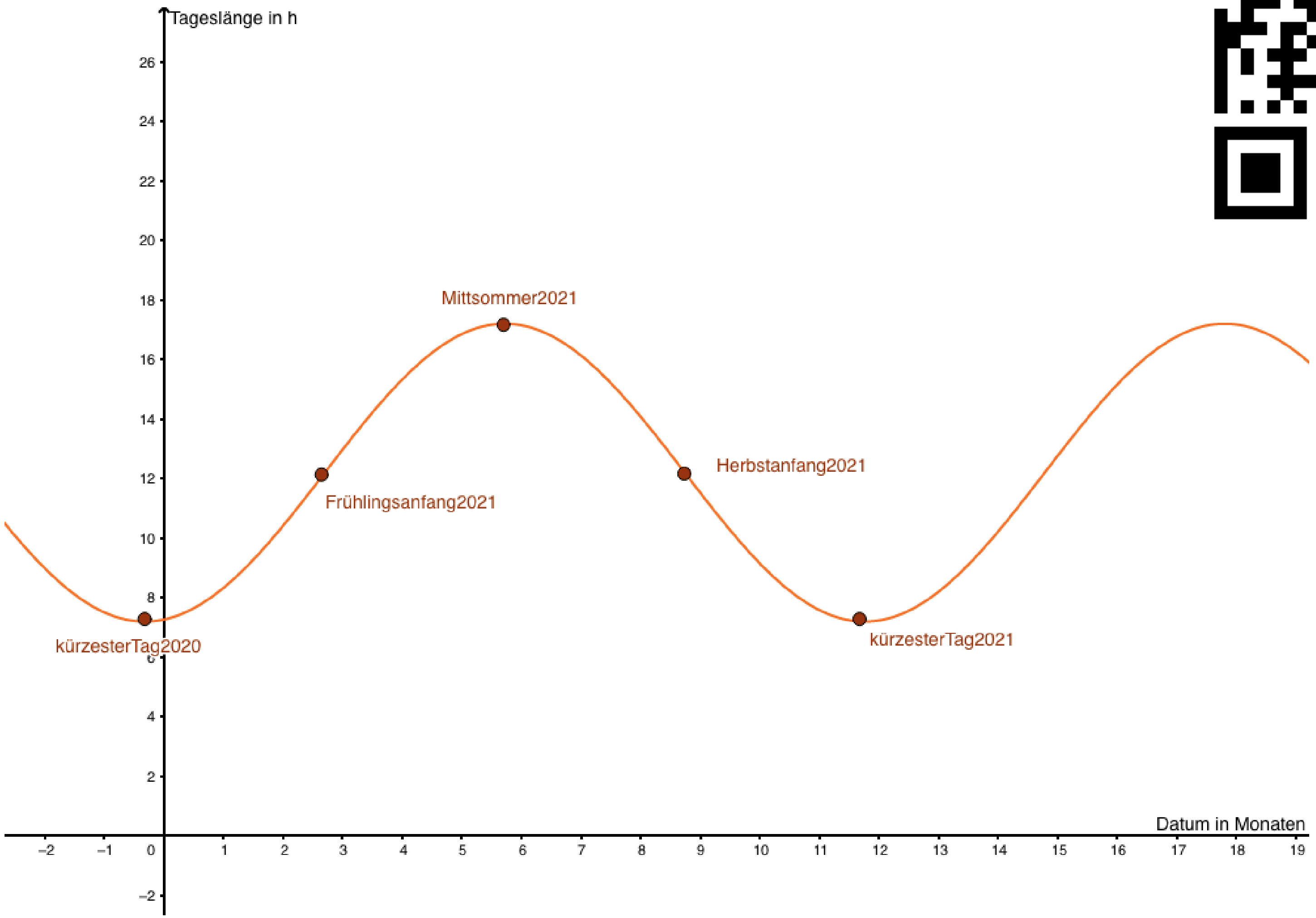
(1) Fredi verschiebt den Graphen der Funktion *f* mit *f*(x) = 2x
um 3 Einheiten nach rechts und um 6 Einheitennach oben.
Überrascht stellt er fest: Der Graph hat sich überhaupt nicht verändert!“
Kann das sein? Erkläre!

(2) Verschiebt man den Graphen zu $f(x) = x^2$ um 3 Einheiten in positive y-Richtung,
dann lautet die neue Funktionsvorschrift $\tilde{f}(x) = x^2 + 3$.
Verschiebt man den Graphen zu $f(x) = x^2$ aber um 3 Einheiten in positive x-Richtung,
dann lautet die neue Funktionsvorschrift $\tilde{f}(x) = (x - 3)^2$
Warum im ersten Fall „+3“, aber im zweiten Fall „-3“ ?

(3) Bei den Parabeln betrachten wir als allgemeine Scheitelpunktform die
Zuordnungsvorschrift $f(x) = a \cdot (x - d)^2 + e$.
Warum gibt es dort keinen Parameter für die Streckung/Stauchung
in x-Richtung?

Tageslängen in Kiel

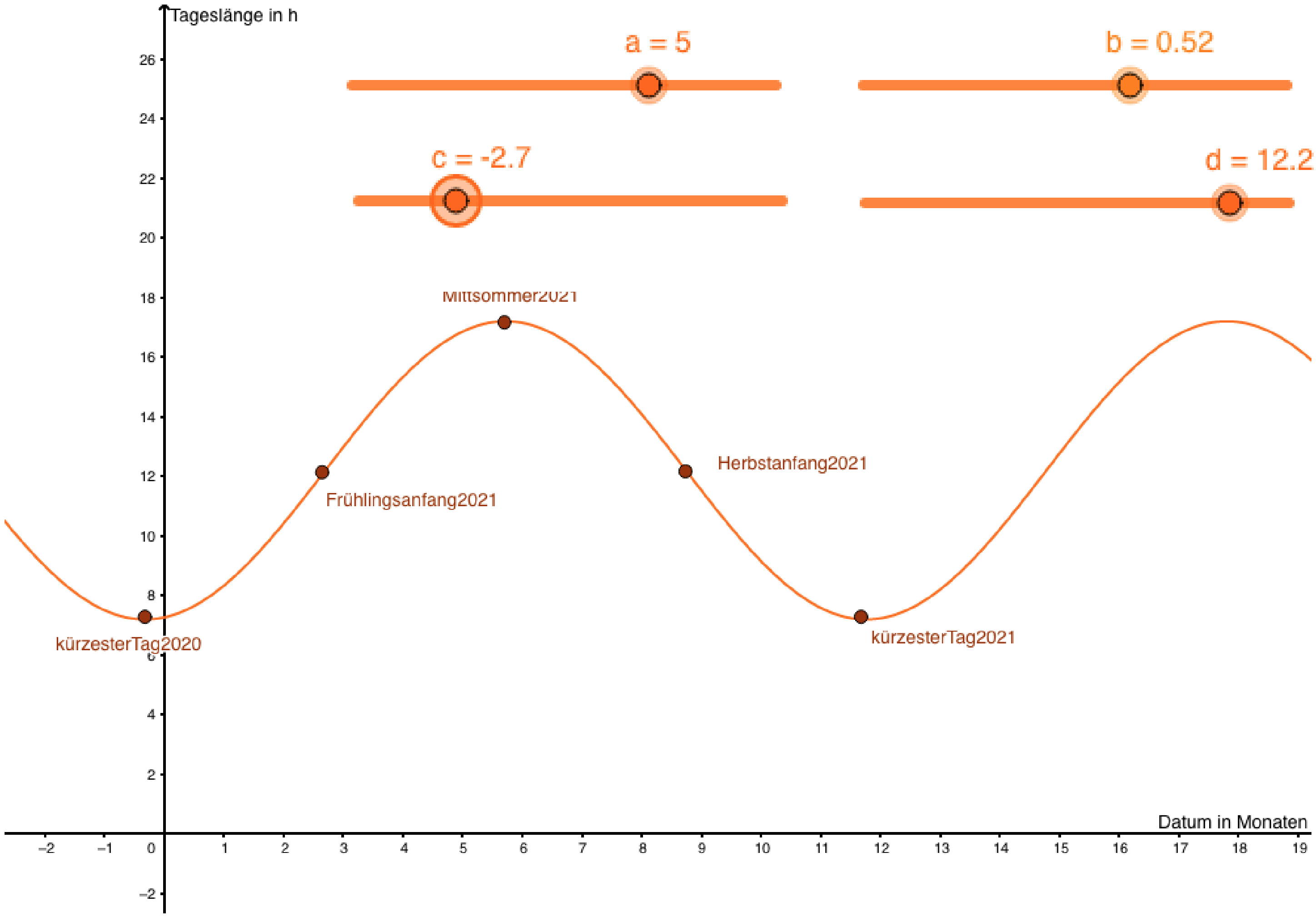
$f(x) = a*\sin(b(x+c))+d$



https://www.geogebra.org/m/dwrpjyrm

Tageslängen in Kiel

$f(x) = a*\sin(b(x+c))+d$



https://www.geogebra.org/m/dwrpjyrm

Wahr oder falsch?

Es gibt einen Ort in Europa, für den die Tageslänge durch die Funktion f mit

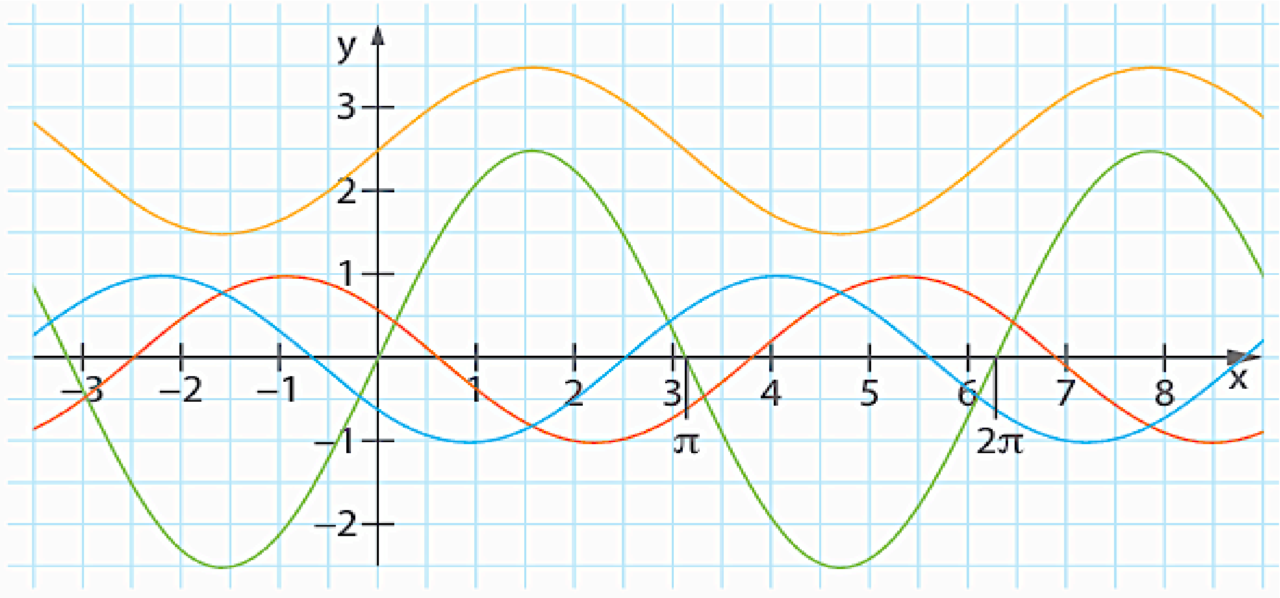
$$f(t) = 0{,}5 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot (t - 258)\right) + 7{,}9$$

modelliert werden kann.

Dabei steht *t* für die Anzahl der seit Jahresbeginn vergangenen Tage.

Zum Einfluss der Parameter auf periodische Funktionen

Ordne jeder der Funktionsgleichungen den richtigen Graphen zu.
Begründe deine Wahl.



$f(x) = 2{,}5 \cdot \sin(x)$

$h(x) = \sin(x) + 2{,}5$

$g(x) = \sin(x + 2{,}5)$

$k(x) = \sin(x - 2{,}5)$