

B5: Messen Sek. II

07.01.2026

Marvin Krüger



Institut für Qualitätsentwicklung
an Schulen Schleswig-Holstein

Ausbildungscurriculum

B5 Messen SEK II

Ziel: Die LiV durchlaufen die Planungsphasen eines Unterrichts, der in die metrische Geometrie in der Sekundarstufe II (als Beispiel für die Leitidee Messen) einführt. Sie entwickeln **schülergerechte Zugänge** zum **Skalarprodukt** und zum Vektorprodukt und erkennen den Nutzen der geometrischen Interpretationen dieser Verknüpfungen zur Lösung von typischen Fragestellungen aus der analytischen Geometrie.

Diese Aufgabenstellungen werden durch **geeignete Modelle**, die SuS während des gesamten Unterrichts zur analytischen Geometrie begleiten

können, visualisiert. Es wird anhand der Modelle aufgezeigt, dass ein geometrisches **Abstandproblem** auf verschiedene Weisen gelöst werden kann. Auf die Dokumentation von Lösungswegen in der Geometrie wird eingegangen.

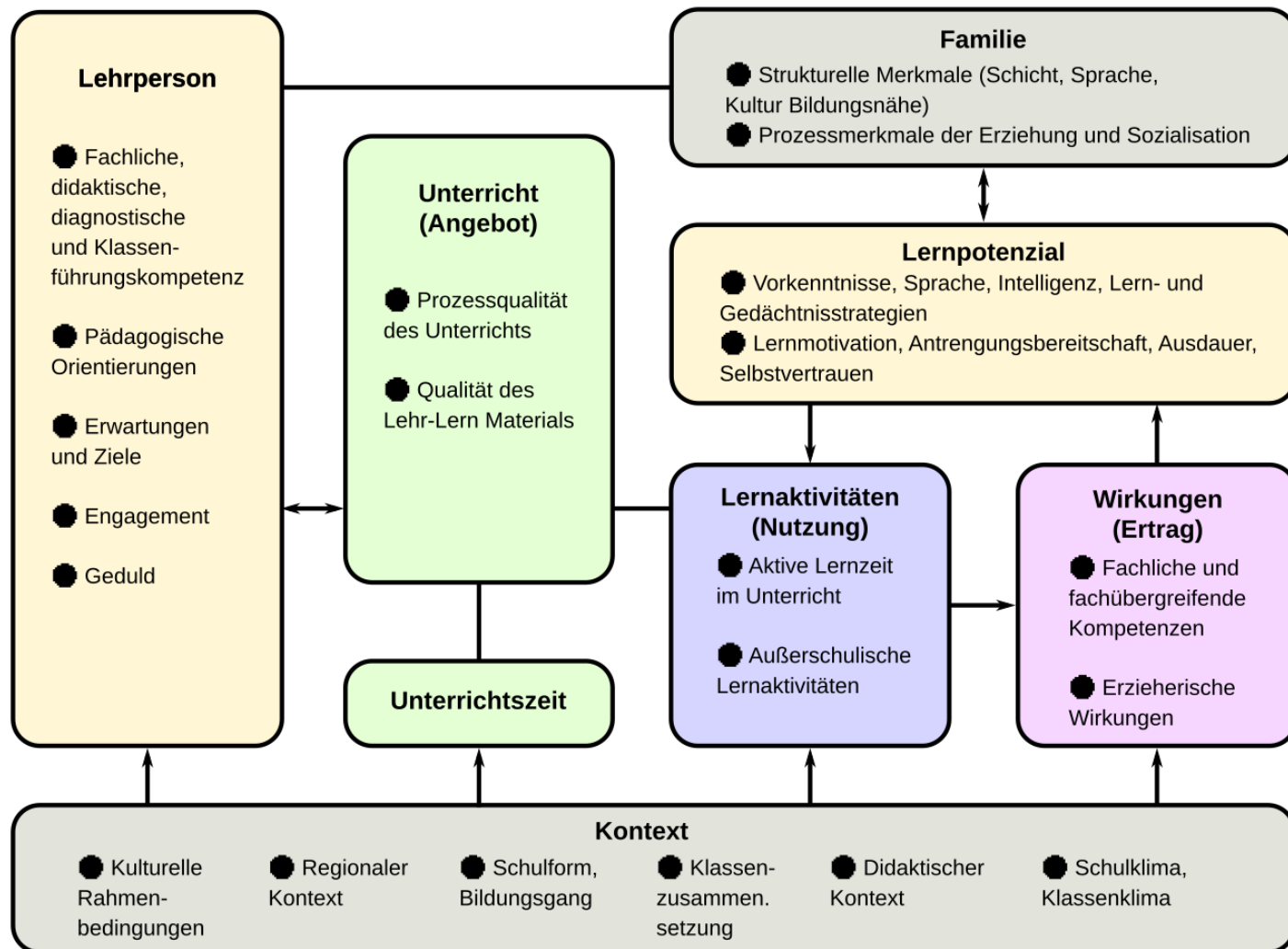
Zur Visualisierung wird ebenfalls das dynamische Geometrieprogramm Geogebra verwendet

08:15	Block 1	Begrüßung, Organisation Bericht aus der Unterrichtspraxis (Formel 1)
08:55	Unterrichtsstunde mit Besprechung	
11:00	Block 2	Einführung in die Vektorrechnung, Produkte
	Mittagspause	
13:00	Block 3	Fortsetzung
	Kaffeepause	
	Block 4	Modelle: Lagebeziehungen und Abstände
16:00	Abschluss	

Unterrichtshospitation – vorab

Unterrichtshospitation

Was soll ich beobachten?



Unterrichtshospitation

Was soll ich beobachten?



<https://www.spektrum.de/news/bildung-die-wichtigsten-bedingungen-fuer-einen-guten-unterricht/2173203>

Unterrichtshospitation

Was soll ich beobachten?



Unterrichtshospitation

Worauf muss geachtet werden?

- Handys ausschalten!
- Kein Essen/Trinken/Kaugummi!
- Keine Gespräche!
- Nicht helfen!
- Keine Photos!
- Machen Sie sich geeignete Notizen, um im Anschluss eine Rückmeldung geben zu können!

**Seien Sie vorbildlich,
respektvoll und passiv!**

Unterrichtshospitation – danach

Unterrichtshospitation

Nachbesprechung

Feedback-Regeln	Feedback - Geben	Feedback - Nehmen	
Konkretes Verhalten vs. Verallgemeinerungen zur Person	Ich-Perspektive vs. "Du hast"	Offenheit vs. Verteidigungshaltung	Fragen stellen vs. Unklarheiten ignorieren
Auch Positives benennen vs. reine Kritik	Lösungsidee vs. Problemorientierung	Selbstreflexion vs. "alles wie immer"	"Danke" sagen vs. "bist Du endlich fertig?"

<https://teamentwicklung-lab.de/feedback-regeln>

Ziel ist immer eine **Reflexion** des eigenen Unterrichts!

Beschreiben Sie, ob bzw. inwieweit **Ihre Hauptintention** erfüllt wurde. Erläutern Sie Ihre Entscheidung anhand konkreter Handlungen/Ergebnisse der Lernenden.

Nennen Sie die **wesentlichen Planungsentscheidungen** Ihrer Stunde.

Beschreiben Sie die Aspekte der Stunde, die **planmäßig** verliefen und erläutern Sie **Planungsabweichungen**.

Beurteilen Sie retrospektiv, welche Planungs- und Durchführungsentscheidungen richtig waren und was Sie beim nächsten Mal anders machen würden. Benennen Sie konkrete **Handlungsalternativen**.

Organisatorisches

Module und Beratungen

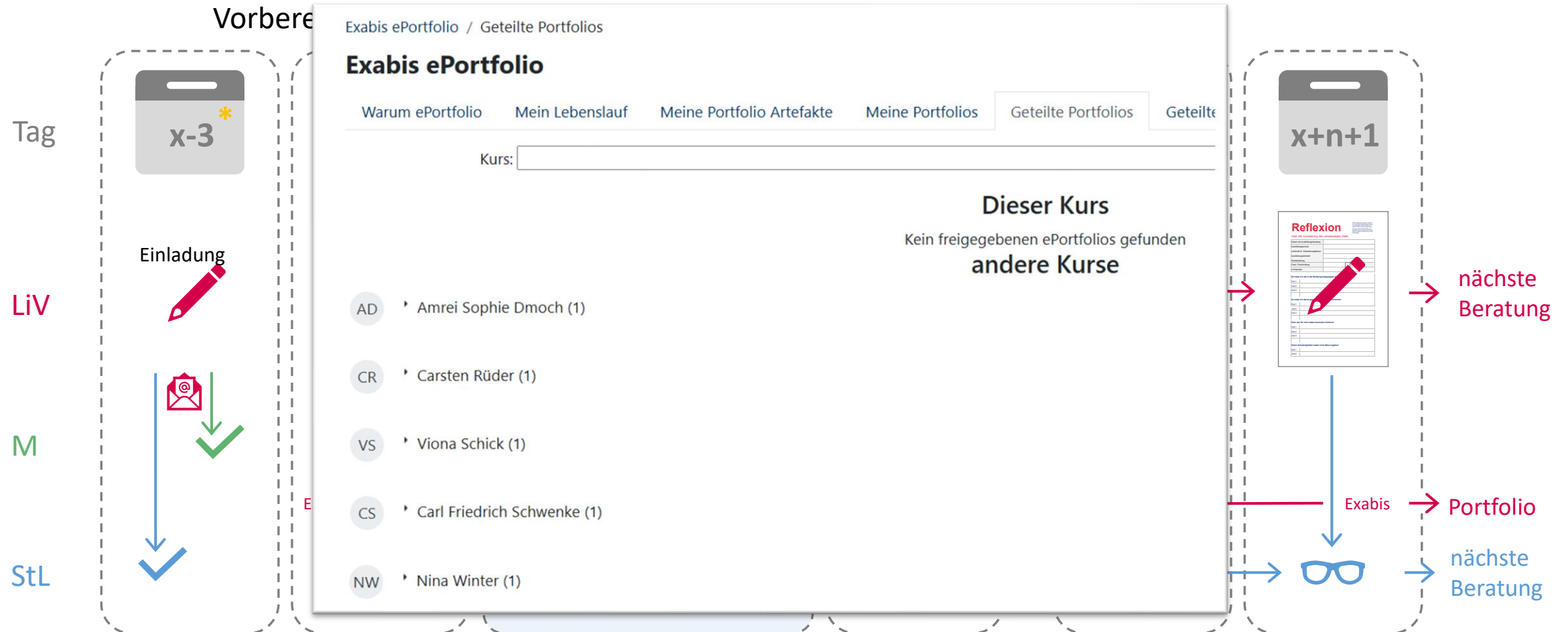
Termine SJ 2025/2026

Terminübersicht Mathematik (S1) Krüger 2. Hj. 2025/26

VORPLANUNG Ausbildungsveranstaltungen

		Uhrzeit	Ort	<u>LIV</u>
04.02.2026	AV		online	
04.03.2026	AV		<u>Katharineum</u> zu Lübeck	Herr <u>Salmanli</u>
15.04.2026	AV		Leibniz-Gymnasium Bad Schwartau	Frau <u>Dmoch</u>
13.05.2026	AV		<u>BvS</u> Geesthacht	Herr <u>Danker</u>
10.06.2026	AV		MDG Mölln	Herr Meyer

Ausbildungsberatung Ablauf



Ausbildungsberatung

zusätzlicher Termin

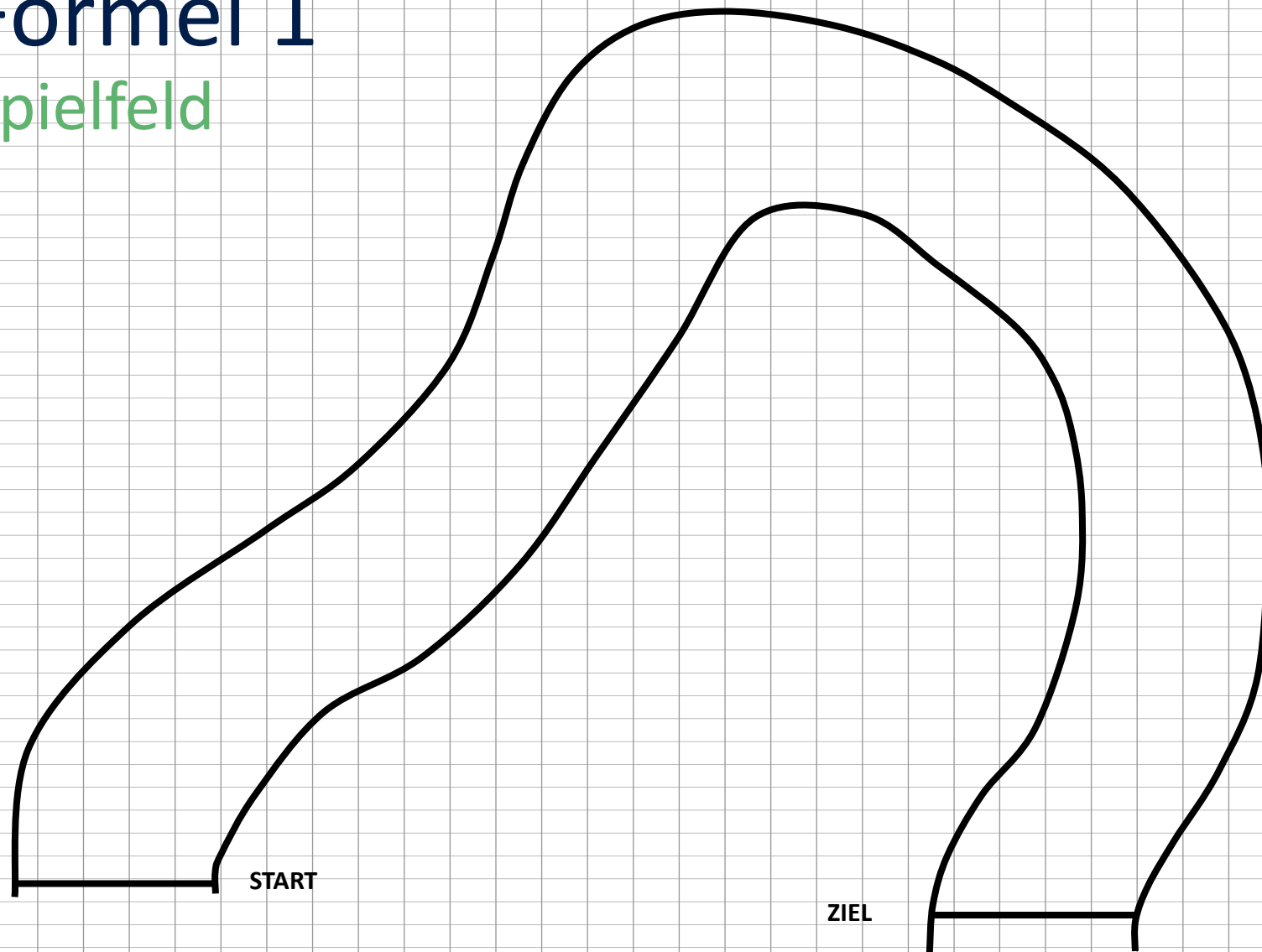
Ein zusätzlicher Termin ist möglich, machen Sie davon gerne Gebrauch!

Geometriespiel Formel 1

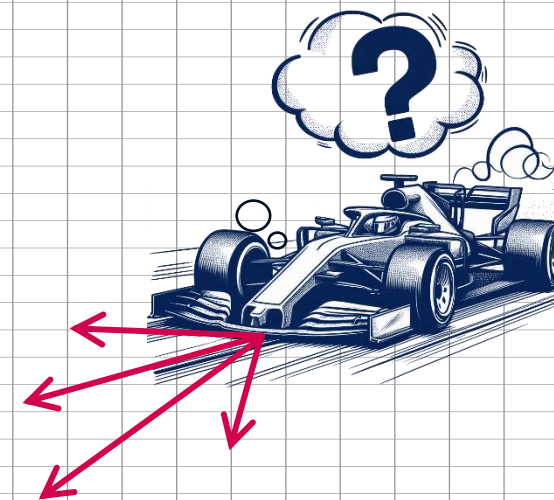
Einstieg in die analytische Geometrie

Formel 1

Spielfeld



IQ.SH 



10 min

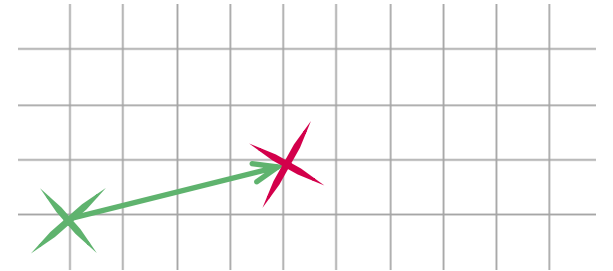
Spiele Sie das Spiel!

Formel 1

Spielregeln

Markierung

Die Position eines Autos wird am Ende einer jeden Spielrunde mit einem neuen Kreuz **auf einem** Gitterpunkt markiert. Jeder Spieler markiert in einer Runde die Fahrstrecke zu dieser Position mit einem Pfeil.



Formel 1

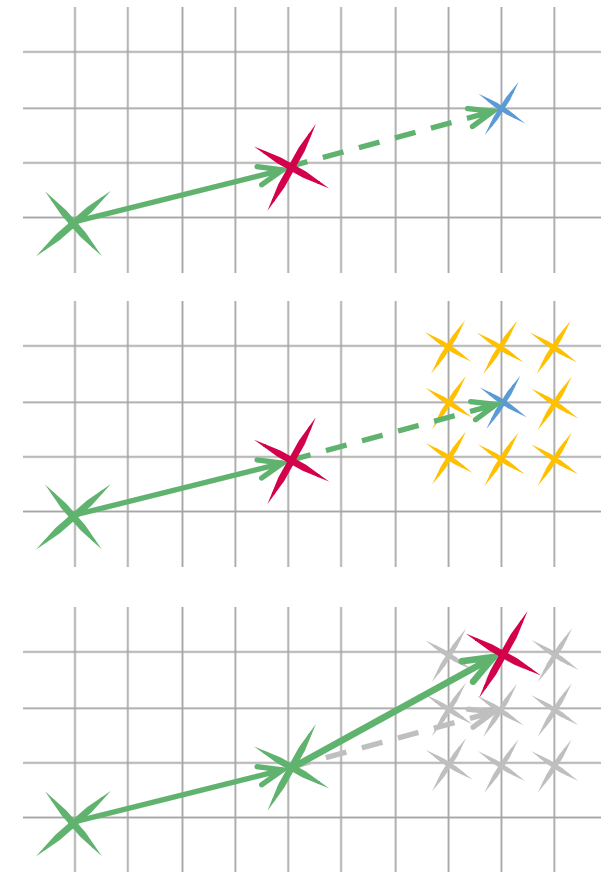
Spielregeln

2. Fahren

Verdoppelt man diesen Pfeil, so erhält man den Orientierungsgitterpunkt für die nächste Spielrunde. Dieser ist ein mögliches Ziel für die folgende Spielrunde.

In direkter Nachbarschaft zu diesem Orientierungsgitterpunkt gibt es zudem acht weitere Ziele für die folgende Spielrunde.

Der Spieler muss nun zu einem dieser neun Gitterpunkte fahren. Er zeichnet einen Pfeil zu seiner neuen Position und markiert diese mit einem weiteren Kreuz. Hiernach fährt der nächste Spieler.



Formel 1

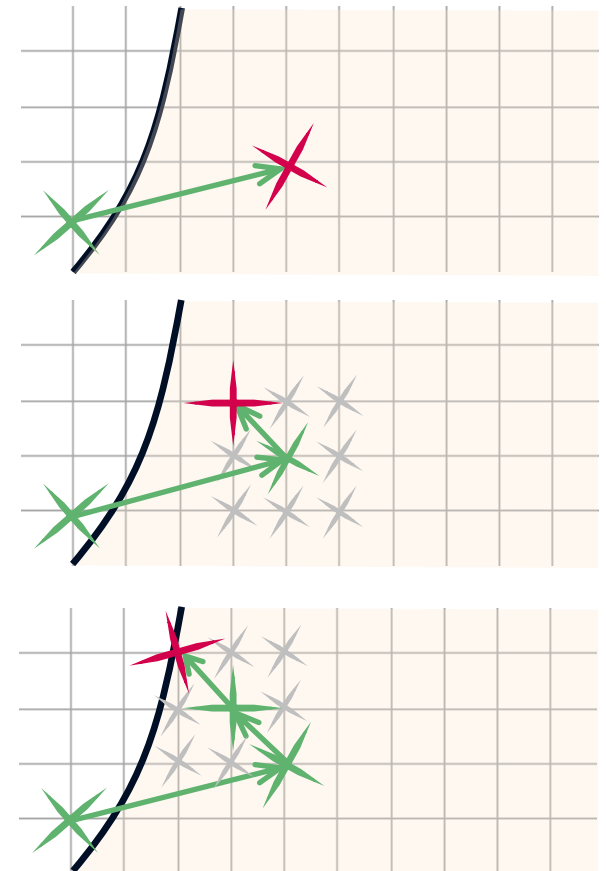
Spielregeln

3. Verlassen der Rennstrecke

Manchmal kommt ein Spieler von der Rennstrecke (weiß) ab und landet im Sandbett.

Im Sandbett kommt ein Auto nur mit der minimalen Geschwindigkeit voran. In der nächsten Runde darf er nur Gitterpunkte in der direkten Nachbarschaft zu seiner Position wählen.

Der Spieler muss solange mit der minimalen Geschwindigkeit weiterfahren, bis er die Rennstrecke wieder erreicht.



Formel 1

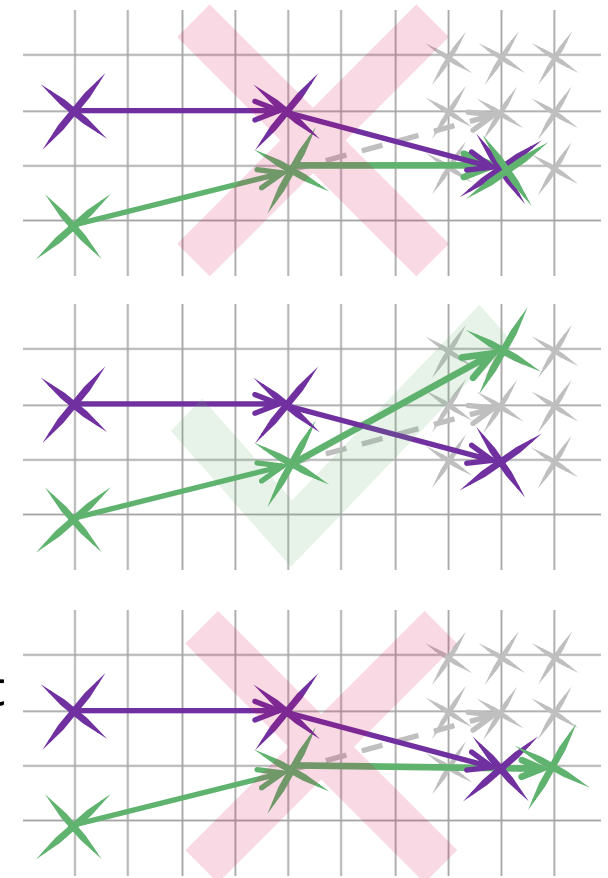
Spielregeln

4. Kollisionen sind verboten

Ist ein Gitterpunkt von einem Mitspieler besetzt, so muss der Spieler, der an der Reihe ist, ein anderes Ziel aus den neun Gitter-punkten wählen. Unter Umständen muss der Spieler dann ins Sandbett fahren.

Vektorpfeile von anderen Spielern dürfen überfahren werden. Von anderen Mitspielern verlassene Gitterpunkte können angefahren werden.

Gitterpunkte, auf denen andere Mitspieler aktuell stehen, dürfen aber nicht überfahren werden.

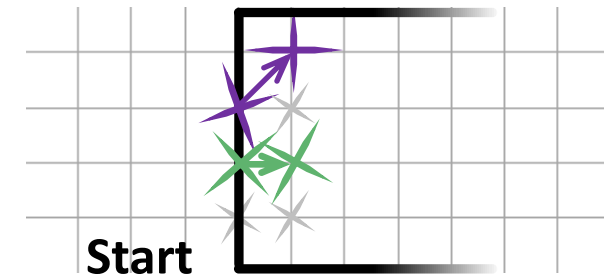


Formel 1

Spielregeln

5. Spielstart

Vor Spielbeginn wählt jeder Spieler einen Gitterpunkt auf der Startlinie als Startposition. In der ersten Runde startet jeder Spieler mit der Minimalgeschwindigkeit.

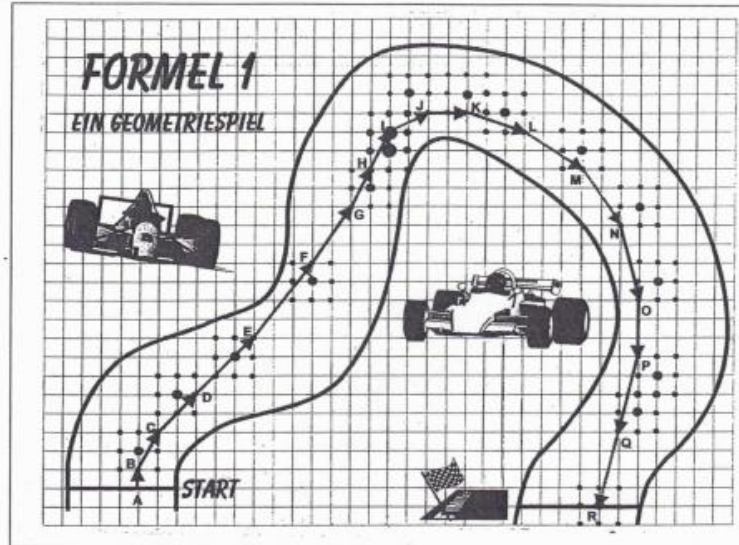


6. Spielende

Gewonnen hat der Spieler, der die Ziellinie als erstes von der richtigen Seite durchfährt. Überfahren in einer Runde zwei Spieler die Ziellinie, so haben beide gewonnen.

Formel 1

Einstieg in die Analytische Geometrie



Die geometrische Theorie:

1. Wir beschreiben z.B. die Verschiebung $\vec{V}_{EF}$ der Autoposition von E nach F durch den Vektor $\vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Gib die zu den folgenden Verschiebungen gehörenden Vektoren an.

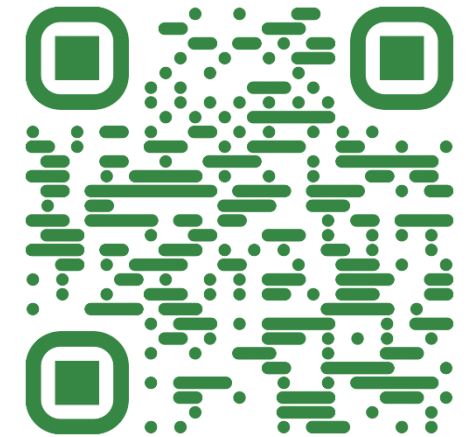
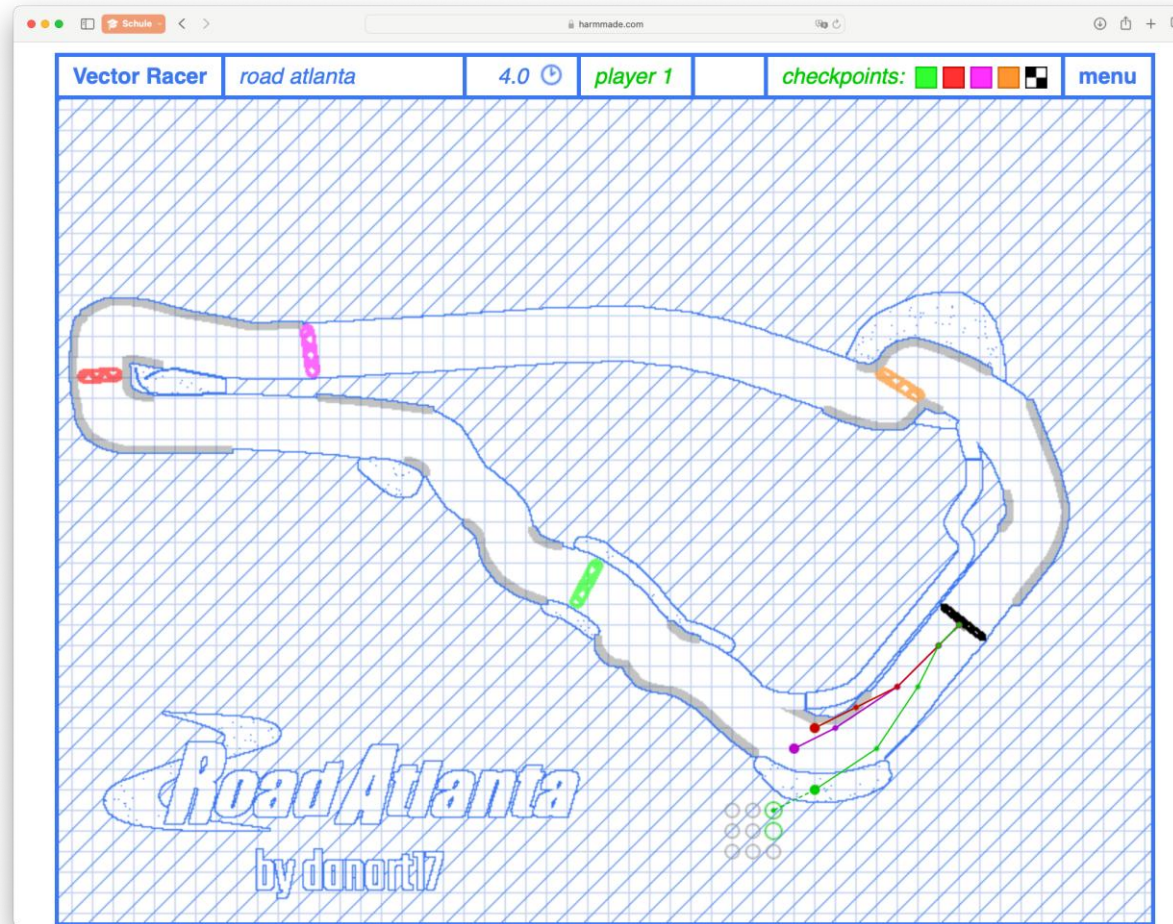
$\vec{V}_{FG}$:	$\vec{V}_{HI}$:	$\vec{V}_{IJ}$:
$\vec{V}_{JK}$:	$\vec{V}_{LM}$:	$\vec{V}_{OP}$:

2. Existieren Verschiebungen mit den gleichen zugehörigen Vektoren?

3. Definition:

Formel 1

Vector Racer



Leitidee Messen

Vorbereitung

Messen und andere Leitideen

In den Fachanforderungen Mathematik Sekundarstufe II steht: „Die Leitidee „Messen“ ist in besonderem Maße mit anderen Leitideen verknüpft.“ Finden Sie mithilfe der Fachanforderungen mindestens drei Beispiele, um diese Aussage zu belegen.



Vorbereitung

Messen Sek. I / II

„Messen“ in der Sek. II ist etwas anderes als in der Sek. I – Sie wissen das, aber für Schüler*innen oder Eltern ist dies nicht so intuitiv. In den Bildungsstandards der KMK steht:

„Diese Leitidee erweitert das Bestimmen und Deuten von Größen aus der Sekundarstufe I um infinitesimale, numerische und analytisch-geometrische Methoden. Dies betrifft sowohl funktionale Größen wie Änderungsraten und (re-)konstruierte Bestände als auch Größen im Koordinatensystem wie Winkelgrößen, Längen, Flächeninhalte und Volumina. Weiter umfasst die Leitidee stochastische Kenngrößen, die als Ergebnisse von Messprozessen im weiteren Sinne aufgefasst werden.“ (KMK, 2012, S. 19)

Erläutern Sie dies einer Abiturientin/einem Elternteil adressatengerecht. Stützen Sie Ihre Ausführungen mit Beispielen aus den Fachanforderungen.





Einführung in die Vektorrechnung

Vektor

Was ist das?

Zugänge zum Vektorbegriff

Was ist ein Vektor?

Es gibt viele Antworten auf diese Frage.

Hochschulmathematik

- Ein Vektor ist ein Element eines Vektorraums.
- Axiomatischer Zugang über die Struktur

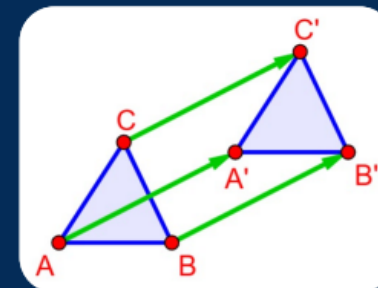


Schulmathematik

(1) Ein Vektor ist eine Pfeilkasse.



(2) Ein Vektor ist eine Verschiebung, also eine Änderung der Lage.



(3) Ein Vektor ist ein n -Tupel.

- Ein Vektor $\vec{v}$ ist als n -Tupel ein Element des $\mathbb{R}^n$.
- Er kann je nach Bedarf als Zeilenvektor $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$ oder auch als Spaltenvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ geschrieben werden.



Tipp

Didaktikvorlesungsskripte und -videos

Prof. Dr. Jürgen Roth stellt auf seiner Seite umfangreiches Material zu seinen Lehrveranstaltungen zur Verfügung, Vorlesungs- und Seminarskripte sowie Videos:

<https://juergen-roth.de/lehre/>

Neue Wege in der Vektorgeometrie

Malle (2005)

Neue Wege in der Vektor- geometrie

Wie hilfreich sind Vektoren in der Analytischen Geometrie? Die Antwort hängt wesentlich vom verwendeten Vektorkonzept ab.

Vektoren sind heute aus der Analytischen Geometrie der Schule nicht mehr wegzudenken. Das war jedoch nicht immer so. Vor der Einführung der Vektorrechnung in der Schule (ca. ab 1960) hat man auch schon Analytische Geometrie betrieben und konnte im Wesentlichen die gleichen Aufgaben lösen. Durch die Einführung der Vektoren hat man sich nicht einmal Rechenarbeit erspart, denn die konkreten Rechnungen müssen ja doch koordinatenweise ausgeführt werden. Worin liegt dann der Vorteil der Vektoren in der Analytischen Geometrie?

Darauf kann man zweierlei antworten:

- Der Formalismus der Vektorrechnung erlaubt eine *knappere und übersichtlichere Darstellung* von Rechnungen und Beziehungen als die bloße Koordinatengeometrie.
- Die Vektorgeometrie bietet gegenüber der bloßen Koordinatengeometrie einen *heuristischen Vorteil*. Sie liegt nämlich in vielen Fällen näher am tatsächlichen Den-

Was ist ein Vektor?

Auf diese Frage wurden im Lauf der Geschichte der Mathematik viele verschiedene Antworten gegeben (vgl. Malle 1998). Auf Hochschulebene wird der Vektorbegriff heute im Allgemeinen axiomatisch definiert: Ein Vektor ist ein Element eines Vektorraumes. Eine axiomatische Einführung des Vektorbegriffs in der Schule wäre aber sinnlos. Die Axiome eines Vektorraumes bilden zwar die Rahmenbedingungen, die ein schulischer Vektorbegriff erfüllen muss, es geht aber im Unterricht zunächst um etwas ganz anderes: Es müssen inhaltliche Vorstellungen von Vektoren entwickelt werden. Doch welche?

Ein nahe liegender Gedanke wäre, einen Vektor als Pfeil aufzufassen. Aber Pfeile bilden keinen Vektorraum. Man kann sie nicht einmal addieren, wenn sie nicht zufällig den gleichen Anfangspunkt haben oder einander hängen. Die ersten

Thesenpapier



Fach: Mathematik

These 1

Obwohl unser Schulbuch eine Einführung der analytischen Geometrie über Vektoren als Pfeilklassen vorsieht, halte ich eine Einführung der Vektoren als n-Tupel für sinnvoll.

Begründung

Die Einführung der analytischen Geometrie über Pfeilklassen in dem Schulbuch *Mathematik Band 2 – Analytische Geometrie | Stochastik* (Bigalke und Köhler, 2008) wirkt auf den ersten Blick anschaulich, da sie auf der geometrischen Vorstellung der ‚verschobenen Pfeile‘ aufbaut. Malle (2002) zeigt jedoch, dass genau dieses Modell für den Unterricht schwerwiegende didaktische Problemlagen erzeugt. Zentrale mathematische Operationen müssen im Pfeilklassenmodell eigentlich immer über Repräsentanten definiert werden. Die Unabhängigkeit von der Repräsentantenwahl ist mathematisch unverzichtbar, aber kann für Lernende zu einer Überforderung führen. Hinzu kommt, dass das schulische Arbeiten im Verlauf der analytischen Geometrie fast ausschließlich mit Einzelpfeilen erfolgt, während die Definition mit Pfeilklassen operiert. Dadurch entsteht ein Widerspruch zwischen Definition und Nutzung, der



$$= \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Skalarprodukt

Produkte in der Schule

Ausdruck	Vektor	Zahl	nicht definiert
$(\vec{u} \circ \vec{v}) + \vec{w}$			
$ \vec{u} ^2 - \vec{w} ^2$			
$(\vec{u} \times \vec{v}) - (r \cdot t) \cdot \vec{w}$			
$(\vec{u} \circ \vec{u}) + (r - t)^2$			
$(r \cdot \vec{u}) \circ (t \times \vec{u} \times \vec{v})$			
$\vec{u} \times ((\vec{w} - \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v}))$			

Ministerium für Schule und Berufsbildung (Hrsg.): Kernfach Mathematik Schriftliche Abiturprüfung 2015. Hilfsmittelfreier Teil. Aufgabe 4.1.

Bearbeiten Sie die Abituraufgabe.

Skalarprodukt

Zugänge

- a) Untersuchen Sie in einem Lehrwerk (auf nachfolgende Seiten oder von Ihnen mitgebracht) die Einführung zum Skalarprodukt. Bewerten Sie, ob der Zugang...
1. axiomatisch,
 2. definitorisch,
 3. arithmetisch,
 4. oder geometrisch orientiert ist.
- b) Skizzieren Sie kurz anhand dieses Lehrwerks einen möglichen Unterrichtsgang zur Einführung des Skalarproduktes.



20 min

Skalarprodukt

Zugänge - Begriffsklärung

axiomatisch – auf Axiomen beruhend; unanzweifelbar;

definitorisch – durch eine Definition bestimmt; Bestimmung durch eine klare Abgrenzung, Erklärung oder Festlegung eines Begriffs

arithmetisch – die Arithmetik betreffend; rechnerisch, insbesondere durch die Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division.

geometrisch – die Geometrie betreffend; Figuren und Sätze der Geometrie aufweisend.

Fundamente der Mathematik

2

Allgemeine Ausgabe
Gymnasiale Oberstufe
mit CAS/MMS

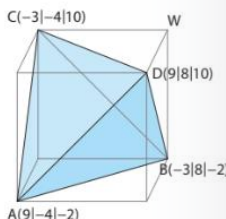
Analytische Geometrie
Lineare Algebra
Stochastik

Cornelsen

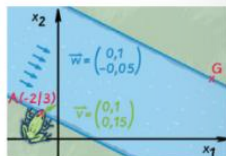
Lösungen
zu 23c

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 36 \\ \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix} = 100 \\ \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix} = 210$$

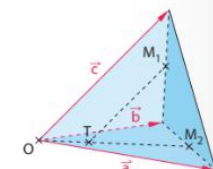
- 23 a) Zeigen Sie rechnerisch, dass das Dreieck ABC aus der nebenstehenden Abbildung gleichseitig ist.
 b) Zeigen Sie, dass $S(1|0|2)$ der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist.
 c) Das Dreieck ABC bildet zusammen mit dem Punkt $D(9|8|10)$ ein regelmäßiges Tetraeder, welches, wie in der Skizze, einem Würfel eingeschrieben ist. Ermitteln Sie die Koordinaten des Eckpunktes W des in der Abbildung dargestellten Würfels.
 d) Geben Sie die Koordinaten der Mittelpunkte M_{AB} , M_{BC} , M_{CD} und M_{DA} der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DA}$ an.
 e) Untersuchen Sie, welche speziellen Eigenschaften das Viereck $M_{AB}M_{BC}M_{CD}M_{DA}$ hat.



- 24 Im Punkt $A(-2|3)$ am Rand eines Kanals schwimmt ein Frosch los. Bei stehendem Wasser würde er in 1 Sekunde einen Weg von $\vec{v}$ zurücklegen. Das Wasser fließt pro Sekunde einen Weg von $\vec{w}$ (Längen in m).
 a) Geben Sie den Vektor für den tatsächlichen Weg pro Sekunde an. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, mit der der Frosch schwimmt, in Meter pro Stunde.
 b) Wenn der Frosch Tempo und Richtung beibehält, wird er in $G(14|11)$ am anderen Ufer ankommen. Bestimmen Sie, nach wie vielen Sekunden das der Fall sein wird.



- 25 Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ beschreiben eine dreiseitige Pyramide. Die Punkte M_1 und M_2 sind Kantenmittelpunkte. Ferner ist $\vec{OT} = \frac{1}{3} \cdot \vec{OM}_2$. Beweisen Sie, dass $\vec{TM}_1$ nicht parallel zu $\vec{c}$ ist.
 26 Zeigen Sie, dass sich jeder Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ schreiben lässt. Begründen Sie, dass dies auch für beliebige vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ gilt, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind.



- 27 **Ausblick: Vektorraum**
 Eine nichtleere Menge V heißt Vektorraum über $\mathbb{R}$, wenn es in V eine Addition und eine skalare Multiplikation bzw. Skalarmultiplikation mit folgenden Eigenschaften gibt:

- A1 $\vec{u} + \vec{v} \in V$ für alle $\vec{u}, \vec{v} \in V$
 A2 Die Addition ist assoziativ und kommutativ
 A3 Es existiert der Nullvektor $\vec{0}$ mit $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ für alle $\vec{u} \in V$
 A4 Zu jedem $\vec{u} \in V$ existiert ein Gegenvektor $-\vec{u} \in V$ mit $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

- S1 Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{u} \in V$ gilt $\lambda \cdot \vec{u} \in V$
 S2 $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ für alle $\vec{u} \in V$
 S3 Es gelten die Distributivgesetze:
 ① $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$
 ② $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$
 und das Assoziativgesetz: $(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u})$

Die Eigenschaften und Rechengesetze eines Vektorraums gelten nicht nur für die Menge aller Vektoren in der Ebene bzw. im Raum, sondern auch für andere mathematische Strukturen, die als Vektoren aufgefasst werden können.

Betrachten Sie die Menge der Polynome $P_2 = \{p \mid p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0; a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ mit der Addition und Skalarmultiplikation, die wie folgt definiert sind:

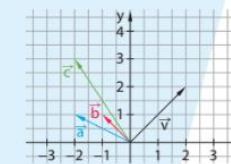
$p(x) + q(x) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$; $\lambda \cdot p(x) = \lambda a_2x^2 + \lambda a_1x + \lambda a_0$
 für beliebige $p, q \in P_2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es sich um einen Vektorraum handelt.

3.5

Skalarprodukt und orthogonale Vektoren

Zum Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ wird ein Vektor gesucht, dessen Pfeile senkrecht zu denen von $\vec{v}$ sind.

- a) Schätzen Sie mithilfe der Zeichnung, welcher der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dies erfüllt.
 b) Finden Sie die Summe der Koordinatenprodukte von $\vec{a}$ und $\vec{v}$ gilt: $(-2) \cdot 2 + 1 \cdot 2 = -2$. Berechnen Sie dies für $\vec{b}$ und $\vec{v}$ sowie $\vec{c}$ und $\vec{v}$. Beschreiben Sie Ihre Beobachtung.



Orthogonale Vektoren

Zwei Vektoren nennt man zueinander **orthogonal** (senkrecht), wenn ihre Vektorpfeile zueinander senkrecht sind.

Nach dem Satz des Pythagoras sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genau dann zueinander orthogonal, wenn gilt:

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2$$

Mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$ lässt sich die Gleichung umformen:

$$\begin{aligned} (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) &= (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 & | \text{ 2. binomische Formel} \\ a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 &= a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2 & | - (a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2) \\ 0 &= -2a_1b_1 - 2a_2b_2 & | : (-2) \\ 0 &= a_1b_1 + a_2b_2 \end{aligned}$$

Der Ausdruck $a_1b_1 + a_2b_2$ entscheidet also darüber, ob die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zueinander orthogonal sind. Das gilt auch für den entsprechenden Ausdruck für Vektoren im Raum.

Erinnerung

Wegen $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ ist $|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$.

Hinweis

Für Vektoren in der Ebene gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2$$

Die **skalare Multiplikation** einer reellen Zahl (Skalar) mit einem Vektor ist nicht mit dem **Skalarprodukt** zu verwechseln.

Hinweis

Skalarprodukt mit einem CAS

$$\text{dotP}(\vec{v}, \vec{w})$$

Definition Skalarprodukt zweier Vektoren

Für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heißt $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ das **Skalarprodukt** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Das Ergebnis eines Skalarprodukts ist eine reelle Zahl (ein Skalar) und kein Vektor. Es wird auch die Schreibweise $\vec{a} \cdot \vec{b}$ verwendet. Mithilfe des Skalarprodukts lässt sich kurz formulieren:

Satz Orthogonale Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ sind genau dann zueinander orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt null ist, also $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ gilt.

Beispiel 1 Orthogonalität prüfen

Prüfen Sie, ob der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ orthogonal zu $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ oder $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ ist.

Lösung:

Berechnen Sie die Skalarprodukte $\vec{a} \cdot \vec{b}$ und $\vec{a} \cdot \vec{c}$. Bilden Sie dazu die Produkte a_1b_1 , a_2b_2 , a_3b_3 (bzw. a_1c_1 , a_2c_2 , a_3c_3) und addieren Sie diese. Ist das Skalarprodukt null, so sind die Vektoren orthogonal zueinander.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 7 \cdot 2 - 3 \cdot 8 + 5 \cdot 2 = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = -7 - 15 + 20 = -2 \neq 0$$

$\vec{a}$ ist orthogonal zu $\vec{b}$, aber nicht zu $\vec{c}$.

5.1

Winkel zwischen Vektoren und zwischen Geraden

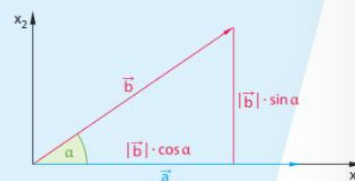
In einem zweidimensionalen Koordinatensystem sei α der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus der Abbildung. Die x_2 -Koordinate von $\vec{a}$ ist also gleich 0.

a) Begründen Sie, dass

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} |\vec{b}| \cos(\alpha) \\ |\vec{b}| \sin(\alpha) \end{pmatrix} \text{ und } \vec{a} = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \\ 0 \end{pmatrix} \text{ gilt, und berechnen Sie das Skalarprodukt } \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

b) Es sei α der Winkel zwischen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\cos(\alpha)$

mithilfe der in a) gewonnenen Formel für $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Geben Sie die Größe dieses Winkels an. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis an einer Skizze.



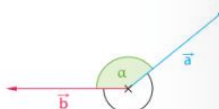
Neben der Prüfung auf Orthogonalität können mit dem Skalarprodukt allgemein Winkel zwischen Vektoren, Geraden und Strecken untersucht werden.

Winkel zwischen zwei Vektoren

Hinweis

Im Gegensatz zur Einstiegsaufgabe sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ hier zwei beliebige Vektoren im Raum oder in der Ebene.

Stellt man die Vektorpfeile von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ von einem gemeinsamen Punkt ausgehend dar, entstehen zwei Winkel. Den kleineren Winkel α bezeichnet man als den **Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$** .



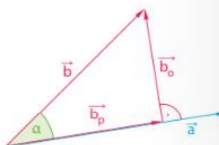
Für kollineare Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, welche in die gleiche Richtung zeigen, ist $\vec{b} = r \cdot \vec{a}$ mit $r > 0$ und es gilt: $|\vec{b}| = |r \cdot \vec{a}| = r \cdot |\vec{a}|$

Es folgt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (r \cdot \vec{a}) = r \cdot (\vec{a} \cdot \vec{a}) = r \cdot |\vec{a}|^2 = |\vec{a}| \cdot (r \cdot |\vec{a}|) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

Ist der Winkel α zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kleiner als 90° , so kann man $\vec{b}$ in einen zu $\vec{a}$ parallelen Vektor $\vec{b}_p$ und einen zu $\vec{a}$ orthogonalen Vektor $\vec{b}_o$ zerlegen: $\vec{b} = \vec{b}_p + \vec{b}_o$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{a} \cdot (\vec{b}_p + \vec{b}_o) && \text{Distributivgesetz} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b}_p + \vec{a} \cdot \vec{b}_o && |\vec{a} \cdot \vec{b}_o| = 0, \text{ da orthogonal} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b}_p && |\vec{a}| \text{ und } |\vec{b}_p| \text{ zeigen in die gleiche Richtung} \\ &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}_p| && |\cos(\alpha)| = \frac{|\vec{b}_p|}{|\vec{b}|}, \text{ also } |\vec{b}_p| = |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha) \\ &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha) \end{aligned}$$



Hinweis

Beachten Sie, dass der „Malpunkt“ verschiedene Bedeutungen hat, je nachdem ob die Faktoren reelle Zahlen oder Vektoren sind.

Man kann in ähnlicher Weise zeigen, dass diese Formel für das Skalarprodukt zweier Vektoren auch für die Fälle $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 180^\circ$ und für $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ gilt.

Wissen Winkel zwischen zwei Vektoren

Für den Winkel α zwischen zwei Vektoren $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha) \quad \text{bzw.} \quad \cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad (0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$$

Beispiel 1

Berechnen Sie den Winkel zwischen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Lösung:

In der Formel für $\cos(\alpha)$ steht im Zähler das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Das Produkt der Beträge im Nenner ist das Produkt zweier Wurzeln.

Berechnen Sie mit dem Taschenrechner einen Näherungswert für $\cos(\alpha)$. Mit der Taste $\cos^{-1}$ erhalten Sie den Wert des Winkels zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-2)^2 + 6^2 + 4^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{-6 + 6 - 4}{\sqrt{56} \cdot \sqrt{11}} \\ &= \frac{-4}{\sqrt{616}} \approx -0,161 \\ \alpha &= \arccos\left(\frac{-4}{\sqrt{616}}\right) \approx 99,3^\circ \end{aligned}$$

Hinweis

Achten Sie darauf, dass das Winkelmaß Ihres Taschenrechners auf DEG (Grad, TI) bzw. beim Casio 360 eingestellte ist.

Hinweis

Winkel zwischen den Vektoren v und w mit einem CAS: $\text{angle}(v,w)$ bzw.

$$\cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(v,w)}{\text{norm}(v) \cdot \text{norm}(w)}\right)$$

Basisaufgaben

1 Berechnen Sie das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und den Winkel zwischen ihnen.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2 Zeichnen Sie je einen Vektorpfeil von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ von einem gemeinsamen Punkt ausgehend in ein zweidimensionales Koordinatensystem. Schätzen und messen Sie den Winkel zwischen den Pfeilen. Kontrollieren Sie rechnerisch.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

3 a) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Überlegen Sie anhand einer Skizze, wie groß der Winkel zwischen den folgenden Vektoren ist. Kontrollieren Sie durch eine Rechnung.

- ① $2\vec{a}$ und $2\vec{b}$ ② $\vec{a}$ und $-\vec{b}$ ③ $-\vec{a}$ und $\vec{b}$ ④ $-\vec{a}$ und $-\vec{b}$

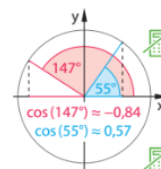


4 a) Begründen Sie: Ist das Skalarprodukt zweier Vektoren größer als 0, so ist der Winkel zwischen ihnen ein spitzer Winkel. Ist das Skalarprodukt kleiner als 0, so ist der Winkel zwischen den Vektoren ein stumpfer Winkel.

b) Sandra meint: „Je größer der Winkel zwischen zwei Vektoren gleicher Länge ist, desto kleiner ist ihr Skalarprodukt.“ Ist das richtig? Begründen Sie.

Erinnerung

$\cos(\alpha)$ am Einheitskreis:



5 Beurteilen Sie, ob der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spitz oder stumpf ist.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$



6 Geben Sie die Koordinaten zweier dreidimensionaler Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ an, für die gilt:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$



7 Erläutern Sie den Satz über das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ für den Fall, dass $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $\alpha = 0^\circ$ und $\alpha = 180^\circ$.

ARBEITSBUCH FÜR GYMNASIEN



MATHEMATIK NEUE WEGE

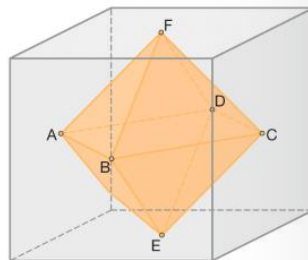
LINEARE ALGEBRA | ANALYTISCHE GEOMETRIE



Schmidt, G. u. a. (Hrsg., 2012): Mathematik. Neue Wege. Lineare Algebra |
Analytische Geometrie. Braunschweig: Schroedel

- 18** Geraden und Ebenen im Oktaeder
Beschreiben Sie die Lagemöglichkeiten von Geraden oder Ebenen zueinander am Oktaeder.
Geben Sie jeweils ein Beispiel an.
Erstellen Sie eine Übersicht über alle Lagemöglichkeiten von Geraden oder Ebenen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



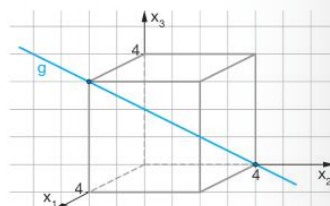
- 19** Auf einen Blick

Erläutern Sie am Bild und an den Vektoren.

a) $P = (3 | 1 | 3)$ liegt auf $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

b) Die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ läuft

nicht durch den Ursprung.



c) Die Ebene durch die Punkte $(4 | 4 | 4)$, $(0 | 0 | 4)$ und $(0 | 4 | 4)$ ist parallel zu einer Koordinatenebene.

d) Die Punktmenge $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ stellt keine Ebene, sondern eine Gerade dar.

- 20** Gerade im Raum

Welche geometrische Bedeutung haben die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{u}$ in einer Geradengleichung $g: \vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$? Veranschaulichen Sie dies mit einer Skizze.

- 21** Drei Geraden

Zur Geraden $g: \vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ sollen die Gleichungen von drei Geraden h , k und l angegeben werden, sodass gilt: g und h sind parallel, g und k schneiden sich in einem Punkt, g und l sind windschief. Welche Bedingungen müssen jeweils der Stütz- und der Richtungsvektor erfüllen?

- 22** GTR – Ergebnisse interpretieren

Bei der Untersuchung der Lagebeziehung von Geraden und Ebenen in Parameterform ergaben sich aus den erweiterten Koeffizientenmatrizen mithilfe des `rref`-Befehls folgende Diagonalmatrizen.

Interpretieren Sie die jeweiligen Situationen geometrisch.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3 Skalarprodukt und Messen

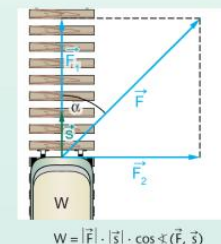
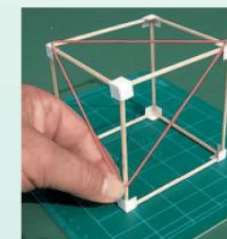
Mithilfe einer neuen Operation, dem Skalarprodukt von Vektoren, können metrische Eigenschaften wie Länge, Winkel und Abstände algebraisch beschrieben und berechnet werden.

Damit werden die Objektstudien um viele interessante Aspekte erweitert.

3.1 Skalarprodukt und Winkel

Mit dem Skalarprodukt von Vektoren können Winkel zwischen zwei Vektoren algebraisch berechnet werden. Dadurch kann man auf einfache Weise die Orthogonalität von Vektoren als Spezialfall beschreiben und rechnerisch nachweisen.

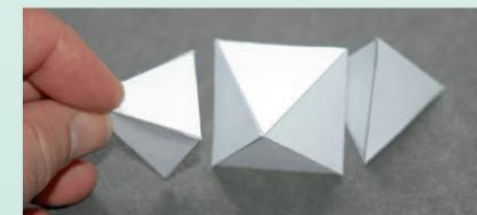
Mit dem Skalarprodukt lassen sich manche Beweise für Sätze aus der Elementargeometrie finden und einfach darstellen. Auch in der Physik findet das Skalarprodukt viele Anwendungen.



3.2 Winkel zwischen Geraden und Ebenen

Welchen Winkel bildet die Raumdiagonale des Würfels mit den Seitenflächen? In welchem Winkel stoßen die Flächen bei den verschiedenen platonischen Körpern aneinander?

Aus der Formel für die Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren können Winkel zwischen Geraden oder Ebenen bestimmt werden. Dabei vereinfacht die Normalenform der Ebenengleichung einige Berechnungen wesentlich.



Oktaederwinkel und Tetraederwinkel ergänzen sich zu 180° .

3.3 Abstandsprobleme

Der Abstand eines Punktes zu einer Geraden oder der Abstand zweier paralleler Geraden im Raum lässt sich mithilfe von „Lotvektoren“ recht einfach bestimmen. Andere Abstandsprobleme wie zum Beispiel der Abstand windschiefer Geraden lassen sich auf einfachere Fälle zurückführen. Abstandsprobleme lassen sich auch als Minimierungsprobleme beschreiben. Dabei bewährt sich das Zusammenspiel von Analytischer Geometrie und Analysis.



3.1 Skalarprodukt und Winkel

Was Sie erwartet



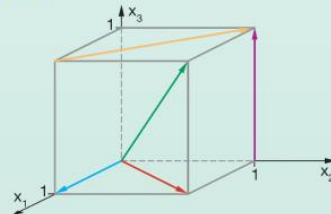
Bisher haben wir uns in der Geometrie im Wesentlichen mit Lagebeziehungen von Punkten, Geraden und Ebenen beschäftigt. Dabei lieferte uns die Darstellung und Beschreibung geometrischer Objekte durch Vektoren eine gute Hilfe. Als Vektoroperationen benötigen wir die Vektor-Addition und die S-Multiplikation.

Zwar haben wir in manchen Objekten auch bereits Längen und Orthogonalität von Vektoren berechnet, hierfür stand uns aber noch keine geeignete Vektoroperation zur Verfügung.

Mit dem **Skalarprodukt** wird in diesem Abschnitt eine solche Operation eingeführt. Mithilfe des Skalarproduktes lassen sich die metrischen Eigenschaften wie Länge, Orthogonalität und auch Winkel zwischen Vektoren algebraisch beschreiben und berechnen.

Aufgaben

1 Senkrechte Vektoren im Raum



a) Sieht man in dem Bild, welche der farbig eingezeichneten Vektoren senkrecht zueinander stehen? Wie entscheiden Sie?

Mit dem Kriterium aus der Formelsammlung können Sie Ihre Vermutung rechnerisch überprüfen.

b) Wie lässt sich dieses Kriterium begründen?

Hier hilft wieder einmal der Satz des Pythagoras:

$$\overline{CA} \perp \overline{CB} \\ \overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{AB}^2$$

Übersetzt in vektorielle Darstellung:

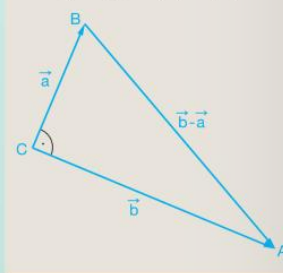
$$\vec{a} \perp \vec{b} \\ |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 \\ (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + \dots = \dots$$

Führen Sie den Beweis zu Ende.

Zur Erinnerung:
Für die Länge eines Vektors $\vec{v}$ gilt:
 $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$
 $|\vec{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$

Aus der Formelsammlung:

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann senkrecht zueinander, wenn gilt: $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

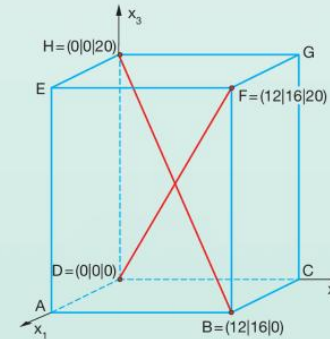
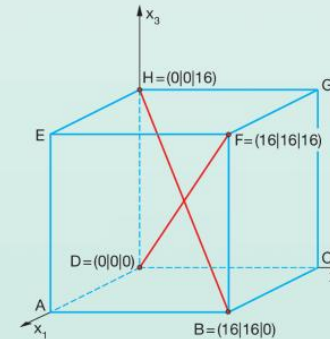


2 Schätzen, Messen und Berechnen von Winkeln im Raum

a) Unter welchem Winkel schneiden sich die Raumdiagonalen im Würfel und im Quader?

Schätzen Sie anhand der Schrägbilder. Wie gut ist Ihre Schätzung?

Entscheiden Sie durch Messen an einem Modell.



b) Lassen sich die Winkel auch rechnerisch ermitteln? Vielleicht haben Sie in der Mittelstufe den Kosinussatz behandelt. In der Formel kommen die Längen der Dreiecksseiten vor. Diese können wir vektoriell be-

rechnen, z. B. $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

In vektorieller Schreibweise sieht der Kosinussatz so aus:

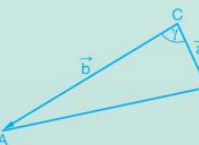
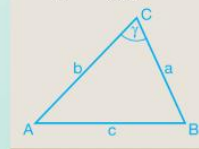
$$\cos(\gamma) = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Zeigen Sie, dass Sie durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen

$$\cos(\gamma) = \frac{2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)}{2\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \text{ erhalten.}$$

Vergleichen Sie Ihre Messergebnisse mit den Ergebnissen, die Sie mit der Formel berechnen.

Kosinussatz
 $\cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$



Basiswissen

Mithilfe einer weiteren Verknüpfung von Vektoren können Winkel und Längen berechnet werden.

Skalarprodukt von Vektoren

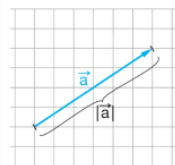
Die Bezeichnung Skalarprodukt ist darauf zurückzuführen, dass das Ergebnis dieser „Multiplikation“ eine Zahl ist. Die Physiker nennen diese Zahlen „Skalare“.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

$$\text{Schreibweise: } \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Länge eines Vektors



$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Orthogonalität von Vektoren

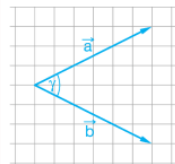
Zwei Vektoren sind genau dann zueinander orthogonal, wenn $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Mit Koordinaten:

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

Winkel zwischen zwei Vektoren



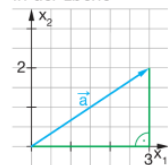
$$\cos(\gamma) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Die Beziehung $\cos(\gamma) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ kann auch als Definition für das Skalarprodukt verwendet werden: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\gamma)$

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ gilt:

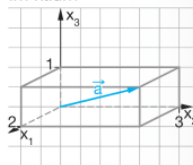
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 5 + 1,5 \cdot 8 = 3$$

in der Ebene

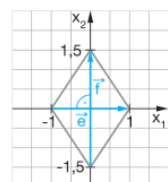


$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

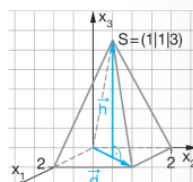
im Raum



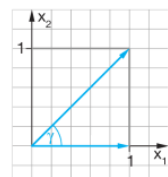
$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$



$$\vec{e} \cdot \vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 = 0$$

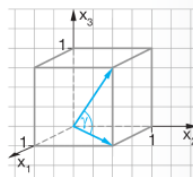


$$\vec{d} \cdot \vec{h} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 = 0$$



$$\cos(\gamma) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\gamma = 45^\circ$$



$$\cos(\gamma) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\gamma \approx 35,3^\circ$$

A Skalarprodukt

Nennen Sie Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen dem Skalarprodukt von Vektoren und der bekannten Multiplikation reeller Zahlen.

Lösung:

Das Ergebnis der Multiplikation zweier reeller Zahlen ist wieder eine reelle Zahl.

Beispiel: $3 \cdot (-2) = -6$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist nicht wieder ein Vektor, sondern eine reelle Zahl.

$$\text{Beispiel: } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1,5 \cdot (-5) + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = -3,5$$

Das Skalarprodukt kann positiv, negativ oder 0 sein.

Beide Verknüpfungen sind kommutativ.

B Winkel im Dreieck – Schätzen und Berechnen

a) Begründen Sie geometrisch und rechnerisch, dass das Dreieck BCH im Einheitswürfel rechtwinklig ist.

b) Wie groß sind die beiden anderen Winkel? Schätzen und berechnen Sie.

Lösung:

a) Geometrische Begründung: Die Seite CH liegt auf der hinteren Würfelkante und bildet daher mit der Würfelkante BC einen rechten Winkel.

Rechnerische Begründung:

Koordinaten der Eckpunkte: B = (1|1|0), C = (0|1|0) und H = (0|0|1).

$$\text{Vektoren: } \vec{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{CH} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Skalarprodukt: } \vec{CB} \cdot \vec{CH} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = 0.$$

Somit ist der Winkel bei C ein rechter Winkel.

b) Der Winkel γ bei H ist geschätzt 30° groß und damit muss der Winkel bei B etwa 60° groß sein.

$$\vec{HB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{HC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ Somit ist } \cos(\gamma) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

$$\text{Also } \cos(\gamma) = 0,82 \Rightarrow \gamma \approx 35,3^\circ.$$

Der Winkel bei B beträgt dann ca. $54,7^\circ$.

Wenn man den Winkel zwischen $\vec{HB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{CH} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ berechnet, erhält man

$$\cos(\gamma) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{6}}. \text{ Also } \cos(\gamma) = -0,82 \Rightarrow \gamma \approx 144,7^\circ.$$

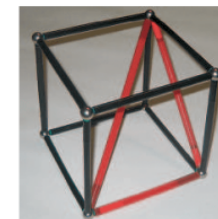
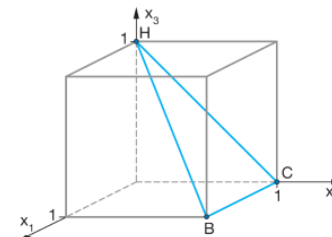
Je nach Orientierung der beiden Vektoren erhält man den spitzen Winkel oder den Ergänzungswinkel zu 180° .

3 Skalarprodukt berechnen

Berechnen Sie die Skalarprodukte.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0,5 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e) } \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiele

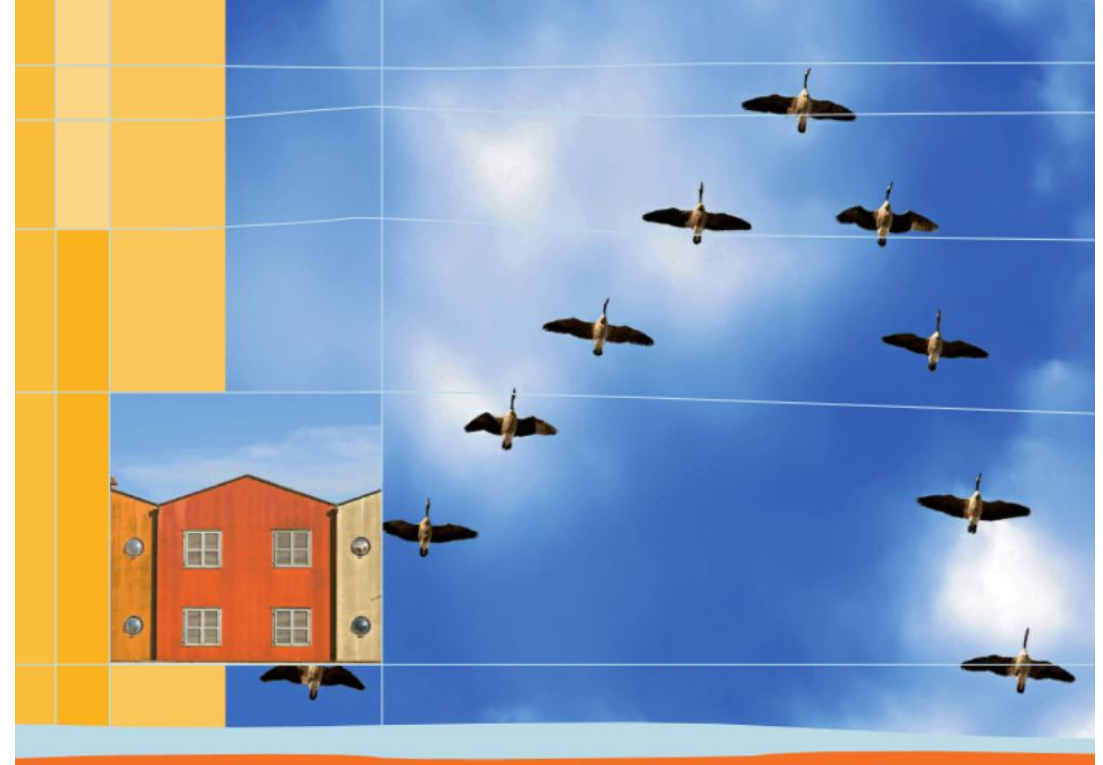


$$2/\sqrt{6} = 0,8164965809$$

$$\cos^{-1}(Ans) = 35,26438968$$

Übungen

Lösungen
-8; -3; -2; 0; 4



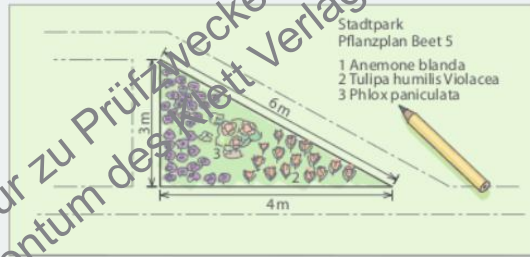
Lambacher Schweizer

Mathematik

Analytische Geometrie und lineare Algebra



2 Zueinander orthogonale Vektoren – Skalarprodukt



Ein Praktikant der Stadtgärtnerei hat von einem Blumenbeet im Stadtpark eine nicht maßstäbliche Skizze angefertigt. Hier stimmt etwas nicht.

Sehr oft ist bei alltäglichen Fragestellungen ebenso wie bei rein geometrischen Aufgaben zu klären, ob zwei Geraden zueinander orthogonal (das heißt senkrecht) sind. Wie solche Problemstellungen auch vektoriell gelöst werden können, wird im Folgenden erarbeitet.

orthos (griech): recht, richtig (vgl. auch Orthografie)
gonia (griech): Ecke, Winkel
Orthogonal bedeutet wörtlich „rechteckig“, wird aber in der Mathematik als Synonym für senkrecht verwendet.

Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ ($\neq \vec{0}$) heißen zueinander **orthogonal**, wenn ihre zugehörigen Pfeile mit gleichem Anfangspunkt ebenfalls zueinander orthogonal (das heißt senkrecht) sind. In Zeichen: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

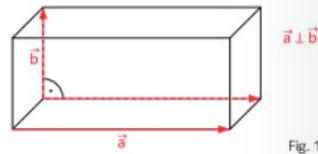


Fig. 1

Die Orthogonalität zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kann man mithilfe ihrer Koordinaten überprüfen. Nach dem Satz von Pythagoras gilt: Die Pfeile zweier Vektoren $\vec{a}$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}$ mit $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ wie in Fig. 2 sind genau dann zueinander orthogonal,

wenn $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2$.

Es ist $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 = (a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2) + (a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2)$.

Und somit $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$.

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind also genau dann zueinander orthogonal, wenn für ihre Koordinaten gilt: $2 \cdot (a_1b_1 + a_2b_2) = 0$, also $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$. Entsprechendes gilt für Vektoren im Raum.

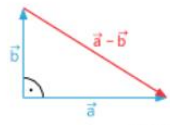


Fig. 2

Die Bezeichnung **Skalarprodukt** erinnert daran, dass dieses Produkt der Vektoren kein Vektor, sondern ein „Skalar“ (das heißt eine Maßzahl) ist.

Zu den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ heißt

der Term $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ **Skalarprodukt** $\vec{a} \cdot \vec{b}$ der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Man schreibt $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Es gilt: Zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ sind genau dann zueinander orthogonal,

wenn für ihre Koordinaten gilt: $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

Für das Skalarprodukt von Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ gilt:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, (Kommutativgesetz)
- $r \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (r \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b}$ für jede reelle Zahl r
- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$, (Distributivgesetz)
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Beispiel 1 Orthogonalität bei Geraden prüfen

Die Geraden g und h schneiden sich. Sind sie zueinander orthogonal?

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

■ Lösung: Zwei sich schneidende Geraden sind immer dann zueinander orthogonal, wenn ihre Richtungsvektoren zueinander orthogonal sind.

a) $\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} = -4 \cdot 2 + 1 \cdot 9 + 0 \cdot (-1) = 0$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1) + 13 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = -23$

Die Geraden g und h sind zueinander orthogonal.

Die Geraden g und h sind nicht zueinander orthogonal.

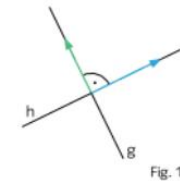


Fig. 1

© Vektoris3D
Normalenvektor

Beispiel 2 Bestimmung zueinander orthogonaler Vektoren

Bestimmen Sie alle Vektoren, die sowohl zum Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ als auch zum Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ orthogonal sind.

■ Lösung: Ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$ orthogonal, so gilt: $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$ und $6x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0$.

Umwandlung in Stufenform: $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$
 $x_2 - 4x_3 = 0$

Wählt man $x_3 = t$ als Parameter, so erhält man als Lösungsmenge $L = \{(-4t; 4t; t) | t \in \mathbb{R}\}$.

Für die gesuchten Vektoren gilt damit: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4t \\ 4t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($t \in \mathbb{R}$).

Aufgaben

1 Überprüfen Sie, ob die sich schneidenden Geraden g und h zueinander orthogonal sind.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

2 Bestimmen Sie die fehlende Koordinate so, dass $\vec{a} \perp \vec{b}$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ b_3 \end{pmatrix}$

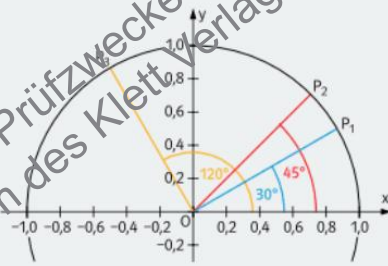
3 Geben Sie eine Gleichung einer Geraden h an, die die Gerade g orthogonal schneidet.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ c) $g: \vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

4 Beschreiben Sie mithilfe eines geeigneten Skalarproduktes, dass

- das Dreieck ABC bei C rechtwinklig ist,
- das Dreieck ABC bei A rechtwinklig ist,
- das Viereck ABCD ein Rechteck ist,
- das Viereck ABCD ein Quadrat ist.

5 Winkel zwischen Vektoren – Skalarprodukt



In der Grafik ist ein Teil eines Einheitskreises abgebildet. Bestimmen Sie die Koordinaten der Vektoren $\vec{OP}_1$, $\vec{OP}_2$ und $\vec{OP}_3$ sowie deren Skalarprodukte mit dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

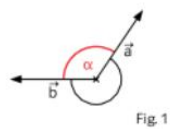


Fig. 1

Zeichnet man zu einem gemeinsamen Anfangspunkt Pfeile zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die nicht zueinander parallel sind, so entstehen zwei Winkel. Den kleineren dieser beiden Winkel bezeichnet man als den **Winkel zwischen den Vektoren** $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (Fig. 1). Die Größe des Winkels zwischen zwei Vektoren kann man mithilfe des Skalarproduktes bestimmen.

Der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in Fig. 2 ist gleich dem Winkel QPR bzw. α im rechtwinkligen Dreieck PQR.

$$\text{Es gilt: } \cos(\alpha) = \frac{PQ}{PR}.$$

Die Strecke $\overline{PQ}$ ist die senkrechte Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf den Einheitsvektor $\vec{a}_0$, deshalb gilt: $|\overline{PQ}| = \vec{a}_0 \cdot \vec{b}$.

Die Länge der Strecke $\overline{PR}$ ist gleich dem Betrag des Vektors $\vec{b}$.

$$\text{Damit erhält man: } \cos(\alpha) = \frac{\vec{a}_0 \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

$$\text{Wenn man den Bruch mit } |\vec{a}| \text{ erweitert, ergibt sich: } \cos(\alpha) = \frac{|\vec{a}| \cdot \vec{a}_0 \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Wenn der Winkel α zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ größer als 90° ist, betrachtet man das Dreieck PQ_1R (Fig. 3) und erhält mit analogen Überlegungen:

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{-\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \text{ und wegen}$$

$$\cos(\alpha) = -\cos(180^\circ - \alpha):$$

$$\cos(\alpha) = \frac{-(-\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

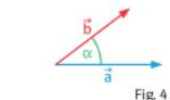


Fig. 4



Fig. 5

Definition: Unter dem Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ versteht man den kleineren der beiden Winkel, der entsteht, wenn man Pfeile der Vektoren zu einem gemeinsamen Anfangspunkt zeichnet.

Satz: Für den Winkel α zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha) \text{ bzw. } \cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \text{ mit } 0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ.$$

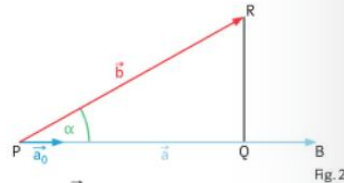


Fig. 2

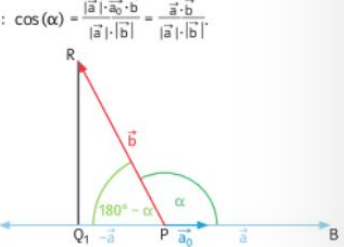


Fig. 3

Beispiel Winkelberechnung

Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(1|-1|-5)$, $B(3|2|-4)$ und $C(5|-1|-2)$. Berechnen Sie die Innenwinkel des Dreiecks ABC.

$$\text{Lösung: } \vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}; \vec{BA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{CA} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix};$$

$$|\vec{AB}| = |\vec{BA}| = \sqrt{14}; |\vec{AC}| = |\vec{CA}| = \sqrt{34}; |\vec{BC}| = \sqrt{17};$$

$$\alpha: \text{Winkel zwischen } \vec{AB} \text{ und } \vec{AC} \quad \cos(\alpha) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{8+0+3}{\sqrt{14} \cdot 5} = \frac{11}{5\sqrt{14}}; \alpha \approx 54,0^\circ$$

$$\beta: \text{Winkel zwischen } \vec{BA} \text{ und } \vec{BC} \quad \cos(\beta) = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{-4+9-2}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{17}} = \frac{3}{\sqrt{238}}; \beta \approx 78,8^\circ$$

γ : kann man mithilfe des Winkelsummensatzes berechnen: $\gamma = 180^\circ - 54,0^\circ - 78,8^\circ = 47,2^\circ$

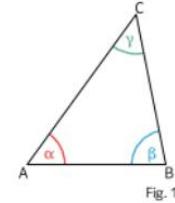


Fig. 1

Aufgaben

1 Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \vec{a} = \begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2 Berechnen Sie die Längen der Seiten und die Größen der Winkel im Dreieck ABC. Zeichnen Sie für die Teilaufgaben a) und b) das Dreieck und messen Sie nach.

$$\text{a) } A(2|1), B(5|-1), C(4|3) \quad \text{b) } A(1|1), B(9|-2), C(3|8) \\ \text{c) } A(5|0|4), B(3|0|0), C(5|4|0) \quad \text{d) } A(5|1|5), B(5|5|3), C(3|3|5)$$

3 Der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist α . Bestimmen Sie die fehlende Koordinate.

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \alpha = 90^\circ \quad \text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ b \\ 0 \end{pmatrix}; \alpha = 30^\circ \quad \text{c) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}; \alpha = 60^\circ$$

4 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie jeweils die Größe des Winkels zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$, $-\vec{a}$ und $\vec{b}$, $\vec{a}$ und $-\vec{b}$ sowie $-\vec{a}$ und $-\vec{b}$.

Zeit zu überprüfen

5 Ein Viereck hat die Eckpunkte $O(0|0|0)$, $P(2|-2|-8)$, $Q(5|5|6)$ und $R(1|4|9)$. Berechnen Sie die Längen der Seiten und die Größen der Innenwinkel des Vierecks.

6 Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge 3. Berechnen Sie $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

7 Verbindet man die vier Punkte $A(2|-2|-2)$, $B(-2|5,5|-2)$, $C(-6|2|4)$ und $D(1|-2|1)$ so erhält man ein Viereck im Raum.

- Berechnen Sie die Größe der Innenwinkel.
- Bestimmen Sie die Winkelsumme. Was fällt Ihnen auf? Geben Sie dazu eine Erklärung.
- Bestimmen Sie zu den Punkten A, B und C aus Teilaufgabe a) einen vierten Punkt E so, dass die Winkelsumme im Viereck ABCE 360° beträgt.

8 In Fig. 2 ist ein Würfel mit der Kantenlänge 5 dargestellt. Berechnen Sie die Seitenlängen und die Größen der Winkel des roten und des blauen Dreiecks.

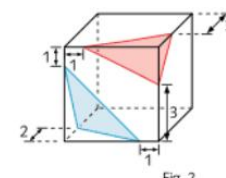


Fig. 2

Bigalke/Köhler

Mathematik

Analytische Geometrie | Stochastik **Band 2**



Cornelsen

5. Das Skalarprodukt

A. Definition des Skalarproduktes

Ein Wagen wird gleichmäßig von einem Pferd über einen Sandweg gezogen. Dabei wird eine Kraft in Richtung der Deichsel aufgebracht, die sich durch den Kraftvektor $\vec{F}_s$ darstellen lässt.

Der zurückgelegte Weg lässt sich ebenfalls vektoriell durch den Wegvektor $\vec{s}$ darstellen. Beide seien im Winkel γ zueinander geneigt.



„Arbeit = Kraft · Weg“

Arbeit = $\frac{\text{Kraft in Wegrichtung}}{\text{Weglänge}}$ · Weglänge

$$W = F_s \cdot s$$

$$W = |\vec{F}| \cdot \cos \gamma \cdot |\vec{s}|$$

$$W = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \gamma$$

Definition des Skalarproduktes



$\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien zwei Vektoren und γ der Winkel zwischen diesen Vektoren ($0^\circ \leq \gamma \leq 180^\circ$).

Dann setzt man

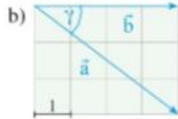
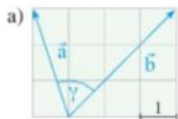
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \gamma$$

und bezeichnet dieses Produkt als **Skalarprodukt** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.



Übung 1

Bestimmen Sie das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Messen Sie die benötigten Längen und Winkel aus oder errechnen Sie diese mit dem Satz des Pythagoras und Trigonometrie oder verwenden Sie zur Berechnung ein CAS.

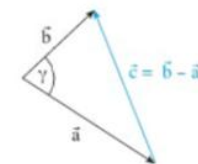


c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

Ziel der folgenden Überlegungen ist die Gewinnung einer vektor- und winkelfreien Darstellung des Skalarproduktes von Spaltenvektoren.

Wir betrachten zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die ein Dreieck aufspannen, wie abgebildet. In einem allgemeinen Dreieck gilt der Kosinussatz der Trigonometrie, von dem unsere Rechnung ausgeht:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma \quad \text{Kosinussatz}$$

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \gamma$$

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \quad \text{Def. des Skalarproduktes}$$

$$2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2 \quad \text{Umformung}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad |\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad |\vec{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} \quad |\vec{c}|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$$

Durch Einsetzen der rechts aufgeführten Darstellungen für die Beträge der Spaltenvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ folgt:

$$2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (b_1 - a_1)^2 - (b_2 - a_2)^2$$

$$2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 a_1 b_1 + 2 a_2 b_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Analog ergibt sich für dreidimensionale Spaltenvektoren die Formel

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Das Skalarprodukt von Spaltenvektoren lässt sich also als Produktsumme von Koordinaten darstellen.

Koordinatenform des Skalarproduktes

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

069-1

Beispiele: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 7$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-4) = 4$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) + 4 \cdot (-2) = 0$$

Im Folgenden werden wir sehen, dass viele Probleme durch Anwendung des Skalarproduktes vereinfacht gelöst werden können. Oft benötigt man dabei beide Darstellungen des Skalarproduktes, die winkelbezogene Form $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \gamma$ sowie die koordinatenbezogenen Formen $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ bzw. $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

Übungen

2. Berechnen Sie in den abgebildeten Figuren das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
- Messen Sie die benötigten Längen und Winkel mit dem Geodreieck aus.
 - Errechnen Sie die benötigten Längen und Winkel mittels Pythagoras u. Trigonometrie.
 - Verwenden Sie Spaltenvektoren.



Berechnen Sie die angegebenen Skalarprodukte.

- a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$
- b) $\vec{DA} \cdot \vec{DF}$, $\vec{FB} \cdot \vec{FD}$, $\vec{AF} \cdot \vec{AD}$, $\vec{DC} \cdot \vec{DF}$
- c) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{a} \cdot \vec{d}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$, $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{d} + \vec{e} + \vec{f})$

4. Errechnen Sie ohne und mit CAS die folgenden Skalarprodukte.

a) $\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3a \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -a \\ 2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

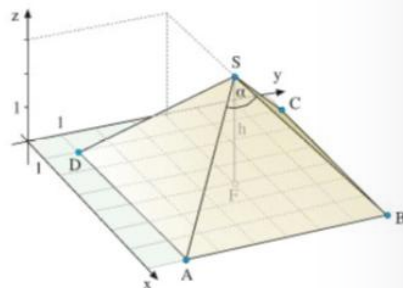
5. Wie muss a gewählt werden, wenn die folgenden Gleichungen gelten sollen? Bearbeiten Sie die Aufgabe zunächst ohne und dann mit CAS.

a) $\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ 1 \\ a \end{pmatrix} = 0$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ a \end{pmatrix} = 1$ c) $\begin{pmatrix} a-1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} \right) = 6$

6. Die Abbildung zeigt eine quadratische Pyramide mit den Seitenlängen $AB = 6$, $BC = 6$ sowie der Höhe $h = 3$.

a) Berechnen Sie die Skalarprodukte $\vec{SB} \cdot \vec{SC}$, $\vec{AD} \cdot \vec{DC}$, $\vec{AC} \cdot \vec{BD}$, $\vec{BA} \cdot \vec{BS}$.

b) Errechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{SA} \cdot \vec{SB}$ mit der Koordinatenform. Errechnen Sie die Längen SA und SB . Können Sie nun den Winkel $\alpha = \angle ASB$ bestimmen?



B. Rechenregeln für das Skalarprodukt

Für das Skalarprodukt von Vektoren gelten einige Rechengesetze, die wir nun auflisten und gelegentlich anwenden werden, vor allem bei theoretischen Herleitungen.

Rechenregeln für das Skalarprodukt

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ Kommutativgesetz
 $(r\vec{a}) \cdot \vec{b} = r(\vec{a} \cdot \vec{b})$ für $r \in \mathbb{R}$
 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ Distributivgesetz
 $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 > 0$ für $\vec{a} \neq \vec{0}$
 $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ für $\vec{a} = \vec{0}$

Exemplarischer Beweis des Kommutativgesetzes:

1. Methode: Kosinusdefinition des SP

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \gamma = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos \gamma = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

2. Methode: Koordinatenform des SP

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$= b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Rechts sind exemplarisch zwei Beweise für das Kommutativgesetz aufgeführt. Analog lassen sich die übrigen Gesetze beweisen.

Darüber hinaus gelten weitere Rechenregeln für das Skalarprodukt, die sich aber alle aus den obigen grundlegenden Rechengesetzen sowie der Definition des Skalarproduktes herleiten lassen, wie z. B. die binomischen Formeln (vgl. Übung 9). Andere „wohlvertraute“ Rechenregeln wie z. B. das Assoziativgesetz gelten für das Skalarprodukt nicht.

Übung 7

Beweisen Sie das Rechengesetz $(r\vec{a}) \cdot \vec{b} = r(\vec{a} \cdot \vec{b})$ für $r \in \mathbb{R}$ auf zwei Arten.

Übung 8

Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass das „Assoziativgesetz“ für das Skalarprodukt nicht gilt. Widerlegen Sie also $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Übung 9

Weisen Sie nur mithilfe der obigen Rechengesetze die Gültigkeit folgender Formeln nach.

a) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$ b) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$

Übung 10

Widerlegen Sie folgende „Rechenregeln“, die beim Zahlenrechnen eine große Rolle spielen.

a) $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$ b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$

Übung 11

Zeigen Sie:

- Sind zwei Vektoren gleich, so sind auch ihre Skalarprodukte mit einem 3. Vektor gleich.
- Aus Skalarprodukten von Vektoren darf man im Allgemeinen nicht kürzen.
 (Aus $\vec{x} \cdot \vec{c} = \vec{y} \cdot \vec{c}$ folgt nicht zwingend $\vec{x} = \vec{y}$.)

C. Der Winkel zwischen zwei Vektoren

Mithilfe des Skalarproduktes zweier Vektoren können sowohl **Längen** als auch **Winkel** auf vektorieller Basis gemessen werden. Die Grundlage bilden hierbei die beiden folgenden Sätze.

Bildet man das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst, so erhält man das Quadrat des Betrages des Vektors:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2.$$

Beispielsweise hat der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ die Länge 7, denn es gilt:

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 4 + 36 + 9 = 49 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{49} = 7.$$

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bilden stets zwei Winkel. Der kleinere der beiden Winkel wird als **Winkel zwischen den Vektoren** bezeichnet. Er kann mittels Skalarprodukt berechnet werden. Löst man die Skalarproduktgleichung $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \gamma$ nach $\cos \gamma$ auf, so erhält man die sogenannte **Kosinusformel**, die zur Winkelberechnung verwendet wird. 072-1

Der Betrag eines Vektors

Für den Betrag (die Länge) eines Vektors $\vec{a}$ gilt die Formel

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} \text{ bzw. } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

Die Kosinusformel

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien vom Nullvektor verschiedene Vektoren und γ sei der Winkel zwischen ihnen. Dann gilt:

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Beispiel: Winkelberechnung

Errechnen Sie den Winkel zwischen den Spaltenvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung ohne CAS:

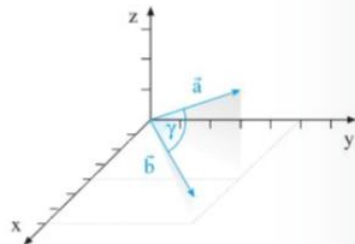
Wir errechnen zunächst die Beträge von $\vec{a}$ und $\vec{b}$: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{50}$, $|\vec{b}| = \sqrt{75}$.

Nun wenden wir die Kosinusformel an:

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{56}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{75}} \approx 0,9145.$$

Mit dem Taschenrechner folgt:

$$\gamma \approx \cos^{-1}(0,9145) \approx 23,87^\circ.$$



Hinweis: Es ist sinnvoll, die Kosinusformel im CAS als Funktion zu speichern. Auf Seite 343 findet man in dem Zusammenhang auch die CAS-Lösung des letzten Beispiels.

Beispiel: Gegeben sei das Dreieck mit den Eckpunkten $P(5|5|1)$, $Q(6|1|2)$, $R(1|0|4)$. Bestimmen Sie die Größe des Innenwinkels γ am Eckpunkt R des Dreiecks.

Lösung:

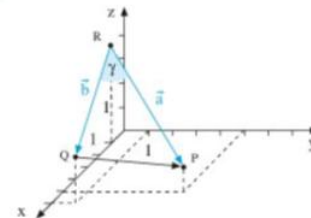
Wir stellen die beiden Dreiecksseiten, die am Winkel γ anliegen, zunächst durch die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{RP}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{RQ}$ dar.

γ lässt sich als Winkel zwischen diesen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auffassen.

Nun können wir mithilfe der Kosinusformel den Kosinus des Winkels γ bestimmen.

Wir erhalten $\cos \gamma \approx 0,8004$.

Hieraus folgt unmittelbar $\gamma \approx 36,83^\circ$.



$$\vec{a} = \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{20 + 5 + 6}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{30}} \approx 0,8004$$

$$\gamma \approx 36,83^\circ$$

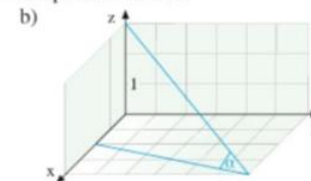
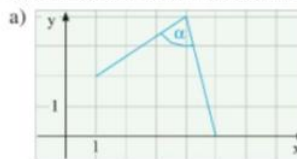
Übung 12

Bestimmen Sie die Größe des Winkels zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Übung 13

Bestimmen Sie die Größe des Winkels α mithilfe von Spaltenvektoren.



Übung 14

Bestimmen Sie alle Winkel im Dreieck PQR.

a) $P(3|4)$, $Q(6|3)$, $R(3|0)$ b) $P(3|4|1)$, $Q(6|3|2)$, $R(3|0|3)$
c) $P(6|3|8)$, $Q(7|4|3)$, $R(4|4|2)$ d) $P(1|2|2)$, $Q(3|4|2)$, $R(2|3|2 + \sqrt{3})$

Übung 15

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$. Wie muss die Koordinate z gewählt werden,

damit der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eine Größe von 45° hat?

D. Orthogonale Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ($\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$) werden als zueinander **orthogonale Vektoren** bezeichnet, wenn sie senkrecht aufeinander stehen. Man verwendet hierfür die symbolische Schreibweise $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Mithilfe des Skalarproduktes kann man besonders einfach überprüfen, ob zwei Vektoren orthogonal sind. Das Skalarprodukt der Vektoren ist dann nämlich gleich null, weil für $\gamma = 90^\circ$ gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0.$$

Beispiel: Orthogonale Vektoren

Prüfen Sie, ob zwei der drei Vektoren orthogonal sind.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Rechtwinkliges Dreieck

Prüfen Sie, ob das Dreieck mit den Eckpunkten $A(0|0|4)$, $B(2|2|2)$, $C(0|3|1)$ rechtwinklig ist (Schrägbild anfertigen).

Lösung:

Im Schrägbild ist die Rechtwinkligkeit des Dreiecks nicht erkennbar.

Bilden wir jedoch rechnerisch die Seitenvektoren und berechnen dann deren Skalarprodukte, so stellt sich heraus, dass das Dreieck bei B rechtwinklig ist.

Beispiel: Termvereinfachung

Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit den Eigenschaften $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$ und $\vec{a} \perp \vec{b}$. Vereinfachen Sie den Term $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b})$.

Orthogonalitätskriterium

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ($\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$) sind genau dann orthogonal (senkrecht), wenn ihr Skalarprodukt null ist.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

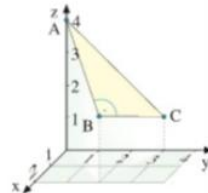


Lösung:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ sind nicht orthogonal.}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{c} \text{ sind orthogonal.}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 15 \Rightarrow \vec{b}, \vec{c} \text{ sind nicht orthogonal.}$$



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 12, \vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0, \vec{CB} \cdot \vec{CA} = 6$$

Lösung:

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b}) &= \\ &= 2\vec{a}^2 - 3\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{a} - 3\vec{b}^2 \\ &= 2|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} - 3|\vec{b}|^2 \\ &= 2 \cdot 4 - 0 - 3 \cdot 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Beispiel: Bestimmung eines orthogonalen Vektors

Gesucht ist ein Vektor $\vec{c}$, der zu den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ orthogonal ist.

Lösung:

Wir verwenden den Ansatz $\vec{c} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Da $\vec{c}$ sowohl zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{b}$ orthogonal sein soll,

müssen die Skalarprodukte $\vec{a} \cdot \vec{c}$ und $\vec{b} \cdot \vec{c}$ Null ergeben. Setzt man die Spaltenvektoren ein und verwendet man die Koordinatenform des Skalarprodukts, so erhält man ein Gleichungssystem von 2 Gleichungen mit 3 Variablen.

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \text{I } x + 2y + z = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \text{II } 3x - y + 2z = 0$$

$$\begin{array}{l} \text{I } x + 2y + z = 0 \\ \text{II } (-3) + \text{II } -7y - z = 0 \end{array}$$

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, beispielsweise die Lösung $x=5$, $y=1$

und $z=-7$. Der Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ ist also z. B. orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Übung 16

Prüfen Sie, welche der Vektoren orthogonal zueinander sind oder für welchen Wert von a sie orthogonal sein könnten.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} -a \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Übung 17

Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC einen rechten Winkel besitzt.

$$\text{a) } A(2|2|0), B(1|4|2), C(-1|4|0,5) \quad \text{b) } A(5|1|2), B(2|4|2), C(-1|1|2)$$

Übung 18

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ besitzen die Eigenschaften $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$ und $\vec{a} \perp \vec{b}$. Vereinfachen Sie die folgenden Terme:

$$\text{a) } (3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) \quad \text{b) } (\vec{a} - \vec{b})^2 \quad \text{c) } (\vec{a} - 5\vec{b}) \cdot (\vec{b} + \vec{a})$$

Übung 19

Geben Sie einen Vektor an, der zu dem bzw. zu den gegebenen Vektoren orthogonal ist.

$$\text{a) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Übung 20

Untersuchen Sie, ob die Diagonalen im Viereck ABCD mit $A(2|1)$, $B(4|2)$, $C(3|5)$ und $D(0|3)$ orthogonal zueinander sind. Fertigen Sie eine Zeichnung an.

Skalarprodukt

axiomatischer Zugang

Definition

Es sei V ein Vektorraum und φ eine Abbildung, die jedem Paar $(\vec{v}; \vec{w})$ von Vektoren eine reelle Zahl $\varphi(\vec{v}; \vec{w})$ zuordnet. Eine solche Abbildung heißt **Skalarprodukt**, wenn gilt:

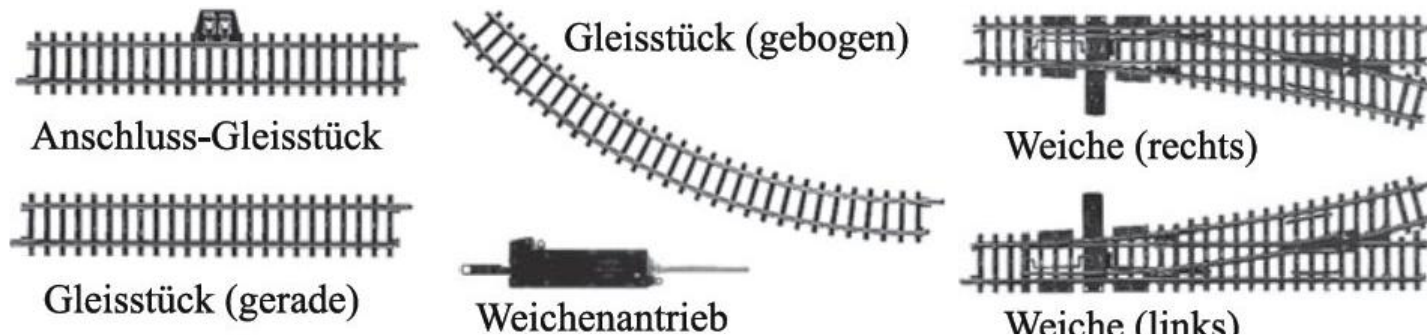
- (L) $\forall r \in \mathbb{R} \forall \vec{v}, \vec{w} \in V: \varphi(r \vec{v}; \vec{w}) = \varphi(\vec{v}; r \vec{w}) = r \varphi(\vec{v}; \vec{w})$ (Linearität)
- (D) $\forall \vec{u}; \vec{v}; \vec{w} \in V: \varphi(\vec{u} + \vec{v}; \vec{w}) = \varphi(\vec{u}; \vec{w}) + \varphi(\vec{v}; \vec{w})$ (Distributivität)
- (K) $\forall \vec{v}; \vec{w} \in V: \varphi(\vec{v}; \vec{w}) = \varphi(\vec{w}; \vec{v})$ (Kommutativität)
- (P) $\forall \vec{v} \in V: \varphi(\vec{v}; \vec{v}) \geq 0$ (Positivität)
- (R) $\forall \vec{v} \in V: \varphi(\vec{v}; \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$ (Reichhaltigkeit)

Ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt heißt **euklidischer Vektorraum**.

Skalarprodukt

arithmetischer Zugang

Artikel	Stückzahl im Basissortiment	Stückzahl im Ergänzungssortiment 1	Stückzahl im Ergänzungssortiment 2	Preis pro Stück
Gleisstück (gerade)	3	8	15	2,40 €
Gleisstück (gebogen)	8	4	8	2,70 €
Anschluss-Gleisstück	1	0	1	6,29 €
Weiche (links)	0	1	2	17,98 €
Weiche (rechts)	0	1	2	17,98 €
Weichenantrieb	0	2	4	12,98 €



Bestimmen Sie den Gesamtpreis von Ergänzungssortiment 2.



2 min

Skalarprodukt

arithmetischer Zugang

Artikel	Stückzahl im Basissortiment	Stückzahl im Ergänzungssortiment 1	Stückzahl im Ergänzungssortiment 2	Preis pro Stück
Gleisstück (gerade)	3	8	15	2,40 €
Gleisstück (gebogen)	8	4	8	2,70 €
Anschluss-Gleisstück	1	0	1	6,29 €
Weiche (links)	0	1	2	17,98 €
Weiche (rechts)	0	1	2	17,98 €
Weichenantrieb	0	2	4	12,98 €

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} 2,40 \\ 2,70 \\ 6,29 \\ 17,98 \\ 17,98 \\ 12,98 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 \circ \vec{p} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2,40 \\ 2,70 \\ 6,29 \\ 17,98 \\ 17,98 \\ 12,98 \end{pmatrix} = 15 \cdot 2,40 + 8 \cdot 2,70 + 1 \cdot 6,29 + 2 \cdot 17,98 + 2 \cdot 17,98 + 4 \cdot 12,98 = 187,73 \text{ (in €)}$$

Teilevektor

Preisvektor

Gesamtpreis

Skalarprodukt

arithmetischer Zugang

1. Die Lehrkraft gibt eine neue Rechenvorschrift bekannt.

Definition:

Als Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$$

wird die Summe einander entsprechender Komponenten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bezeichnet:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y.$$

2. **Arbeitsauftrag für Schülerinnen und Schüler:**
Suchen Sie möglichst viele verschiedene Paare von Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, deren Skalarprodukt 0 ist.

Die Vorschrift „fällt vom Himmel“.
Die Schüleraktivierung besteht
hierin:



Überlegen Sie, was die Schülerinnen und Schüler an die Tafel schreiben könnten.

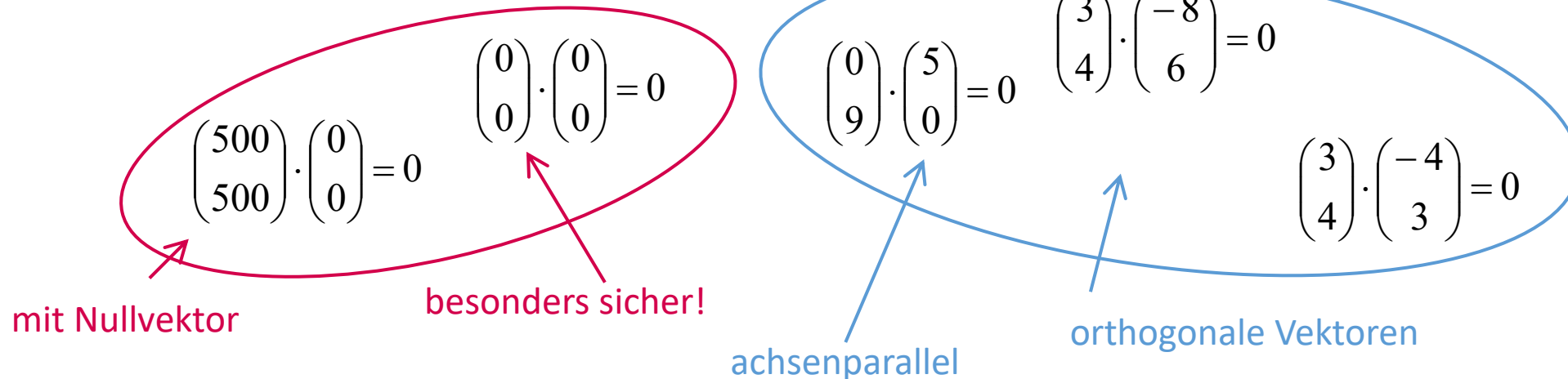


2 min

Skalarprodukt

arithmetischer Zugang

3. Ergebnisse



mit Nullvektor

besonders sicher!

achsenparallel

orthogonale Vektoren

$$\begin{pmatrix} 500 \\ 500 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

- Das Skalarprodukt wird 0, wenn der Nullvektor beteiligt ist oder wenn die beiden Vektoren orthogonal sind.
- Das Skalarprodukt hat irgendetwas mit dem Winkel zwischen den Vektoren zu tun.

Skalarprodukt

arithmetischer Zugang

- didaktische Bemerkungen

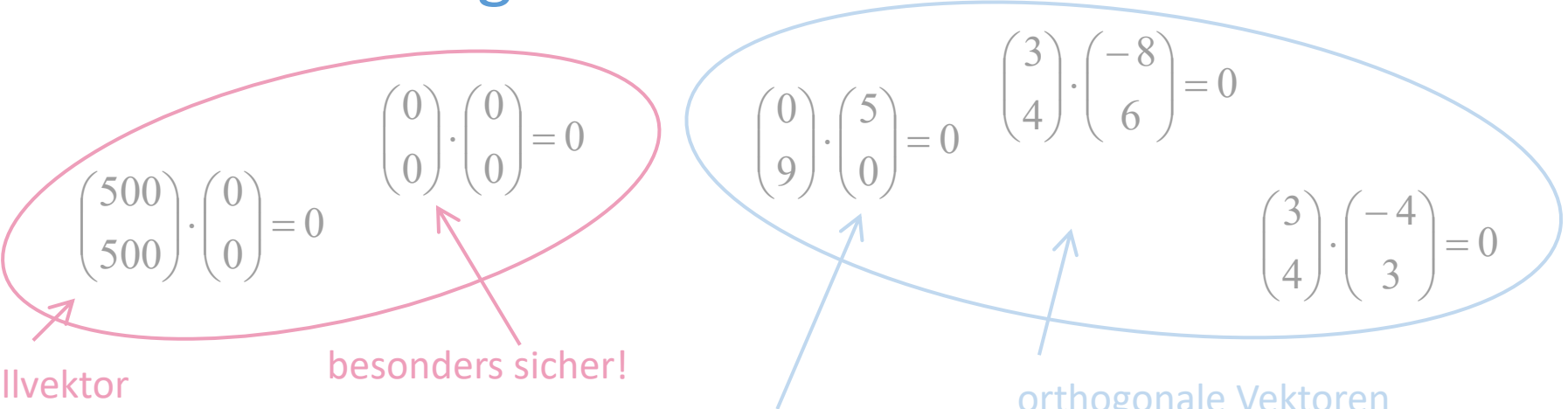


Diagram illustrating vector dot products and their geometric interpretations:

- mit Nullvektor** (with zero vector):
 - $\begin{pmatrix} 500 \\ 500 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$
 - $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$
- besonders sicher!** (especially safe!): Points to the second equation in the pink group.
- achsenparallel** (axis-parallel):
 - $\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$
- orthogonale Vektoren** (orthogonal vectors):
 - $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$
 - $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

- Spielerisch ein Verfahren entdeckt, orthogonale Vektoren zu finden
- Für zeichnerische Überprüfung wichtig, zunächst im $\mathbb{R}^2$ zu erarbeiten
- differenzierender Zusatzauftrag: auch Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$ betrachten (bewirkt erneut kreativen Ehrgeiz).

Skalarprodukt

arithmetischer Zugang

4. Arbeitsaufträge für Schülerinnen und Schüler:

- a. Untersuchen Sie das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst.
- b. Untersuchen Sie das Skalarprodukt eines Vektors mit seinem Gegenvektor.
- c. Untersuchen Sie das Skalarprodukt zweier kollinear Vektoren.

zu a: Das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst ist das Quadrat seines Betrages.

$$\vec{a} \circ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = a_x^2 + a_y^2 = |\vec{a}|^2 = a^2$$

Skalarprodukt

arithmetischer Zugang

4. Arbeitsaufträge für Schülerinnen und Schüler:

- a. Untersuchen Sie das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst.
- b. Untersuchen Sie das Skalarprodukt eines Vektors mit seinem Gegenvektor.
- c. Untersuchen Sie das Skalarprodukt zweier kollinearere Vektoren.

zu b: Das Skalarprodukt eines Vektors mit seinem Gegenvektor ist das Quadrat des Betrages multipliziert mit -1.

$$-\vec{a} \circ \vec{a} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = -a_x^2 - a_y^2 = (-1) \cdot [a_x^2 + a_y^2] = -|\vec{a}|^2 = -a^2$$

Skalarprodukt

arithmetischer Zugang

4. Arbeitsaufträge für Schülerinnen und Schüler:

- a. Untersuchen Sie das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst.
- b. Untersuchen Sie das Skalarprodukt eines Vektors mit seinem Gegenvektor.
- c. Untersuchen Sie das Skalarprodukt zweier kollinear Vektoren.

zu c: Das Skalarprodukt eines Vektors mit einem zum ihn kollinearen Vektor ist:

$$\vec{a} \circ (k \cdot \vec{a}) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} k \cdot a_x \\ k \cdot a_y \end{pmatrix} = k \cdot a_x^2 + k \cdot a_y^2 = k \cdot [a_x^2 + a_y^2] = k \cdot |\vec{a}|^2 = k \cdot a^2$$

Skalarprodukt

arithmetischer Zugang

4. Arbeitsauftrag für Schülerinnen und Schüler:

Untersuchen Sie das Skalarprodukt eines Differenzenvektors $\vec{a} - \vec{b}$ mit sich selbst.

$$\begin{aligned}(\vec{a} - \vec{b}) \circ (\vec{a} - \vec{b}) &= \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{pmatrix} \\&= (a_x - b_x)(a_x - b_x) + (a_y - b_y)(a_y - b_y) \\&= a_x^2 - 2a_x b_x + b_x^2 + a_y^2 - 2a_y b_y + b_y^2 \\&= a_x^2 + a_y^2 - 2[a_x b_x + a_y b_y] + b_x^2 + b_y^2 \\(\vec{a} - \vec{b}) \circ (\vec{a} - \vec{b}) &= |\vec{a}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \circ \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \circ \vec{b} + |\vec{b}|^2\end{aligned}$$

Skalarprodukt

arithmetischer & geometrischer Zugang

5. Was bedeutet nun $-2 \cdot \vec{a} \circ \vec{b}$?

Die Seiten im Dreieck OBA sind:

$$|\vec{a}|, |\vec{b}| \text{ und } |\vec{a} - \vec{b}|.$$

Der Kosinussatz im Dreieck OBA lautet:

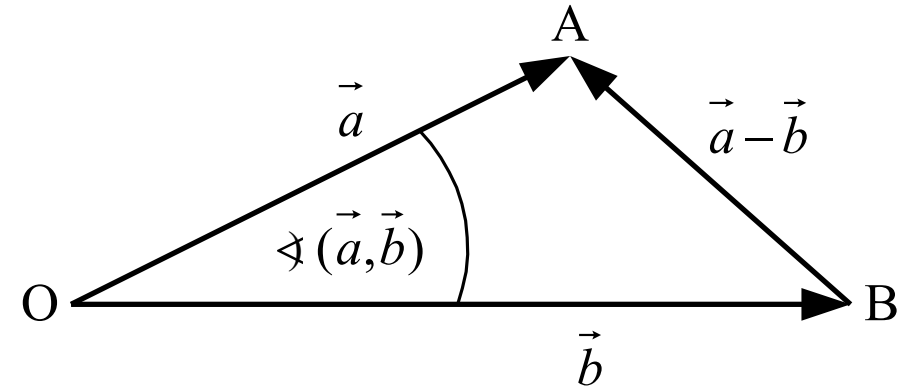
$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) + |\vec{b}|^2$$

Vergleich mit Gleichung aus 4:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \circ \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

liefert:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$$



Skalarprodukt

arithmetischer & geometrischer Zugang

6. Was bedeuten die Faktoren von $|\vec{a}| \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) \cdot |\vec{b}|$?

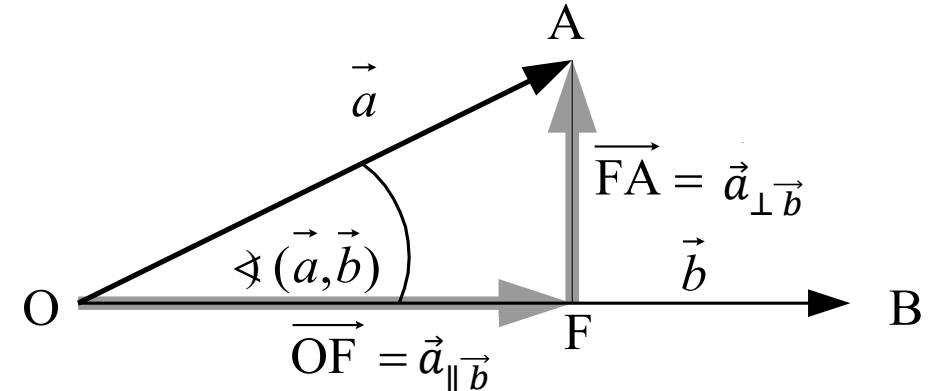
Der Kosinus im Dreieck OFA ist

$$\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = \frac{|\overrightarrow{OF}|}{|\vec{a}|}$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{OF}| = |\vec{a}| \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$$

Der Vektor $|\overrightarrow{OF}| = \vec{a}_{\parallel \vec{b}}$ ist die Projektion des Vektors $\vec{a}$ auf den Vektor $\vec{b}$.

Der Vektor $\vec{a}$ wird in zwei Komponenten zerlegt: $\vec{a}_{\parallel \vec{b}}$ - parallel zu $\vec{b}$
 $\vec{a}_{\perp \vec{b}}$ - orthogonal zu $\vec{b}$.



$\vec{a} \circ \vec{b}$ ist das Produkt der Länge des ersten Vektors mit der Länge der Projektion des zweiten Vektors auf den ersten.

Skalarprodukt

geometrischer Zugang - didaktische Bemerkungen

- Eine algebraische Verknüpfung zweier Vektoren wird geometrisch interpretiert.
- Das Vorgehen erhöht die gedankliche Beweglichkeit, z.B. beim Bestimmen orthogonaler Vektoren.
- Weitere Fragen schließen sich an, z.B. Verknüpfung dreier Vektoren, Unterschied zur s -Multiplikation.
- Typische Schwierigkeiten sind bei dieser Aufgabe zu erwarten: Bestimmen Sie alle Winkel im Dreieck ABC.
- Ältere Bücher bieten zusätzlich den umgekehrten Weg an, aus der geometrischen Situation ein Skalarprodukt zu gewinnen.

Skalarprodukt

Wozu?

didaktische Überlegungen

- Enorm wichtig ist die bewusste Verwendung der **Projektionsidee für Abstandsberechnungen** anstelle unverständener Rechenschemata.
- neue Darstellungsform (Normalenformen) für Ebenen durch geometrische Interpretation
- Rechenregeln für die Verknüpfung von Vektoren und Zahlen werden verständlich
- Ein ähnliches Vorgehen, eine algebraische Verknüpfung zweier Vektoren geometrisch zu interpretieren, ist beim Kreuzprodukt möglich.



Vektorprodukt

Vektorprodukt

Fachanforderungen

2.2.1 Leitidee 1: Algorithmus und Zahl

In der Oberstufe werden mit Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ neue algebraische Objekte und Operationen eingeführt, die über die aus der Sekundarstufe I bekannten Zahlbereiche hinausgehen.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Verbindliche Themen und Inhalte	Vorgaben und Hinweise
Die Schülerinnen und Schüler ...		
• lösen per Hand einfache Gleichungen, die sich durch Anwenden von	• Gleichungen n -ten Grades • Exponentialgleichungen	Die Polynomdivision muss nicht unterrichtet werden.

2.2.1 Leitidee 1: Algorithmus und Zahl

In der Oberstufe werden mit Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ neue algebraische Objekte und Operationen eingeführt, die über die aus der Sekundarstufe I bekannten Zahlbereiche hinausgehen.

Inhaltsbezogene Kompetenzen	Verbindliche Themen und Inhalte	Vorgaben und Hinweise
Die Schülerinnen und Schüler...		
lösen per Hand einfache Gleichungen	• Gleichungen n -ten Grades • Exponentialgleichungen	Die Polynomdivision muss nicht unterrichtet werden.

• rechen mit n -Tupeln und wenden die Rechengesetze eines Vektorraumes an.	• der 2-dimensionale Vektorraum $\mathbb{R}^2$ • der 3-dimensionale Vektorraum $\mathbb{R}^3$ • Nullvektor • Gegenvektor • Addition von Vektoren • Multiplikation von Vektoren mit Skalaren • Vektorgleichungen • Linearkombination • lineare Abhängigkeit • lineare Unabhängigkeit • Skalarprodukt • Vektorprodukt	Die Interpretation von Vektoren als Verschiebungen kann auf ihre Definition als Äquivalenzklasse (Pfeilkategorie) verzichtet werden.
--	--	--

rechnen mit n -Tupeln und wenden die Rechengesetze eines Vektorraumes an,	• der 2-dimensionale Vektorraum $\mathbb{R}^2$ • der 3-dimensionale Vektorraum $\mathbb{R}^3$ • Nullvektor • Gegenvektor • Addition von Vektoren • Multiplikation von Vektoren mit Skalaren • Vektorgleichungen • Linearkombination • lineare Abhängigkeit • lineare Unabhängigkeit • Skalarprodukt • Vektorprodukt	Durch die Interpretation von Vektoren als Verschiebungen kann auf ihre Definition als Äquivalenzklasse (Pfeilkategorie) verzichtet werden.
---	--	--

← Achtung →

Vektorprodukt

Nachbereitung

Erkunden Sie den Zugang zum Vektorprodukt.

Mathematik

Stephan Baß
BS Messen SEK II

Das Vektorprodukt¹

- 1) Die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ spannen eine Ebene auf.
 - a. Geben Sie einen Normalenvektor dieser Ebene an, bei dem $x = 1$ ist.
 - b. Alle Koordinaten von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sollen ganze Zahlen sein. Geben Sie einen Normalenvektor dieser Ebene an, bei dem ebenfalls alle Koordinaten ganzzahlig sind, nicht nur x .
- 2) Die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$ spannen eine Ebene auf.
 - a. Geben Sie ohne ClassPad unmittelbar einen Normalenvektor dieser Ebene an.
 - b. Geben Sie mit dem Vektorprodukt einen Normalenvektor an. Vergleichen Sie die Beträge der beiden Normalenvektoren.
 - c. Die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind die Seiten eines Parallelogramms. Geben Sie die Koordinaten von vier möglichen Eckpunkten an. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms.
- 3) Die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$ spannen ein Parallelogramm auf.
 - a. Geben Sie unmittelbar mit dem Kreuzprodukt den Flächeninhalt des Parallelogramms an.
 - b. Geben Sie die Koordinaten von vier möglichen Eckpunkten des Parallelogramms an. Zeigen Sie: Eine der beiden Diagonalen ist orthogonal zu einer der Seiten.
 - c. Durch die in b) nachgewiesene Eigenschaft lassen sich zwei interessante räumliche Objekte finden: ein Rechteck und ein Quader mit ganzzahligen Koordinaten. Einer der Vektoren $\vec{u}$ oder $\vec{v}$ sowie eine der beiden

Mallas, H.: IQSH, Kiel

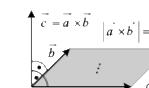
1 / 12

Vektorprodukt - Zusammenfassung der erarbeiteten Verfahren

Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ ist eine Verknüpfung zweier Vektoren im 3D-Raum und liefert als Ergebnis einen Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ mit folgenden Eigenschaften:
 Der Vektor $\vec{c}$ ist orthogonal zu der Ebene, die von den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

Der Betrag $|\vec{c}|$ ist gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den beiden Vektoren aufgespannt wird. $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = A$

Die Orientierung ergibt sich nach der Drei-Finger-Regel der rechten Hand aus der Orientierung der beiden Vektoren.

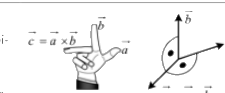


Eigenschaften

Das Vektorprodukt sagt man auch Kreuzprodukt oder äußeres Produkt.
 Das Vektorprodukt eines Vektors mit sich selbst ergibt den Nullvektor.
 Bei Vertauschung der Faktoren kehrt sich die Orientierung um (Antikommutativgesetz).

Drei-Finger-Regel der rechten Hand

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (Daumen und Zeigefinger der rechten Hand) spannen ein Parallelogramm auf. Der Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ zeigt senkrecht auf der Parallelogrammfläche (Mittelfinger).



Berechnung des Vektorprodukts

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \cdot f - c \cdot e \\ c \cdot d - a \cdot f \\ a \cdot e - b \cdot d \end{pmatrix}$$
 Setzt man $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, kann man schreiben (Kramersche Regel):

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & c & f \\ d & e & f \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & c & f \\ d & e & f \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & f \\ d & e & f \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (b \cdot f - c \cdot e) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (a \cdot f - c \cdot d) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (a \cdot e - b \cdot d) = \begin{pmatrix} b \cdot f - c \cdot e \\ -a \cdot f + c \cdot d \\ a \cdot e - b \cdot d \end{pmatrix}$$

3 / 12

Modelle zur Darstellung Lagebeziehungen und Abstände

Lagebeziehungen

	Punkt B	Gerade g_B	Ebene E_b
Punkt A			
Gerade g_a		... ist parallel zu...	
Ebene E_a			

Ergänzen Sie die fehlenden Beziehungsangaben.



5 min

Lagebeziehungen

	Punkt B	Gerade g_B	Ebene E_B
Punkt A	... ist identisch zu...	... ist enthalten in...	... ist enthalten in...
	... ist nicht identisch zu...	... ist nicht enthalten in...	... ist nicht enthalten in...
Gerade g_a	... enthält ...	... ist identisch zu...	... ist enthalten in ...
		... ist parallel zu...	... ist parallel zu ...
		... schneidet ...	... schneidet ...
		... ist windschief zu ...	
Ebene E_a	... enthält ...	... enthält ...	... ist identisch zu...
		... ist parallel zu...	... ist parallel zu...
		... schneidet ...	... schneidet ...

Vorbereitung

Modelle

Sie werden vermutlich alle bereits während Ihres Referendariats dazu kommen, analytische Geometrie in der E-Phase zu unterrichten. Wer dies schon getan hat, weiß, wie wichtig gerade beim Wechsel in die Dreidimensionalität weiterhin anschauliche Darstellungen und Modelle für den Aufbau von Grundvorstellungen sind. Hier kann sowohl analog („begehbare Koordinatensystem“ im Klassenraum, 3D-KOS aus Papier [siehe <https://www.youtube.com/watch?v=1DgkWPr06Zc>, dort auch Material zum Download], Knete, Holzspießen, Styropormodelle, Pappmodelle, Wollfäden etc. pp.) als auch digital (GeoGebra AR / 3D) gearbeitet werden.

Haben Sie bereits Unterrichtserfahrungen? Wunderbar, wir sind gespannt auf Ihren Bericht! Falls nicht, überlegen Sie sich bitte nun, wie Sie bei nächster Gelegenheit arbeiten wollen.

Bringen Sie bitte in jedem Fall das entsprechende Material mit, um uns Ihre Herangehensweise vorstellen zu können. Notieren Sie sich vorab auch Chancen und Grenzen.

Vorstellung, Nutzung und Auswertung

- a) Wählen Sie eine Lagebeziehung zweier Objekte, bei der ein Abstand bestimmt werden kann, und stellen Sie diese mit Hilfe der Materialien exemplarisch in einem Modell dar.
- b) Finden Sie den Abstand im Modell und stellen Sie diese mit Hilfe einer Strecke dar.
- c) Beschreiben Sie ein analytisches Vorgehen, wenn beide Objekte gegeben sind.
- d) Diskutieren Sie den didaktischen Mehrwert des von Ihnen erstellten Modells.

Modelle

GeoGebra AR

GeoGebra 3D Rechner für iOS oder Android

Abschluss

1. Folgendes will ich im Unterricht ausprobieren...
2. Das war für mich neu...
3. Das war für mich die zentrale Botschaft...
4. Das kam für mich heute zu kurz...

Ausblick

Das nächste Modul findet statt

am **04.02.2026**

bei **BBB/moodle**

an **einem beliebigen Ort**

in **dem Internet**