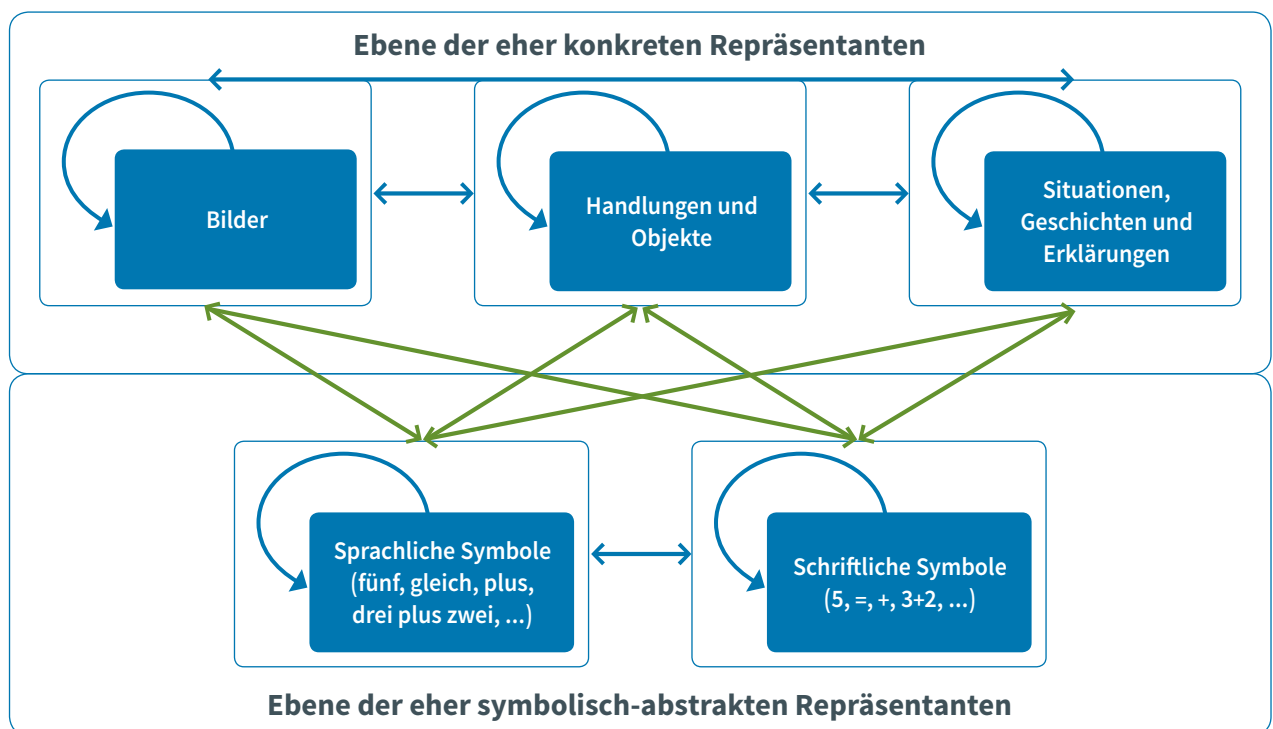


Auf- oder Verteilen: Das ist hier die Frage

Grundvorstellungen zur Division verstehen,
aufbauen und anwenden

Im Beitrag werden anhand vieler Beispiele Grundsituationen der Division vorgestellt, und es wird geklärt, wie diese mit Kindern thematisiert werden können, um sie dabei zu unterstützen, entsprechende Grundvorstellungen aufzubauen. Zudem wird gezeigt, warum es für uns als Lehrkräfte so wichtig ist, selbst verschiedene Grundvorstellungen situationsangemessen aktivieren zu können.



•• Abb. 1: Grundvorstellungen als Übersetzung zwischen Repräsentationsebenen

von Axel Schulz

Ein immer noch eindrucksvolles Beispiel zu den unterschiedlichen Grundvorstellungen der Division hat der Autor dieses Beitrags bei Wilhelm Schipper kennengelernt. Eindrucksvoll ist dieses Beispiel deshalb, weil man es so gut als Ausgangspunkt nutzen kann – für Austausch, Diskussion, aber auch für Lernprozesse. In diesem Beispiel beschreibt Schipper ein kurzes Gespräch zwischen Olaf und seiner Lehrerin:

Nach der Einführung der Division bearbeiten die Kinder ein Arbeitsblatt in Einzelarbeit. Olaf ist bei der Aufgabe $32 : 8$, als die Lehrerin neben ihm steht (siehe **M3**).

L: Na, wie viel ist $32 : 8$?

O: Hm?

L: Nimm doch die Plättchen und die Teller.

Die Lehrerin wendet sich anderen Kindern zu. Olaf nimmt 32 Plättchen und 8 Teller und beginnt, auf jeden Teller ein Plättchen zu legen. Die Lehrerin kommt zurück.

L: Leg doch auf den ersten Teller 8 Plättchen.

O: Nee, das klappt nicht.

L: Doch, das geht so ...

Dieses Beispiel kann zum Nachdenken über unterschiedliche Aspekte anregen: Offensichtlich gibt es mindestens zwei grundsätzlich unterschiedliche Mög-

lichkeiten, Divisionsaufgaben handelnd zu lösen bzw. zu veranschaulichen: das Aufteilen und das Verteilen (weitere Möglichkeiten finden sich zum Beispiel bei Schipper 2009, 149 f.). Weiter kann man die Frage stellen: Ist eine der beiden Vorgehensweisen günstiger als die andere? Müssen Kinder beide Vorgehensweisen kennen? Sollen sie sie unterscheiden und benennen können? Falls ja, warum? Schließlich kann auch darüber nachgedacht werden, was all dies für Lehrkräfte bedeutet – und worin eigentlich das Problem von Olaf und seiner Lehrerin besteht.

Was sind Grundvorstellungen?

Bevor die beiden Möglichkeiten genauer vorgestellt werden, wie genau Divisionsaufgaben dargestellt bzw. „gedacht“ werden können, soll kurz geklärt werden, was eigentlich Grundvorstellungen sind, denn dieses Konstrukt kann dabei helfen, die Überlegungen oben weiterzudenken und das Problem von Olaf und seiner Lehrerin besser zu verstehen und ggf. zu lösen.

Übersetzungen ...

Der Aufbau von Grundvorstellungen zu mathematischen Inhalten ist eines der wichtigsten Ziele des Mathematikunterrichts. Man geht davon aus, dass Grundvorstellungen es ermöglichen, zwischen eher symbolisch-abstrakten Repräsentanten mathematischer Inhalte (d. h. zu den sprachlichen und schriftlichen Symbolen) und eher anschaulich-konkreten Repräsentanten mathematischer Inhalte (d. h. zu Bildern, Handlungen, Objekten, Geschichten) hin und her zu übersetzen – veranschaulicht durch die „grünen Pfeile“ in Abbildung 1.

Wenn Sie Ihren Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger ausstrecken, diese Finger betrachten und dabei an die Zahl 3 denken, konnten Sie eine Grundvorstellung zu diesem mathematischen Inhalt aktivieren. Wenn Sie im Ansatz verstehen, was Olaf vorhat und wie er am Ende seiner Handlung sein Ergebnis sehen könnte, dann können Sie eine Grundvorstellung zur Division aktivieren, denn Sie übersetzen zwischen einer ganz konkret-anschaulichen Situation und symbolisch-abstrakten Zeichen – in Olafs Fall zwischen seiner Handlung und dem Term $32 : 8$.

Die anderen Pfeile in Abbildung 1 veranschaulichen Übersetzungsprozesse innerhalb einer Repräsentationsebene, zum Beispiel die Übersetzung zwischen der lautsprachlichen Umschreibung der Aufgabe „zweiunddreißig geteilt durch acht“ und ihrer symbolischen Notation oder die Übersetzung zwischen drei ausgestreckten Fingern und der Abbildung von ausgestreckten drei Fingern. Auch diese Übersetzungen sind grundlegend für den mathematischen Lernprozess.

... und Situationstypen...

Die konkret-anschaulichen Repräsentanten – also die Bilder, Handlungen, Geschichten – sind immer situationsbezogen, wohingegen die symbolisch-abstrakten Repräsentanten immer situationsunabhängig sind:



Auf einen Blick

Klassenstufe: 1–4 (Schwerpunkt: Klasse 2)

Zeit: Immer wieder zwischendurch

Lerngelegenheiten:

- Grundvorstellungen zur Division entwickeln, aktivieren und nutzen

Lernvoraussetzungen:

- ZR bis ca. 30
- Addition und Subtraktion
- verschiedene Zahldarstellungen deuten
- Rechengeschichten verstehen und erfinden können

Materialien:

M1 Das Atomspiel

M2a Ein Divisions-Plakat gestalten

M2b Gleich große Gruppen bilden

M3 Olaf und seine Lehrerin



**Materialseiten
downloaden oder
online bearbeiten!**
Infos auf Seite 51



S. 26



S. 27



S. 28



S. 29

Der Term $32 : 8$ selbst ist situationslos, aber er kann durch die Aktivierung von Grundvorstellungen, also durch die Verknüpfung mit einer entsprechenden Situation, mit Bedeutung gefüllt werden. Diese Situationen können in sogenannte Situationstypen unterschieden werden. Das sind dann Situationen, die in ihrer Grundstruktur übereinstimmen – und diese können sich zum Teil deutlich unterscheiden, wie das Beispiel von Olaf und seiner Lehrerin zeigt.

... werden zu Grundvorstellungen.

Von tragfähigen Grundvorstellungen kann man also dann ausgehen, wenn ein Kind oder ein Erwachsener in der Lage ist, einen bestimmten Situationstypen mit dem entsprechenden Term, der entsprechenden Operation, einer bestimmten Zahl zu verknüpfen und umgekehrt. Andererseits können Grundvorstellungen nur dann entwickelt und schließlich auch aktiviert werden, wenn diese Übersetzung zwischen Situationstypen und den abstrakt-symbolischen Darstellungen im Unterricht immer wieder thematisiert werden.

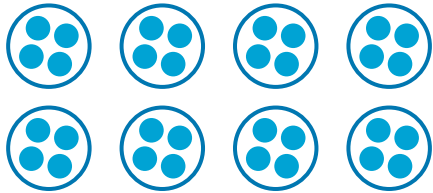
Verteilen und Aufteilen

Schaut man sich das Beispiel noch einmal genau an, kann man versuchen, die beiden Situationstypen zu unterscheiden. Um die Aufgabe $32 : 8$ zu lösen, nimmt Olaf 32 Plättchen zur Hand und will diese gerecht auf 8 Teller verteilen. Das Ergebnis der Aufgabe würde Olaf

•• Abb. 2: Verteilen und Aufteilen

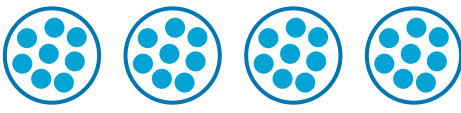
32 : 8

Gegeben: Anzahl der Elemente
und Anzahl der Teilmengen
Gesucht: Mächtigkeit je einer Teilmenge



Gerechtes Verteilen

Gegeben: Anzahl der Elemente und
Mächtigkeit je einer Teilmenge
Gesucht: Anzahl der Teilmengen



Aufteilen bzw. gleich große Gruppen bilden

ablesen können, indem er schaut, wie viele Plättchen jeweils auf einem Teller liegen, nachdem er alle 32 Plättchen verteilt hat – immer 4 Plättchen (in Abb. 2 links ist das angestrebte Endprodukt von Olafs Handlung zu sehen). In der Literatur wird Olafs Vorgehen als „Verteilen“ beschrieben (z. B. Schipper 2009, 149). Die Lehrerin schlägt ein grundlegend anderes Vorgehen vor – das sogenannte „Aufteilen“: Auch die Handlung, die die Lehrerin vorschlägt, beginnt mit 32 Plättchen. Diese Plättchen werden allerdings immer zu Achtergruppen zusammengefasst – immer acht auf einen Teller. Das Ergebnis der Aufgabe kann ermittelt werden, indem die Anzahl der so entstandenen Gruppen betrachtet wird – es sind vier Gruppen (in Abb. 2 rechts ist das Endprodukt der Handlung zu sehen, die von der Lehrerin vorgeschlagen wurde).

Es gibt also zwei sehr unterschiedliche Situationstypen zur Division, die beide mit ein und derselben Aufgabe verknüpft werden können. Was bedeutet das aber für den Unterricht?

Eine? Welche? Beide?

Bereits oben wurde die Frage angerissen: Müssen Kinder beide Situationstypen kennen, verstehen und mit der Division verknüpfen können? Die Antwort ist: Ja, unbedingt! Und zwar aus mehreren Gründen. Ein

Grund liegt in einem Ziel unseres Mathematikunterrichts. Wir möchten, dass Schülerinnen und Schüler Situationen ihres Alltags (auch) mit den Werkzeugen der Mathematik bewältigen können (KMK 2022, S. 11 und S. 14). Das kann nicht gelingen, wenn zu bestimmten Situationen keine passenden Grundvorstellungen aktiviert werden können – und die Gefahr hierfür steigt, wenn bestimmte Situationstypen im Unterricht gar nicht thematisiert oder vernachlässigt werden.

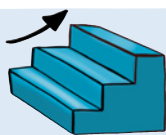
Ein weiterer Grund liegt darin, dass sich bei manchem Zahlenmaterial ein Situationstyp zur Aktivierung von Grundvorstellungen eher anbietet als ein anderer. Um so ein Beispiel zu finden, machen wir einen großen Schritt ins dritte oder vierte Schuljahr: Stellen Sie sich vor, sie wollen mit Zehnersystemmaterial die Aufgabe $600 : 2$ veranschaulichen – wie machen Sie das ganz konkret? Über gerechtes Verteilen auf zwei Gruppen oder über Aufteilen, also über das Bilden von 2er-Gruppen? Und wie würden Sie die Aufgabe $600 : 200$ mit diesem Material veranschaulichen?

Bei der Aufgabe $600 : 2$ wäre das Vorgehen der Lehrkraft im Beispiel oben wenig zielführend („Leg mal immer zwei Einer auf einen Teller und schau am Ende, wie viele Teller du benutzt hast“), wohl aber bei der Aufgabe $600 : 200$ („Bilde 200er-Gruppen, wie viele 200er-Gruppen bekommst du dann?“ „Drei.“). Umgekehrt wäre Olafs Ansatz bei der Aufgabe $600 : 200$ ziemlich aufwendig (600 Objekte gerecht auf 200 Gruppen verteilen), bei der Aufgabe $600 : 2$ hingegen wäre er schnell fertig (6 Hunderter gerecht auf zwei Gruppen verteilen; siehe Abb. 3).

Noch ein Grund liegt in der Thematisierung unterschiedlicher Rechenstrategien. So kann das Nutzen von Hilfsaufgaben meist gut nachvollziehbar über das Aufteilen begründet und erklärt werden: Wenn man die Aufgabe $495 : 5$ über die benachbarte Hilfsaufgabe $500 : 5 = 100$ lösen möchte, kann man überlegen: „Die 5 passt 100-Mal in die 500 rein, in 495 passt ein Fünfer weniger, also nur 99 Fünfen.“ Das Ergebnis der Aufgabe ist also 99.

Für Lehrkräfte bedeutet dies, dass auch sie natürlich beide Situationstypen kennen und schnell und sicher unterscheiden können sollten. Dies gilt unter anderem sowohl für die Arbeit mit dem Schulbuch (Welche Grundvorstellungen werden hier jeweils angespro-

Fördern und Fordern



Fördern

Grundvorstellungen zur Division in kleinen Zahlenräumen erarbeiten (ZR bis 12, entsprechend kleiner Divisor)

Fordern

Grundvorstellungen auf große Zahlenräume übertragen (z. B. $1\,200 : 400$ über das Aufteilen, $1\,200 : 4$ über das Verteilen) und beim Rechnen nutzen (z. B. beim Nutzen von Hilfsaufgaben)



•• **Abb. 3: Division großer Zahlen veranschaulichen ($600 : 2$ über Verteilen – links, $600 : 200$ über Aufteilen – rechts)**

chen? „Springt“ das Schulbuch zwischen Situations-
typen? Werden die beiden Situationstypen explizit
voneinander unterschieden? Werden sie miteinander
verknüpft – und was halte ich als Lehrkraft davon?),
für die Arbeit ohne Schulbuch (Wie oft, wann genau
und in welcher Reihenfolge sollen die beiden Grund-
vorstellungen situationsgebunden im Unterricht the-
matisiert werden?), um angemessen reagieren zu kön-
nen auf die Lösungsprozesse der Schülerinnen und
Schüler (siehe Olaf), aber auch bei der Auswahl ange-
messener Beispiele zur Veranschaulichung der gege-
benen Aufgaben.

Verstehen und vernetzen

Wenn wir möchten, dass Schülerinnen und Schüler
Grundvorstellungen entwickeln und aktivieren und
sich über sie austauschen können, dann ist es sehr
sinnvoll, dass hierfür auch mathematische Fachspra-
che verstanden und genutzt wird.

„Begriffe lernen“ und Situationen verstehen

Dann stellt sich allerdings die Frage, ob die beiden
Fachbegriffe „Aufteilen“ und „Verteilen“ hierfür beson-
ders geeignet sind. Tatsächlich ist vom Gegenteil aus-
zugehen: Dieses Begriffspaar ist eher ungünstig, wenn
sich Kinder über die entsprechenden Situationen aus-
tauschen wollen und wenn sie sich die Situationstypen
verstehensbasiert merken wollen. Auch hier finden
sich mehrere Gründe: Die Begriffe Aufteilen und Ver-
teilen werden im Alltag häufig gegenläufig genutzt, in
jedem Fall aber nicht eindeutig – hier würde es zu sehr
deutlichen und vermeidbaren Kollisionen zwischen
Alltags- und Fachsprache kommen. Zudem sind sich
die beiden Wörter so ähnlich, dass es schon oberfläch-
lich schnell zu Verwechslungen kommen kann.

Statt also mit den Kindern von Anfang an vom „Auf-
teilen“ und vom „Verteilen“ zu sprechen, scheint es
günstig, anschauliche Umschreibungen der Situatio-
nen zu nutzen: „Gerechtes Verteilen“ (Fachsprache:
Verteilen) und „gleich große Gruppen bilden“ (Fach-
sprache: Aufteilen). Diese Begriffe könnten dann ge-
meinsam mit den Lernenden mit entsprechenden Ge-
schichten oder Bildern auf einem großen Plakat mit
Bedeutung gefüllt werden (siehe **M2a**, **M2b**).

Grundvorstellungen werden dann tragfähig, wenn
sie immer wieder in Situationen des (Schul-)Alltags
aufgegriffen und miteinander vernetzt werden. Dafür
sollten diese Situationen auch mit den entsprechen-
den mathematischen Termen verknüpft werden. Dies
kann auch im Rahmen von Spielen geschehen, zum
Beispiel mit dem Atomspiel. Bei diesem Spiel geht es
um das Bilden gleich großer Gruppen und in diesem
Rahmen kann auch die Division mit Rest angesprochen
werden (für die Regeln vgl. z. B. Rottmann/Nordemann
2021, S. 82 f.; siehe **M1**).

Zurück zu Olaf: Meta-Mathematikunterricht

Das Beispiel von Olaf und seiner Lehrerin kann sehr gut
in der Lehreraus- und -weiterbildung genutzt werden,
um die (angehenden) Kolleginnen und Kollegen für die
unterschiedlichen Grundvorstellungen zu sensibilisie-
ren. Es kann aber auch im Unterricht eingesetzt werden
für sogenannten „Meta-Mathematikunterricht“. Das ist
Mathematikunterricht, der sich selbst in den Blick
nimmt. Auf dieser Metaebene können Kinder und Lehr-
kräfte gemeinsam darüber nachdenken, warum es so
wichtig ist, beide Grundvorstellungen aktivieren zu
können, dass es nicht immer nur einen richtigen Lö-
sungsweg gibt, wie wichtig es sein kann, einander (bis
zum Ende) zuzuhören, und vieles mehr (siehe **M3**). Trag-
fähige Grundvorstellungen können hier ein Ausgangs-
punkt für Gespräche sein, die weit über das Verstehen
des Term $32 : 8$ hinausgehen. ■

Literatur

- KMK. (2022): *Bildungsstandards für das Fach Mathematik
Primarbereich. Beschluss der Kultusministerkonferenz
vom 15.10.2004, i.d.F. vom 23.06.2022*
- Rottmann, T./Nordemann, K. (Hrsg.): *Lernen durch
Bewegung im Mathematikunterricht. Bewegungsspiele
für Klasse 1 und 2. Braunschweig 2021*
- Schipper, W.: *Handbuch für den Mathematikunterricht an
Grundschulen. Braunschweig 2009*

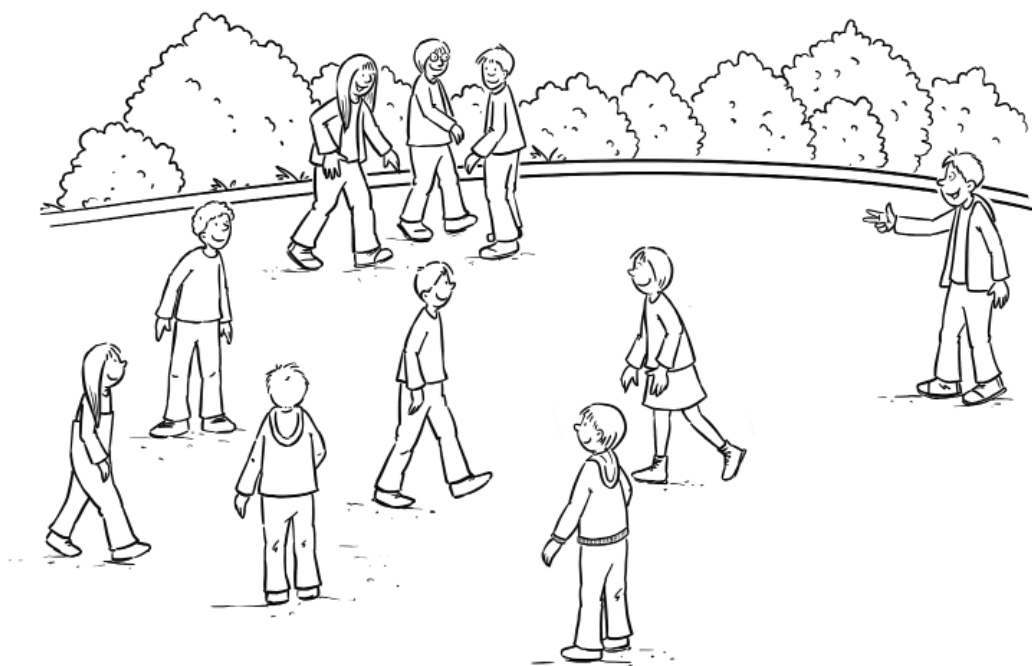
Der Autor



Dr. Axel Schulz forscht und lehrt am
Institut für Didaktik der Mathematik an der
Universität Bielefeld.

Das Atomspiel

Kurzbeschreibung zum Atomspiel: Wählt ein „Ruf-Kind“, also ein Kind, das laut Zahlen ruft. Ermittelt dann, wie viele Kinder mitspielen (ohne das Ruf-Kind). Alle anderen Kinder laufen durcheinander (in der Halle oder draußen). Das Ruf-Kind ruft laut eine Zahl. (Die Zahl muss kleiner sein als die Anzahl der Kinder, die mitspielen.) Findet euch jetzt zu Gruppen zusammen – die Gruppe muss genauso groß sein wie die gerufene Zahl. Findet gemeinsam heraus, wie viele Gruppen entstanden sind und wie viele Kinder übrig bleiben.



Spielt das Atomspiel.

Notiert zu jeder Spielrunde die passende Rechnung.

Variationen:

- Das Ruf-Kind darf nur Zahlen rufen, bei denen **ein Rest** bleibt. Überlegt vor dem Rennen gemeinsam: Wie groß kann der Rest sein?
- Das Ruf-Kind darf nur Zahlen rufen, bei denen **kein Rest** bleibt. Überlegt vorher gemeinsam: Müssen dafür in dieser Runde Kinder aussetzen? Wenn nicht: Welche Zahlen kann das Ruf-Kind wählen?

Vertiefung:

Überlegt, ohne zu spielen...

- Das Ruf-Kind ruft „Vier“ (oder „Fünf“ oder „Sechs“). Drei Kinder bleiben übrig. Wie viele Kinder können mitgespielt haben?
- 27 Kinder spielen mit. Das Ruf-Kind ruft eine Zahl. Es bleiben 3 Kinder übrig (oder 2 oder 5). Welche Zahl könnte das Ruf-Kind gerufen haben?

Ein Divisions-Plakat gestalten

Sammelt Beispiele für ein Divisions-Plakat.
Gestaltet das Divisions-Plakat gemeinsam.

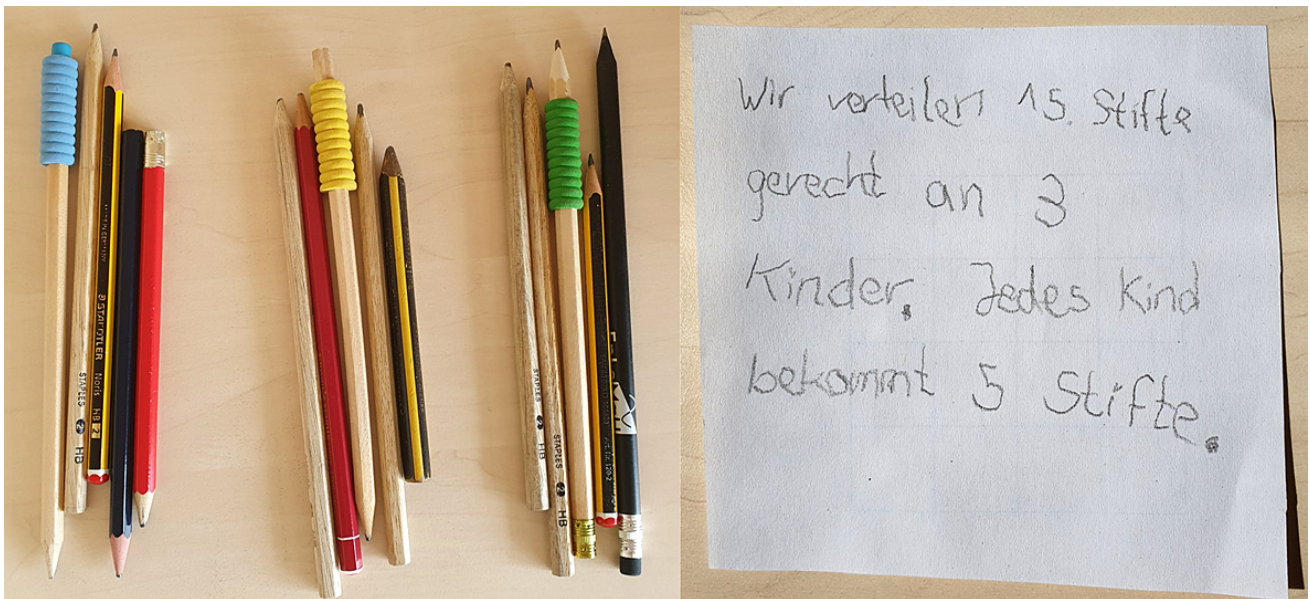
Gerechtes Verteilen

Elif hat 12 Plättchen und will alle Plättchen gerecht auf 4 Teller verteilen.
Wie viele Plättchen liegen am Ende auf jedem Teller?

Spielt die Geschichte nach.

Malt ein Bild dazu oder macht ein Bild davon:
Wie sieht es aus, nachdem Elif gerecht verteilt hat?

Überlegt euch selbst Geschichten zum „gerechten Verteilen“.
Spielt die Geschichten nach und macht ein Bild davon/malt ein Bild dazu.



Beispielbild „Gerechtes Verteilen“

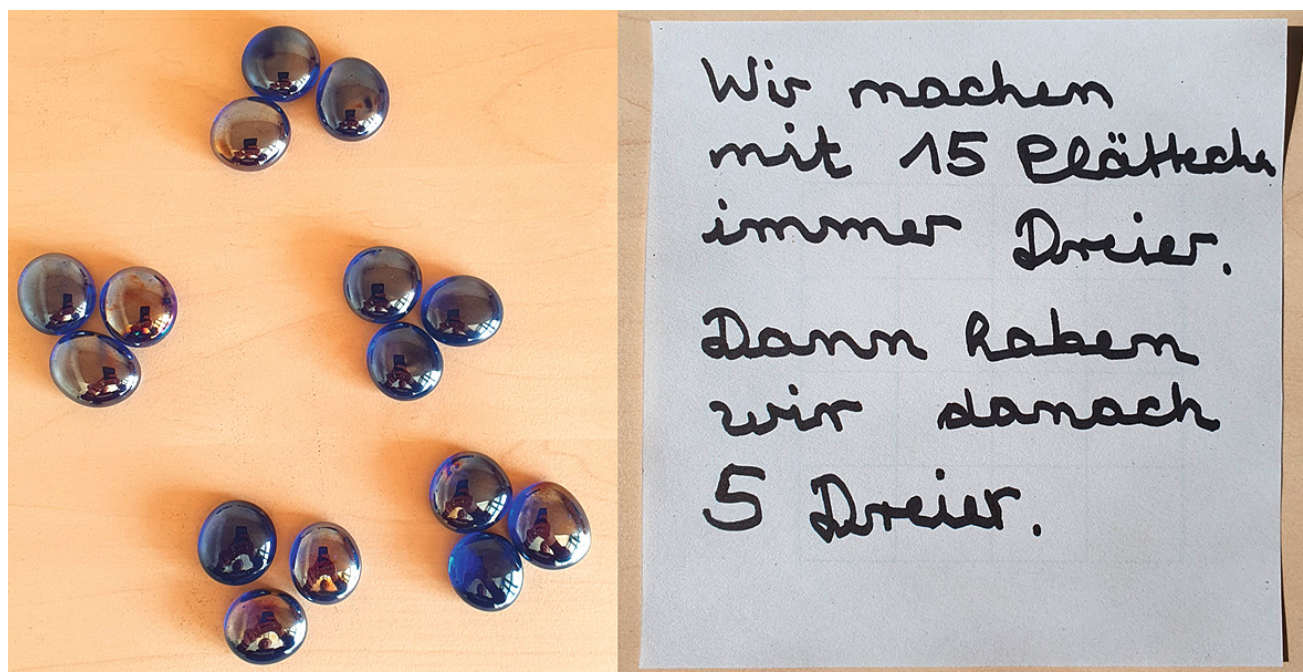
Gleich große Gruppen bilden

Jovis hat 12 Plättchen und will immer Vierer-Gruppen legen.
Wie viele Vierer-Gruppen hat er am Ende?

Spielt die Geschichte nach.

Malt ein Bild dazu oder macht ein Bild davon:
Wie sieht es aus, nachdem Jovis gleich große Gruppen gebildet hat?

Überlegt euch selbst Geschichten zum „gleich große Gruppen bilden“.
Spielt die Geschichten nach und macht ein Bild davon/malt ein Bild davon.



Beispielbild „Gleichgroße Gruppen bilden“

Olaf und seine Lehrerin



Lehrerin: Na, wie viel ist $32 : 8$?

Olaf: Hm?

Lehrerin: Nimm doch die Plättchen und die Teller.

Die Lehrerin geht weiter.

Olaf nimmt 32 Plättchen und 8 Teller

und beginnt, auf jeden Teller ein Plättchen zu legen.

Die Lehrerin kommt zurück.

Lehrerin: Leg doch auf den ersten Teller 8 Plättchen.

Olaf: Nee, das klappt nicht.

Lehrerin: Doch, das geht so ...

Überlegt gemeinsam:

- Was hat Olaf vor? Passt seine Handlung zur Aufgabe? Begründet.
Stell euch vor, Olaf würde weitermachen mit seiner Idee:
Wie könnte er mit den Tellern und Plättchen dann sein Ergebnis sehen?
- Was möchte Olafs Lehrerin? Passt ihr Vorschlag zur Aufgabe?
Begründet.
Wie könnte sie später das Ergebnis der Aufgaben mit den Plättchen und Tellern sehen?
- Habt ihr einen Tipp für Olaf und seine Lehrerin?
Was schlägt ihr vor?