

Welche mentalen Werkzeuge werden beim Rechnen eigentlich benötigt?

# Multiplikation und Division: Verstehen und sicher rechnen

Axel Schulz

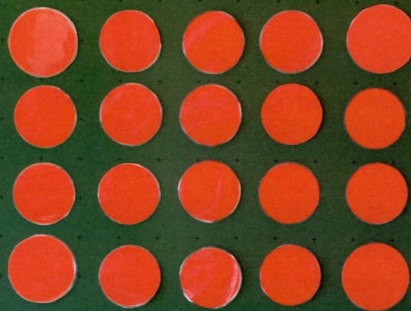
Ein Ziel von Mathematikunterricht ist das sichere und aufgabenangemessene Rechnen. Im Beitrag wird am Beispiel von Multiplikation und Division geklärt, welche mentalen Werkzeuge beim Rechnen genutzt werden und wie Rechenstrategien gemeinsam und materialgestützt erarbeitet werden können.

Foto: © Ruth Dolenc-Petz  
Illustrationen: Ute Ohlms, [www.ute-ohlms.de](http://www.ute-ohlms.de)

## Ein Punktebild – mehrere Aufgaben



Ich sehe  
 $4 \cdot 5$



Ich sehe  
 $5 \cdot 4$



Ich sehe  
 $20 : 4$

Ich sehe  
 $20 : 5$



Ich sehe  
 $10 + 10$

Ich sehe  
 $4 \cdot 4 + 4$



**Autor**  
Dr. Axel Schulz  
Institut für Didaktik der  
Mathematik  
Universität Bielefeld

## Rechenwege in den Fokus

Bevor Sie weiterlesen: Bitte lösen Sie die Aufgabe  $295 : 5$  im Kopf und notieren Sie dabei knapp, welche Rechenschritte Sie dabei nutzen. Hätten Sie die Aufgabe anders lösen können, wenn ja – wie? Wenn Sie mit Zahlen (und nicht mit Ziffern unter Nutzung des schriftlichen Algorithmus) gerechnet haben, werden Sie dabei sog. mentale Werkzeuge genutzt haben (vgl. Abb. 1). Auch Mirkan rechnet die Aufgabe und erklärt seinen Rechenweg im Rahmen einer Rechenkonferenz: „Zuerst hab’ ich mir die Aufgabe angeguckt und gesehen, dass die 295 ganz nah an 300 liegt. Und  $300 : 5$  weiß ich auswendig, das sind 60 – weil  $5 \cdot 6$  sind 30. Aber dann hätte ich eine Fünf zu viel, in die 295 passen also nur 59 Fünfen.“ Auch Mirkan

nutzt mentale Werkzeuge und ohne die entsprechenden mentalen Werkzeuge wäre er nicht in der Lage gewesen, die Aufgabe so zu lösen, wie er es getan hat.

Erst die gemeinsame Thematisierung von Rechenwegen macht sichtbar, welche mentalen Werkzeuge schon genutzt werden können – und welche ggf. noch nicht.

## Mentale Werkzeuge erarbeiten

Das Vorhandensein von mentalen Werkzeugen befähigt ein Kind, einen Erwachsenen zum aufgabenangemessen Lösen von Rechenaufgaben. Diese Werkzeuge entwickeln sich nicht unabhängig voneinander, sondern sie bilden ab dem ersten Schultag ein Netzwerk unterschiedlicher Kompetenzen, das im Mathematikunterricht stetig gemeinsam erarbeitet und erweitert werden muss (vgl. Abb. 1). Schärfer formuliert heißt das aber auch: Ohne ein tragfähiges Netz mentaler Werkzeuge ist Rechnen nicht möglich. Doch was sind jetzt diese mentalen Werkzeuge? (Beispiele für die Addition und Subtraktion finden sich z. B. bei Schulz 2018).

## Operationsverständnis

Bei Multiplikation und Division können viele verschiedene Grundvorstellungen unterschieden werden (vgl. z. B. Padberg & Benz 2020). Für das Rechnen sind vor allem die Vorstellungen des Auf- und Verteilens (bei der Division) und die Vorstellung des Wiederholens und des Zusammenfassens (bei der Multiplikation) relevant (vgl. Selter & Zannettin 2018).

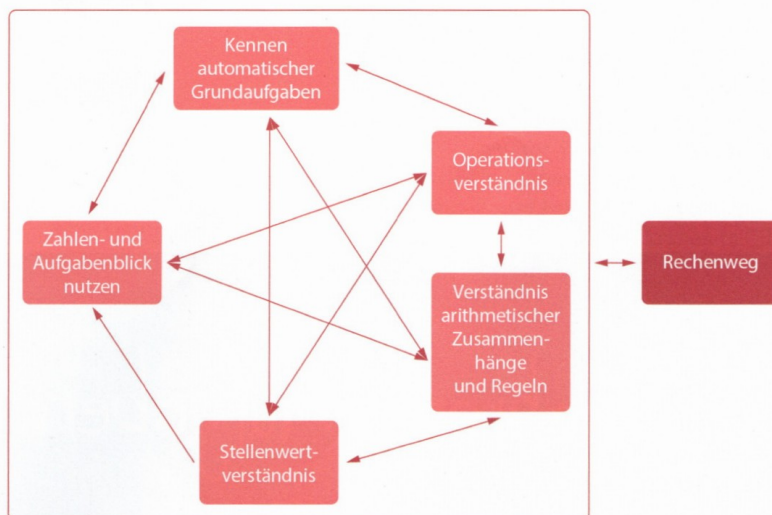


Abb. 1: Mentale Werkzeuge als Voraussetzung zum Rechnen

| Operation                | Multiplikation                                                                      |                                                                                            | Division                                                                   |                                                                                        |
|--------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Aufgabe</b>           | $3 \cdot 4 = 12$                                                                    |                                                                                            | $12 : 4 = 3$                                                               |                                                                                        |
| <b>Grundvorstellung</b>  | Wiederholtes Hinzufügen gleichmächtiger Mengen                                      | Zusammenfassen gleichmächtiger Mengen                                                      | Aufteilen in gleichmächtige Bündel                                         | Gerechtes Verteilen in Gruppen                                                         |
| <b>Rechengeschichte</b>  | Hedwig geht dreimal in den Garten und holt jedes Mal vier Blumen. Wie viele Blumen? | Auf dem Tisch stehen drei Blumenvasen. In jeder Vase stehen vier Blumen. Wie viele Blumen? | Auf dem Tisch stehen 12 Blumen; immer vier in einer Vase. Wie viele Vasen? | Es sollen 12 Blumen gerecht auf vier Vasen verteilt werden. Wie viele Blumen pro Vase? |
| <b>Veranschaulichung</b> |                                                                                     |                                                                                            |                                                                            |                                                                                        |

Tabelle1: Grundvorstellungen von Multiplikation und Division im Überblick

Der Erarbeitung dieser Grundvorstellungen und der Thematisierung der Zusammenhänge zwischen ihnen sollte spätestens im zweiten Schuljahr viel Zeit eingeräumt werden (für Beispiele siehe <https://kira.dzlm.de/node/795>). Dabei scheint es sinnvoll, die Grundsituationen zur Multiplikation eng mit denen zur Division zu verknüpfen, und zwar aus mindestens zwei Gründen: Wenn jemand verstanden hat,

- dass Multiplikation und Division Umkehroperationen sind, fällt vor allem das Lösen von Divisionsaufgaben (auch in höheren Zahlenräumen) sehr viel einfacher, da hier dann auf die entsprechenden Multiplikationsaufgaben zurückgegriffen werden kann (vgl. unten).
- dass es zur Multiplikationsaufgabe  $3 \cdot 9 = 27$  zwei komplementäre Divisionsaufgaben gibt, nämlich  $27 : 3 = 9$  und  $27 : 9 = 3$ , dann fällt das Automatisieren von Aufgabensätzen sehr viel leichter als ohne dieses Verständnis (vgl. das Beispiel Aufgabenfamilien unten).

Mirkan aktiviert bei seiner Bearbeitung die Grundvorstellung des Aufteilens bzw. des Enthaltenseins, er fragt: Wie viele Fünfer passen in die 295? Zudem nutzt er den Zusammenhang zwischen Multiplikation und Division bei der Lösung der Aufgabe  $300 : 5$ .

### Verständnis arithmetischer Regeln und Zusammenhänge

Die drei wichtigsten Eigenschaften, die beim Lösen von Multiplikations- bzw. Divisionsaufgaben genutzt werden, sind die Kommutativität

(die Faktoren bei einer Multiplikation dürfen vertauscht werden), die Assoziativität (die Reihenfolge, in der mehrere Faktoren miteinander multipliziert werden, ist egal) und die Distributivität. Mirkan löst die Aufgabe  $295 : 5$ , indem er die Distributivität nutzt. Er weiß, dass er die Hilfsaufgabe  $300 : 5$  rechnen darf und zwar weil gilt:  $300 : 5 = (295 + 5) : 5 = 295 : 5 + 5 : 5 = 59 + 1$ . Sicherlich wird Mirkan das nicht auf diese Weise denken und notieren – doch der Grundgedanke hinter seinem Lösungsweg ist analog. Diese Eigenschaften gelten selbstverständlich nicht nur für das so genannte große Einmaleins, sondern in gleicher Weise schon für das kleine Einmaleins, wie die Beispiele in **Abb. 2** und **Abb. 4** zeigen.

Ein besonders tragfähiges und (mental) fortsetzbares Modell zur Veranschaulichung der Eigenschaften von Multiplikation und Division sind Rechtecksdarstellungen (vgl. Schulz 2017, Büchter & Padberg 2020). An Rechtecks-Punktefeldern können zum Beispiel gut die so genannten Aufgabenfamilien besprochen werden (**Abb. 2**).

Besonders gut geeignet sind Rechtecksdarstellungen auch für das gemeinsame Entdecken, Zeigen und Besprechen von Aufgabenbeziehungen zur Thematisierung und Entwicklung von Kopfrechenstrategien (**Abb. 4**, vgl. Schipper et al. 2015).

Das Deuten von Rechtecksdarstellungen zur Thematisierung von Multiplikation und Division ist jedoch nicht voraussetzungslos und erfordert das stetige gemeinsame Besprechen dieser Darstellungen – so wie in **Abb. 2** und **Abb. 4** angedeutet.

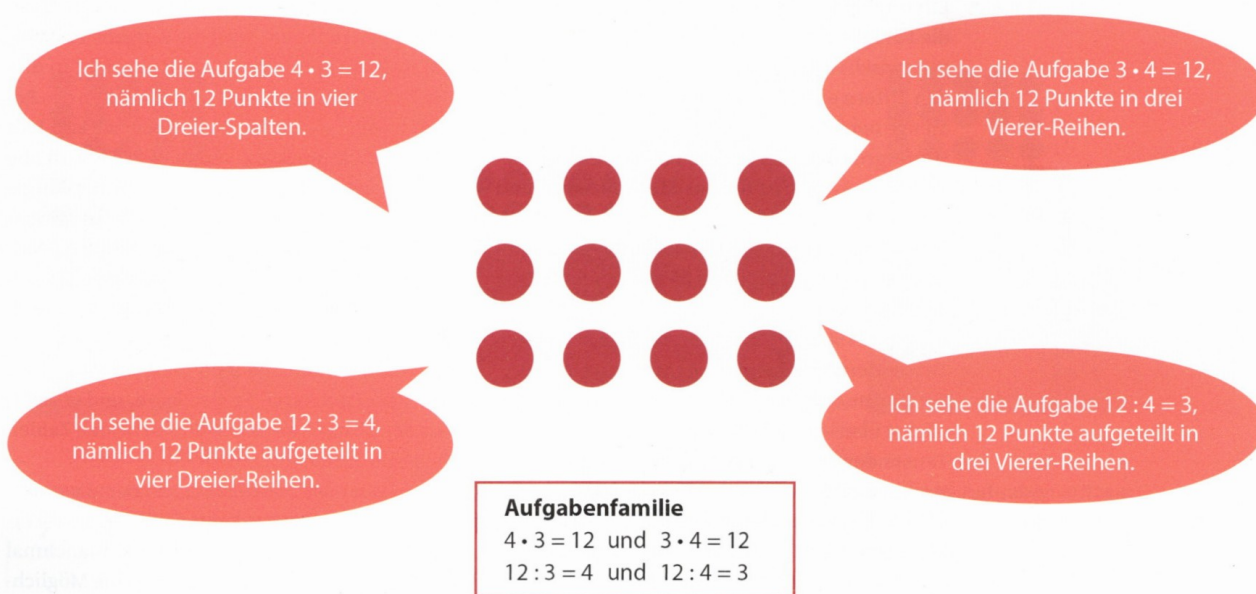


Abb. 2: Versprachlichung von Aufgabenfamilien am Beispiel der Aufgabe  $3 \cdot 4 = 12$

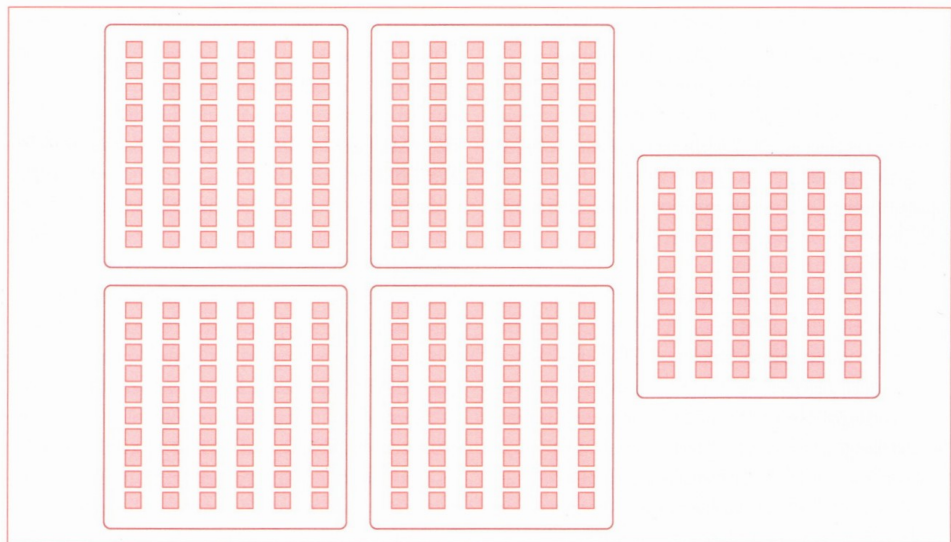


Abb. 3: Veranschaulichung der Aufgabe  $300 : 5$  durch das Verteilen von 30 Zehnern in 5 Gruppen

### Automatisierte Grundaufgaben

Langfristig ist es wünschenswert, wenn Schülerinnen und Schüler alle Multiplikations- und Divisionsaufgaben des kleinen Einmaleins verstandenbasiert schnell und sicher abrufen können. Als unverzichtbarer Grundstock jedoch gelten die sog. Kernaufgaben (auch Königs- oder Sonnenaufgaben genannt), denn aus diesen können alle anderen Aufgaben des kleinen Einmaleins abgeleitet werden. Die Kernaufgaben sind die „mal-eins-“, „mal-zwei-“, „mal-fünf-“ und „mal-zehn-Aufgaben“ mit Tausch- und Umkehraufgaben sowie alle Quadrataufgaben mit Umkehraufgaben.

### Stellenwertverständnis

Ein tragfähiges Stellenwertverständnis umfasst die Fähigkeit, sicher und flexibel die Beziehungen zwischen den Bestandteilen eines Zahlworts, den Ziffern einer Zahl und der zu benennenden Menge herstellen zu können – und zwar vor dem Hintergrund der fortgesetzten Bündelung. Dieser letzte Aspekt ist für das Multiplizieren und Dividieren mit großen Zahlen von besonderer Bedeutung, denn hier werden häufig die Zusammenhänge zwischen nicht direkt benachbarten Stellenwerten relevant. So kann zur Lösung der Aufgabe  $24000 : 60$  der Zusammenhang zwischen Tausendern und Zehnern genutzt werden: „24 Tausender durch 6 Zehner“. Dazu wird zunächst überlegt: Wie viele Zehner sind in einem Tausender enthalten? Das sind hundert. Also sind 24 Tausender durch 6 Zehner 4 Hunderter. Diesen Zusammenhang zwischen den – vor allem nicht direkt benachbarten – Stellenwerten erst während der Thematisierung des großen Einmaleins zu besprechen, wäre zu spät: Wenn beim Multiplizieren und Dividieren großer

Zahlen das „Nullen-Streichen bzw. -Anhängen“ nicht als unverstandener und fehleranfälliger Trick genutzt werden soll, sollten die Zusammenhänge zwischen nicht benachbarten Stellenwerten bereits im zweiten und dritten Schuljahr thematisiert werden (vgl. Schulz & Wartha im Druck). Mirkan nutzt ebenfalls sein Wissen um Stellenwerte beim Lösen der Aufgabe  $300 : 5$ . Unter Rückgriff auf die bekannte Aufgabe  $30 : 5$  bzw.  $5 \cdot 6$  weiß er, dass er 30 Zehner durch 5 teilt und 6 Zehner als Ergebnis erhält (Abb. 3).

### Aufgaben- und Zahlenblick

Der Aufgaben- und Zahlenblick hilft dabei, bereits vor oder während des Rechnens zu erkennen, wie ein besonders geschicktes Vorgehen beim Lösen aussehen könnte: Anstatt ‚wild drauflos zu rechnen‘, wird die Aufgabe erst einmal in Ruhe betrachtet. Schütte spricht in diesem Zusammenhang vom „Zurückhalten des Rechendrangs“ (Schütte 2004). Auch Mirkan hält – wenn auch nur kurz – inne, um die Aufgabe einzuschätzen: „Zuerst hab’ ich mir die Aufgabe angeguckt und gesehen, dass ...“ Was Mirkan sieht, sind Beziehungen und unter intuitiver Nutzung der bisher beschriebenen Werkzeuge kann er dann einen geschickten Rechenweg beschreiben: Er sieht, dass durch 5 geteilt werden soll, er sieht, dass der Dividend nahe an einer Zahl liegt, die er gut durch 5 teilen kann, und er sieht, dass der Abstand zwischen diesen beiden Zahlen ebenfalls durch fünf teilbar ist.

Die Dauer des ‚Innehaltens‘ vor dem Beschreiben eines Rechenwegs kann von Person zu Person sehr unterschiedlich sein – und manchmal sieht man trotz langem Hinsehen keine Möglichkeit, die Aufgabe geschickt zu lösen. Ob und wie schnell ein geschickter Weg erkannt wird, hängt

maßgeblich davon ab, ob die anderen Werkzeuge bereits vorhanden sind; der Aufgaben- und Zahlenblick hat dann eine „organisierende“ Funktion. Trainiert werden kann der Aufgaben- und Zahlenblick mit Sortieraufgaben (vgl. z. B. Rechtsteiner 2020). Ziel dieser Aufgaben ist das Innehalten, die Suche nach Beziehungen und das Anknüpfen der gegebenen Aufgaben an das individuelle Wissensnetz.

### Ein weiteres Werkzeug

Um die bisher genannten Werkzeuge beim Lösen von Multiplikations- und Divisionsaufgaben angemessen nutzen zu können, ist eine weitere Kompetenz unbedingt notwendig: Das sichere Addieren und Subtrahieren im entsprechenden Zahlenraum. Das Lösen der Aufgabe  $7 \cdot 6$  über die Aufgabe  $6 \cdot 6 + 6$  ist nur dann sinnvoll, wenn der Rechenschritt  $36 + 6$  schnell und sicher gelingt. Ist dies nicht der Fall, würde das Nutzen von Ableitungsstrategien für ein Kind keinen vorteilhafteren Rechenweg darstellen als das Durchgehen der Sechserreihe.

### Werkzeuge verknüpfen – Strategien thematisieren

Beim Lösen von Multiplikations- und Divisionsaufgaben sollen Schülerinnen und Schüler im Laufe der Schulzeit lernen, sog. Ableitungsstrategien zu nutzen – also Strategien, bei denen das Ergebnis aus bekannten Aufgaben hergeleitet werden kann (vgl. Gasteiger & Paluka-Graham 2013). Das Nutzen von Ableitungsstrategien kann im Unterricht anschauungsgebunden thematisiert werden. Hierzu eignen sich ein

Hunderter-Punktefeld für das kleine Einmaleins nebst zwei halbtransparenten Folien unterschiedlicher Farbe (z. B. rot und blau), später das Vierhunderter-Punktefeld und Rechtecksskizzen. Dabei können vier Impulsfragen beim Erkennen und Nutzen operativer Beziehungen und schließlich bei der Entwicklung von tragfähigen Strategien hilfreich sein (vgl. Schulz & Wartha im Druck):

- Wie wird die Aufgabe dargestellt?
- Wie oder wo wirst du das Ergebnis sehen?
- Welche Aufgabe kennst du schon?
- Wie kannst du diese bekannte Aufgabe nutzen?

Im Folgenden wird am Beispiel der Divisionsaufgabe  $42 : 6$  gezeigt, wie Strategien materialgestützt versprachlicht und gemeinsam erarbeitet werden können (weitere Beispiele finden sich bei Schulz & Wartha im Druck, Beispiele für die Multiplikation siehe ebd., z. B. auch bei Schipper et al. 2015).

### Division mit dem Punktefeld

Um Divisionsaufgaben am Punktefeld darzustellen, sind zwei Aspekte im Vorfeld zu beachten: Der Zusammenhang zwischen Multiplikation und Division kann und sollte genutzt werden und die Vorstellung des Aufteilens in gleich mächtige Bündel ist zentral.

### Aufgabe darstellen – Reihe einstellen

Das Darstellen der Aufgabe  $42 : 6$  am Punktefeld ist nicht ohne weiteres möglich, denn dafür müsste der passende Ausschnitt – also die Anzahl der Reihen und Spalten – auf dem Punktefeld

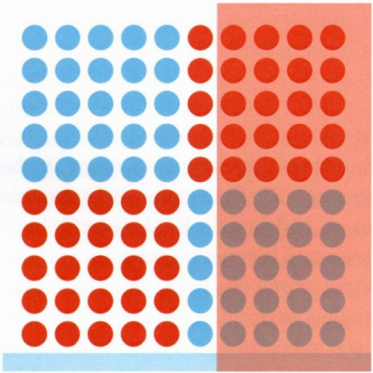
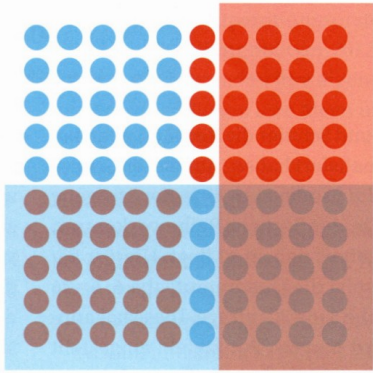
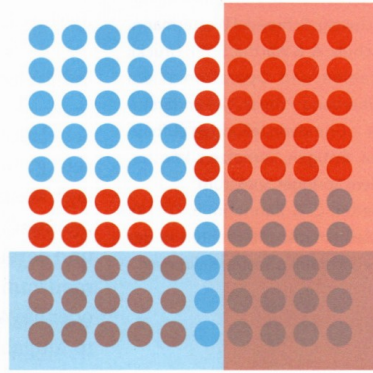
|                                                                                                         |                                                                                                                 |                                                                                                                                          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                      |                             |                                                     |
| <p><b>Reihe einstellen und Ergebnis vorwegnehmen:</b><br/>„Wie viele Sechser sind in 42 enthalten?“</p> | <p><b>Bekannte Aufgaben suchen:</b><br/>„Ich weiß, dass 5 Sechsen insgesamt 30 sind, und 30 ist nah an 42.“</p> | <p><b>Bekannte Aufgaben nutzen:</b><br/>„Bis zu 42 fehlen nur noch 12, das sind 2 Sechsen. Insgesamt enthält die 42 also 7 Sechsen.“</p> |

Abb. 4: Veranschaulichung und Versprachlichung von Ableitungsstrategien am Beispiel  $42 : 6 = 7$

## Literatur

- Büchter, A. & Padberg, F. (2020): Arithmetik und Zahlentheorie. Berlin: Springer Spektrum.
- Gasteiger, H. & Paluka-Graham, S. (2013): Strategieverwendung bei Einmaleinsaufgaben – Ergebnisse einer explorativen Interviewstudie. Journal für Mathematik-Didaktik, 34(1), 1–20.
- Padberg, F. & Benz, C. (2020): Didaktik der Arithmetik. Berlin: Springer Spektrum.
- Rechtssteiner, Ch. (2020): Schulung des Zahlenblicks. Flexibles Rechnen entwickeln bei Multiplikation und Division. Grundschule Mathematik, Heft 66, 2–3.
- Schütte, S. (2004): Rechenwegsnotation und Zahlenblick als Vehikel des Aufbaus flexibler Rechenkompetenzen. Journal für Mathematik-Didaktik, 25 (2), 130–148.
- Schulz, A. (2018): Der „Werkzeugkoffer“ – Mentale Werkzeuge für die grundlegenden Rechenoperationen. In: Grundschule Mathematik, 57, S. 4–7.
- Schulz, A. (2017): Multiplikation verstehen – Durch Anschauungsmaterial zu Grundvorstellungen. mathematik lehren, 201, 17–22.
- Schipper, W., Ebeling, A. & Dröge, R. (2015): Handbuch für den Mathematikunterricht 2. Schuljahr. Braunschweig: Schroedel Westermann.
- Schulz, A. & Wartha, S. (im Druck): Zahlen und Operationen am Übergang Primar-/Sekundarstufe – Grundvorstellungen aufbauen, festigen, vernetzen. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Selter, C. & Zannetin, E. (2018): Mathematik unterrichten in der Grundschule. Seelze: Kallmeyer.

bereits bekannt sein. Bekannt ist jedoch nur die Anzahl der Punkte, die im Ausschnitt zu sehen sein sollen (hier: 42) und die Größe der zu bildenden Bündel (hier: 6). Daher wird bei der Division – anders als bei der Multiplikation – nicht die Aufgabe eingestellt, sondern die „Reihe“ (hier: die Sechser-Reihe, vgl. Abb. 4 links).

## Das Ergebnis vorwegnehmen

Bevor nun die Lösung der Aufgabe  $42 : 6$ , zum Beispiel über benachbarte Aufgaben hergeleitet wird, sollte zunächst gemeinsam versprochen werden, wo und wie das Ergebnis am Punktefeld am Ende der Handlung zu sehen sein wird: Gesucht wird die Anzahl der Sechser-Bündel; das Ergebnis ist also die Antwort auf die Frage „Wie viele Sechser-Bündel sind in 42 enthalten?“. Aus diesem Grund ist es geschickt, im ersten Schritt bereits die Sechser-Bündel einzustellen (Abb. 4 links).

## Eine bekannte Aufgabe suchen

In diesem Schritt wird der Zusammenhang zwischen Multiplikation und Division besonders relevant. Und es ist notwendig, dass die

Sechser, um 42 Punkte einzustellen. Hierzu fehlen noch 12 Punkte, also zwei weitere Sechser (Abb. 4 rechts). Die 42 besteht also aus 5 Sechsern und nochmal 2 Sechsern. In der 42 ist die 6 also insgesamt 7 mal enthalten.

## Multiplikation und Division an Rechtecksskizzen

Für größere Zahlenräume werden Punktefelder irgendwann unpraktisch. Das beschriebene Vorgehen kann aber gut auf Rechtecke übertragen werden. So kann zum Beispiel Mirkan seinen Rechenweg mit Hilfe eines skizzierten Rechtecks erklären: „Ich male mir ein Rechteck. Das Rechteck soll 295 Einheiten groß sein. Um rauszubekommen, wie oft die 5 in die 295 passt, denke ich mir ganz viele Fünfer-Streifen nebeneinander in das Rechteck, und ich will wissen, wie viele das sind. Wenn das Rechteck 300 Einheiten groß wäre, wäre das einfach, das wären dann 60 Fünfer-Streifen. Dann wäre das Rechteck aber einen Fünfer-Streifen zu groß, deshalb muss ich einen Fünfer wieder wegnehmen und habe nur noch 59.“ (vgl. Abb. 5).

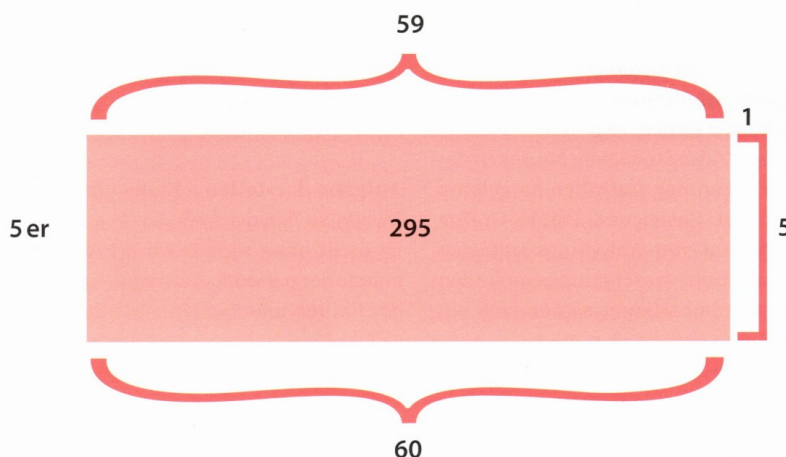


Abb. 5: Veranschaulichung einer Divisionsaufgabe an einer Rechtecksskizze (Beispiel  $295 : 5$ )

Schülerinnen und Schüler die Kernaufgaben bereits gut automatisiert haben. Auf dieser Grundlage können die Kinder nun eine Kernaufgabe „suchen“, die in der Sechser-Reihe vorkommt, und deren Ergebnis nah an 42 liegt. Hierfür kämen zum Beispiel die Quadrataufgabe  $6 \cdot 6 = 36$  oder die Aufgabe  $5 \cdot 6 = 30$  infrage. Diese bekannte Aufgabe wird nun am Punktefeld eingestellt – also zum Beispiel 5 Sechser-Reihen mit insgesamt 30 Punkten (Abb. 4 Mitte).

## Die bekannte Aufgabe nutzen

Im letzten Schritt wird nun der Bezug zur Ausgangsaufgabe hergestellt: Gesucht ist nicht die Anzahl der Sechser, die benötigt werden um 30 Punkte einzustellen, sondern die Anzahl der

## Schluss

Lehrerinnen und Lehrer wissen, dass aufgabenangemessenes (Kopf-) Rechnen nicht voraussetzungslos ist, und dass die Kinder hierfür bereits viel wissen und können müssen. Im vorliegenden Beitrag wurde der Versuch unternommen, die mentalen Werkzeuge, die hierfür notwendig sind, etwas aufzuräumen. Durch dieses Aufräumen kann es möglich werden, die Entwicklung einzelner Werkzeuge gezielt zu diagnostizieren und zu fördern. ■