

Grundvorstellungen von Ableitung und Integral als Zugang zur Analysis

1 Einleitung

Grundvorstellungen spielen bei der Entwicklung des Ableitungs- und Integralbegriffs eine zentrale Rolle im Analysisunterricht der Sekundarstufe II. Eine *Grundvorstellung* zu einem fachlichen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt. Die Ausbildung einer solchen Vorstellung ist eine wesentliche Voraussetzung, um mit einem Begriff verständnisvoll umgehen zu können. Hingegen ist ein *Aspekt* eines mathematischen Begriffs ein Teilbereich des Begriffs, mit dem dieser fachlich charakterisiert werden kann. Aspekte und Grundvorstellungen sind beim Umgang mit Mathematik untrennbar miteinander verbunden. Durch Grundvorstellungen können fachliche Aspekte eines mathematischen Begriffs erfasst und durch den Bezug zu sinnhaften Kontexten mit Bedeutung versehen werden [Greefrath ET AL. 2016, S. 17]. Wir erläutern im Folgenden exemplarisch wichtige Grundvorstellungen der beiden zentralen Begriffe „Ableitung“ und „Integral“ und zeigen auf, wie Grundvorstellungen stärker als Zugänge zu diesen Begriffen in den Blick genommen und vernetzt werden können.

2 Ableitung

2.1 Aspekte von Ableitungen

Die Ableitung einer Funktion an einer Stelle kann unter zwei fachlichen Aspekten betrachtet werden: als *Grenzwert des Differenzenquotienten* und als *lokale lineare Approximation*. Der Aspekt der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten dominiert die Schulbücher und viele universitäre Lehrwerke, er wird deswegen nicht weiter ausgeführt. Der Aspekt der lokalen Linearisierung spielt dagegen eine untergeordnete Rolle (vgl. aber die Beiträge von HENNING und OLDENBURG ET AL. in diesem Heft). Unter diesem Aspekt wird eine Funktion f in einer (beliebig) kleinen Umgebung von x_0 durch eine lineare Funktion approximiert. Man wählt die lineare Funktion so, dass der entstehende Approximationsfehler $r(x - x_0) = f(x) - (f(x_0) + m \cdot (x - x_0))$, also die Differenz zwischen den Werten von f und den Werten der linearen Funktion, möglichst schnell klein wird, wenn man sich der Stelle nähert. Die fachlich präzise Definition der Differenzierbarkeit von f in $x_0 \in \mathbb{R}$ lautet, dass es eine Zahl m wie in der Definition des Restgliedes $r(x - x_0)$ gibt, mit der gilt: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x - x_0)}{x - x_0} = 0$. Die Zahl m wird dann als Ableitung $f'(x_0)$ bezeichnet.

Für eine vollständige Beschreibung der Aspekte und Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff verweisen wir auf GREEFRATH ET AL. [2016, S. 147 ff.]. Im Folgenden betrachten wir exemplarisch die Grundvorstellungen *lokale Änderungsrate* und *Verstärkungsfaktor*.

2.2 Grundvorstellung „lokale Änderungsrate“

In der Sekundarstufe I werden verschiedene Begriffe zur Beschreibung von Änderungsprozessen thematisiert: absolute und relative Änderung, prozentuale Änderung, Monotonie, Extremum etc. Darauf aufbauend, lässt sich der Differenzenquotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ als mittlere

Änderungsrate und der Grenzwert davon als lokale Änderungsrate einführen. Diese Grundvorstellung ist eng verknüpft mit dem Aspekt des Grenzwertes des Differenzenquotienten, sie lässt sich aber auch aus dem Aspekt der lokalen Linearisierung gewinnen: Für lineare Funktionen ist die Änderungsrate gerade die Steigung.

Studien [z. B. FEUDEL 2015, HERBERT UND PIERCE 2012] zeigen allerdings, dass die Vorstellung der lokalen Änderungsrate von den Lernenden nicht leicht aufgenommen wird und insbesondere viele Sichtweisen erlaubt [z. B. THOMPSON 1994, UBUZ 2007], die dazu führen, dass „[...] students at various levels have difficulty conceptualizing the idea rate of change“ [TEUSCHER und REYS 2010, S. 519]. Neben dem grundlegenden Beispiel der Geschwindigkeit eignen sich verschiedene Wachstumsprozesse gut zur Entwicklung dieser Grundvorstellung.

Zur Überprüfung, ob die Vorstellung der Änderungsrate bezogen auf Funktionsgraphen ausgebildet ist, kann man die folgende Aufgabe verwenden:

Ein Punkt P auf dem Graphen der Funktion f hat die Koordinaten $(x|y)$. Veränderungen Δx des x-Wertes von P bewirken Veränderungen Δy des y-Wertes. In einem bestimmten Punkt des abgebildeten Graphen von f gilt $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$. Erläutern Sie, in welchem Punkt dies näherungsweise der Fall ist.

Schreibt man die Ratenbeziehung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$ multiplikativ als $\Delta y = 2\Delta x$, ermöglicht das eine neue Sichtweise, die Grundlage einer weiteren, im Folgenden beschriebenen Vorstellung.

2.3 Grundvorstellung „Verstärkungsfaktor“

Besteht zwischen zwei Größen ein funktionaler Zusammenhang, wirken sich Änderungen (beispielsweise Messfehler) der unabhängigen Größe auf die abhängige Größe aus. Die Grundvorstellung vom Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen beinhaltet, dass sich solche Änderungen multiplikativ auswirken (Ableitung als Verstärkungsfaktor).

Eine solche Verstärkungsfaktorstellung lässt sich sowohl auf den Differenzenquotienten als auch auf die Ableitung anwenden [vgl. auch MALLE 2003]: $\Delta y = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \Delta x$ bzw.

$$\Delta y \approx f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

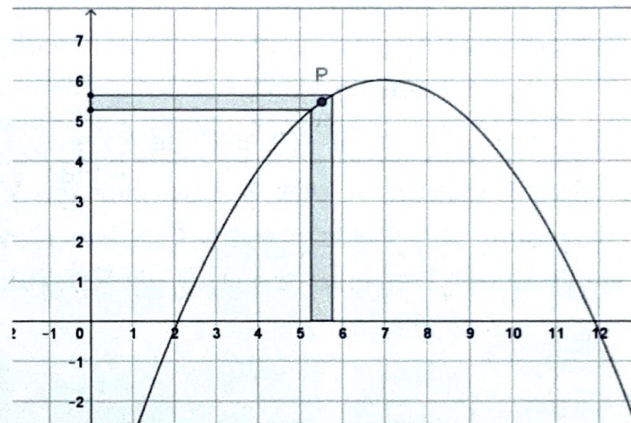


Abb. 1: Zusammenhang zwischen Abwurfwinkel und Abwurfgeschwindigkeit bei einem erfolgreichen Freiwurf im Basketball

Die erste Gleichung ist eine Konsequenz der Definitionen $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$, die zweite approximative Gleichung dagegen drückt aus, dass sich die tatsächliche Änderung Δy gut durch die linearisierte Änderung $dy = f'(x_0) \cdot \Delta x$ approximieren lässt (dabei sind Δx und dx identisch). Damit schließt diese Grundvorstellung vor allem an den Aspekt der lokalen Linearisierung an.

Zur Grundvorstellung des Verstärkungsfaktors gehören folgende Vorstellungen:

- Die Ableitung gibt an, wie stark sich Änderungen der Unabhängigen auf die abhängige Variable auswirken.
- Hohe Werte der Ableitung signalisieren schnelle bzw. starke Änderungen.
- Für kleine Änderungen von Δx sind Δx und Δy näherungsweise direkt proportional.

Diese Vorstellung ist nicht im Fokus aktueller Analysis(schul)bücher, aber sie kann gerade bei realitätsbezogenen Problemen hilfreich sein, wenn Änderungen von abhängigen Größen bei Änderungen der unabhängigen Größen qualitativ und näherungsweise auch quantitativ erfasst werden sollen. Wir betrachten als Beispiel den Graphen aus **Abb. 1**. Bei einer quadratischen Funktion f (**Abb. 2**) lässt sich die Veränderung Δy bei der Änderung Δx in der Umgebung des Punktes A des Graphen G_f von f auch quantitativ abschätzen, wenn die Steigung der Tangente in A an G_f als Verstärkungsfaktor genommen wird.

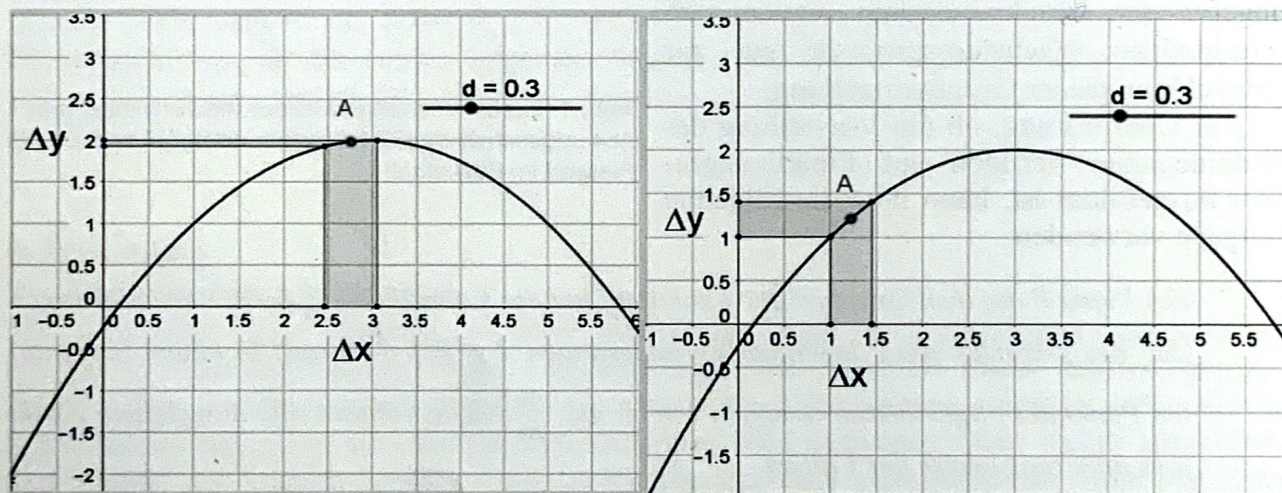


Abb. 2: Visualisierung des Verstärkungsfaktors an verschiedenen Stellen des Graphen einer quadratischen Funktion

2.4 Verbindung der Grundvorstellungen

Wenn man mit Studierenden das Konzept der Grundvorstellungen diskutiert, kommt immer wieder die Frage auf, wie trennscharf diese sind. Die Antwort ist enttäuschend einfach: Sie sind nicht trennscharf. Das ist der Idee der Grundvorstellungen geschuldet: Da man von einem mathematischen Konzept idealerweise mehrere Grundvorstellungen hat, müssen diese in Beziehung gesetzt werden, um ein konsistentes Gesamtbild abzugeben. Um dies zu unterstützen, sollte der Unterricht Beziehungen zwischen den Grundvorstellungen herausarbeiten. Die lokale Linearisierung definiert lokal eine Strecke, die den Graphen gut approximiert – zur Geraden fortgesetzt ergibt sich das globale Bild der Tangente als Schmiegegerade. An die Tangente lässt sich ein Steigungsdreieck anlegen und die zugehörige Steigung $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist die Änderungsrate. Multiplikativ gedeutet bedeutet das, dass lokal eine direkte Proportionalität

vorliegt: $\Delta y \sim \Delta x$ und der Proportionalitätsfaktor ist der Verstärkungsfaktor. Es ist eine gute Übung, sich alle Kalkülregeln der Ableitung und die relevanten Sätze (etwa zum lokalen Extremum) aus der Perspektive möglichst vieler Grundvorstellungen zu erschließen.

3 Integral

3.1 Aspekte von Integralen

Beim Integral werden [siehe GREEFRATH ET AL. 2016 Kapitel 5] der Produktsummen-, der Maß- und der Stammfunktionsaspekt voneinander unterschieden. Diese Aspekte zeichnen sich dadurch aus, dass damit der Integralbegriff fachlich charakterisiert werden kann.

Der *Produktsummenaspekt* ist die Grundlage der RIEMANN-Definition bestimmter Integrale. Ober- und Untersummen besitzen die algebraische Struktur einer Summe von Produkten $a_1 \cdot \Delta x_1 + a_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + a_n \cdot \Delta x_n$ und das Integral ist ein Grenzwert davon. Innermathematische Beispiele dieser Vorstellung sind die Streifensumme, die Bogenlänge und das Rotationskörpervolumen, ein außermathematisches Beispiel ist die Berechnung des zurückgelegten Wegs aus Geschwindigkeiten in bestimmten Zeitintervallen.

Werden Integrale unter dem *Maßaspekt* eingeführt, so steht das Messen von Längen, Flächen, Volumina oder auch physikalischer Größen im Fokus.

Für stetige Funktionen können bestimmte Integrale mit dem *Stammfunktionsaspekt* fachlich charakterisiert werden. Ist f eine auf einem Intervall I stetige reelle Funktion und F eine Stammfunktion von f , so ist gemäß

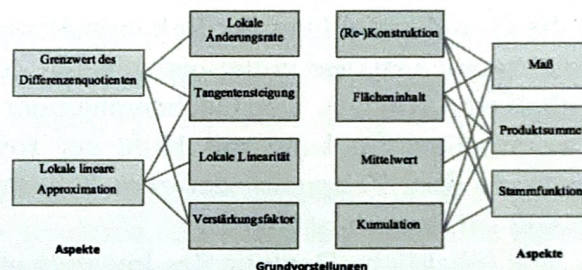


Abb. 3: Grundvorstellungen von Ableitung und Integral

dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, mit $a, b \in I$. Das Integral ist also eine Differenz der Funktionswerte einer Stammfunktion.

Diese Aspekte liefern die Basis für Grundvorstellungen der Integralrechnung: (Re-)Konstruktionsvorstellung, Flächeninhaltsvorstellung, Mittelwertsvorstellung und Kumulationsvorstellung (s. Abb. 3). Analog zum Ableitungsbegriff beschreiben wir exemplarisch eine Grundvorstellung zum Integralbegriff, nämlich die der (Re-)Konstruktion. Für eine vollständige Beschreibung der Aspekte und Grundvorstellungen zum Integralbegriff verweisen wir auf GREEFRATH ET AL. [2016, S. 238 ff.].

3.2 Grundvorstellung „(Re-)Konstruktion“

Unter Konstruktion oder Rekonstruktion im Zusammenhang mit dem Integralbegriff versteht man häufig die (Re-)Konstruktion einer Größe aus gegebenen Raten- bzw. Geschwindigkeitsdaten. Bestand und Änderung sind in diesem Zusammenhang wichtige Kategorien [s. HAHN UND PREDIGER 2008, S. 178]. Die Unterscheidung zwischen Konstruktion und Rekonstruktion liegt in der Interpretation der Werte der Ausgangsfunktion. Fasst man sie als Werte einer gegebenen Größe auf, so bedeutet das Integrieren die Neukonstruktion eines

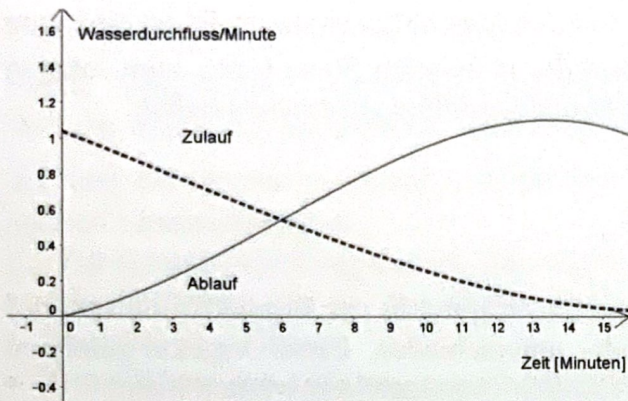


Abb. 4: Wasserzulauf und -ablauf

funktionalen Zusammenhangs. Interpretiert man sie als Änderungsraten eines funktionalen Zusammenhangs, so bedeutet das Integrieren die Rekonstruktion dieses Zusammenhangs [BENDER 1990]. Ein bekannter Kontext zu dieser Vorstellung der Rekonstruktion einer Größe ist die Rekonstruktion des vorhandenen Wasservolumens in einem Behälter aus Daten über die Zu- und Abflussgeschwindigkeit. Wir betrachten dazu als Beispiel die Graphen aus **Abb. 4**, die über einen Zeitraum von 15 Minuten den gleichzeitigen Wasserzulauf und den Wasserablauf in einem Becken in Abhängigkeit von der Zeit angeben.

Für die Beantwortung der Frage, zu welchem Zeitpunkt am meisten Wasser im Becken ist, ist die Grundvorstellung der Rekonstruktion hilfreich. Hier stellt man sich vor, wie groß die Wassermenge ist, die in der betrachteten Zeit in das Becken hinein- und hinausgelaufen ist (Zulauf und Ablauf). Der Flächeninhalt der Fläche zwischen den Graphen entspricht dieser Wassermenge. So kann mit Hilfe der Rekonstruktionsvorstellung erkannt werden, dass genau zu dem Zeitpunkt, der zum Schnittpunkt der beiden Graphen gehört, am meisten Wasser im Becken ist.

Die inhaltliche Deutung des Integrals im Sinne einer Konstruktion oder Rekonstruktion von Größen oder Stammfunktionen ist besonders vielfältig und hat Bezüge zu allen Aspekten des Integrals. Sie wird daher als besonders wichtig für ein inhaltliches Integralverständnis angesehen [DANCKWERTS UND VOGEL 2006, S. 98 ff.].

3.3 Verbindung der Grundvorstellungen

Die Kumulationsvorstellung besagt, dass das Integral eine verallgemeinerte Summe ist, genauer ein Grenzwert einer Produktsumme. Die Flächeninhaltsvorstellung schließt sich daran über das Hilfsmittel der „Streifensumme“ an. Wenn man bei diesem Hilfsmittel die Streifenhöhen mittelt, verwandelt man die Fläche in ein flächengleiches Rechteck, dessen Höhe der Mittelwert der Funktionswerte ist. Der letzte Streifen gibt an, wie stark sich die Gesamtfläche ändert: Seine Höhe ist also eine Änderungsrate, aus der der Flächeninhalt rekonstruiert wird.

4 Verbindung von Differential- und Integralrechnung

Im Sinne eines vernetzenden Lernens sollten die Grundvorstellungen zu den beiden Schlüsselbegriffen der Analysis verbunden werden. Der Zugang zum Integral über „Bestände und Änderungsraten im Anwendungskontext“ ermöglicht den direkten Bezug zur Änderungsratenvorstellung der Ableitung, wie das folgende Aufgabenbeispiel (**Abb. 5**) zeigt.

Der Graph zeigt die Temperaturänderung (in °C pro Stunde) in Abhängigkeit von der Tageszeit (in Stunden) und es soll bestimmt werden, wann die Temperatur maximal ist. Dies verbindet die Änderungsratenvorstellung mit der Kumulationsvorstellung bzw. der Rekonstruktionsvorstellung. Diese Vernetzung der Grundvorstellungen zeigt sich besonders

deutlich beim Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Die dahinterstehenden fachlichen Aspekte sind die der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten und des Integrals als Grenzwert einer Produktsumme – die Paare inverser

Grundrechenarten suggerieren die Beziehung, die der erste Hauptsatz präzisiert. Die gleichen fachlichen Aspekte verbinden sich auch in der folgenden Aufgabe:

Ein Körper steht auf dem Boden und ist 2 m hoch. Schneidet man ihn parallel zum Boden in der Höhe h durch, so hat die Querschnittsfläche den Flächeninhalt $A(h)$

= $-h^2 + 2h + 1$. Erläutern Sie, welche Bedeutung der Ausdruck $\int_0^2 A(h) dh$ hat.

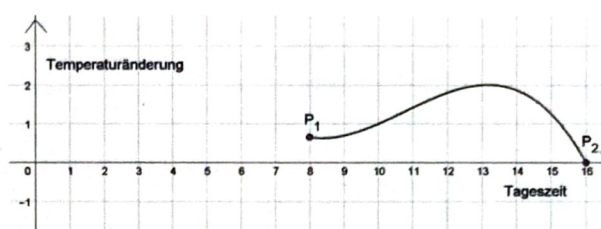


Abb. 5: Temperaturänderung in Abhängigkeit von der Tageszeit

Das Volumenintegral ist der Grenzwert über eine Summe von Volumina von Scheibchen der Höhe dh . Betrachtet man das Integral als variabel in der oberen Grenze, dann ist die Querschnittsfläche die Änderungsrate bzw. der Faktor, mit dem sich eine kleine Höhenänderung des Körpers verstärkt.

Hier zeigt sich insbesondere, dass die geometrische Flächenvorstellung nicht so gut zur geometrischen Tangentenvorstellung passt. Um die durch den Hauptsatz gegebene Brücke zu gehen, müsste man ausgehend von der Tangentenvorstellung beim Integral zu einer Vorstellung der Integralkurve im Richtungsfeld kommen. Und umgekehrt müsste man bei der Flächeninhaltsvorstellung dazu kommen, das aktiv wachsende Stück einer Fläche als Ableitung zu sehen (man vergleiche den Aufsatz von KIRFEL und ASLAKSEN in diesem Heft).

5 Fazit

Mit Hilfe von Grundvorstellungen zentraler Begriffe können verschiedene Aspekte der Begriffe im Hinblick auf das Lehren und Lernen analysiert werden. Dies ermöglicht eine detaillierte Betrachtung zum Begriffsverständnis einzelner Begriffe, aber auch die Analyse von Zusammenhängen verschiedener Begriffe auf der Ebene der Grundvorstellungen. Zudem kann die Betrachtung der möglichen aktivierten und vernetzten Grundvorstellungen Kriterien für die Beurteilung von unterrichtlichen Zugängen zu einem Begriff wie dem Integral ergeben.

So wird beispielsweise die Grundvorstellung der Ableitung als lokale Änderungsrate als wesentlich für die Rekonstruktionsvorstellung des Integrals angesehen [DANCKWERTS und VOGEL 2006, S. 125]. Weitere Zusammenhänge zwischen Grundvorstellungen der beiden Begriffe Ableitung und Integral zeigt Abb. 6. Beispielsweise ist die Rekonstruktion der Stammfunktion mit Hilfe von Tangentensteigungen ein Hinweis auf den Zusammenhang der Vorstellungen von Tangentensteigung und Rekonstruktion.

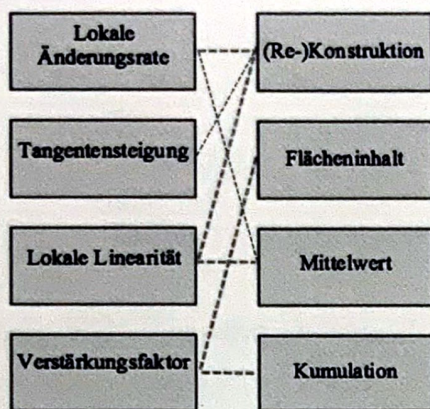


Abb. 6: Zusammenhänge von Grundvorstellungen zu Ableitung und Integral

Die Idee der lokalen bzw. globalen Linearisierung verbindet die Vorstellungen von lokaler Linearität und Mittelwert. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zeigt mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f'(x) dx$, dass

die mittlere Änderungsrate gleich einem Mittelwert der Ableitungsfunktion ist, und stellt damit einen Bezug zwischen Änderungsrate- und Mittelwertsvorstellung her.

Diese Zusammenhänge machen zum einen deutlich, wie nützlich das Vorhandensein mehrerer Grundvorstellungen zu einem Begriff ist. So ist es möglich, auf verschiedenen Wegen die Beziehungen zwischen zwei verschiedenen mathematischen Begriffen zu erkennen und auf der Ebene der inhaltlichen Deutung dieser

Begriffe auch die fachlichen Bezüge zu verstehen. Zum anderen können diese Zusammenhänge bei der didaktischen Beurteilung unterrichtlicher Zugänge ein nützlich Kriterium darstellen.

Literatur

- [1] BENDER, P. (1990). Zwei „Zugänge“ zum Integralbegriff? *mathematica didactica* 14, 102–127.
- [2] DANCKWERTS, R., & VOGEL, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.
- [3] GREEFRATH, G., OLDENBURG, R., SILLER, H.-St., ULM, V., & WEIGAND, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis – Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Heidelberg: Springer Spektrum.
- [4] HAHN, S., & PREDIGER, S. (2008). Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *Journal für Mathematikdidaktik*, 29(3/4), 163–198.
- [5] HERBERT, S. & PIERCE, R. (2012). What is rate? Does context or representation matter? *Mathematical Education Research Journal*, 23(4), 455–477.
- [6] MALLE, G. (2003). Vorstellungen vom Differenzenquotienten fördern. *Mathematik lehren*, (2003) 118, S. 57–62.
- [7] MAMOLO, A., ZAZKIS, R. (2012). Stuck on convention: a story of derivative relationships. *Educ Stud Math* 81,161–177.
- [8] MATHEMATIK NEUE WEGE. Einführungsphase. Arbeitsbuch für Gymnasien; Hessen [2010]. Braunschweig: Schroedel.
- [9] TEUSCHER, D.; REYS, R.E. (2010). Slope, Rate of Change, and Steepness: Do Students Understand These Concepts. *Mathematics Teacher*, Vol. 193, No. 7, p. 519–524.
- [10] THOMPSON, PATRICK W. (1994). The Development of the Concept of Speed and Its Relationship to Concepts of Rate. In Guershon Harel and Jere Confrey (Eds.). *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*. Albany, NY: State University of New York Press.
- [11] TIETZE, U. P., KLIKA, M., & WOLPERS, H. H. (2000). *Fachdidaktische Grundfragen, Didaktik der Analysis – Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II*. Wiesbaden: Vieweg.
- [12] UBUZ, B. (2007). Interpreting a graph and constructing its derivative graph: Stability and change in students' conceptions. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*. 38 (5), 609–637.