7 Zusammenhang von Differenzial- und Integralrechnung

(gekürzt)

Übersicht

Das Wort „Hauptsatz“ verdeutlicht die Bedeutung dieses Satzes, der zwei Jahrtausende alte mathematische Problemkreise – das Problem, Tangenten an Kurven zu legen, und das Problem, Flächeninhalte zu bestimmen, – zusammenführt. Im Anschluss an die Formulierung und den Beweis des Hauptsatzes werden wir in 7.3 noch eine weitere wesentliche Grundvorstellung von Integralen präsentieren: Neben der Rekonstruktion des Bestands aus Änderungsraten und der Flächenberechnung kann Integrieren auch bedeuten, dass man einen geeigneten Mittelwert bildet.

Ein bei der Formulierung des Hauptsatzes hilfreicher Begriff ist der einer „Stammfunktion“, der zunächst nur ein technischer Hilfsbegriff ist, der nichts mit dem Integrieren zu tun hat (7.1). Eine Stammfunktion von f ist einfach eine Funktion F, deren Ableitung gerade f ist ($F' = f$).

7.1 Stammfunktionen und Richtungsfelder

Definition 7.1 (Stammfunktion)
F heißt *Stammfunktion von* f, wenn F differenzierbar ist und $F' = f$ gilt. ♦

Genau genommen, muss bei dieser Definition natürlich noch der Bereich angegeben werden, in dem das gilt. Bei der Anwendung des Begriffs, geht dies jedoch in der Regel eindeutig aus dem Kontext hervor, sodass wir die Definition hiermit nicht „belasten“ möchten.

Beispiele für Funktionen mit zugehörigen Stammfunktionen

Tab. 7.1: Stammfunktionen zu ausgewählten Funktionen

$f(x)$	x^2	$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{x^2}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$F(x)$	$\frac{1}{3}x^3$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\frac{-1}{x}$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$

Gibt es bei den Beispielen aus Tab. 7.1 jeweils noch andere Stammfunktionen von f? Durch Ableiten prüft man sofort, dass mit jeder Stammfunktion F auch G mit $G(x) = F(x) + a$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist. Umgekehrt stellt sich dann die Frage, ob sich je zwei Stammfunktionen von f stets nur durch eine Konstante unterscheiden. Hierzu deuten wir die Gleichung $F'(x) = f(x)$, die zwischen Funktion und Stammfunktion gilt, als *Differenzialgleichung*, d. h. die Funktion f ist gegeben, und es ist eine Funktion F derart gesucht, dass die Differenzialgleichung gilt. Möchte man mit Gleichungen der Art „$F' = f$“ umgehen, muss man über eine hinreichende Objektvorstellung von Funktionen verfügen[2]!

Möchten wir der Frage nachgehen, ob zwei Stammfunktionen sich nur durch eine Konstante unterscheiden (können), müssen wir in unserer (bisher rein) anschaulichen Sprechweise die Funktion F aus ihren Änderungsraten $f(x)$ rekonstruieren. D. h. an der Stelle x muss die Funktion F die Ableitung $f(x)$ haben. Wir wissen aber nicht, durch welchen Punkt $(x|F(x))$ der Graph von F verläuft, wir wissen nur, dass die Tangente in diesem Punkt die Steigung $f(x)$ hat. Also zeichnen wir in einem x-y-Koordinatensystem in jedem Punkt $(x|y)$ „die Richtung $f(x)$ ein“, d. h. wir zeichnen ein kleines Geradenstückchen der Steigung $f(x)$, und erhalten damit ein so genanntes *Richtungsfeld*[3]. In Abb. 7.1 ist das Richtungsfeld für die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$ mithilfe eines Computer-Algebra-Systems[4] erzeugt worden.

[1]Natürlich können wir auch Funktionen angeben, zu denen wir (noch) keine Stammfunktion kennen, z. B. $f(x) = \frac{1}{x}$.

[2]Z. B. trifft die Differenzialgleichung eine Aussage über die Beziehung der mathematischen Objekte „F“ und „f“ zueinander.

[3]*Richtungsfelder* kommen auch im „täglichen Leben“ vor: Achten Sie bei den Wetternachrichten im Fernsehen auf die Karten, auf denen mit kleinen Pfeilen die Windrichtungen oder die Druckunterschiede angedeutet werden. Aus der Schule kennen Sie wahrscheinlich das Verhalten von Eisenspänen im Feld eines Magneten. Das sind ebenfalls Richtungsfelder.

[4]Alle uns bekannten Computer-Algebra-Systeme können Richtungsfelder zeichnen.

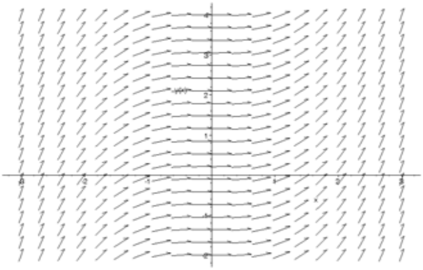

Abb. 7.1: Richtungsfeld für $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$

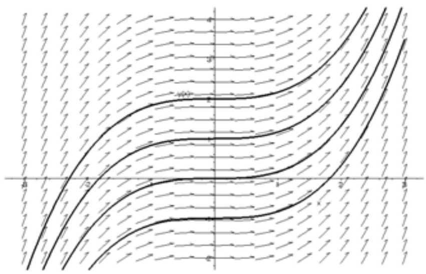

Abb. 7.2: Stammfunktionen von f

Wenn man nun das Richtungsfeld in einem Punkt $(x|y)$ betrachtet, dann bedeutet die Rekonstruktion einer geeigneten Funktion F einfach, dass man den Pfeilen, die die jeweiligen Tangentenrichtungen angeben, ab hier folgt bzw. sich entsprechend der Pfeile, die hierher geführt haben, zurück bewegt. In Abb. 7.2 sind für vier unterschiedliche Startpunkte ($(0|-1)$, $(0|0)$, $(0|1)$ und $(0|2)$) auf diese Weise (dick eingezeichnete) Graphen von Stammfunktionen von f konstruiert worden. Die Funktionsterme dieser vier Rekonstruktionen unterscheiden sich nur um eine additive Konstante – und haben von unten nach oben die Terme $\frac{1}{6}\cdot x^3-1$, $\frac{1}{6}\cdot x^3$, $\frac{1}{6}\cdot x^3+1$ und $\frac{1}{6} \cdot x^3 + 2$. Aus der Betrachtung des Richtungsfelds scheint klar zu sein, dass sich alle Stammfunktionen nur um einen konstanten Summanden unterscheiden.

Unser anschauliches Vorgehen funktioniert aber nur, wenn wir wie im Beispiel einen zusammenhängenden Ausschnitt der reellen Zahlengerade, also ein Intervall, als Definitionsmenge zugrunde legen. Ist dies nicht der Fall, dann lässt sich leicht ein Gegenbeispiel konstruieren:

Die Definitionsmenge der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ist kein Intervall sondern besteht aus zwei disjunkten Intervallen: $D = \mathbb{R}\backslash\{0\} =]-\infty; 0[\cup]0; \infty[$. Die beiden Funktionen F und G, definiert durch

$$\begin{aligned} F(x) &= \tfrac{-1}{x} \text{ für } x \neq 0 \text{ und} \\ G(x) &= \begin{cases} \frac{-1}{x} + 1 & \text{für } x < 0 \\ \frac{-1}{x} & \text{für } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

sind gemäß unserer Definition zwei in D definierte Stammfunktionen von f, die sich allerdings nicht nur um eine Konstante unterscheiden. Diese Konstruktion hängt offensichtlich entscheidend davon ab, dass D kein Intervall ist. In Abb. 7.3 sind das Richtungsfeld von f und die Graphen von F und G (dicker Graph für $x < 0$) gezeichnet worden.

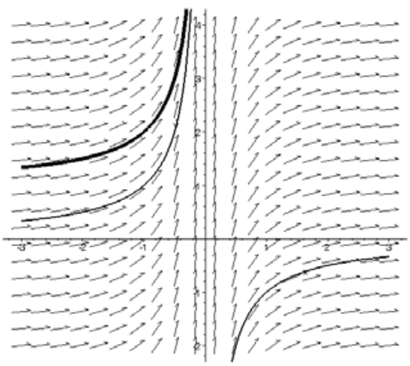

Abb. 7.3: Stammfunktionen von f(x) $= \frac{1}{x^2}$

Wir vermuten also den folgenden Satz

Satz 7.1 (Übersicht über alle Stammfunktionen)

1. Ist F eine Stammfunktion von f, so ist mit F auch G mit $G(x) = F(x) + a$, $a \in \mathbb{R}$, eine Stammfunktion von f.

2. Es seien F und G zwei Stammfunktionen von f, definiert in einem Intervall. Dann gibt es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$, sodass $G(x) = F(x) + a$ gilt.

□

Beweis

Die Aussage 1. hatten wir bereits bei unseren Überlegungen vorab bewiesen.

Die Aussage 2. werden wir indirekt beweisen. Dafür nehmen wir an, dass F und G zwei Stammfunktionen von f sind, deren Differenzfunktion $h := F - G$ nicht konstant ist. Dann gibt es (mindestens) zwei Werte b und c mit $h(b) \neq h(c)$. Als Differenz von F und G ist die Funktion h natürlich auch differenzierbar. Da der Definitionsbereich ein Intervall I ist, können wir den Mittelwertsatz der Differenzialrechnung (Satz 5.8, S. 217) anwenden, demzufolge es eine Stelle d mit $b < d < c$ und $h'(d) = \frac{h(c)-h(b)}{c-b} \neq 0$ gibt. Dies ist jedoch ein Widerspruch zur (für alle $x \in I$) gültigen Aussage

$$h'(x) = (F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Also ist $h(x) = a$ eine Konstante, sodass auch 2. bewiesen ist. ■

Auf der Basis des Begriffs „Stammfunktion“ und unseren obigen Aussagen über Stammfunktionen lässt sich nun im nächsten Abschnitt der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnungen formulieren und beweisen.

7.2 Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Satz 7.2 (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung)
Es sei f eine auf dem abgeschlossenen Intervall $[a;b]$ stetige Funktion.

1. Wenn $F_a(x) = \int\limits_a^x f(t)dt,\ a \leq x \leq b$ eine Integralfunktion von f ist, dann gilt $F_a'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a;b]$; d. h. jede Integralfunktion von f ist auch eine Stammfunktion von f.
2. Wenn F eine Stammfunktion von f ist, dann gilt $\int\limits_a^b f(t)dt\ = F(b) - F(a)$ und $F_a(x) = \int\limits_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ für $a \leq x \leq b$; insbesondere lassen sich alle Integrale von f mithilfe einer beliebigen Stammfunktion von f ausdrücken.

□

Manchmal wird die Schreibweise $F = \int f(x)\,dx$ für die Menge aller Stammfunktionen F von f verwendet und „unbestimmtes Integral“ genannt. Wir vermeiden hier zunächst diese Sprechweise (und verwenden sie nur bei den Integrationsregeln), da Stammfunktionen nur einer „technischen Ableitungs-Bedingung“ (s. o.) genügen müssen und nicht direkt etwas mit Integrieren zu tun haben. Zwecks begrifflicher Unterscheidung stellen wir die vier in diesem Zusammenhang wesentlichen Definitionen nebeneinander.

- *Eine Stammfunktion von f*: eine Funktion F, deren Ableitung f ist.
- *Alle Stammfunktionen von f*: die Menge der Funktionen G, für die gilt $G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$, wobei F eine spezielle Stammfunktion und die Definitionsmenge ein Intervall ist.
- *Das bestimmte Integral*: $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ mit reellen Zahlen a, b mit (bei uns) $a < b$.
- *Die Integralfunktion*: $F_a(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$.

Auftrag: *Betrachten Sie die Formulierung des Hauptsatzes noch einmal mit Blick darauf, wie die vier Begriffe darin auftauchen und miteinander zusammenhängen.*

Bevor wir den Hauptsatz beweisen werden, zeigen wir an einem Beispiel, wie die Mengen der Stammfunktionen und der Integralfunktionen sich zueinander verhalten können.

Beispiel 7.1 (Stammfunktionen und Integralfunktionen)
Der erste Teil des Hauptsatzes besagt, dass die Menge der Integralfunktionen eine Teilmenge der Menge der Stammfunktionen einer auf einem Intervall stetigen Funktion f ist. Umgekehrt ist im Allgemeinen die Menge der Stammfunktionen aber keine Teilmenge der Menge der Integralfunktionen, die beiden betrachteten Mengen sind also in der Regel nicht identisch!

Zur Verdeutlichung dieser Aussage möge das folgende Beispiel dienen:

$F(x) = \sin(x) + a$ ist für alle $a \in \mathbb{R}$ Stammfunktion von $f(x) = \cos(x)$. Wenn F auch eine Integralfunktion ist, so kann man F als $F_b(x) = \int\limits_b^x \cos(t)dt$ schreiben.

Mit der speziellen Stammfunktion $G(x) = \sin(x)$ gilt dann nach dem 2. Teil des Hauptsatzes

$$F(x) = \sin(x) + a = F_b(x) = \int_b^x \cos(t)dt = G(x) - G(b) = \sin(x) - \sin(b).$$

Insbesondere muss die Zahl b so sein, dass $a = -\sin(b)$ gilt. Dies ist jedoch nur für $-1 \leq a \leq 1$ möglich. Für jeden anderen Wert von a ist F keine Integralfunktion.

Beweis (von Satz 7.2)

Beim Beweis des 1. Teils betrachten wir die Aussage über die Ableitung der Integralfunktion (in ihrer Deutung als Flächeninhaltsfunktion) als Aussage der Differenzialrechnung. Beim Beweis des 2. Teils geht es um die Kumulation der Änderungen als Aussage der Integralrechnung. Beide Teile des Hauptsatzes folgen also zunächst einem unterschiedlichen Erkenntnisinteresse.

1. Wir deuten die Werte der Integralfunktion $F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ als Flächeninhalt. $F_a(x)$ ist also der Inhalt des „krummlinigen Trapezes“, das vom Graphen von f und von der x-Achse eingeschlossen wird (Abb. 7.4).
$F_a(x+h) - F_a(x)$ ist der Inhalt der gepunkteten Fläche zwischen x und $x+h$; es ist auch die absolute Änderung von F_a im Intervall $[x; x+h]$. Die mittlere Änderungsrate von F_a im Intervall $[x; x+h]$ ist $\frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h}$; diesen Term können wir als Höhe eines Rechtecks mit der Breite h und dem Inhalt $F_a(x+h) - F_a(x)$ deuten. Wegen des Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen (Aufgabe 4.24 auf S. 192) wird dieser Funktionswert an einer Stelle ξ im Intervall $[x; x+h]$ angenommen, d. h. wir haben

$$\frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} = f(\xi) \text{ mit } x \leq \xi \leq x+h.$$

Wegen der Stetigkeit von f können wir weiter schließen

$$f(x+h) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)\,, \text{ also gilt auch } f(\xi) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)\,.$$

Dann existiert aber auch

$$F_a'(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{F_a(x+h)-F_a(x)}{h}$$

und ist wie behauptet gleich $f(x)$.
Damit haben wir den ersten Teil des Hauptsatzes bewiesen: „Differenzieren (d. h. lokale Änderungsrate bilden) macht Integrieren (d. h. Flächeninhalt unter f bestimmen) rückgängig!“

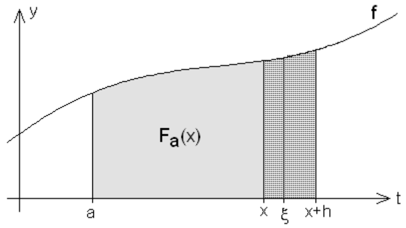

Abb. 7.4: Beweis des ersten Teils des Hauptsatzes

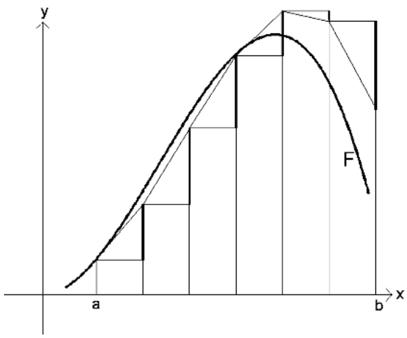

Abb. 7.5: Beweis des zweiten Teils des Hauptsatzes

2. Zum Beweis des 2. Teils des Hauptsatzes verfolgen wir für die Stammfunktion F von f die Idee des Richtungsfelds, indem wir in Tangentialrichtung entlang des Funktionsgraphen weitergehen. Für kleine $\Delta x > 0$ gilt

$$F(x+\Delta x) \approx F(x) + f(x)\cdot\Delta x\,.$$

Dies können wir iterieren:

$$F(x+2\cdot\Delta x) \approx F(x+\Delta x)+f(x+\Delta x)\cdot\Delta x \approx F(x)+f(x)\cdot\Delta x+f(x+\Delta x)\cdot\Delta x\,.$$

Insgesamt wird der Funktionswert $F(b)$ aus $F(a)$ und den Steigungen zwischen a und b rekonstruiert; hierzu teilen wir das Intervall $[a;b]$ in n äquidistante Teile der Länge Δx (vgl. Abb. 7.5):

$$\begin{aligned} F(b) &\approx F(a)+f(a)\cdot\Delta x+f(a+\Delta x)\cdot\Delta x+f(a+2\cdot\Delta x)\cdot\Delta x+\ldots\\ &\quad +f(a+(n-1)\cdot\Delta x)\cdot\Delta x\\ &= F(a)+\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\cdot\Delta x)\cdot\Delta x\,. \end{aligned}$$

Damit haben wir rechts eine *Riemann'sche Summe* der Funktion f erhalten. Wegen der Integrierbarkeit von f erhalten wir folglich für den Grenzübergang $\Delta x \to 0$:

$$F(b) = F(a) + \int_a^b f(x)\,dx\,, \text{also wie behauptet } F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

„Integrieren (d. h. Produktsummen bilden) macht also Differenzieren (d. h. Änderungsraten bilden) rückgängig.“

■

Aufgabe 7.1 *Auch wenn der obige Beweis nicht besonders umfangreich war, hat er für beide Teile eigene Ideen verwendet. Man hätte auch, nachdem man einen Teil eigenständig bewiesen hat, den anderen direkt daraus folgern können:*

- *Zeigen Sie, dass sich der 2. Teil des Hauptsatzes direkt aus dem 1. Teil folgern lässt. Benutzen Sie hierzu die Übersicht über alle Stammfunktionen in Satz 7.1.*
- *Zeigen Sie, dass sich der 1. Teil des Hauptsatzes direkt aus dem 2. Teil folgern lässt. Leiten Sie hierzu die Formel im 2. Teil ab!*

Es sei noch bemerkt, dass in Schulbüchern oft die Abkürzung $\int_a^b f(t)dt = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ verwendet wird. Wenn man mindestens eine Stammfunktion einer stetigen Funktion kennt, ist die Berechnung von Integralen jetzt also eine sehr einfache Sache. Allerdings ist die Bestimmung von Stammfunktionen viel komplizierter als die Bestimmung von Ableitungen; für viele Funktionen gibt es überhaupt keine durch „einfache“ Funktionen darstellbare Stammfunktionen, obwohl diese Funktionen integrierbar sind. Zur konkreten Berechnung bestimmter Integrale bleiben dann nur numerische Verfahren. Für einige wichtige „Regelfunktionen“ können wir allerdings Verfahren zur Bestimmung von Stammfunktionen entwickeln.

7.3 Integrieren bedeutet auch Mitteln

Meteorologen zeichnen an einer Vielzahl von Orten eine Vielzahl von Wetterdaten minutiös auf, u. a. um Wetterlagen zu dokumentieren und Prognosen zu erstellen. Besonders bekannt sind die „Temperaturkurven", an denen sich z. B. viele bei der Wahl des Urlaubsortes orientieren. Wetterstationen messen dafür „permanent" die aktuelle Temperatur am jeweiligen Ort und zeichnen sie auf. Aus diesen Aufzeichnungen werden dann auch für bestimmte Zeiträume Durchschnittstemperaturen errechnet. Für Dortmund beträgt die angegebene[5] Durchschnittstemperatur für den (normalerweise wärmsten) Monat Juli z. B. 17,8 °C. Wie kann eine solche Durchschnittstemperatur berechnet werden? Im Folgenden zeigen wir, dass dies mithilfe der Integralrechnung geschehen kann – und dass Integrieren offensichtlich auch „Mitteln" bedeuten kann.

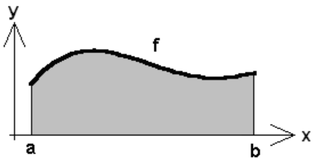

Abb. 7.6: „Mittelwert" von f

Wir gehen dafür von der Abb. 7.6 aus, die eine Temperaturkurve darstellen möge. Was kann eine vernünftige Durchschnittstemperatur für den Zeitraum von a bis b sein? Oder, anders gefragt, was könnte ein vernünftiger „Mittelwert" der Funktion f auf dem Intervall $[a; b]$ sein?

Wir orientieren uns zunächst einfach am praktischen Vorgehen: Man misst die Temperatur jede Stunde, jede halbe Stunde, alle 10 Minuten, jede Minute oder jede Sekunde ... und nimmt das arithmetische Mittel. Abstrakt gesehen greift man in äquidistanten Abständen sehr viele, etwa n Funktionswerte heraus und bildet das arithmetische Mittel (vgl. Abb. 7.7):

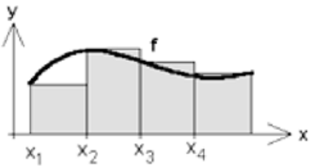

Abb. 7.7: Arithmetisches Mittel für $n = 4$

$$\overline{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,.$$

Das arithmetische Mittel muss dabei nicht notwendig von einem Einzelwert angenommen werden! Diese Mittelwertbildung hängt direkt mit dem geometrisch gedeuteten Integralwert zusammen. Für die zugehörige Rechtecksumme gilt

$$\underbrace{\frac{b-a}{n}}_{=\Delta x_i} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = (b-a) \cdot \overline{y}, \text{ also } \overline{y} = \frac{\text{Rechtecksumme}}{b-a}.$$

[5]Quelle: `http://www.geo-reisecommunity.de/reisen/europa/deutschland/dortmund/klima`

Dies ist nichts anderes als ein Näherungswert für $\frac{\text{Flächeninhalt}}{b-a}$, und für $n \to \infty$ ergibt sich der „Flächeninhalt“ unter dem Graphen. Das bedeutet, dass der Wert

$$\mu := \frac{1}{b-a} \cdot \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{Flächeninhalt}}$$

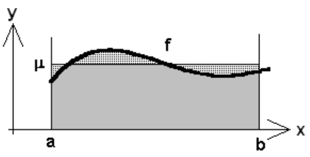

Abb. 7.8: Der Mittelwert μ

ein vernünftiger Durchschnittswert von f in $[a;b]$ ist, der sich unmittelbar aus der Verallgemeinerung des arithmetischen Mittels ergibt. Das ist genau der Ansatz, den wir beim Beweis des ersten Teils des Hauptsatzes (Abb. 7.4) angewendet hatten. Geometrisch gedeutet ist also der Mittelwert μ derjenige Wert, der als konstante Funktion über dem Intervall $[a;b]$ denselben Flächeninhalt unter dem Graphen hat (vgl. Abb.7.8).