Auszug aus:
BÜCHTER/HENN (2010): Elementare Analysis, Springer
(gekürzt)

6.1 Anschaulicher Standpunkt

Das folgende Schaubild der Funktion f (Abb. 6.1) lässt sich auf verschiedene Weise interpretieren.

Auftrag: *Denken Sie mit Blick auf Abb. 6.1 bei allen im Anschluss exemplarisch genannten Kontexten darüber nach, wie jeweils der Term „$f(x) \cdot \Delta x$“ zu deuten ist.*

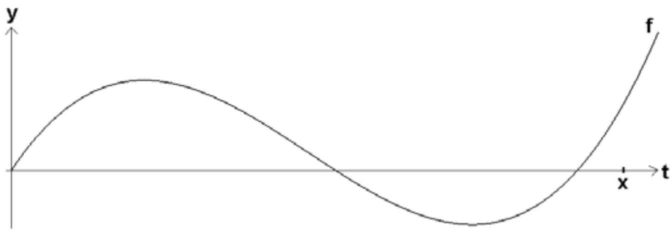

Abb. 6.1: Interpretationen von „Integrieren“

- *Auto: Zeit t, Beschleunigung $f(t)$. Wie groß ist die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt x, wenn das Fahrzeug zum Zeitpunkt 0 mit der Geschwindigkeit 0 gestartet ist?*
- *Auto: Zeit t, Geschwindigkeit $f(t)$. Welchen Weg hat das Fahrzeug zum Zeitpunkt x zurückgelegt, wenn es zum Zeitpunkt 0 am Startpunkt 0 gestartet ist?*
- *Badewanne: Zeit t, Wasserzufluss $f(t)$ in Liter pro Sekunde. Wie viel Wasser ist zum Zeitpunkt x in der Wanne?*
- *f abstrakte Funktion: Welchen (orientierten) Flächeninhalt schließt der Graph von f mit der t-Achse zwischen 0 und x ein? Man nennt solche Flächen auch „krummlinige Trapeze“.*
- *F als abstrakte Funktion: Welchen Wert hat $F(x) = \int_0^x f(t)dt$?*

In jedem Fall kann man f als die gegebene Änderungsratenfunktion deuten, aus der der gesuchte Wert der Bestandsfunktion F rekonstruiert wird. Die Approximation zur Rekonstruktion hatten wir wie folgt vorgenommen: Man wählt z. B. bei der Zeit als unabhängiger Variable Zeitpunkte $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{22} < t_{23} = x$, wobei man die Zeitintervalle dort kleiner wählt, wo sich der Funktionswert von

f stärker ändert[1]. Man nennt dies ganz anschaulich eine *Zerlegung* des Intervalls $[0; x]$:

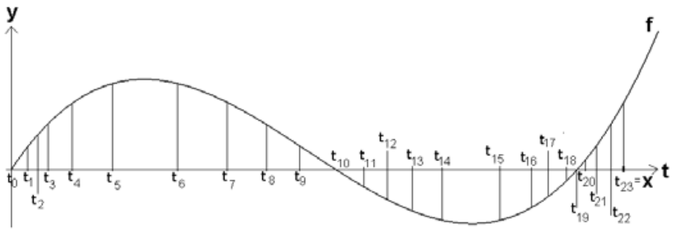

Abb. 6.2: Zerlegung des Intervalls $[0; x]$

Ausgehend von einer Zerlegung kann man obere und untere Abschätzungen vornehmen. Für die obere Abschätzung nimmt man den größten Wert M_i im Intervall $[t_{i-1}, t_i]$, für die untere Abschätzung nimmt man den kleinsten Wert m_i im Intervall $[t_{i-1}, t_i]$. In dem Beispiel sind das manchmal Ecken der Intervalle, manchmal Werte dazwischen. Dies ergibt die Abschätzungen für die fragliche Größe in den Abbildungen 6.3 und 6.4.

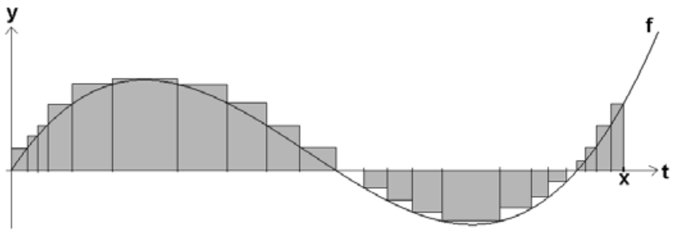

Abb. 6.3: Obere Abschätzung $= \sum_{i=1}^{23} M_i \cdot (t_i - t_{i-1})$

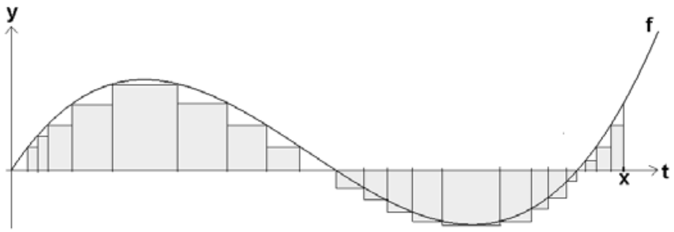

Abb. 6.4: Untere Abschätzung $= \sum_{i=1}^{23} m_i \cdot (t_i - t_{i-1})$

[1] Bei der Verwendung unterschiedlich großer Zeitintervalle und der Anpassung der Länge jedes Intervalls an die Stärke der Veränderung kann man bei gleicher Anzahl von Intervallen, den Fehler der Abschätzung minimieren. Allerdings ist dieses Vorgehen nicht so einfach mit einer „technischen Verfahrensvorschrift“ umzusetzen, sondern bedarf eines geschulten Anwenders.

Will man den gesuchten Wert genauer eingrenzen, so muss man eine feinere Einteilung des Intervalls $[0; x]$ wählen, indem man zusätzlich zu den schon vorhandenen Werten t_i noch weitere Zwischenwerte wählt. Man nennt die so gewonnene Zerlegung ganz anschaulich eine *Verfeinerung* der vorhandenen Zerlegung von $[0; x]$. Statt 23 hat man dann $n > 23$ Zerlegungspunkte. Wenn man nun n gegen Unendlich und die Länge aller Teilintervalle gegen Null gehen lässt, so erhält man anschaulich den genauen Wert der gesuchten Größe.

6.2 Das bestimmte Integral und Integralfunktionen

Nun müssen wir die anschauliche Vorstellung „nur noch" für eine mathematisch befriedigende Definition präzise fassen. Mit unseren bisher geleisteten Vorarbeiten in den Kapiteln 3 und 4 gelingt dies tatsächlich ohne großen zusätzlichen Aufwand.

Wir gehen von einer Funktion aus, die auf einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ definiert und dort beschränkt ist. Wir wählen eine *Zerlegung* $Z = [t_0, \ldots, t_n]$ von $[a, b]$, d. h. reelle Zahlen mit $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Zu dieser Zerlegung definieren wir die *Ober-* und *Untersumme*. Nach der Idee von Kapitel 3.2 haben wir dazu in jedem Teilintervall den größten und den kleinsten Funktionswert gewählt ... und genau hier lauert der erste „Fallstrick": Ist eigentlich sicher, dass dieses Maximum (bzw. Minimum) im Allgemeinen existiert? Schon ein sehr einfaches, auch für den Unterricht in der Schule zugängliches Beispiel zeigt, dass dies keinesfalls so ist:

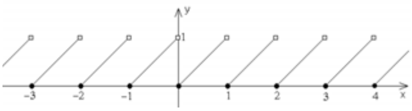

Abb. 6.5: Trunc-Funktion

Sei hierfür f die *Trunc-Funktion*[2], d. h. $f(x) = x - [x]$ oder inhaltlich gesprochen der Abstand von x zur nächst kleineren ganzen Zahl. f ist in ganz $\mathbb{R}$ definiert und nimmt Werte zwischen 0 und 1 an, wobei 1 kein möglicher Funktionswert ist, 0 hingegen als Funktionswert für alle ganzen Zahlen auftritt. Der Graph der *Trunc-Funktion* (Abb. 6.5) besteht in den Intervallen $[k; k + 1[$ zwischen zwei ganzen Zahlen aus jeweils einem Geradenstückchen, das parallel zu ersten Winkelhalbierenden ist. Die ganzen Zahlen sind Unstetigkeitsstellen mit dem Funktionswert 0.

[2]Das englische Wort „to truncate" bedeutet „abschneiden", abgeschnitten wird hier bei positiven Zahlen der ganzzahlige Vorkomma-Anteil. Was passiert bei negativen Zahlen?

Der Integralwert ist anschaulich in der geometrischen Deutung sehr einfach über Dreiecks- und Trapezflächen bestimmbar. Jedoch existiert in keinem Intervall, das eine ganze Zahl enthält, ein Maximum! Da wir nicht schon an so übersichtlichen Beispielen scheitern wollen, ersetzen wir bei unserem Vorgehen Maximum und Minimum durch das Supremum und das Infimum. Im Beispiel der Trunc-Funktion nimmt das Supremum für jedes Intervall, das eine ganze Zahl enthält, den Wert 1 an. Die Existenz des Supremums ist dabei durch Satz 4.1 (S. 121) gesichert.

Jede nicht-leere, nach oben (unten) beschränkte Teilmenge A von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (Infimum).

Definition 6.1 (Obersumme und Untersumme)
Die Funktion f sei im abgeschlossenen Intervall $[a;b]$ definiert und beschränkt; $Z = [t_0 = a, t_1, t_2, \ldots, t_n = b]$ sei eine Zerlegung des Intervalls sowie M_i das Supremum und m_i das Infimum der Funktionswerte im Teilintervall $[t_{i-1}, t_i]$. Dann heißen $\sum\limits_{i=1}^{n} M_i \cdot (t_i - t_{i-1})$ die *Obersumme* und $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \cdot (t_i - t_{i-1})$ die *Untersumme* von f zur Zerlegung Z. ♦

Anders als bei unserer Präzisierung der Differenzierbarkeit und der Ableitung in Kapitel 5 ist es hier wesentlich, dass wir ein abgeschlossenes Intervall $[a;b]$ voraussetzen. Zunächst können wir dies einfach damit begründen, dass die Ecken a und b als erste und letzte Stelle der Zerlegung auftreten. Im weiteren Theorieaufbau werden wir noch des Öfteren auf diese Voraussetzung zurückgreifen (müssen). Genauso wichtig wie die Abgeschlossenheit des Intervalls ist die Voraussetzung der Beschränktheit der Funktion f.

Ober- und Untersummen sind stets wohldefinierte reelle Zahlen. Aufgrund der Beschränktheit von f im Intervall $[a;b]$ gibt es ein Supremum S und ein Infimum s der Funktionswerte in diesem Intervall. Damit sind $s \cdot (b-a)$ und $S \cdot (b-a)$ untere und obere Schranke für alle reellen Zahlen, die als Unter- oder Obersumme für irgendeine Zerlegung von $[a;b]$ entstehen.

Wir betrachten nun alle möglichen Ober- und Untersummen zu beliebigen Zerlegungen. Für eine feste Zerlegung Z ist nach Definition die zugehörige Untersumme kleiner als oder höchstens gleich wie die zugehörige Obersumme. Weiter gilt der folgende Satz:

Satz 6.1 (Verfeinerung von Zerlegungen)

1. Die Zerlegung Z_2 sei eine *Verfeinerung* der Zerlegung Z_1, d. h. Z_2 enthält die Zerlegungspunkte von Z_1 und noch beliebig viele weitere. Dann ist die Obersumme von Z_2 kleiner als oder höchstens gleich wie die Obersumme von Z_1; die Untersumme von Z_2 ist größer als oder höchstens gleich wie die Untersumme von Z_1.
2. Das Supremum der Menge aller Untersummen ist kleiner als oder gleich wie das Infimum der Menge aller Obersummen.

□

Beweis

1. Die Darstellung in Abb. 6.6 ist ein präformaler Beweis[3] für Teil 1. Zwischen die aufeinander folgenden Zahlen u und v der ersten Zerlegung wird eine weitere Zahl w eingeschoben. Damit werden die punktiert markierten Anteile bei der Obersumme höchstens kleiner und bei der Untersumme höchstens größer.

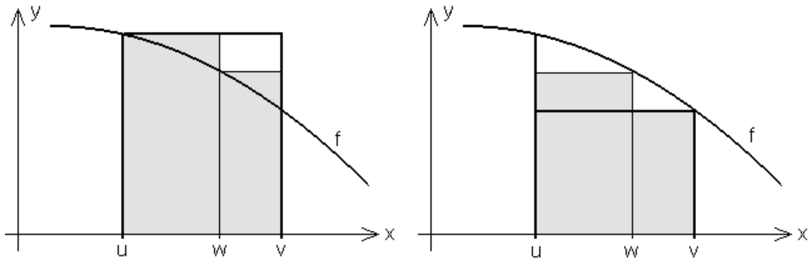

Abb. 6.6: Verfeinerungen von Ober- und Untersummen

2. Jetzt zeigen wir zunächst, dass jede Untersumme kleiner als oder höchstens gleich wie jede Obersumme ist. Dazu seien U_1 die Untersumme zur Zerlegung Z_1 und O_2 die Obersumme zur Zerlegung Z_2. Aus den beiden Zerlegungen konstruieren wir eine gemeinsame Verfeinerung Z_3, indem wir z. B. alle Teilpunkte beider Ausgangszerlegungen (und ggf. weitere Punkte) als Teilpunkte der Verfeinerung Z_3 nehmen. Zusammen mit der Obersumme O_3 und Untersumme U_3 der Zerlegung Z_3 gilt dann:

$$U_1 \leq U_3 \leq O_3 \leq O_2,$$

und die Behauptung ist bewiesen. Nun fassen wir alle möglichen Untersummen zu einer Zahlenmenge, alle möglichen Obersummen zu einer zweiten Zahlenmenge zusammen. Beide Zahlenmengen sind beschränkt, haben also jeweils ein Supremum und ein Infimum, und es gilt:

$$\text{Supremum der Untersummen} \leq \text{Infimum der Obersummen.}$$

■

[3]Präformale Beweise sind Beweise, die in der Regel anschaulich geführt werden und volle Beweiskraft haben. Im Einzelfall kann es allerdings recht schwierig sein, sich zu vergewissern, dass das anschauliche – und zunächst exemplarische – Vorgehen tatsächlich allgemein gültig ist. Der Begriff „präformaler Beweis" wurde von *Werner Blum* und *Arnold Kirsch* geprägt (Blum & Kirsch (1991)). Ein Plädoyer für „präformale Darstellungen" und „inhatlich-anschauliche Beweise" von *Erich Ch. Wittmann* und *Gerhard N. Müller* finden Sie z. B. im Internet unter `http://www.didmath.ewf.uni-erlangen.de/Verschie/Wittmann1/beweis.htm`.

Unsere anschauliche Integraldefinition lässt sich nun sehr einfach übertragen und präzisieren:

Definition 6.2 (Integrierbarkeit und Integralfunktion)

1. Die Funktion f sei im abgeschlossenen Intervall $[a;b]$ definiert und beschränkt. Wenn das Supremum S aller über dem Intervall $[a;b]$ gebildeten Untersummen gleich dem Infimum I aller Obersummen ist, so heißt diese Zahl das *Integral von f über dem Intervall* $[a;b]$, und die Funktion f heißt *integrierbar über* $[a;b]$.

2. Werden a und b als feste Zahlen (im Sinne der Gegenstandsvorstellung von Variablen) betrachtet, so heißt dieses Integral genauer das *bestimmte Integral von f über* $[a;b]$ und wird mit $\int\limits_a^b f(t)dt$ bezeichnet.

3. Wenn f für alle Zahlen $x \in [a,b]$ über $[a,x]$ integrierbar ist (die Variable x im Sinne der Einsetzungsvorstellung verstanden), so heißt

$$F_a : x \mapsto F_a(x) = \int\limits_a^x f(t)dt \text{ für } x \in [a,b]$$

Integralfunktion (zur *Integrandenfunktion* f sowie zur *unteren Grenze* a und *oberen Grenze* x). Bei dieser Definition setzt man natürlich das triviale Integral $\int\limits_a^a f(t)dt = 0$.

♦

Aus der Definition des Integrals folgt sofort die Additivität des Integrals (vgl. Abb. 6.9): Es sei $c \in [a;b]$. Wenn die folgenden drei Einzelintegrale existieren, so folgt

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx\,.$$

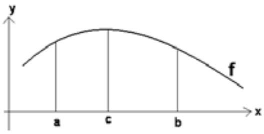

Abb. 6.9: Additivität des Integrals

Die gute Nachricht ist, dass wir jetzt eine mathematisch zufriedenstellende Integraldefinition haben. Die schlechte Nachricht ist, dass völlig unklar ist, wie man die Gleichheit der fraglichen Zahlen „Infimum der Obersummen“ und „Supremum der Untersummen“ nachweisen und diese eindeutige Zahl sogar bestimmen kann. Wir werden daher beim weiteren Theorieaufbau für die Existenz und Bestimmung von Integralen zusätzliche Kriterien und Regeln bereitstellen müssen, um wirklich Integralrechnung betreiben zu können. Einen ersten Schritt auf diesem Weg stellt der folgende Satz dar, der die Frage der Integrierbarkeit auf die Untersuchung von Folgen von Unter- und Obersummen reduziert. Mithilfe dieses Satzes können wir im Folgenden die Integrierbarkeit monotoner Funktionen zeigen.

Satz 6.2 (Kriterium für Integrierbarkeit)
Die Funktion f sei im abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ definiert und beschränkt. Weiter seien (a_n) eine Folge von Untersummen und (b_n) eine Folge von Obersummen mit der Eigenschaft, dass die Differenzenfolge $(b_n - a_n)$ eine Nullfolge ist. Dann ist f integrierbar über dem Intervall $[a; b]$. □

Die angenehme Folgerung dieses Satzes ist: Wenn wir für eine spezielle Zerlegung, etwa für eine äquidistante, Aussagen über die Konvergenz der Ober- und Untersummen machen können, so reicht dies schon aus!

Beweis (von Satz 6.2)
Es seien, wie eben, S das Supremum der Untersummen und I das Infimum der Obersummen. Für alle natürlichen Zahlen n gilt damit nach Satz 6.1

$$a_n \leq S \leq I \leq b_n\,,$$

woraus wegen der Nullfolgeneigenschaft notwendig $S = I$ und damit die Behauptung folgt. ■

Wir haben bei unserer Präzisierung des Integralbegriffs die Beschränktheit der Funktion f (auf einem abgeschlossenen Intervall) vorausgesetzt. Es lassen sich einfach Funktionen angeben, die diese Voraussetzung nicht erfüllen, etwa die auf dem Intervall $[0; 3]$ definierte Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{für } x \in]0; 3] \end{cases}$$

Aber auch die Beschränktheit auf einem abgeschlossenen Intervall ist keinesfalls hinreichend für die Existenz des Integrals; denken Sie nur an die Dirichlet'sche Kammfunktion (*). Ohne zusätzliche Voraussetzungen kann die Untersuchung auf Integrierbarkeit äußerst mühselig sein. Daher ist es extrem hilfreich,

(*) Kammfunktion: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

dass wir für zwei wichtige Fälle, nämlich die monotonen und die stetigen Funktionen, nicht nur deren Beschränktheit auf abgeschlossenen Intervallen nachweisen können, sondern noch viel mehr. Wir können für diese beiden Funktionsklassen sogar die Existenz des Integrals beweisen.

Satz 6.3 (Existenz des Integrals für monotone Funktionen)
Es sei f eine im abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ monoton wachsende (oder monoton fallende) Funktion. Dann ist f auf $[a; b]$ beschränkt und es existiert das Integral von f über $[a; b]$. □

Beweis
Wir führen den Beweis nur für monoton wachsende Funktionen. Der Fall monoton fallender Funktionen lässt sich hierauf zurückführen, indem man zur monoton fallenden Funktion f die „negative Funktion" $-f$ mit $-f(x) = -1 \cdot f(x)$ betrachtet.

Es sei im Folgenden also f auf $[a; b]$ definiert und dort monoton wachsend. Dann ist f durch $f(a)$ nach unten und durch $f(b)$ nach oben beschränkt und der erste Teil der Aussage ist bewiesen.

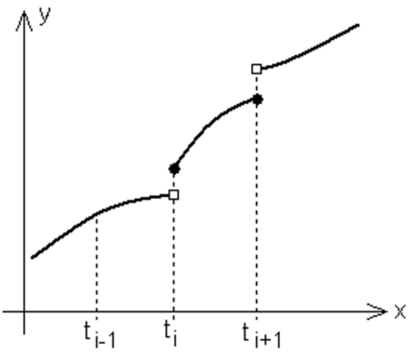

Abb. 6.10: Monotone Funktionen

Die wesentliche Einsicht, die auf die Existenz des Integrals von f über $[a; b]$ führt, ist nun, dass das Supremum im Teilintervall $[t_{i-1}; t_i]$ einer Zerlegung Z stets gleich dem Infimum im nächsten Teilintervall $[t_i; t_{i+1}]$ der Zerlegung Z ist. Dies verdeutlich Abb. 6.10, in der das mögliche Verhalten an den Grenzen der Teilintervalle angedeutet ist.

Wir verwenden nun eine äquidistante Zerlegung in n Teilintervalle mit der Schrittweite $\frac{b-a}{n}$. Für die Ober- und Untersumme gilt jetzt

$$\text{Obersumme } = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \frac{b-a}{n}; \text{ Untersumme } = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \frac{b-a}{n}$$

Des Weiteren gilt für die Infima m_i und die Suprema M_i der Zusammenhang $M_i = m_{i+1}$. Damit fallen in der Differenzfolge aus Ober- und Untersummen fast alle Terme weg:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \frac{b-a}{n} - \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \frac{b-a}{n} &= \left(\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \right) \cdot \frac{b-a}{n} \\ &= (f(b) - f(a)) \cdot \frac{b-a}{n}. \end{aligned}$$

Der letzte Term geht für $n \to \infty$ augenscheinlich gegen Null – und nach Satz 6.2 ist f integrierbar. ■

Satz 6.4 (Existenz des Integrals für stetige Funktionen)
Es sei f eine im abgeschlossenen Intervall $[a;b]$ stetige Funktion. Dann ist f auf $[a;b]$ beschränkt, und es existiert das Integral von f über $[a;b]$. □

Beweis
Dass stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen beschränkt sind und dort sogar ihr Minimum und Maximum annehmen, haben wir in 4.3.5 schon mit Satz 4.15 bewiesen. Hier können wir bei Ober- und Untersummen in der Tat statt Infimum und Supremum sogar Minimum und Maximum schreiben.

Wir müssen also noch beweisen, dass f über $[a;b]$ integrierbar ist. Aus „höherer Sicht“ benötigen wir hierzu die Tatsache, dass Funktionen, die auf einem abgeschlossenen Intervall $[a;b]$ stetig sind, dort sogar gleichmäßig stetig sind. Diese Eigenschaft müssen wir nun für das Integralproblem spezialisieren und beweisen:

Wir gehen aus von einer Zerlegung $Z = [a = t_0, \ldots, b = t_n]$ von $[a;b]$. Liegen x_1 und x_2 nun beide im Teilintervall $[t_{i-1};t_i]$, dann gibt die (nicht von x_1 oder x_2 abhängige) Zahl $M_i - m_i$ den maximalen Unterschied der Funktionswerte $f(x_1)$ und $f(x_2)$ an. Wir behaupten nun, dass es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung gibt, die so fein ist, dass alle diese Zahlen $M_i - m_i < \varepsilon$ sind. Wenn wir dies zunächst als richtig annehmen, dann folgt für die Differenz der zugehörigen Ober- und Untersumme

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (t_i - t_{i-1}) \quad &= \quad \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) \\ &< \quad \sum_{i=1}^{n} \varepsilon \cdot (t_i - t_{i-1}) = \varepsilon \cdot (b-a)\,.\end{aligned}$$

Wenn ε gegen Null geht, geht auch die Differenz von Ober- und Untersumme gegen Null, was nach Satz 6.2 hinreichend für die Existenz des Integrals ist.

Wir müssen jetzt noch beweisen, dass es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ auch wirklich eine solche Zerlegung gibt. Wir gehen von irgendeiner Zerlegung aus. Wenn die „ε-Eigenschaft“ noch nicht gilt, so verfeinern wir die Zerlegung, in dem wir zu jedem Teilintervall seinen Mittelpunkt hinzunehmen. Gilt die „ε-Eigenschaft“ immer noch nicht, so fahren wir mit dieser „Halbierung“ fort. Sollten wir unser Ziel nie erreichen, dann gibt es zumindest eine Folge von ineinander liegenden, immer um den Faktor $\frac{1}{2}$ kleiner werdenden Intervallen I_n, in denen stets das Maximum Max_n der Funktionswerte mehr als ε größer als das Minimum Min_n ist. Die Folge dieser Intervalle bildet eine Intervallschachtelung und definiert daher eine reelle Zahl r. Wegen der Stetigkeit gibt es Urbilder der Zahlen Max_n und Min_n, die gegen r konvergieren. Dann müssen aber auch die Bilder Max_n und Min_n gegen $f(r)$

konvergieren. Dies ist aber nicht möglich, wenn der Abstand $\text{Max}_n - \text{Min}_n > \varepsilon$ ist. Also führt diese Annahme zu einem Widerspruch. ■

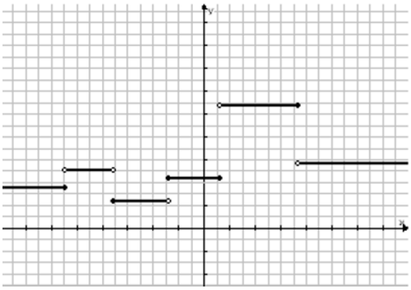

Abb. 6.11: Treppenfunktion

Selbstverständlich gibt es viele unstetige und nicht monotone Funktionen, die integrierbar sind. Hat man nur „wenige“ Unstetigkeitsstellen, so kann man das Integral manchmal intervallweise berechnen. Ein typisches Beispiel hierfür sind „Treppenfunktionen“, wie die in Abb. 6.11 dargestellte. Geometrisch-anschaulich ist die Integrierbarkeit solcher Funktionen (über abgeschlossenen Intervallen) evident.

Auch wenn stetige Funktionen sich als „integrationsfreundlich“ herausgestellt haben, ist auch bei ihnen die Abgeschlossenheit der Intervalle, die betrachtet werden, wesentlich für die Definition der Integrierbarkeit. So ist z. B. die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ für alle reellen Zahlen ungleich Null definiert und stetig. Über dem Intervall $]0;1]$ wird aber zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse kein endlicher Flächeninhalt eingeschlossen; für jedes abgeschlossene Teilintervall $I \subset]0;1]$ ist dies (nicht zuletzt nach Satz 6.2) der Fall.

Zum jetzigen Zeitpunkt wissen wir zwar, dass alle monotonen und alle stetigen Funktionen über abgeschlossenen Intervallen integrierbar sind, offen ist allerdings noch, wie man den konkreten Integralwert berechnen kann. Aufgrund von Satz 6.2 wissen wir, dass (bei über dem jeweiligen abgeschlossenen Intervall integrierbaren Funktionen) die Untersuchung einer einzigen Folge von Unter- und Obersummen, deren Differenz eine Nullfolge bildet, ausreicht. Im folgenden Teilkapitel testen wir dies an ~~zwei~~ einem einfachen Beispiel~~en~~.

6.3 Erste Berechnungen von („einfachen“) Integralen

Wir untersuchen als erstes Beispiel die reinquadratische Funktion f mit $f(x) = x^2$, die in ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. Da f stetig ist, existieren alle möglichen Integrale. Näherungswerte für bestimmte Integrale können wir durch Unter- und Obersummen ermitteln. „Per Hand und Taschenrechner“ ist das in der Regel ein mühsames

Geschäft. Mit dem Computer lässt sich diese Arbeit erleichtern[4]. Abb. 6.12 zeigt äquidistante Zerlegungen des Intervalls $[0;4]$ mit 20 bzw. 50 Teilintervallen sowie mit Graphen und numerischen Werten der zugehörigen Ober- und Untersummen.

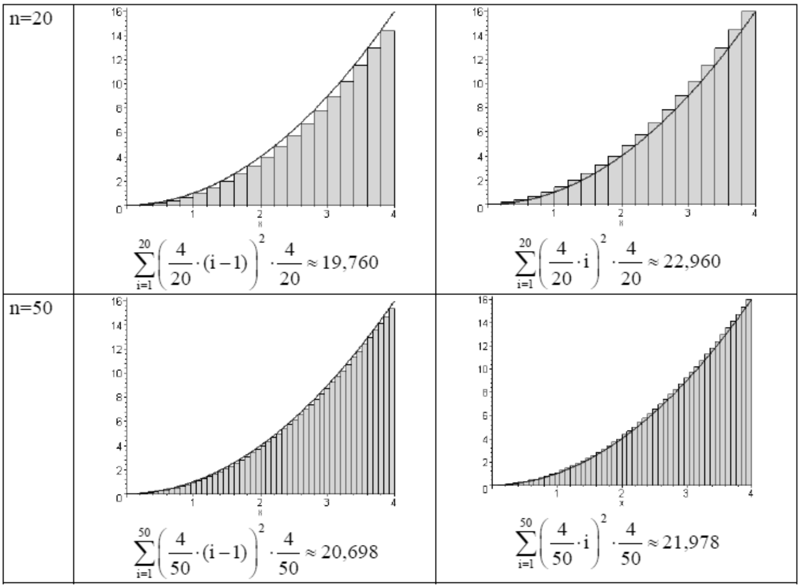

Abb. 6.12: Ober- und Untersummen bei der Normalparabel

Wenn man z. B. 1 000 Teilintervalle nimmt, so kann man Unter- und Obersummen graphisch nicht mehr unterscheiden und bekommt eine gute Abschätzung für den Integralwert. Diese Methode ist ein stets gangbarer Weg zur numerischen Integration. Die Formeln für die Ober- und Untersummen enthalten in diesem Beispiel im Wesentlichen eine Summation über die Quadrate i^2. Dadurch liegt der Versuch nahe, diese Summen algebraisch zu vereinfachen, was für Intervalle der Form $[0;b]$ noch recht einfach ist.

Zur Untersuchung des bestimmten Integrals $\int\limits_0^4 x^2\,dx$ teilen wir das Intervall $[0,4]$ in n äquidistante Teile der Länge $\frac{4}{n}$ ein. In jedem Intervall ist wegen der Monotonie der Parabel links der kleinste, rechts der größte Funktionswert. Für die Untersumme $U(n)$ und die Obersumme $O(n)$ gilt

$$U(n)=\sum_{i=1}^{n}\left((i-1)\cdot\frac{4}{n}\right)^2\cdot\frac{4}{n}=\sum_{i=0}^{n-1}\left(i\cdot\frac{4}{n}\right)^2\cdot\frac{4}{n};\quad O(n)=\sum_{i=1}^{n}\left(i\cdot\frac{4}{n}\right)^2\cdot\frac{4}{n}.$$

Wir formen die Obersumme um:

[4]Mit den meisten Funktionenplottern und Computer-Algebra-Systemen kann man Ober- und Untersummen zeichnen und ihre Wert (numerisch) berechnen lassen.

$$\begin{aligned} O(n) &= \left(\frac{4}{n}\right)^3 \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 = \left(\frac{4}{n}\right)^3 \cdot \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} = \frac{64}{6}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{n^3} \\ &= \frac{32}{3}\cdot\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{32}{3}\cdot 2 = \frac{64}{3} = 21,\bar{3}\,. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Summenformel für die ersten n Quadratzahlen verwendet (siehe Anhang). Die Differenz von Ober- und Untersumme ist wieder eine „Ziehharmonika-Summe“, bei der sich die meisten Teilterme zu Null ergänzen, es bleibt nur

$$O(n) - U(n) = \left(n\cdot\frac{4}{n}\right)^2 \cdot \frac{4}{n} = \frac{64}{n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

sodass wir nach Satz 6.2 den Integralwert $\int\limits_0^4 x^2\,dx = \frac{64}{3}$ exakt bestimmt haben.

Betrachtet man anstelle des Intervalls $[0;4]$ das Intervall $[a;b]$, so wird die Rechnung aufwändiger. Hilfreich ist die Additivität des Integrals:

- Für $a < 0 < b$ können wir schreiben $\int\limits_a^b x^2\,dx = \int\limits_a^0 x^2\,dx + \int\limits_0^b x^2\,dx$,
- für $0 < a < b$ gilt $\int\limits_a^b x^2\,dx = \int\limits_0^b x^2\,dx - \int\limits_0^a x^2\,dx$.

Wir beschränken uns hier auf den zweiten Fall und bestimmen zuerst für $b > 0$ das Integral $\int\limits_0^b x^2\,dx$. Damit können wir für die Teilintervalle größte und kleinste Funktionswerte einfach angeben. Es gilt

$$\begin{aligned} O(n) &= \sum_{i=1}^{n}\left(i\cdot\frac{b}{n}\right)^2\cdot\frac{b}{n} = \sum_{i=1}^{n} i^2\cdot\left(\frac{b}{n}\right)^2\cdot\frac{b}{n} = \left(\frac{b}{n}\right)^3\cdot\sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \left(\frac{b}{n}\right)^3\cdot\frac{n\cdot(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{6}\cdot\frac{2n^3+3n^2+n}{n^3} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}\cdot b^3\,. \end{aligned}$$

Die analoge Rechnung für die Untersumme liefert denselben Grenzwert, und wir haben für $0 < a < b$ die folgenden bestimmten Integrale exakt ermittelt

$$\int\limits_0^b x^2\,dx = \frac{1}{3}\cdot b^3 \text{ und } \int\limits_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}\cdot(b^3-a^3)\,.$$

Betrachten wir die obere Grenze als variabel, so erhalten wir die entsprechende Integralfunktion

$$F_a(x) = \int\limits_a^x t^2 dt = \frac{1}{3}(x^3-a^3) \text{ für } 0 \le a \le x\,.$$