

CamCarpets als jahrgangs- und fächerübergreifendes Modellierungsprojekt

Xenia-Rosemarie Reit

Zusammenfassung

CamCarpets bieten sowohl fach- als auch schuljahresübergreifende Projektmöglichkeiten für den Unterricht. Im Physikunterricht der Sekundarstufe 1 zum Thema Strahlenoptik oder im Mathematikunterricht der Sekundarstufe 2, können sie als sinnstiftendes Anwendungsbeispiel der analytischen Geometrie erarbeitet und eindrucksvoll im Großformat von den Schülerinnen und Schülern selbst realisiert werden. Von Seiten der Lehrkraft bedarf es einer guten Vorbereitung und Organisation der Lernumgebung, um eine Grundlage für selbstständiges und zielorientiertes Arbeiten zu schaffen. Im Beitrag werden einerseits das Potenzial des Projektgegenstands „CamCarpets“ aus fach- und jahrgangsübergreifender Sicht, als auch projektorganisatorische Umsetzungsaspekte erläutert. Zudem werden Stufungsmöglichkeiten für ein leistungsdifferenziertes Arbeiten aufgezeigt.

CamCarpets sind Werbeteppeiche (engl. carpet), die von einer ganz bestimmten Kameraposition aussehen, als seien es aufrechtstehende Werbebanner. Von Sportübertragungen im Fernsehen, insbesondere bei Fußballspielen, sind sie vielen bekannt. Wie in Abb. 1 (links) zu erkennen, liegen sie neben den Toren und vermitteln dem Fernsehzuschauer das Bild eines dreidimensionalen Werbeobjekts. Da Torraumszenen häufiger im Fernsehen zu sehen sind, lohnt Werbung in diesem Bereich. Spätestens die Aufnahme einer über die Werbung laufenden Person (Abb. 1, rechts) lässt Zweifel an der

Dreidimensionalität des Werbeobjekts aufkommen und motiviert zu einer genaueren Untersuchung des Sachverhalts.

Das Prinzip der CamCarpets beruht auf einer (Zentral-) Projektion, bei der räumliche Objekte ausgehend von einem festen Punkt, dem Augpunkt, zweidimensional dargestellt werden. Bei der Werbung mit CamCarpets wird genau dieses Prinzip andersherum angewandt: ein zweidimensionales CamCarpet-Bild (die eigentliche Bandenwebung) erzeugt beim Betrachter (der Kamera) ein dreidimensionales (mentales) Bild. Dieses dreidimensionale Bild ist aber nur von einer Position aus zu erkennen, befindet man sich an einer anderen Stelle, so sieht man nur ein verzerrtes Bild. In Abb. 2 sieht man den am Boden liegenden verzerrten CamCarpet, der nur von der Kameraposition aus den Anschein eines stehenden dreidimensionalen Buchstabens hat. Entgegen der Darstellung in Abb. 2 ist dieser dreidimensionale Buchstabe nicht real vorhanden, sondern wird aufgrund der Darstellung vom Auge, welches sich im Kamerapunkt befindet, konstruiert. Die Strahlen treffen sich zentral im Kamerapunkt, dem Augpunkt. Würde man den Kamerapunkt verschieben, so würden sich auch die Strahlen und dementsprechend auch der CamCarpet verschieben.

Im Folgenden wird das Modellierungsprojekt *CamCarpets* aus fachlicher und unterrichtspraktischer Perspektive unter jahrgangs- und fachübergreifenden Gesichtspunkten beschrieben. Grundsätzlich lassen sich die Hintergründe der CamCarpets mit analytischer Geometrie erschließen. Verstehen und umsetzen kann man das Prinzip aber auch mit Kenntnissen der Strahlenoptik. Insofern handelt es sich beim Modellierungsprojekt *CamCarpets* um ein sogenanntes Magnetthema, zu dessen Erarbeitung sich fachübergreifendes Arbeiten bzw. die Verknüpfung verschiedener Lerninhalte anbietet (Ludwig 1998, S. 68).

In der Sekundarstufe 2 eignet sich das CamCarpet-Projekt in besonderer Weise, um im oft kalkülhaft und schematisch unterrichteten Themengebiet der analytischen Geometrie (Borneleit et al. 2001) lebensnahe Anwendungen aufzuzeigen und, darüber hinaus, mathematisches Arbeiten in ein eindrucksvolles, von Schülerinnen und Schülern selbst

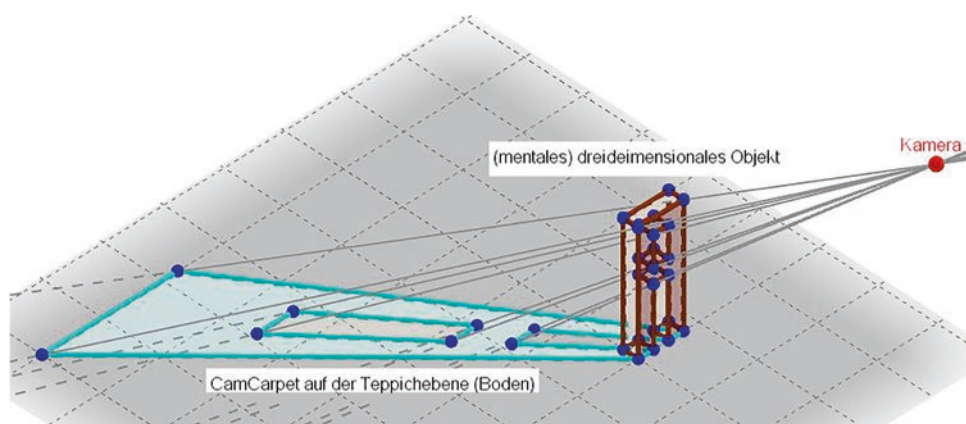
Elektronisches Zusatzmaterial Die elektronische Version dieses Kapitels enthält Zusatzmaterial, das berechtigten Benutzern zur Verfügung steht. https://doi.org/10.1007/978-3-658-33012-5_8

X.-R. Reit (✉)
Fakultät für Mathematik, Universität Duisburg-Essen,
Essen, Deutschland
E-Mail: xenia-rosemarie.reit@uni-due.de



Abb. 1 Links: Aufnahme der CamCarpets in der Commerzbank Arena Frankfurt aus Sicht der Haupttribüne. Rechts: CamCarpet als Werbeteppich erkennbar. (©Eintracht Frankfurt)

Abb. 2 Zentralprojektion des dreidimensionalen Buchstabens A auf den Boden ausgehend von einer Kameraposition. (©Xenia-Rosemarie Reit 2021)



erarbeitete Produkt münden zu lassen. In der Sekundarstufe 1 bieten CamCarpets einen unterrichtlichen Bezug zur Strahlenoptik in der Physik und können dort auch ohne analytische Berechnungen von den Schülerinnen und Schülern mithilfe von als Geraden verstandene Lichtstrahlen und daraus resultierende Schattenwürfe erarbeitet und selbst realisiert werden.

1 CamCarpets unter dem Modellierungsaspekt

CamCarpets sind reale Objekte aus der Lebenswelt, welche sich mittlerweile sicherlich nicht nur bei Fußballspielen finden lassen. Mit mathematischen Mitteln lassen sich die Hintergründe verstehen, wodurch ein Zusammenhang zwischen Realität und Mathematik entsteht. Beim Modellierungsprojekt CamCarpets wird zu einer Realsituation ein mathematisches Modell entwickelt, welches einerseits benutzt wird, um die ursprüngliche Realsituation zu verstehen

und andererseits, um daraus eine eigene Realsituation, den eigenen Abi18-CamCarpet, zu entwickeln. Vor allem ersteres stellt den Erklärungscharakter eines zu findenden mathematischen Modells heraus (vgl. Henn 2000). Beim Modellierungsprojekt *CamCarpets* steht das Modellieren als Tätigkeit im Vordergrund, „durch die ein mathematisches Modell zu einem Anwendungsproblem aufgestellt und bearbeitet“ (Griesel 2005, zitiert nach Greefrath 2010, S. 42) und zusätzlich in die Realität umgesetzt wird. Modellierungsaufgaben werden als Aufgaben verstanden, die einen gewissen Grad an Authentizität aufweisen, verschiedene Lösungswege erlauben und Relevanz haben, wobei die jeweilige Präzisierung und Ausprägung nicht eindeutig definiert ist (Reit 2016, S. 16–18). Beim vorliegenden Modellierungsprojekt handelt es sich aufgrund des vielfältigen Lösungsraums (siehe Abschn. 3.1) aber auch aufgrund der jahrgangsübergreifenden Umsetzungsmöglichkeiten und den damit verbundenen unterschiedlichen Herangehensweisen, um eine offene Aufgabenstruktur, die, wie oben benannt, Anwendung in der Realität findet und einen Lebensweltbezug aufweist.

Strukturieren lässt sich das Modellierungsprojekt anhand des Modellierungskreislaufs von Blum und Leiß (2005) (Abb. 3), der sich inhaltlich auch bei der Beschreibung der Kompetenz „Mathematisches Modellieren“ (K3) in den Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (2015) wiederfinden lässt. Eine inhaltlich allgemeine Einbettung des Modellierungsprojekts *CamCarpets* in die Kreislaufstruktur, unter dem Gesichtspunkt einer möglichen Strukturierungshilfe in der Projektvorbereitung, lässt sich folgendermaßen herausarbeiten, wobei auch alternative Wege durchaus möglich sind:

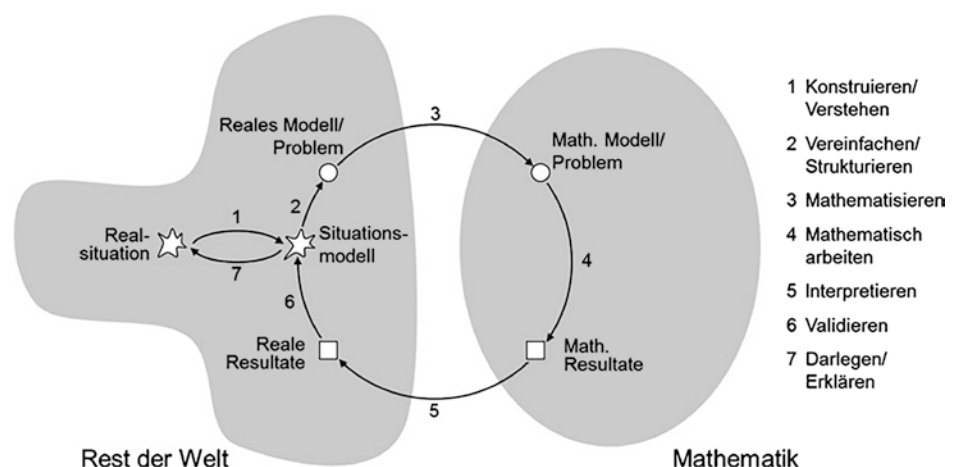
- **Realsituation/Situationsmodell:**
Einführung in das Modellierungsprojekt *CamCarpets*, beispielsweise mithilfe von Abb. 1.
- **zum Realmodell:**
(Gruppenspezifisches) Aufarbeiten und Plausibilisieren der CamCarpet-Abbildung unter Annahme etwaiger Vereinfachungen (z. B. Zentralprojektion statt Parallelprojektion) und Festlegung eines eigenen CamCarpet-Logos
- **zum mathematischen/physikalischen Modell:**
Mathematische/physikalische Durchdringung des Prinzips der Zentralprojektion als Schnittpunktproblem zwischen Gerade und Ebene (Abschn. 3) bzw. des Schattenwurfs (Abschn. 2)
- **zum mathematischen Resultat:**
Erarbeitung des zweidimensionalen Projektionslogos, je nach Jahrgangsstufe beispielsweise entweder durch Anwendung innermathematischer Verfahren (z. B. Spurpunktberechnungen, siehe Abschn. 3.1) oder durch Verwendung der Werkzeuge von GeoGebra
- **zum realen Resultat**
Umsetzung der im vorigen Schritt bestimmten Projektion auf großformatiges Papier bzw. größerer Flächen (z. B. Schulhof)

Eine Validierung des Modellierungsprojekts erfolgt intuitiv durch das Betrachten des Projektionslogos und daraus ableitbarer etwaiger Fehler bei der Bestimmung der Projektionspunkte bzw. Ungenauigkeiten beim Zeichnen oder grundlegend falscher Annahmen. Eine weitere Möglichkeit der Validierung der dem Modell zugrunde gelegten Annahmen, ist die Erstellung eines CamCarpets für ein reales Stadion, wie es z. B. in der Aufgabe von Gerber (2008) gefordert ist. Ein abschließender Vergleich mit CamCarpets aus der Werbebranche ergänzt den professionellen Blick als realitätsnahe Validierung des Modells. Tatsächlich gibt es bereits seit einigen Jahren Entwicklungen hin zu ansteuerbaren LED-CamCarpets, welche sich schnell an verschiedenste Kamerapositionen anpassen lassen, sodass der 3D-Effekt nicht mehr nur auf eine Kamera begrenzt ist. Diese Innovation befindet sich noch in der Entwicklungsphase.

2 CamCarpets im Physikunterricht der Sekundarstufe 1

In der Sekundarstufe 1 lässt sich das mathematische Prinzip hinter den CamCarpets zwar mit den bis dato erlernten mathematischen Fachinhalten noch nicht analytisch erarbeiten, allerdings kann auch eine qualitative Einsicht im Physikunterricht beim Thema Strahlenoptik zur Erarbeitung eines eigenen CamCarpets ausreichen und zu eindrucksvollen Ergebnissen führen. Zur Erarbeitung eines eigenen CamCarpets finden sich die Schülerinnen und Schüler im Sinne von projektartigem Lernen selbst in Gruppen zusammen, planen ihren CamCarpet vom Logo/Schriftzug bis zum Endergebnis selbst und entscheiden ebenfalls selbst über die Art und Weise der Realisierung.

Abb. 3 Modellierungskreislauf nach Blum und Leiß (2005)



Im Physikunterricht der Sekundarstufe 1 lernt man, dass sich die modellhafte Beschreibung des Lichts als Strahlen eignet, um damit zusammenhängende Phänomene mit ausreichender Genauigkeit zu erklären. Neben herkömmlichen (Schatten-)Experimenten mit gängigen Lichtquellen in der Sekundarstufe 1 (wie z. B. Kerzen oder (Taschen-)Lampen), bieten CamCarpets einen ganz anders gearteten interessanten Zugang zu diesem Modell und eignen sich somit als spannende experimentelle Alternative. Betrachtet man das Prinzip der CamCarpets als Zentralprojektion, werden Strahlen als Geraden durch einen festen Punkt, den Augpunkt als punktförmige Lichtquelle, dargestellt. Beim Thema „Schatten“ bieten CamCarpets die Möglichkeit diese physikalischen Inhalte inhaltlich an einem Anwendungsbeispiel zu durchdringen. Ob nun als Projektionsbild, welches mittels einer Lichtquelle auf eine Fläche erzeugt wurde oder CamCarpets als Schatten des im Weg des Lichts stehenden Gegenstands. Zusätzlich lässt sich das Projekt mit oder ohne mathematischen Hintergrund realisieren, je nachdem ob lineare Funktionen bereits unterrichtet wurden. Zwar bewegt man sich in der Sekundarstufe 1 beim Thema „Funktionen“ noch nicht im dreidimensionalen Raum, allerdings bietet sich hier in Anknüpfung an lineare Funktionen eine mathematische Herausforderung für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler (siehe Abschn. 3.1). Das CamCarpet-Projekt stellt somit verschiedenste Zugänge, je nach Leistungs- und Jahrgangsstufe bereit.

2.1 Unterrichtliche Umsetzung

Zum Einstieg bietet sich eine qualitative Betrachtung des CamCarpet-Prinzips z. B. mit einer Logofigur aus Legosteinen an, deren Schattenwurf betrachtet werden soll (Abb. 4).

Zur Realisierung bedarf es nur weniger Hilfsmittel. Hierbei können auch schon einige Schatten nachgezeichnet und Versuche gestartet werden, das ursprüngliche (Lego-)Logo durch Positionierung der Augen bei der Lichtquelle wiederzuerkennen, wenngleich sich dabei zunächst nur sehr ungenaue Projektionen ergeben. Hierbei wird schnell deutlich, dass das Schattenwurfprinzip Grenzen hat, die die CamCarpets überwinden können: beim Schattenmodell sind i. d. R. nur die Kanten sichtbar, die an lichtdurchlässige Flächen grenzen (vgl. Abb. 4). Andere Kanten, die für den 3D-Eindruck notwendig sind, lassen sich im Schattenmodell nur im Nachhinein ergänzen (bzw. werden „automatisch“ vom menschlichen Auge ergänzt) aber nicht direkt projizieren. Die Möglichkeit der farblichen Kontrastierung verschiedener Flächen beim CamCarpet ermöglicht dagegen auch diese scheinbar verdeckten Kanten und Flächen deutlich zu machen. Spätestens jetzt ist die Motivation geweckt, ob und wie genauere Projektionen gezeichnet werden können, so dass das Bild eines täuschend echten 3D-Logos entsteht.

Grundsätzlich kann in der nächsten Arbeitsphase neigungsdifferenziert gearbeitet werden. Ziel des Modellierungsprojekts für alle Gruppen war eine für alle „begehbare“ CamCarpet-Darstellung mit folgender Aufgabenstellung:

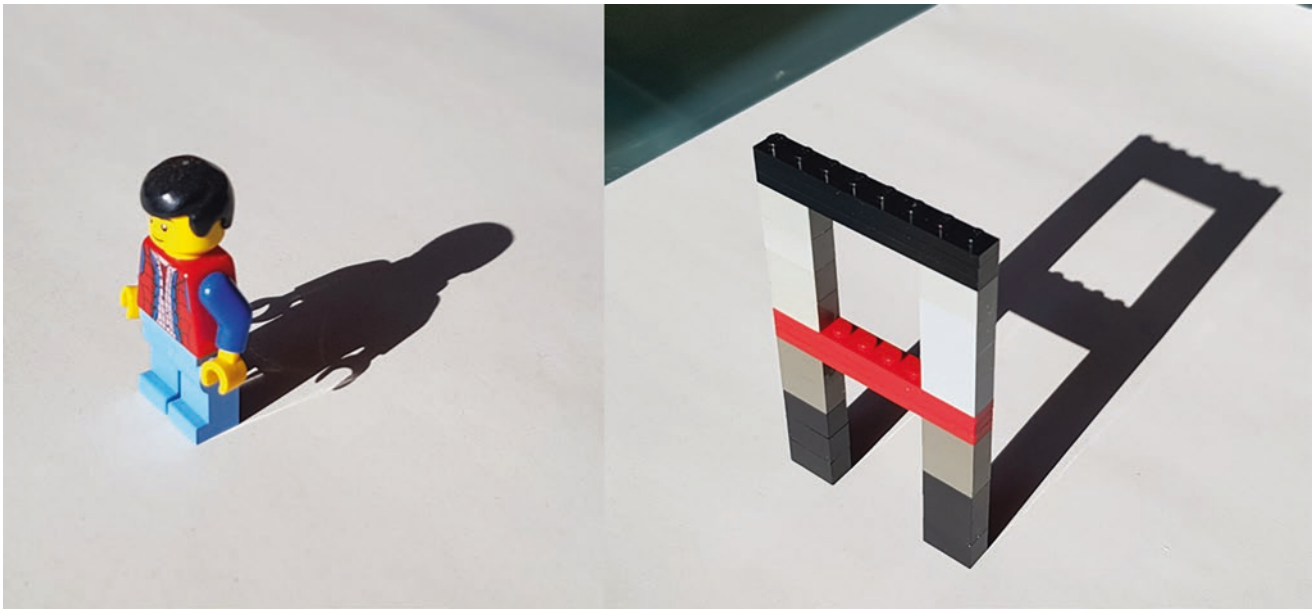


Abb. 4 Schattenwurf zur Einführung in das CamCarpet-Prinzip. (©Dirk Sommerbrodt 2021)

Findet euch in Gruppen à 2–3 Personen zusammen und konstruiert einen CamCarpet. Einigt euch auf ein zu projizierendes Objekt und überlegt zusammen, wie ihr die Projektionspunkte findet (GeoGebra, Schatten, mathematisch mithilfe von Geraden, ...).

Folgenden Fragen müssen sich die Schülerinnen und Schüler nun stellen:

- Welcher Schriftzug, welches Logo soll projiziert werden?
- Welche Abmessungen soll der CamCarpet am Ende haben?
- Sollen die Projektionspunkte mit GeoGebra konstruiert oder mathematisch (evtl. anknüpfend an das Thema „Lineare Funktionen“ für leistungsstarke Schülerinnen und Schüler) erarbeitet werden?
- Welche Kameraposition ist (mit Blick auf das angestrebte Format der Projektion) sinnvoll?

Je nach Lerngruppe und -ziel kann die so noch recht offene Aufgabenstellung weiter eingeschränkt werden. Zunächst muss das Prinzip hinter den CamCarpets natürlich thematisiert werden.

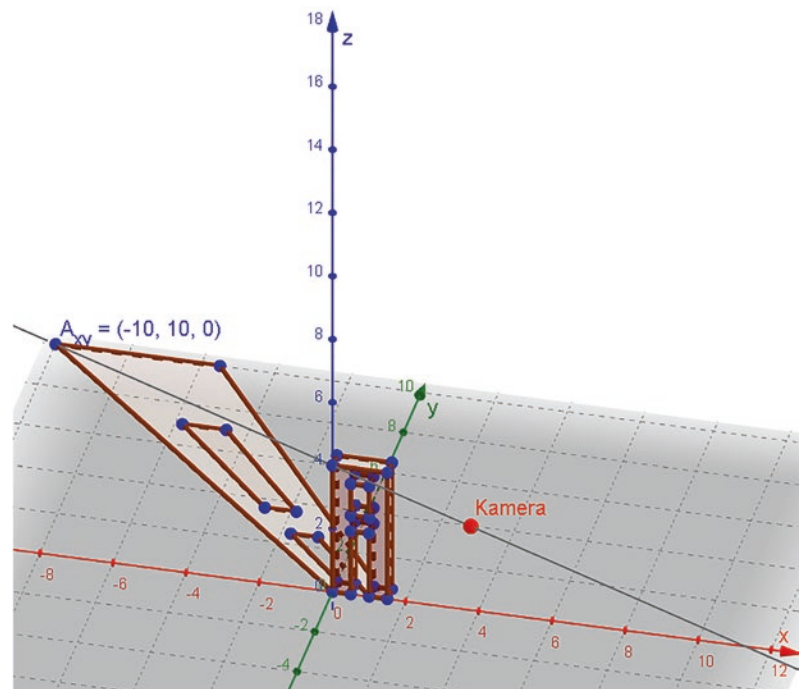
Kleinformatige (DIN-A4/3) Realisierungen sind mit wenig Aufwand relativ schnell erstellt. Es braucht nur eine eigenen (Smartphone-)Kamera, Stativmaterial aus der Physiksammlung, ggf. GeoGebra zur Konstruktion der Projektionspunkte und eine eigene Logo-Idee. Bei der 2-stündigen Umsetzung in einer 8. Jahrgangsstufe ging es

in Gruppenarbeit zunächst darum, sich einen eigenen zu projizierenden Schriftzug bzw. ein Logo zu überlegen. Hierbei sollte die Lehrkraft mit Blick auf für die Projektion geeignete und weniger geeignete Logos beratend zur Seite stehen. Entscheidet man sich für eine Konstruktion der Projektionspunkte mit GeoGebra, muss ein Modell des 3D-Logos in GeoGebra erstellt werden (siehe Abb. 5 beispielhaft für den Buchstaben A). Der Vorteil einer GeoGebra-Konstruktion liegt darin, dass Anpassungen, die evtl. erst später nötig werden, schnell umgesetzt werden können. Erfolgt eine mathematische Berechnung der Projektionspunkte ist es schwierig genau abzuschätzen, wie groß das Projektionsbild bei gewählter Kameraposition und 3D-Buchstaben-größe tatsächlich wird, sodass evtl. aufwendige Nachberechnungen die Folge sind.

Möchte man die Position des CamCarpets im Koordinatensystem von GeoGebra variabel gestalten, bietet es sich bei der Erstellung des 3D-Modells an, die Punkte in Abhängigkeit des ersten Punkts zu definieren und Schieberegler zu verwenden. Das macht es möglich das 3D-Modell und so auch die CamCarpet-Projektion, bei Bedarf im Nachhinein ohne erneuten Konstruktionsaufwand einfach zu verschieben. GeoGebra bietet auch im Vergleich zur händischen Berechnung der Punkte den Vorteil, dass die Kameraposition schnell angepasst werden kann. Andererseits ist das mathematische Durchdringen des Prinzips der CamCarpets vor allem für leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler eine motivierende Herausforderung.

Nach Erstellung des 3D-Modells und der Festlegung der Kameraposition als Punkte in GeoGebra lassen sich

Abb. 5 Beispielhaftes GeoGebra3D-Modell des Buchstabens A, zusammen mit seiner Projektion auf die xy -Ebene ausgehend von einem Kamerapunkt K. (©Xenia-Rosemarie Reit 2021)



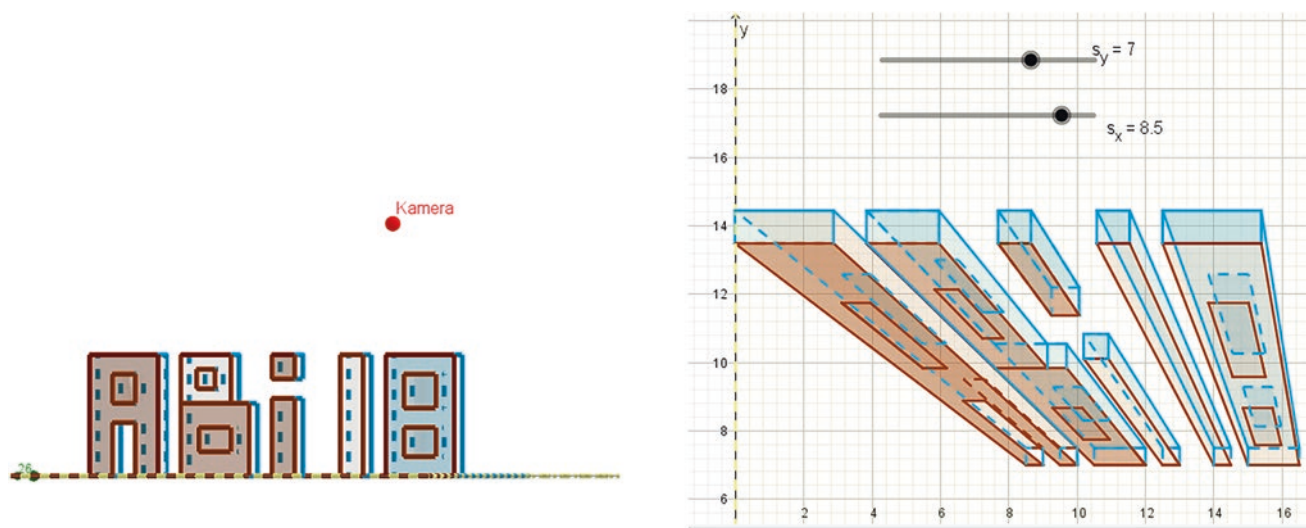
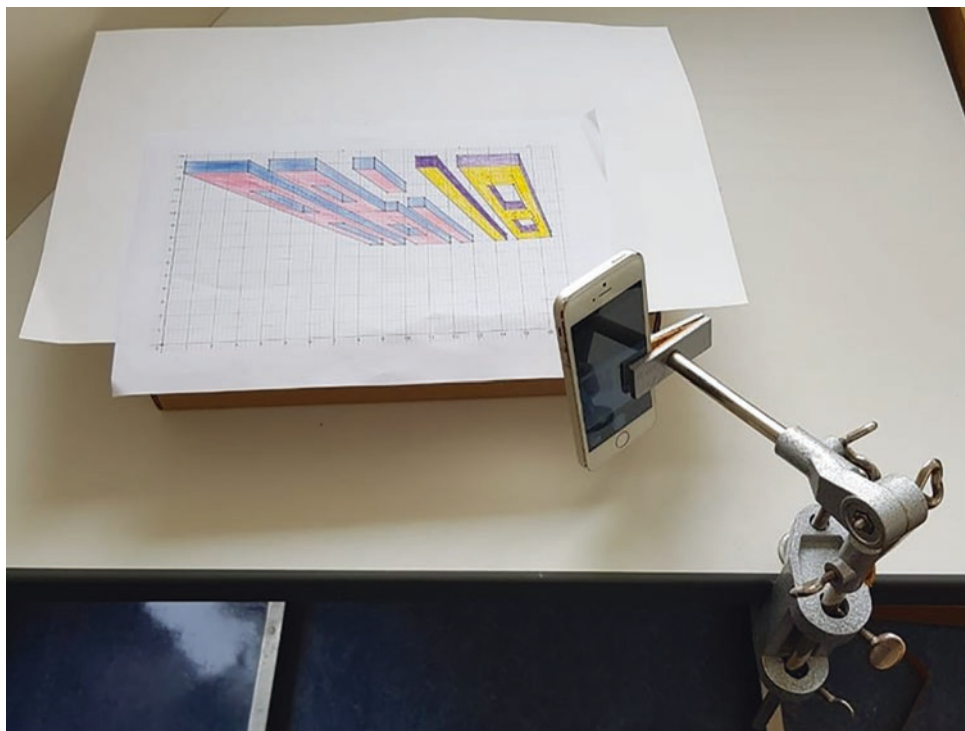


Abb. 6 Gleichzeitige Ansicht des 3D-Modells und der dazugehörigen CamCarpet-Projektion auf die xy -Ebene. (©Xenia-Rosemarie Reit 2021)

Abb. 7 Stativ Aufbau zur Realisierung der korrekten Ausrichtung der Kamera, von der aus der 3D-Effekt beobachtet werden kann. (©Xenia-Rosemarie Reit 2021)



die Projektionspunkte mit den bereitgestellten Werkzeugen „Gerade“ und „schneide“ als Schnittpunkte, der durch Kamerapunkt und Buchstabenpunkt verlaufenden Geraden mit der xy -Ebene, konstruieren (Abb. 5). Da die Projektionspunkte in Abhängigkeit vom Kamerapunkt konstruiert sind, kann dieser einfach verschoben und die daraus resultierende CamCarpet-Projektion beobachtet werden. Die gleichzeitige Anzeige von 3D- und 2D-Fenster in GeoGebra bietet

eine übersichtliche Darstellung von 3D-Logo und dazugehörigem CamCarpet (Abb. 6).

Abschließend erfolgt die Realisierung im Klassenraum auf DIN-A3/4-Papier (oder auch größeren Formaten), indem die Projektionspunkte maßstabsgetreu übertragen werden. Ein Stativ Aufbau bietet sich an, um die in GeoGebra festgelegte Beobachterposition (Kameraposition) zu fixieren (Abb. 7). Der korrekte Abstand der Kameraposition

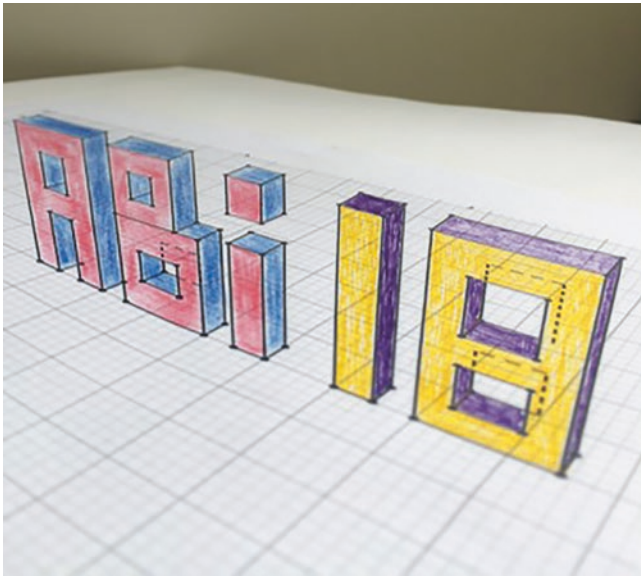


Abb. 8 CamCarpet beim Blick durch die korrekt positionierte Kamera von Abb. 7. (©Xenia-Rosemarie Reit 2021)

zur Projektion muss mit Blick auf die in GeoGebra verwendeten Maße ausgemessen werden. Bei korrekter Positionierung der Kamera kann der CamCarpet eindrucksvoll durch die Kamera beobachtet werden (Abb. 8).

3 CamCarpets im Mathematikunterricht der Sekundarstufe 2

In der Sekundarstufe 2 lassen sich CamCarpets, wie in Abschn. 2 beschrieben, nicht nur erstellen, sondern auch auf mathematischer Ebene nachvollziehen und von Grund auf erarbeiten. Sie bieten die Grundlage für ein von den

Schülerinnen und Schülern selbst umgesetztes Modellierungsprojekt mit einem beeindruckenden Produktergebnis. Die Schülerinnen und Schüler entscheiden selbst über den von ihnen zu erarbeitenden Schriftzug. Kurz vor dem Abitur ist ein für die Abitur-Zeitung verwendbarer Schriftzug naheliegend und ein zusätzlicher Motivationsfaktor, der das Modellierungsprojekt den Schülerinnen und Schülern zu eigen werden lässt. Bei der Umsetzung des Modellierungsprojekts übernimmt die Lehrkraft die Rolle eines Moderators, der die einzelnen Projektteile und deren Zusammenführung organisatorisch und zeitlich im Auge behält.

Ziel des Modellierungsprojekts in der Sekundarstufe 2 ist die Erstellung eines großformatigen CamCarpet-Schriftzugs auf dem Schulhof (Abb. 9). Die 22 Schülerinnen und Schüler des Mathematik-Grundkurses, die kurz vor dem Abitur stehen, entscheiden sich für „Abi18“.

Ziel: Konstruktion eines großformatigen Abi18-CamCarpets auf dem Schulhof.

Insgesamt stehen 4 Doppelstunden und die Hausaufgabenzeit zur Vorbereitung des CamCarpets zur Verfügung. Bevor mit der Realisierung auf dem Schulhof begonnen werden kann, muss einiges an Vorarbeit geleistet werden. Es muss eine mögliche CamCarpet-Position auf dem Schulhof, inklusive einer Kameraposition gefunden werden, um dann, ausgehend von einem 3D-Modell des Schriftzugs, die Koordinaten der auf die xy -Ebene projizierten Buchstabenpunkte in Abhängigkeit von der Kameraposition zu bestimmen.

Im Folgenden werden die möglichen mathematischen Zugänge zum Konzept der CamCarpets, sowie die

Abb. 9 Großformatiger Abi18-CamCarpet auf dem Schulhof (Buchstabenhöhe ca. 7 m). (©Xenia-Rosemarie Reit 2021)



unterrichtliche Umsetzung als großformatiger Abi18-Cam-Carpet auf dem Schulhof im Detail beschrieben.

3.1 Fachliche Einbettung

Die Mathematik, die hinter den CamCarpets steckt, lässt sich in der analytischen Geometrie verorten. Ob mit Spurpunkten, Projektionsvektoren oder, meist auf Leistungskurs-Niveau, mit Projektionsmatrizen: CamCarpets erlauben leistungsdifferenziertes Arbeiten. Die folgenden Varianten werden beispielhaft für einen Punkt beschrieben, der ausgehend von einer Kameraposition auf die xy -Ebene projiziert werden soll (Abb. 5).

3.1.1 Variante 1: Spurpunkte

Die Kamera befinde sich in $K(5|-5|6)$ und ein Punkt des 3D-Modells sei $A(0|0|4)$ (vgl. Abb. 5). Daraus lässt sich eine Gerade g_{AK} bestimmen, die beide Punkte enthält. $\vec{OA}$ bildet den Stützvektor und der Vektor $\vec{AK}$ stellt den Richtungsvektor der Geraden g_{AK} dar.

$$g_{AK}: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AK} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \quad (\text{Gl. 1})$$

Durch Bestimmung des Spurpunkts S_{xy} der Geraden g_{AK} erhält man den Projektionspunkt von A in der xy -Ebene. Der Spurpunkt hat die z -Koordinate $z = 0$. Die z -Koordinate des allgemeinen Geradenpunkts beträgt $z = 4 + 2r$. In der xy -Ebene gilt also $0 = 4 + 2r$. Dadurch erhält man $r = -2$. Den Spurpunkt S_{xy} erhält man nun durch Einsetzen von $r = -2$ in die Geradengleichung:

$$\vec{x}_{xy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Gl. 2})$$

Dies führt auf den Spurpunkt $A_{xy}(-10|10|0)$, der gleichzeitig der Projektionspunkt des ursprünglichen Punkts A ist. Analoge Berechnungen mit allen Punkten des 3D-Schriftzugs führen auf die Koordinaten des auf die xy -Ebene projizierten 3D-Modells (vgl. Abb. 5).

3.1.2 Varianten 2: Kamerapunktabhängiger Projektionsvektor

Da viele Projektionspunkte berechnet werden müssen, entdecken die Schülerinnen und Schüler schnell das hinter Variante 1 liegende allgemeine Muster und entwickelten daraus eine effiziente Methode: Nach Herleitung eines allgemeinen, von der Kameraposition abhängigen Projektionsvektors kann dieser durch Einsetzen der zu projizierenden Punkte und des Kamerapunkts zur Berechnung der Projektionspunkte verwendet werden. Die Implementierung

dieses Projektionsvektors in ein Tabellenkalkulationsprogramm, ähnlich wie dies von einer Schülergruppe mit Variante 3 umgesetzt wurde (Abschn. 3.1.3), ermöglicht an dieser Stelle eine effiziente Bestimmung der Projektionspunkte.

Allgemein soll ein Buchstabenpunkt $B(x|y|z)$ mit einer Kamera im Punkt $K(k_1|k_2|k_3)$ in Kamerarichtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} k_1 - x \\ k_2 - y \\ k_3 - z \end{pmatrix}$ auf die xy -Ebene projiziert werden, wodurch der Punkt B_{xy} entsteht. Aus dem allgemeinen Schnittpunktproblem (siehe Variante 1) ergibt sich der Ansatz

$$\vec{b} + r \cdot \vec{v} = \vec{b}_{xy}, r \in \mathbb{R} \quad (\text{Gl. 3})$$

und damit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{xy} \\ y_{xy} \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{b}_{xy} \quad (\text{Gl. 4})$$

Die dritte Koordinate von $\vec{b}_{xy}$ liefert, nach r aufgelöst,

$$r = -\frac{z}{v_3} \quad (\text{Gl. 5})$$

Einsetzen von Gl. 5 in Gl. 4 liefert

$$\begin{aligned} \vec{b}_{xy} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \left(-\frac{z}{v_3}\right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \cdot \frac{v_1}{v_3} \\ -z \cdot \frac{v_2}{v_3} \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - z \cdot \frac{v_1}{v_3} \\ y - z \cdot \frac{v_2}{v_3} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Gl. 6}) \\ &= \begin{pmatrix} x - z \cdot \frac{k_1 - x}{k_3 - z} \\ y - z \cdot \frac{k_2 - y}{k_3 - z} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der gesuchte Spurpunkt hat also die allgemeinen Koordinaten $(x - z \cdot \frac{k_1 - x}{k_3 - z} | y - z \cdot \frac{k_2 - y}{k_3 - z} | 0)$, wobei $(x|y|z)$ die Koordinaten des zu projizierenden Punkts und $(k_1|k_2|k_3)$ die Koordinaten des Kamerapunkts darstellen.

Setzt man hier den zu projizierenden Punkt $A(0|0|4)$ und den Kamerapunkt $K(5|-5|6)$ aus Variante 1 ein, erhält man den Projektionspunkt A_{xy} von A

$$\vec{a}_{xy} = \begin{pmatrix} 0 - 4 \cdot \frac{5}{2} \\ 0 - 4 \cdot \frac{-5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Gl. 7})$$

und somit das gleiche Ergebnis wie mit Variante 1.

3.1.3 Variante 3: Kamerapunktabhängige Projektionsmatrix

Auf einem höheren Leistungsniveau kann zur Berechnung der Projektionspunkte ausgehend von Gl. 6 noch eine vom

Kamerapunkt abhängige Projektionsmatrix hergeleitet werden, die, gleichberechtigt zu Variante 2, für die Berechnung der Spurpunkte (Projektionspunkte) verwendet werden kann.

Unter Verwendung der Matrixschreibweise kann Gl. 6 folgendermaßen umgeschrieben werden

$$\vec{b}_{xy} = \begin{pmatrix} x - z \cdot \frac{k_1 - x}{k_3 - z} \\ y - z \cdot \frac{k_2 - y}{k_3 - z} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{k_1 - x}{k_3 - z} \\ 0 & 1 & -\frac{k_2 - y}{k_3 - z} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \cdot \vec{b} \quad (\text{Gl. 8})$$

wobei P die gesuchte Projektionsmatrix ist, die einen beliebigen Punkt B abhängig von der Kameraposition in die xy -Ebene abbildet.

Für den Fall des anfänglich betrachteten Punkts $A(0|0|4)$ und der Kameraposition in $K(5|-5|6)$ ergibt sich also folgende, von der Kameraposition abhängige, Projektionsmatrix für den Punkt A

$$P_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Gl. 9})$$

Einsetzen in Gl. 8 ergibt

$$\vec{a}_{xy} = P_A \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Gl. 10})$$

also $A_{xy}(-10|10|0)$ und damit denselben Spurpunkt wie mit dem Projektionsvektor in Gl. 7 und zuvor mit Variante 1 berechnet.

Da es sich bei dem Projektionsvektor und der Projektionsmatrix nicht um einen allgemeinen Ausdruck handelt, sondern beides vom Kamerapunkt abhängig ist, muss auch bei diesen Varianten bei jedem Projektionspunkt eine Rechnung erfolgen. Um sich die Arbeit hierbei zu erleichtern nutzt eine Schülergruppe bei Variante 3 ein Tabellenkalkulationsprogramm, in das die Projektionsmatrix implementiert wird (Abb. 10). Nach Eingabe des zu projizierenden Punkts (Zellenbereich B4:B6 in Abb. 10), berechnet das Excel-Sheet den dazugehörigen Projektionspunkt automatisiert in Abhängigkeit eines festen Kamerapunkts (Zellenbereich B1:D1 in Abb. 10). Zur Berechnung der Koordinaten des Richtungsvektors und der Projektionsmatrix P , sind die entsprechenden Formeln aus Variante 3 hinterlegt. Bei Verwendung von Excel ist zu beachten, dass zur Berechnung des Matrix-Vektor-Produkts ($P \cdot \vec{b}$) mit dem Befehl *mmult* (Matrixmultiplikation), dieser als Matrixformel eingegeben werden muss. Dazu markiert man den Bereich, in dem das Ergebnis der Matrixmultiplikation am Ende stehen wird (Zellenbereich B15:B17 in Abb. 10), gibt anschließend die Formel ein (siehe Bemerkung in Zelle E15 ohne {}-Umklammerung in Abb. 10) und schließt die Eingabe mit *Strg + Shift + Enter* ab.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Kamerapunkt	5	-5	6	feste Kameraposition		
2							
3	Buchstabenpunkt						
4	x	0	Koordinaten des zu projizierenden Punkts hier eingeben				
5	y	0					
6	z	4					
7	Richtungsvektor	u ₁	u ₂	u ₃	Richtungsvektor von Kamerapunkt zu Buchstabenpunkt		
8		-5	5	-2			
9							
10	Projektionsmatrix P	1	0	-2,5	1	0	-u ₁ /u ₃
11		0	1	2,5	0	1	-u ₂ /u ₃
12		0	0	0	0	0	0
13							
14							
15	P·b	-10	Berechnete Koordinaten des Projektionspunkts		Matrixmultiplikation		
16	Projektionspunkt	10			{=mmult(B10:D12;B8:D8)}		
17		0			{}-Umrandung nicht mit eingeben!		

Abb. 10 Excel-Sheet einer Schülergruppe zur automatisierten Berechnung von Projektionspunkten nach Variante 3. (©Xenia-Rosemarie Reit 2021)

3.1.4 Unterrichtliche Umsetzung

Für die Vorbereitung und Umsetzung des CamCarpet-Modellierungsprojekt auf dem Schulhof werden acht Unterrichtsstunden und ein Schultag verwendet. Eine großformatige Realisierung auf dem Schulhof erfordert organisatorische Vorüberlegungen, belohnt aber mit einem eindrucksvollen Ergebnis für die ganze Schule.

Wichtige Fragen:

- Welcher Schriftzug soll realisiert werden?
- Wo kann dieser realisiert werden?
- Wo kann die Kamera (der Augpunkt) stehen?
- Eignet sich der Untergrund?
- Wie/mit was wird der Schriftzug aufgemalt?
- Wie lässt sich ein Modell des 3D-Schriftzugs und dessen Projektion erstellen?
- Wie lassen sich die berechneten Projektionspunkte auf der Schulhoffläche wiederfinden?

Zunächst wird mit der gesamten Klasse überlegt, welcher Schriftzug realisiert werden soll (vgl. Realmodell in Abb. 3). Dabei muss natürlich die auf dem Schulgelände zur Verfügung stehende Fläche berücksichtigt werden. Je größer die einzelnen Buchstaben werden, desto eindrucksvoller das Ergebnis aber große Buchstaben bedeuten auch mehr Zeichen- und Materialaufwand.

Steht der Schriftzug fest, muss das Schulgelände erkundet werden. Dies umfasst neben dem Ausmessen einer geeigneten Fläche auch die Berücksichtigung einer möglichen Kameraposition. Die Fläche sollte, neben ausreichend Platz, auch einen möglichst ebenen und farblich wie auch strukturell homogenen Untergrund aufweisen, damit der spätere 3D-Eindruck nicht durch Flecken, Muster o. ä. getrübt wird. Natürlich muss der Untergrund bemalbar sein, Gras- oder Kiesflächen eignen sich nicht. Zusätzlich muss eruiert werden, mit was der Boden bemalt werden soll. Dabei gilt es zu überlegen (und bei der Schulleitung nachzufragen) ob der Schriftzug dauerhaft oder nur kurzzeitig auf dem Schulhof zu sehen sein soll. Im Falle eines kurzzeitigen Schriftzugs eignet sich, auch wegen der preiswerten und einfachen Beschaffungsmöglichkeit, Straßenmalkreide (auch Sprühkreide kann in Betracht kommen). Die Position des Augpunkts (Kameraposition), von der aus der CamCarpet betrachtet werden kann, sollte so gewählt werden, dass sie einem breiten Publikum zugänglich ist, um womöglich der ganzen Schulgemeinde Zugang zum Kunstwerk zu ermöglichen. Zu frontal sollte die Kamera aufgrund des dann fehlenden 3D-Eindrucks nicht platziert werden. Diesbezüglich muss vorab gut überlegt werden – und dabei kann GeoGebra3D helfen – welche Perspektive auf den CamCarpet einen guten 3D-Eindruck vermittelt. Perspektiven, die Flä-

chen von Buchstaben verschwinden lassen, welche für den 3D-Eindruck verantwortlich sind, sollten vermieden werden. Eine tiefe Kameraposition vergrößert die zu zeichnenden Buchstaben unter Umständen enorm, sodass sehr viel Straßenmalkreide benötigt wird. Diese Problematiken können nebenbei eine weitere Spielwiese der CamCarpets eröffnen (z. B. „Lässt sich die Qualität des CamCarpet-Produkts beschreiben oder gar quantifizieren?“), die bei der hier beschriebenen Umsetzung allerdings nicht thematisiert wurde. Mit GeoGebra3D lassen sich diese Überlegungen später sehr einfach nachvollziehen, da 2D- und 3D-Fenster gleichzeitig nebeneinander angezeigt werden können (Abb. 6).

Die Erkundung des Schulhofs erfolgt in Gruppen und die Diskussion der genannten Aspekte darauffolgend im Plenum, sodass sich in Abwägung der Vor- und Nachteile verschiedener Flächen, eine Fläche als für die Umsetzung optimal herausstellt. Die Fläche wird ausgemessen, die Höhe der möglichen Kameraposition gemessen und der Ursprung des Koordinatensystems festgelegt.

Daran anschließend werden Gruppen gebildet. Jede Gruppe ist für die 2D-Projektion eines Buchstabens bzw. einer Ziffer verantwortlich. Damit alle Gruppen vom selben 3D-Modell ausgehen, wird das 3D-Modell nach vorheriger Absprache von einer Gruppe mit GeoGebra erstellt und die Koordinaten der Eckpunkte an die Gruppen weitergegeben (vgl. Mathematisches Modell bzw. Mathematisches Resultat in Abb. 3). Vorgabe für die Gruppen ist, dass mindestens ein Projektionspunkt per Hand berechnet werden soll, um die zugrundeliegenden mathematischen Hintergründe zu verstehen. Die Bestimmung der weiteren Projektionspunkte, ob per Hand, GeoGebra (für eine beispielhafte Erklärung einer GeoGebra-Implementierung siehe Best (2005)), Tabellenkalkulationsprogramm oder sonstiges, steht den Schülerinnen und Schülern frei. Eine Gruppe stellt, wie in Variante 3 (Abschn. 3.1.3) erläutert, eine Projektionsmatrix auf und schreibt sich für die weiteren Berechnungen ein Excel-Sheet, andere nutzen die Werkzeuge von GeoGebra. Hierbei erweist sich eine variable GeoGebra-Konstruktion als besonders vorteilhaft, da etwaige Anpassungen schnell, ohne erneute Konstruktion, vorgenommen werden können. Dazu hat die GeoGebra-Gruppe zunächst sowohl die Höhe und Länge, als auch die Breite und den Abstand zwischen den 3D-Zeichen variabel gestaltet, indem sie die Koordinaten der Buchstabenpunkte des GeoGebra3D-Modells in Abhängigkeit anderer Buchstabenpunkte definierte. Hat man hierbei konsequent gearbeitet, ist der Schriftzug zugstabil und kann je nach Positionierung des Augpunkts (der Kamera) formerhaltend vergrößert, verkleinert und verschoben werden. Andere Gruppen wiederum verwenden das Muster hinter der händischen Spurpunktberechnung, ähnlich wie in Variante 2 (Abschn. 3.1.2), und setzen die zu projizierenden Koordinaten

an geeigneter Stelle (dem Projektionsvektor, siehe Gl. 6) ein, um die übrigen Projektionspunkte mit Stift und Papier zu berechnen. Bei dem in Abb. 9 gezeigten CamCarpet sind die Projektionsbuchstaben ca. $3\text{ m} \times 7\text{ m}$ groß, wobei die Kamera in einer Höhe von ca. $5,6\text{ m}$ positioniert ist.

Sind alle Buchstabenkoordinaten bestimmt, geht es an die Realisierung auf dem Schulhof (vgl. Reales Resultat bzw. Realsituation in Abb. 3). Bevor die Koordinaten eingezeichnet werden können, muss ein Koordinatensystem auf dem Schulhof platziert werden. Dabei stellt sich die Rechtwinkligkeit von x - und y -Achse eines für den CamCarpet ausreichend großen Koordinatensystems auf „unkartiertem“ Untergrund als echte Herausforderung dar. Nach einiger Überlegung entscheiden sich die Schülerinnen und Schüler für den Einsatz eines Maurerdreiecks (3-4-5-Dreieck, Zwölfknotenschnur) und wenden ihre Kenntnisse über den Satz des Pythagoras (bzw. dessen Umkehrung) und Pythagoreische Tripel aus der Sekundarstufe 1 an: Spannt man eine Schnur mit den Kantenlängen 3:4:5 auf, ergibt sich zwischen den beiden kürzeren Seiten ein rechter Winkel. Damit lässt sich ein rechter Winkel mit ausreichender Genauigkeit konstruieren.

Ein weiteres Problem besteht im ausreichend exakten Einzeichnen der Buchstabenkoordinaten auf die $18\text{ m} \times 15\text{ m}$ große Fläche. Die Schülerinnen und Schüler brauchen ein Karomuster, welches einerseits erlaubt, die Koordinaten ausreichend genau einzuzichnen aber andererseits sicherstellt, dass das Karomuster im späteren Bild nicht sichtbar ist, um den 3D-Eindruck nicht zu stören. Auch hier bringt die Diskussion eine effiziente Lösung hervor. Die Verwendung einer Schlagschnur (Markierschnur) ausgehend vom Koordinatensystem-Rechteck stellt das gewünschte und zugleich nur leicht sichtbare Karomuster her. In einem gewöhnlichen Baumarkt erhältlich, besteht eine Schlagschnur aus einem mit farbiger Kreide (i. A. rot oder blau) gefüllten Gehäuse, in dem die Schnur aufgewickelt ist (Abb. 11). Zum Auftragen einer geraden Linie werden die Enden der Schnur an die entsprechende 1 m -Markierungen gehalten und straff gespannt. Nun zieht man die Schnur ein Stück vom Boden weg und lässt sie los, wodurch sie auf den Boden schlägt und der anhaftende Kreidestaub eine gerade Linie markiert. So entstehen $1\text{ m} \times 1\text{ m}$ große Karos, was eine ausreichend genaue Skalierung darstellt.

Mit den oben beschriebenen Vorbereitungen, kann das Einzeichnen der Buchstabenpunkte beginnen. Um die Entstehung des CamCarpets zu dokumentieren, wird bereits jetzt eine Kamera in der zuvor festgelegten Kameraposition aufgestellt, die alle 30 s ein Bild des Geschehens aufnimmt. Daraus lässt sich im Nachhinein ein eindrucksvolles Entstehungsvideo zusammenfügen. Jede Buchstabengruppe zeichnet ihren Buchstaben mit Straßenmalkreide ein. Dabei ist zu bedenken, dass ein guter Kontrast zwischen Front- und Seitenflächen der Buchstaben gewählt wird (Abb. 9), um die entsprechenden Flächen deutlich voneinander unterschei-



Abb. 11 Die verwendete Schlagschnur mit roter Kreide. (©Xenia-Rosemarie Reit 2021)

den zu können, was den 3D-Effekt unterstützt (siehe Abschn. 2.1). Zum Abschätzen der im Vorfeld zu kaufenden Menge an Straßenmalkreide, nehmen sich die Schülerinnen und Schüler GeoGebra zur Hilfe und lassen sich die Fläche der 2D-Projektion ausgeben. Ein Test mit einem gängigen Straßenmalkreide-Zylinder ergibt, dass dieser für eine Fläche von etwa $1,5\text{ m}^2$ ausreicht (Abb. 12), wobei die Schülerinnen und Schüler für den CamCarpet viel deckender als bei ihrem ursprünglichen Test ausmalen, sodass hierbei ein großzügiger Puffer eingeplant werden sollte.

Nach etwa zwei Wochen (8 Unterrichtsstunden) Erarbeitung und einem Schultag mit Vorbereitung des Koordinatensystems und Einzeichnen der Buchstaben, ist das Kunstwerk fertig. Vom Schulhof aus, ist der 3D-Eindruck nicht zu erkennen, sodass die Überraschung sichtlich groß ist, als die Schülerinnen und Schüler sich den CamCarpet von der Kameraposition aus anschauen. Viele Fotos mit „in“ den Buchstaben sitzenden oder „an“ den Buchstaben anlehnenen Schülerinnen und Schülern werden gemacht. Am eindrucksvollsten ist aber das Sprungvideo/-Foto aus Abb. 9. Der CamCarpet bleibt 3 Tage vom Regen verschont und wird von der ganzen Schulgemeinde bewundert. Fast allen Schülerinnen und Schülern ist aus Schulhofsicht nicht klar, um was es sich bei dem Kunstwerk tatsächlich handelt. Beim Betreten der Kameraposition staunt man umso mehr.

Zusammenfassend ist zu sagen, dass das Projekt CamCarpet im Großformat auf dem Schulhof einer fundierten Vorbereitung im beschriebenen zeitlichen Umfang bedarf, vor allem dann, wenn die Schülerinnen und Schüler, wie in der Umsetzung in der Sekundarstufe 2 beschrieben, von Beginn an die Verantwortung übernehmen. Um das

Abb. 12 Testergebnis:
Ein gängiger Zylinder an
Straßenmalkreide reicht etwa für
eine Fläche von $1,5\text{ m}^2$. (©Xenia-
Rosemarie Reit 2021)



Potenzial des Themas vollständig auszuschöpfen und die Hintergründe zu verstehen, ist eine offensichtliche Verknüpfung mit den Themen aus der analytischen Geometrie sehr empfehlenswert. Dennoch lässt sich ein von der Lehrkraft vorbereiteter CamCarpet durchaus auch in nur einem Projekttag realisieren, wobei die fachliche Durchdringung hierbei (zu) kurz kommt. Kleinere Realisierungen, wie in Abschn. 2 beschrieben, eignen sich eher für zeitlich kürzere Umsetzungen und können z. B. durch eine Ausstellung der verschiedenen kleineren CamCarpets (Postergröße) der Schulgemeinde zugänglich gemacht werden.

4 Fazit

Das Modellierungsprojekt Abi18-CamCarpet erlaubt durch die Vielfalt an Lösungs- und Umsetzungsmöglichkeiten nicht nur leistungsdifferenziertes, sondern auch jahrgangs- und fächerübergreifendes Arbeiten. Die Umsetzung im Physikunterricht erzeugt auch ohne mathematische Durchdringung des dahinterliegenden Prinzips eindrucksvolle Ergebnisse, die die Schülerinnen und Schüler staunen lässt. Im Rahmen der analytischen Geometrie bieten CamCarpets eine motivierende Anwendung, des sonst allzu oft kalkülhaft unterrichteten Themengebiets und belohnen zusätzlich mit einem, wenn großformatig auf dem Schulhof realisiert, für die ganze Schulgemeinde beeindruckenden Ergebnis.

Die Thematisierung des menschlichen Sehens und die Wirkung optischer Täuschungen erlaubt eine spannende Erweiterung des Themas in Richtung Biologie, Physiologie und Psychologie. Weitere Überlegungen zur Güte des 3D-Eindrucks in Abhängigkeit der Abweichung vom berechneten Kamerapunkt sowie der Effekt des binokularen Sehens als Grundlage des dreidimensionalen Sehens in Zusammenhang mit dem Augpunkt, geben Anlass für eine sinnstiftende fächerübergreifende Erweiterung des Themas.

Literatur

- Best, A. (2016). Schulhof-Mathematik 3D: CamCarpets. *mathematik lehren*, 194, 48–50.
- Blum, W., & Leiß, D. (2005). Modellieren mit der „Tanken“-Aufgabe. *mathematik lehren*, 128, 18–21.
- Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife: Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012. Hrsg.: Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland in Zusammenarbeit mit dem Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen. © 2015 KMK Bonn und Berlin 2012.
- Borneleit, P., Danckwerts, R., Henn, H.-W., & Weigand, H.-G. (2001). Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. *Journal für Mathematikdidaktik*, 22(1), 73–90.
- Gerber, K. (2008). *Projektionsmatrizen: Eine anwendungsorientierte Unterrichtsreihe aus der Analytischen Geometrie. Projekt SINUS NRW der Qualitäts- und Unterstützungsagentur – Landesinstitut für Schule (QUA-LiS NRW)*. <https://www.schulentwicklung.nrw.de/materialdatenbank/material/view/2038>.

- Greefrath, G. (2010). *Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Springer Spektrum.
- Henn, H.-W. (2000). Warum manchmal Katzen vom Himmel fallen ... oder ... von guten und schlechten Modellen. In H. Hischer (Hrsg.), *Modellbildung, Computer und Mathematikunterricht* (S. 9–17). Hildesheim: Franzbecker.
- Ludwig, M. (1998). *Projekte im Mathematikunterricht des Gymnasiums*. Hildesheim: Franzbecker.
- Reit, X.-R. (2016). *Denkstrukturen in Lösungsansätzen von Modellierungsaufgaben. Eine kognitionspsychologische Analyse schwierigkeitsgenerierender Aspekte*. Heidelberg: Springer.