

Hohlmaß, Fassungsvermögen, Rauminhalt oder Volumen?

Silke Ruwisch

Die vier Wörter „Hohlmaß“, „Fassungsvermögen“, „Rauminhalt“ und „Volumen“ werden in der Regel synonym verwendet. Die sprachliche Vielfalt ist aber schon ein Anzeichen dafür, dass es verschiedene Vorstellungen zum Volumenbegriff gibt, die alle bereits für die Grundschule relevant sind.

Ist der Begriff nicht egal? Wir wissen doch alle, dass in der Grundschule Liter und Milliliter thematisiert werden sollen. Je nach Schulbuch heißt es dann eben Fassungsvermögen, Rauminhalt oder Volumen – und Hohlmaß ist doch nur ein veralteter Name. Zwar mag die Bezeichnung nicht unbedingt wichtig sein, doch das Thema wird häufig ganz unterschiedlich entwickelt. Im Grundschulunterricht steht das Fassungsvermögen mit den Einheiten Liter und Milliliter, evtl. auch Dezi-, Zenti- und Hektoliter, als alltagsrelevante Größe im Vordergrund. Für die Volumenberechnungen in der Sekundarstufe ist dagegen die Vorstellung von Körpern, welche durch Einheitswürfelchen ausgemessen oder aber konstruiert werden, von besonderer Wichtigkeit. Diese Vorstellung lässt sich nicht durch Handlungserfahrungen mit Flüssigkeiten oder Sand aufbauen. Darüber hinaus – wenngleich vielleicht nicht so grundlegend – wird ein reichhaltiges Volumenkonzept ergänzt durch die Vorstellung, dass das Volumen eines Körpers durch den von ihm verdrängten Raum bestimmt werden kann. Alle drei Vorstellungen sollen mit unterschiedlicher Gewichtung im Grundschulunterricht angebahnt und thematisiert werden.

► Der Vergleich verschiedener Gefäße

Bei der Erarbeitung von Liter und Milliliter stehen zunächst das Fassungsvermögen verschiedener Gefäße

sowie entsprechende Messgeräte im Mittelpunkt der Betrachtungen. Wesentliche Erkenntnisse haben die Untersuchungen der Arbeitsgruppe von Piaget dazu erbracht. Diese konnten zeigen, dass jüngere Kinder zwei Wassermengen in verschiedenen Gefäßen häufig allein aufgrund der Höhe des Wasserstandes im Gefäß beurteilen, den Durchmesser der Gefäße jedoch vernachlässigen. Haben die Kinder das Stadium der Invarianz von Mengen noch nicht erreicht, sehen sie eine Flüssigkeitsmenge, wenn sie in ein breiter geformtes Gefäß umgeschüttet wird, als weniger Flüssigkeit an, selbst wenn das Umschütten vor ihren Augen geschieht (vgl. „Piagets Studien zur Mengeninvarianz“ auf S. 14).

Aber auch für ältere Kinder und Erwachsene ist der Vergleich zweier Wassermengen beispielsweise in unterschiedlichen Zylindern – ohne Messungen – nicht ohne Weiteres möglich, weil sich Veränderungen der Wasserstandshöhe und des Zylinderdurchmessers unterschiedlich auf das Volumen auswirken. Wenn sich – bei festem Durchmesser – die Höhe des Wassers verdoppelt, verdreifacht, ver-x-facht, dann verdoppelt, verdreifacht, ver-x-facht sich auch das Volumen. Wenn sich – bei fester Höhe – der Durchmesser des Zylinders verdoppelt, verdreifacht, ver-x-facht, dann vervierfacht, verneunfacht, ver-x²-facht sich das Volumen. Aus der linearen Veränderung des Durchmessers resultiert eine quadratische Veränderung der Zylindergrundfläche und damit auch des Volumens. Selbstverständlich erwarten wir diese mathematische Analyse nicht von Grundschulkindern, doch ist das Phänomen beim Vergleich von Flüssigkeitsmengen immer mit zu bedenken. Dies fällt selbst Erwachsenen schwer.

So ist es sicher einfach zu entscheiden, dass Zylinder 1 in **Abbildung 1** die meiste Flüssigkeit enthält, dass Zylinder 3 mehr Wasser enthält als Zylinder 2, obwohl beide denselben Wasserstand aufweisen, und Zylinder 4 und 5 jeweils weniger als die vorherigen. Doch wo würden Sie Zylinder 6 einordnen? – Dass er mehr Wasser als Zylinder 5 enthält, ist klar, aber ist es mehr als, weniger

als oder gleich viel wie in Zylinder 4? Und wenn Sie die Eingrenzung von der anderen Seite versuchen: Weniger als in Zylinder 1 und 3 ist wieder deutlich, aber wie sieht es mit Zylinder 2 aus? – Sich der unterschiedlichen Bedeutung von Wasserstandshöhe und Gefäßdurchmesser bewusst zu werden und dem Wissen gegenüber dem Augenschein den Vorrang zu geben, ist ein sehr hoher Anspruch. Dieser lässt sich aber nach vielfältigen Handlungserfahrungen beim Umschütten und Vergleichen des Fassungsvermögens von Gefäßen immer besser einlösen. Handlungserfahrungen auch außerhalb der sehr begrenzten Unterrichtszeit zum Thema „Liter-Milliliter“ zu ermöglichen, ist ein wichtiges Anliegen der Grundschulmathematik. Nur so können die „offensichtlichen“ Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler weiterentwickelt werden, sodass sie dann auch zu den Ergebnissen der Volumenberechnungen in den weiterführenden Schulen passen.

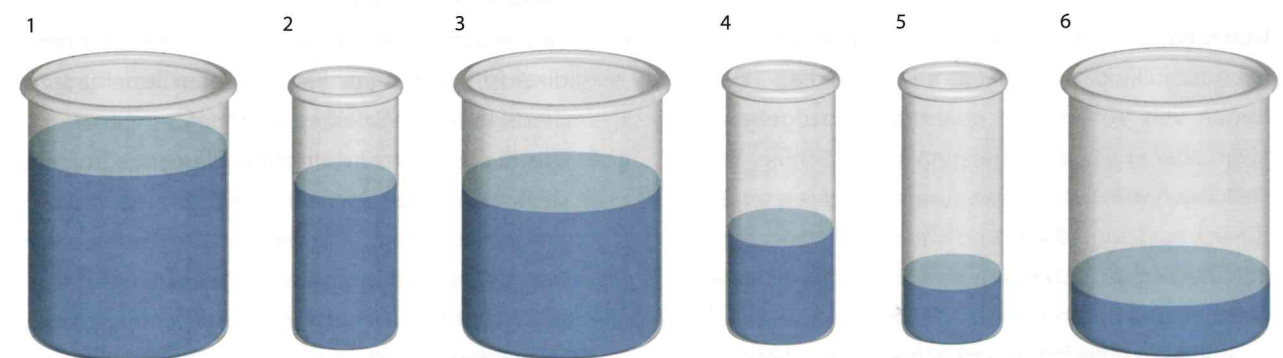
► Messbecher – Anlass für vielfältige Erkundungen

Messbecher genauer zu untersuchen – selbstverständlich sollen sie auch korrekt benutzt werden können, doch das ist für das Größen- und Messverständnis der Kinder weniger wichtig – lohnt sich in mehrerlei Hinsicht:

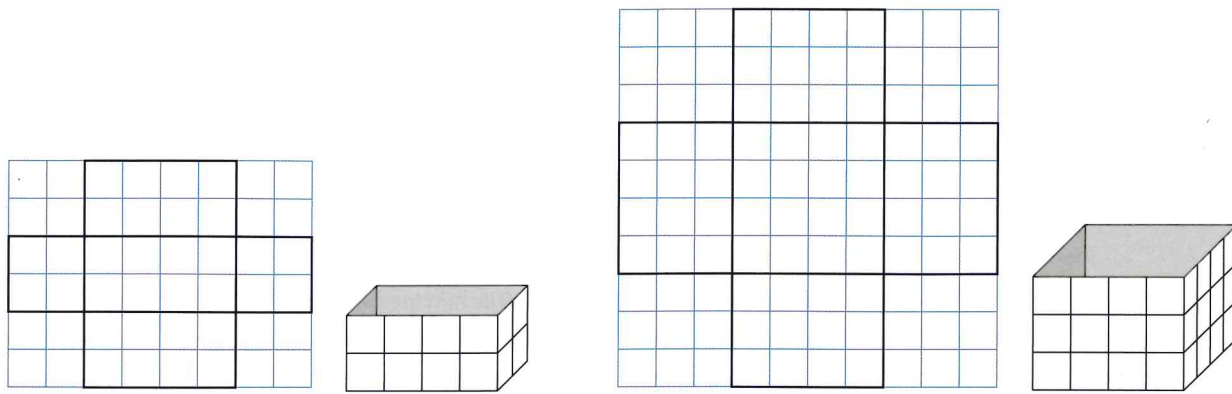
Auf zylindrischen Messbechern findet man häufig neben den Volumenangaben in Millilitern auch Angaben von einfachen Bruchteilen eines Liters: $\frac{1}{4}$ l, $\frac{1}{2}$ l, $\frac{3}{4}$ l, teilweise auch $\frac{1}{8}$ l und $\frac{3}{8}$ l. Neben den Zeitspannen – Unterteilung einer Stunde an der Uhr – ist das Volumen der Größenbereich, der sich am besten eignet, um erste Bruchvorstellungen aufzubauen und Zusammenhänge zu zeigen (s. „Stützpunktvorstellungen aufbauen“ auf S. 18). Da auf den Messbechern neben den Bruchteilen immer auch die Angaben in Millilitern vorhanden sind, können die Kinder sehen, dass die Liter-Bruchteile ganzzahligen Angaben in einer kleineren Maßeinheit, den Millilitern, entsprechen und als Hälfte, vierter Teil etc. von 1000 Millilitern auch rechnerisch ermittelt werden können.

Auf vielen Messbechern findet man außerdem anglo-amerikanische Maßeinheiten wie pints, cups oder fluid ounces. Messsysteme anderer Länder kennen zu lernen lohnt ebenso wie die Auseinandersetzung mit historischen Maßen. So erfährt man etwas über die Entstehung von Messsystemen, die sich zunächst meist am alltäglichen Nutzen und vorhandenen Gegenständen orientierten, und über das Problem von Abweichungen und Ungenauigkeiten, die später zur Vereinheitlichung und häufig auch zur dezimalen Unterteilung geführt haben.

Darüber hinaus finden sich auf den Messbechern auch Skalen mit Gewichtsangaben zu typischen Backzutaten.



1 Sortieren Sie die Zylinder nach der darin enthaltenen Flüssigkeitsmenge



2 „Wie viele Würfel passen in jede Schachtel? Überlege zuerst, prüfe dann durch Nachbauen.“
– Die gedankliche Zerlegung eines Quaders in Schichten erfordert eine gute Raumvorstellung.

Aber wieso eigentlich ist der Strich für 100 Gramm Mehl viel weiter oben als für 100 Gramm Zucker? – Erste Erfahrungen zur Dichte sind für Grundschulkinder also nicht nur bei Experimenten zum Sinken und Schwimmen möglich.

Neben den zylindrischen Messbechern findet man auch Kegel(-stümpfe), die sich insbesondere für eine genauere Abmessung geringer Mengen eignen. Die Skala dieser Messbecher mit der Skala der zylindrischen Messbecher zu vergleichen vertieft das Verständnis allgemein für Skalen und verdeutlicht gut, dass Messgeräte von Menschen für einen spezifischen Zweck erstellt wurden und Skalen keineswegs immer gleich sind. Werden an unterschiedlich geformten Glas- oder Kunststoffgefäßen selbst Skalen angebracht, z.B. in 10-ml- oder 100-ml-Schritten, können die Kinder erneut erfahren: Ist das Gefäß schmal, sind die Markierungen weiter auseinander als an den Stellen, wo das Gefäß breit ist.

► Volumen als zusammengesetzte Größe

Durch Bauen und Ausmessen mit Einheitswürfeln sind Grundschulkinder überhaupt erst in der Lage, das Volumen von Vollkörpern quantitativ anzugeben. Vor allem aber erwerben Schülerinnen und Schüler so Vorstellungen vom Volumen als zusammengesetzter Größe, die sich aus Länge, Breite und Höhe des Körpers oder des Behälters ergibt (s. „Mit Einheitswürfeln Rauminhalte vergleichen und bestimmen“ auf S. 24).

Sollten Schülerinnen und Schüler diese Vorstellung trotz vielfältiger Bauerfahrungen dennoch nicht auf-

bauen, ist ihnen auch mit der Formel „Länge · Breite · Höhe“ nicht geholfen. Zwar können die Kinder dann Volumina richtig berechnen – es handelt sich ja auch nur noch um eine Multiplikationsaufgabe mit drei Faktoren –, doch sie können dann immer noch nicht die notwendige Anzahl an Würfelchen für eine gegebene oder gezeichnete Schachtel bestimmen oder angeben, aus wie vielen Würfeln ein gegebener bzw. gezeichneter Quader besteht. Um diese Anforderungen erfüllen zu können, sind nach Battista (2003) vier mentale Prozesse notwendig:

1. Die Kinder müssen innere Bilder von Situationen, Objekten und Gegebenheiten aufbauen und nutzen. Beispiel: Wenn du das Klassenzimmer nach rechts verlässt, an der nächsten Ecke nach links abbiegst und dann in die zweite Tür links gehst, in welcher Klasse landest du dann?
2. Die Kinder müssen räumlich strukturieren können und diese Strukturierungen in ihre inneren Bilder einbauen. Sie müssen z.B. eine Gesamtform gedanklich in ihre Einzelteile zerlegen können, diese evtl. umbauen, anders zusammensetzen etc. Wesentlich hierzu ist auch, die Würfelchen nicht als eine Ansammlung von Einzelnen zu sehen, sondern die Ausmaße des Quaders und deren Beziehung zu den einzelnen Würfeln zu erkennen.
3. Die Kinder müssen einzelne Elemente in dem Gesamtkomplex identifizieren und strukturell erfassen können. Dazu wird eine Art inneres Koordinatensystem aufgebaut. Beispiel: Der blaue Würfel soll in der Schachtel in der mittleren Schicht, an der dritten Stelle von links und der zweiten von vorn verbaut werden.

4. Eng mit der zweiten Anforderung ist die Erweiterung verbunden, die gedankliche Strukturierung in größeren, zusammengesetzten Einheiten vornehmen zu können, z.B. die Anzahl der Würfel eines Quaders dadurch zu bestimmen, dass dieser gedanklich in Schichten zerlegt wird und die Würfel schichtweise und dann in Schritten zu zählen.

Um diese Prozesse anzubahnen, ist neben der Bauerfahrung mit Würfelchen ein explizites Herausfordern dieser Prozesse notwendig. Ansonsten verbleiben die Kinder bei einfachen Zählprozeduren, die häufig mit typischen Fehlern behaftet sind. So werden beispielsweise bei der Frage, aus wie vielen Würfeln ein gezeichneter Quader besteht, verdeckte Würfel nicht mitbedacht oder sichtbare Kantenwürfel doppelt und Eckwürfel dreifach gezählt.

Battista und Kollegen (ebd.) haben gute Erfahrungen mit Aufgabenstellungen wie in **Abbildung 2** gemacht. Diese stellen hohe Anforderungen an das Vorstellungsvermögen, an denen Kinder im Grundschulalter zunächst häufig scheiterten. Sie waren dadurch aber motiviert, genauer nach den Strukturen der Situation und ihren eigenen falschen Vorstellungen zu suchen.

► Verdrängung als Volumenvorstellung

Zu den wichtigen Vorstellungen des Volumens als Fassungsvermögen und als zusammengesetzte Größe stellt die Verdrängungsvorstellung eine sinnvolle Ergänzung dar. Gerade das Volumen von unregelmäßig geformten Körpern lässt sich auf diese Weise sehr einfach miteinander vergleichen: Der Körper, der in einem mit Flüssigkeit gefüllten Gefäß mehr Flüssigkeit verdrängt, hat ein größeres Volumen als der andere Körper. Wird als Gefäß ein Messgerät, wie z.B. ein Messbecher verwendet, lässt sich sogar das Volumen als Differenz aus dem Endwert und dem Anfangswert genau errechnen. Das Volumen schwimmender Gegenstände lässt sich bestimmen, indem der Gegenstand in einen leeren Behälter gelegt wird, der dann vorsichtig mit Sand gefüllt wird. Einzig das Gewicht des Sandes sollte den Gegenstand nicht zusammendrücken oder womöglich zerstören.

Die Verdrängungsvorstellung mag zunächst als nicht so wichtig erscheinen. Anknüpfungspunkte finden sich aber durchaus auch im Alltag von Grundschulkindern, z.B. bei der Frage, wie hoch der Wasserstand in der

Badewanne sein sollte, bevor man sie besteigt. Außerdem hilft die Verdrängungsvorstellung der falschen Vorstellung vorzubeugen, dass Körper, welche nicht als Behälter dienen können oder nicht aus Einheitswürfeln zusammengesetzt sind, als Körper ohne Volumen oder zumindest als Körper mit nicht feststellbarem Volumen angesehen werden. Da über die Verdrängung einerseits das Volumen von Vollkörpern ermittelt wird, man sich andererseits dabei einer Flüssigkeit und deren Volumen in Millilitern bedient, wird eine Brücke zwischen den beiden ersten Volumenvorstellungen geschlagen.

Doch auch diese Volumenvorstellung versteht sich nicht von selbst. Schon Piaget und seine Arbeitsgruppe haben in den 1940er Jahren gezeigt, dass Kinder durchaus schon der Auffassung sein können, dass sich das Volumen eines Gegenstandes beim Zerlegen und Neuzusammensetzen nicht verändert, dass er aus ihrer Sicht aber dennoch mehr oder weniger Wasser verdrängen kann. Dies mutet zunächst merkwürdig an. Gesetzt den Fall, ein Quader aus 24 Würfelchen würde in andere Quader mit ebenso vielen Würfelchen umgebaut, dann wären diese Kinder sicher, dass die Quader alle dasselbe Volumen hätten. Würden die Kinder aber gefragt, wie hoch der Wasserstand wohl ausfiele, wenn man die einzelnen Quader nacheinander alle in denselben Becher mit Wasser legte, so wären die Kinder von derselben Füllhöhe nicht überzeugt, sondern bezögen wieder den Augenschein der Objekte in ihre Überlegungen mit ein. Diese Kinder erwarteten daher, dass ein kompakt wirkender Quader weniger Raum einnähme als ein besonders länglicher oder als die 24 Einzelwürfel. Piaget u. a. (1975) sahen darin jedoch kein Argument gegen die Verdrängungsvorstellung, sondern waren der Auffassung, erst wenn auch diese Fragen stabil beantwortet würden, habe das Kind die Invarianz des Volumens tatsächlich erworben.

Somit bedarf es aller drei Vorstellungen, damit von einem reichhaltigen und ausgereiften Volumenkonzept ausgegangen werden kann.

Battista, M. T.: Understanding Students' Thinking about Area and Volume Measurement. In: Clements, D. H. (Hrsg.): Learning and Teaching Measurement. NCTM, Reston (VA) 2003. S. 122–142.

Piaget, J.; Inhelder, B.; Szeminska, A.: Die natürliche Geometrie des Kindes. Bd. 7 der gesammelten Werke. Klett, Stuttgart 1975.

Auflösung zu Abbildung 1: Die richtige Reihenfolge lautet „1, 3, 6, 2, 4, 5“. In Zylinder 6 ist viermal so viel Wasser, in Zylinder 2 dreimal so viel Wasser wie in Zylinder 5.