

4 Flächeninhalte

Bereits ab dem ersten Schuljahr können Kinder Vergleichs- und Messerfahrungen zu Flächeninhalten sammeln. Im Gegensatz zu den anderen Größenbereichen werden für diesen Größenbereich im Mathematikunterricht der Grundschule jedoch noch keine standardisierten Maßeinheiten eingeführt und behandelt. Aus diesem Grund spielen Stützpunktwissen und -vorstellungen zu Standardeinheiten sowie das quantitative Schätzen eine nicht so prominente Rolle wie in den anderen Größenbereichen. Es wird aber durchaus mit Einheitsquadraten, die auch Standardeinheiten repräsentieren können (Zentimeter-, Meterquadrate) gearbeitet. Wesentliche Aspekte und Kompetenzen, die bei der Behandlung der anderen Größenbereiche in der Grundschule relevant sind, spielen also eine eher untergeordnete Rolle. Aus diesem Grund ist der Größenbereich *Flächeninhalte* in vielen Bildungsplänen der Länder nicht der Leitidee *Größen und Messen*, sondern der Leitidee *Raum und Form* zugeordnet. In den Bildungsstandards der KMK (2022) beziehen sich nicht alle Standards der Leitidee *Größen und Messen* auch auf Flächeninhalte. In Bezug auf die Ausführungen in diesem Buch bedeutet dies, dass sich die Aufgaben zur Erhebung von Lernständen und die Vorschläge für Unterrichtsmodule im Wesentlichen auf das Vergleichen und Messen beziehen. Es finden sich aber auch Vorschläge zum Schätzen, die sich an die Arbeit mit Einheitsquadraten anschließen.

4.1 Besonderheiten

Längen, Flächeninhalte und Rauminhalte sind sogenannte geometrische Größenbereiche und stehen untereinander in einem engen Zusammenhang. So sind Flächeninhalte zusammengesetzte Größen, deren Berechnung auf die Multiplikation zweier Längen zurückgeführt wird. Flächeninhalte werden aber im Mathematikunterricht der Grundschule nicht als zusammengesetzte Größe behandelt, sondern als eigenständige Größe, indem z. B. Einheitsmaße wie Meterquadrate oder Zentimeterquadrate zum Auslegen von Flächen verwendet werden. Jedoch werden die standardisierten Maßeinheiten wie Quadratmeter, Quadratzentimeter, Quadratkilometer, in denen die zusammengesetzte Größe deutlich enthalten ist, noch nicht thematisiert. Zum Messen werden neben solchen normierten Messwerkzeugen in Form von Einheitsflächen auch gegenständliche Messwerkzeuge in Form von „Alltagsflächen“ wie z. B. Tafel(flügel)fläche, Türfläche, Bettfläche, DIN-A4/5-Papier, Postkarte,

Briefmarke, Karopapierkästchen oder auch körpereigene wie die Handfläche verwendet. Mit größeren Gegenständen wie beispielsweise der Türfläche kann dabei nicht konkret, sondern nur mental gemessen werden. Bei der Verwendung von Handflächen kann die Messgenauigkeit thematisiert werden, da ein lückenloses Ausmessen nicht möglich ist. Messwerkzeuge für den Flächeninhalt (Planimeter) spielen in der Grundschule keine Rolle.

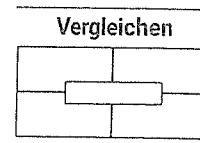
Ein wesentliches Ziel des Grundschulunterrichts in Bezug auf Flächeninhalte ist die Einsicht in die Invarianz des Flächeninhalts gegenüber Lage und insbesondere Umformung der Fläche: Unterschiedlich geformte Flächen können denselben Flächeninhalt haben, das ist die zentrale, aber für Kinder oftmals schwierige Erkenntnis. Ein weiteres Ziel ist die Einsicht in die Notwendigkeit eines Einheitsmaßes zum Bestimmen des Flächeninhalts, z. B. in Form von kongruenten Quadraten oder Dreiecken. Während in der Sekundarstufe Flächeninhalte rechnerisch bestimmt sowie Flächeninhaltsformeln für verschiedene Flächen erarbeitet werden, werden Flächen in der Grundschule in Bezug auf ihren Inhalt auf ganz unterschiedliche Weise verglichen und gemessen: durch Übereinanderlegen, durch Zerlegen und Zusammensetzen, durch Ergänzen oder durch Auslegen (Begriffsklärungen s. Infokasten „Konkrete Vergleiche von Flächen“). Zwei Flächen haben denselben Flächeninhalt, wenn sie deckungsgleich (kongruent), zerlegungsgleich, ergänzungsgleich oder auslegungsgleich sind. Beim Auslegen mit Einheitsflächen spielt das geschickte Bestimmen der Anzahl der Teilflächen durch die Multiplikation eine wichtige Rolle. Die Multiplikation wird in Schulbüchern häufig durch rechteckige Darstellungen veranschaulicht. Unter Nutzung der Rechteckstruktur kann die Gesamtanzahl der Einheitsquadrate rechnerisch schnell bestimmt werden. Ein Verständnis für multiplikative Strukturen bereitet folglich auch die Flächeninhaltsberechnung von Rechtecken vor.

Konkrete Vergleiche von Flächen

Konkrete Vergleiche spielen bei Flächeninhalten eine zentrale Rolle. Im Unterschied zu den Längen gibt es verschiedene mögliche Vorgehensweisen, um zwei Flächen in Bezug auf ihren Flächeninhalt zu vergleichen. Manche dieser Vorgehensweisen ermöglichen lediglich ein qualitatives Vergleichen der beiden Flächen (ist größer/kleiner/gleich groß), andere Vorgehensweisen erlauben darüber hinaus auch einen quantitativen Vergleich.

Vergleichen durch Übereinanderlegen

Um herauszufinden, welche Fläche größer ist, können zwei Flächen übereinandergelegt werden. Dabei geht es nicht um das Bestimmen der genauen Größe, sondern man fokussiert auf die größer-kleiner Relation, also auf einen qualitativen



Flächenvergleich (Radatz & Rickmeyer 1991, S. 72). Ob ein Übereinanderlegen möglich ist, ist auch von der Form, der Größe und der Beweglichkeit der zu vergleichenden Flächen abhängig. Ein Vergleich durch Übereinanderlegen ist dann möglich, wenn

- zumindest eine der beiden Flächen beweglich ist und aufgrund ihrer Größe und Beschaffenheit physisch zur anderen gebracht werden kann;
- eine der beiden Flächen in beiden Dimensionen größer als bzw. gleich groß wie die zweite ist. Wenn die erste Fläche die zweite genau überdeckt, so haben sie den gleichen Flächeninhalt und sind kongruent, also deckungsgleich (Franke & Reinhold 2016, S. 310).

Vergleichen durch Zerlegen und Zusammensetzen

Wenn Teile beider Flächen jeweils über die andere Fläche hinausragen, es also jeweils Überstände gibt, dann ist ein Vergleich durch einfaches Übereinanderlegen nicht immer möglich. Eine oder beide Flächen müssen dann so zerlegt und wieder neu zusammengesetzt werden, dass ein Vergleich möglich wird.

Wenn eine Fläche so zerlegt werden kann, dass die entstandenen Teile neu zusammengesetzt die andere Fläche exakt überdecken, so sind die beiden Flächen zerlegungsgleich (Franke & Reinhold 2016). Dazu wird eine vorgegebene Fläche in Teilflächen zerschnitten, die anschließend derart auf eine zweite Fläche gelegt werden, sodass die beiden Flächen in Bezug auf die Form identisch sind. Bei dieser Tätigkeit können Schülerinnen und Schüler ein grundlegendes Verständnis von Flächengleichheit erwerben (Schipper 2009) und sie erhalten Einblick in die Invarianz des Flächeninhalts: Sie können erkennen, dass sich der Flächeninhalt durch Umformung und Veränderung der Lage von Teilflächen nicht verändert, also invariant bleibt (z. B. Radatz & Rickmeyer 1991, S. 70). Zentral ist die Erkenntnis, dass für den Flächenvergleich nicht die Form, sondern der Flächeninhalt maßgeblich ist (Schipper 2009).

Eine Alternative zum Zerlegen der Flächen durch Zerschneiden ist das Einzeichnen von Linien. Ziel ist es, beide Flächen in gleiche, i. S. von kongruente bzw. deckungsgleiche, Teilflächen zu zerlegen. Im Anschluss werden die Flächen durch eine paarweise Zuordnung der Teilflächen miteinander verglichen. In einem weiteren Schritt können die Flächen nur noch gedanklich, also in der Vorstellung, zerlegt werden (qualitatives Schätzen). Dies fördert das räumliche Vorstellungsvermögen. Flächenvergleiche durch Zerlegen in verschiedene Teilfiguren können beispielsweise auch am Geobrett erfolgen, bei welchem die Flächen mit Gummibändern abgespannt und mit weiteren Gummibändern in Teile zerlegt werden (Franke & Reinhold 2016). Das Zerlegen und Zusammensetzen von Flächen ist grundlegend für die Flächeninhaltsberechnung in den weiterführenden Schulen. Bei komplexen ebenen Figuren ist es oftmals notwendig, diese in Teilfiguren zu zerlegen, um bekannte Formeln zur Berechnung des Flächeninhalts anwenden zu können. Deshalb ist die Erfahrung, Flächen durch Zerlegen und Zusammensetzen zu betrachten und zu vergleichen, von grundlegender Bedeutung (Schipper et al. 2017).

Vergleichen durch Ergänzen

Eine weitere Möglichkeit des Vergleichens von Flächen ist das Ergänzen: Kann man bei zwei Flächen jeweils die gleiche Fläche ergänzen, sodass zwei kongruente Flächen entstehen, lässt sich deren Flächeninhaltsgleichheit begründen. Dies lässt sich am Beispiel eines Parallelogramms und eines entsprechenden Rechtecks verdeutlichen (Abb. 4.1):

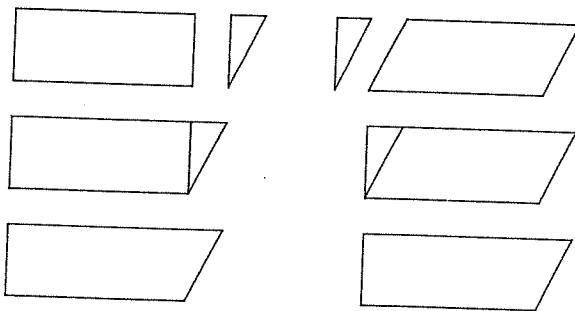
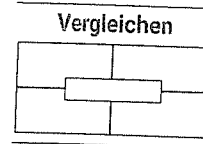
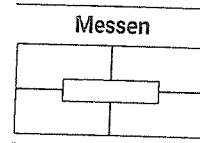


Abb. 4.1: Ergänzungsgleichheit von Parallelogramm und Rechteck (in Anlehnung an Weigand et al. 2014)

Werden in diesem Fall die beiden Figuren jeweils mit einem kongruenten Dreieck ergänzt, so entstehen zwei flächeninhaltsgleiche Trapeze (Weigand et al. 2014).

Vergleichen durch Auslegen – Messen

Franke und Reinhold (2016) nennen abschließend das Vergleichen von Flächen durch Auslegen mit Einheitsflächen wie z. B. kongruenten Quadraten oder Dreiecken.



Der jeweilige Flächeninhalt kann hier bestimmt werden, indem die Fläche zunächst mit Einheitsflächen lückenlos und überlappungsfrei ausgelegt wird und diese anschließend strukturiert ausgezählt werden (Schipper 2009). Dabei ist zu berücksichtigen, dass zu einem Messergebnis immer Anzahl und Einheit gehören: z. B. 5 Einheitsquadrate oder 5 Q. Dadurch ist ein quantitativer Vergleich des Flächeninhalts von Figuren möglich. Lassen sich zwei zu vergleichende Flächen exakt, ohne Überlappungen oder Lücken mit derselben Anzahl an Einheitsflächen auslegen, sind sie auslegungsgleich und haben damit den gleichen Flächeninhalt.

Alle diese Formen des konkreten Vergleichens können auch mental vorgenommen werden (Schätzen).