

Grundbegriffe und Gewinnchancen

Man kann die *Stochastik* in drei für die Grundschule relevante Teilgebiete einteilen:

- Die *Statistik* hat die Erhebung, Darstellung und Interpretation von *Daten* zum Thema, etwa wenn Säulendiagramme zu Lieblingssportarten erstellt werden.
- In der *Kombinatorik* geht es um die systematische Bestimmung von Anzahlen (*Häufigkeiten*), beispielsweise wenn ermittelt wird, wie viele dreistellige Zahlen aus den 3 (jeweils genau einmal vorhandenen) Ziffernkärtchen 1, 2, 3 gebildet werden können.
- Die *Wahrscheinlichkeitsrechnung* schließlich befasst sich damit, den Zufall mit Worten und mit Zahlen zu beschreiben, zum Beispiel, wenn untersucht wird, ob das Würfeln einer 6 weniger wahrscheinlich ist als das einer 1.

Zentrale Aufgabe des Mathematikunterrichts der Grundschule im Bereich „Wahrscheinlichkeit“ ist es, die häufig subjektiven, intuitiven Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern gemeinsam mit ihnen zu hinterfragen und zunehmend durch personenunabhängige Einschätzungen abzulösen. Die KMK-Bildungsstandards formulieren zwei wesentliche Ziele für den Mathematikunterricht in der Grundschule:

- *Grundbegriffe* wie zum Beispiel *sicher*, *unmöglich*, *wahrscheinlich* bei der Beurteilung von Ereignissen *verwenden* sowie
- *Gewinnchancen* bei einfachen Zufallsexperimenten wie Würfelspielen *einschätzen*.

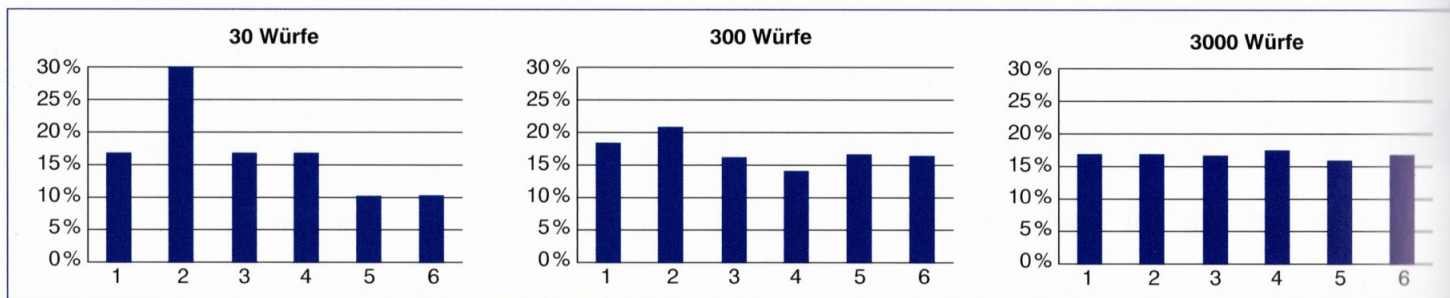
Zum besseren Verständnis dieser Formulierungen: Die subjektive Auffassung, dass beim Münzwurf „Zahl“ wahrscheinlicher sei als „Kopf“, wenn zuvor mehrmals hintereinander „Kopf“ geworfen wurde, ist bisweilen auch über

die Grundschule hinaus zu finden: Intuitiv vergleicht man dann die Situationen, in denen „Zahl“ geworfen wird, nachdem dreimal hintereinander „Kopf“ kam, mit denen, in denen „Zahl“ im Anschluss an die anderen Konstellationen (z. B. ZKZ oder KKZ) kommt. Und KKKZ wird tatsächlich seltener geworfen werden als alle anderen Konstellationen mit Z als viertem Wurf *zusammen*, aber nicht als jede der anderen Konstellation (wie ZZZZ oder KZKZ) *für sich genommen*. Denn für alle diese Viererkonstellationen ist die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens jeweils $1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/16$.

Wahrscheinlichkeit ist der Quotient aus der Anzahl der sogenannten „günstigen“ Fälle einerseits, in denen das Gewünschte oder das zu Untersuchende eintritt, und der Anzahl der insgesamt „möglichen“ Fälle andererseits. Es gibt also bei einem Münzwurf zwei „mögliche“ Fälle oder beim Würfelwurf sechs „mögliche“ Fälle.

Und was die „günstigen“ Fälle sind, hängt davon ab, was man untersuchen will: Will man wissen, wie groß die Wahrscheinlichkeit für das Würfeln einer 6 ist, dann gibt es einen einzigen „günstigen“ Fall; geht es darum, dass eine gerade Zahl gewürfelt wird, so gibt es 3 „günstige“ Fälle, die Wahrscheinlichkeit beträgt also hier $3/6$ oder $1/2$ oder 0,5 oder 50 %.

Die Wahrscheinlichkeit wird als Zahl zwischen 0 und 1 angegeben oder entsprechend als Zahlenangabe im Spektrum von 0 % bis 100 % (100 % ist ja nichts anderes als 100 Hundertstel, was bekanntlich 1 ist). Die Zahl 0 (oder 0 %) bezeichnet dabei ein sogenanntes „unmögliches Ereignis“, etwa das Würfeln einer 7 mit einem handelsüblichen Spielwürfel. Analog steht die Zahl 1 (oder 100 %) für das sogenannte „sichere Ereignis“, das auf jeden Fall eintreffen wird, beispielsweise, dass beim Würfeln mit dem Würfel eine Zahl kleiner 10 gewürfelt wird.



Das „sichere“ und das „unmögliche“ Ereignis sind Extremfälle und als solche nicht unbedingt spannend. Spannender ist in der Regel die Untersuchung unwahrscheinlicher (6 würfeln), sehr wahrscheinlicher (keine 6 würfeln) sowie gleich wahrscheinlicher Ereignisse (gerade bzw. ungerade Zahl würfeln) oder der Vergleich „wahrscheinlicher als“ und „unwahrscheinlicher als“. Wichtig ist, dass unwahrscheinliche Ereignisse immer *möglich* sind und dass sehr wahrscheinliche Ereignisse nicht eintreffen *müssen*.

Auch wenn wir in der Grundschule nicht den Bruch $1/6$ verwenden, so macht man sich doch die dadurch ausgedrückte Beziehung zunutze: In einem von sechs Fällen wird eine 6 gewürfelt.

Das ist die Theorie. Die Realität sieht oft anders aus, und das macht Unterricht zum Thema Wahrscheinlichkeit bisweilen schwierig. Denn würfelt man 30mal, wird man kaum eine Gleichverteilung der Ergebnisse erzielen. Und selbst bei 300 oder 3.000 Würfeln nähern sich die tatsächlichen Ausgänge mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit dem berechneten Wert von $1/6$ lediglich an (vgl. Abbildungen).

Hier begegnet man einerseits der sogenannten relativen Häufigkeit und andererseits der sogenannten theoretischen (errechneten) Wahrscheinlichkeit. Die *Tendenz* ist: Werden vergleichsweise viele Würfe gemacht, dann liegen relative Häufigkeit und theoretische Wahrscheinlichkeit enger beieinander als bei vergleichsweise wenigen Würfeln. Will man also, dass die Lernenden diese Zusammenhänge sehen, muss man sich erstens überlegen, wie man auf eine hinreichend große Wurfanzahl kommt

und wie man zweitens dazu anregen kann, Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen Theorie und Realität zu sehen.

Man muss auch sehen, dass der Erwerb von objektiveren Denkweisen kaum in zwei, drei Unterrichtsstunden passieren kann (vgl. Schipper 2009, S. 285). In diesem Sinne können in Anlehnung an Hasemann/Mirwald/Hoffmann (2008, S. 155f.) fünf Schwerpunkte für die Behandlung des Themas „Wahrscheinlichkeit“ in der Grundschule formuliert werden, die es gilt, in der Sekundarstufe systematischer fortzuführen:

- Die Schülerinnen und Schüler lernen, die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens bestimmter Ereignisse qualitativ mithilfe von Grundbegriffen wie *sicher*, *unmöglich*, *möglich*, *(sehr) wahrscheinlich*, *(sehr) unwahrscheinlich*, *wahrscheinlicher* oder *unwahrscheinlicher* einzuschätzen.
- Sie erfahren dabei, dass diese Begriffe nur Einschätzungen, keine Vorhersagen sind.
- Sie nutzen bei der Bearbeitung von Aufgabenstellungen das Wissen, dass bei Würfeln oder Münzen von einer Gleichverteilung der Ergebnisse ausgegangen werden kann.
- Sie können bei einfachen Zufallsexperimenten durch mehr oder weniger systematisches Zählen die Anzahl der günstigen und der möglichen Fälle ermitteln und qualitativ in Beziehung setzen.
- Sie verstehen ansatzweise, dass durch die fortgesetzte Wiederholung eines Zufallsexperiments die qualitative Einschätzung der Eintrittswahrscheinlichkeit tendenziell genauer wird.

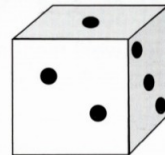
Zufallsexperimente in der Grundschule

Was ist denn nun ein Zufallsexperiment? Ein Zufallsexperiment zeichnet sich dadurch aus,

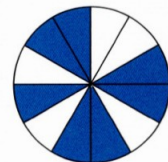
- dass es einen genau festgelegten Plan für die Durchführung gibt,
- dass alle möglichen Ausgänge vorab bekannt sind und
- dass man den Ausgang des Experiments nicht voraussagen kann.

Ein Zufallsexperiment kann einstufig (1-mal würfeln) oder mehrstufig (300-mal würfeln) sein. In der Regel befasst man sich in der Schule mit mehrstufigen Zufallsexperimenten. Typisch für die Grundschule sind neben dem Würfeln mit einem oder zwei Würfeln beispielsweise das Drehen eines Glücksrades, das Werfen einer Münze oder das Ziehen einer Kugel aus einem Gefäß. Sie repräsentieren verschiedene Typen von Zufallsexperimenten, die in ihren Besonderheiten in der Grundschule nicht ausführlich behandelt und im weiterführenden Mathematikunterricht wieder aufgegriffen werden.

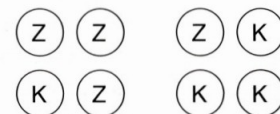
Würfeln mit einem Würfel: Beim Würfeln mit einem Würfel sind alle Ausgänge *gleich wahrscheinlich* – das ist die Theorie, wie man den Grafiken auf S. 158 entnehmen kann. Die Gleichverteilung aller Würfe auf die sechs Zahlen, die postuliert, dass jede Augenzahl in 16,666...% aller Versuche erreicht wird, wird auch nach 3.000 Versuchen noch lange nicht erzielt.



Blau oder weiß? Das Drehen eines Glücksrades wird häufig als Beispiel für ein Zufallsexperiment eingesetzt, dessen Ergebnisse im Unterschied zum Würfeln mit einem Würfel *nicht gleich wahrscheinlich* sind. Im nebenstehenden Beispiel ist es wahrscheinlicher, dass blau gewinnt, weil es 7 blaue und 5 weiße Felder gibt.



Kopf oder Zahl? Das zweimalige Werfen einer Münze ist – wie das zweimalige Würfeln mit anschließender Addition der beiden Augenzahlen – ein Beispiel für ein *mehrstufiges Zufallsexperiment*, bei dem die beiden *Ergebnisse verknüpft* werden. Es geht also um die Kombination verschiedener Ergebnisse.



Rot oder blau? Das Ziehen einer Kugel aus einem Gefäß repräsentiert Aufgaben, bei denen eine Stufe des Zufallsexperiments durch die vorangehende beeinflusst wird. Beim Münzwurf bleibt die Wahrscheinlichkeit des Ausgangs „Zahl“ unabhängig von dem Ausgang des letzten Wurfs $\frac{1}{2}$. Wenn jedoch eine rote Kugel aus einem Säckchen mit ursprünglich 2 roten und 3 blauen Kugeln gezogen und nicht wieder zurückgelegt wird, ändert sich die Wahrscheinlichkeit, rot oder blau zu ziehen. Die einzelnen Stufen des Zufallsexperiments sind *abhängig voneinander*.



Protokoll eines Gesprächs zwischen Paul (P, 11 Jahre) und seiner Lehrerin (L).

L: Wenn ich diese Münze hochwerfe, was kann dann passieren?

P: Es kann der Kopf kommen, oder es kann die Zahl kommen. Wenn ich eine Münze werfe, dann kommt meistens Kopf.

L: Dann wirf die Münze doch zehnmal. (Paul wirft sechsmal Zahl und viermal Kopf.) Jetzt war es aber nicht öfter Kopf, oder?

P: Ich weiß nicht so genau. Aber ich glaube, dass sie auf einer Seite öfter landen, hat mit dem Gewicht zu tun. Wenn man die Münze hochwerft, ist eine Seite schwerer als die andere. Deshalb fällt die Münze auf diese Seite. Guck hier. Die Seite mit dem Kopf ist schwerer, und wenn sie dann runterkommt, landet sie darauf, und man sieht Zahl. Und wenn ich sie in meine Hand lege und sie dann rumwerfe (Paul bewegt die Münze von der rechten Handfläche auf den linken Handrücken), dann kommt Kopf.

L: Und wenn wir jetzt 100-mal werfen würden. Was

denkst du, was passiert? Wie oft Kopf und wie oft Zahl?

P: Ungefähr 60-mal Zahl, denke ich. Weil hier hatten wir jetzt 6-mal Zahl bei 10 Würfeln. Aber wenn wir es genauer wissen wollen, müssen noch zweimal oder dreimal 10 Würfe machen. Das wäre dann schon genauer. Wenn man nur einmal wirft, weiß man nichts. Aber wenn immer wieder Kopf oder eben Zahl kommt, dann weiß man Bescheid.

L: Und wenn jetzt jemand sagt, wir haben hier einen Lolly, und wir werfen eine Münze, warum macht man das?

P: Man wirft dann eine Münze und muss vorher sagen, ob man Kopf oder Zahl nimmt. Und wenn dann das andere kommt, bekommt der andere den Lolly. Es ist eine Art Zufallsspiel, um herauszukriegen, wer den Lolly bekommt.

L: Ist das ein gerechtes Spiel?

P: Ich glaube, dass der Zufall nicht fair ist, weil beim Zufall kann alles passieren.

(in Anlehnung an Nicolson 2005, S. 84f.)

Ist der Zufall fair?

Was meinen Sie: Warum denken viele Kinder, dass die 6 viel seltener gewürfelt werde als die anderen Zahlen? Wir Erwachsenen wissen, dass die Wahrscheinlichkeit für alle 6 möglichen Würfelausgänge jeweils $1/6$ beträgt. Das ist die sogenannte theoretische Wahrscheinlichkeit, ein errechneter Wert, dem sich die tatsächliche Verteilung immer stärker annähert, je größer die Anzahl der Würfe ist. Bei wenigen Würfeln mag diese Verteilung ganz anders aussehen.

In manchen Fällen mag es dann auch so sein, dass die 6 weniger häufig vorkommt als alle anderen Zahlen. Aber in (vergleichsweise vielen) anderen Fällen wird es nicht so sein. Solche auf eigenen Erfahrungen basierenden Beobachtungen können also nicht erklären, warum viele Kinder denken, dass die 6 seltener gewürfelt werde. Die Erklärung ist vermutlich eine andere: Die Kinder warten auf das Würfeln einer 6 und vergleichen dann die Anzahl der Situationen, in denen eine 6 kommt, mit denen, in denen keine 6 gewürfelt wird. Und davon gibt es

natürlich deutlich mehr, nämlich – theoretisch – 5-mal so viele. Kinder sind sehr kreativ, wenn es darum geht, Phänomene aus dem Bereich der Wahrscheinlichkeit zu erklären. Hören wir einmal dem 11-jährigen Paul zu, den seine Lehrerin befragte (siehe Kasten).

Pauls Erklärungen sind sehr vielfältig. Er beginnt mit eigenen Erfahrungen, dann zieht er eine angenommene Gewichtsverteilung der Münze heran, dann schließt er ausgehend von seinen 10 Versuchen auf Ausgänge bei 100 Würfeln, artikuliert, dass eine höhere Anzahl von Würfeln zur Erhöhung der Genauigkeit von Vorhersagen beitragen kann und schließt mit philosophisch anmutenden Betrachtungen.

Im Grunde findet man hier die drei Haupt-Erklärungsmuster, die man bei jungen Lernenden im Kontext des Themas Wahrscheinlichkeit beobachten kann: *Theoretische* Erklärungen (hier: „Je mehr Versuche, desto genauer die Vorhersage“), *empirisch basierte*, auf konkrete Ergebnisse bezogene Erklärungen (hier: „60 zu 40, weil es 6 zu 4 war“) und *alternative* Erklärungen (hier: „Die Münze ist auf einer Seite schwerer“).

Wir erforschen die Gewinnzahlen beim Würfeln mit zwei Würfeln

Wie bereits erwähnt, ist beim Würfeln mit einem Würfel die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Augenzahl zu erreichen – etwa die 6 – theoretisch gleich $1/6$, also 16,6666... %. Wie sieht es nun aus, wenn mit einem roten und einem blauen Würfel geworfen wird und die beiden Augenzahlen addiert werden?

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Die Tabelle gibt einen Überblick über die möglichen Ausgänge. Alle Augensummen von 2 bis 12 können erreicht werden, aber unterschiedlich häufig. Die 2 zum Beispiel kann nur erreicht werden, wenn beide Würfel die 1 zeigen. Für die 7 hingegen gibt es sechs verschiedene Möglichkeiten. Die weißen und die grau hinterlegten Felder können dabei helfen, die jeweiligen Anzahlen zu ermitteln. Sie illustrieren aber auch, dass die Anzahl der Zellen mit ungeraden bzw. geraden Zahlen gleich groß ist, nämlich 18.

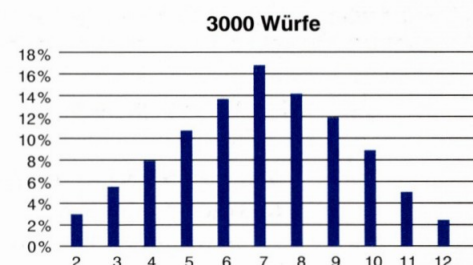
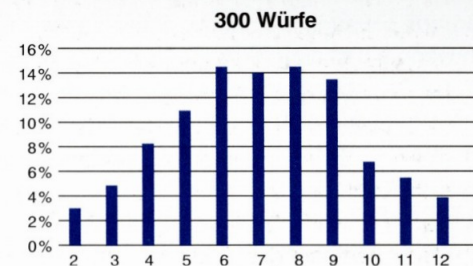
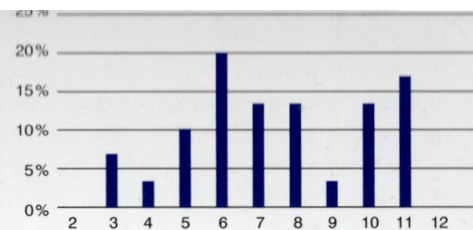
Die Augensumme 2 erzielt man in einem von insgesamt 36 möglichen Fällen, die Wahrscheinlichkeit, eine 2 zu erzielen, ist demnach $1/36$ – das gilt im Übrigen auch für die Augensumme 12. Dementsprechend ist die Wahr-

scheinlichkeit, eine 7 als Summe zu erhalten, erheblich größer, nämlich $6/36$.

Die Diagramme illustrieren, was bereits im Kontext des Würfels mit einem Würfel zu beobachten war. Je größer die Anzahl der Würfel, umso mehr nähert sich die reale Verteilung den theoretischen Überlegungen an.

Im Zentrum der hier beschriebenen Unterrichtseinheit steht ein Spiel, bei dem zwei Kinder gegeneinander antreten, die die Augensummen „unter sich aufgeteilt haben“. Je nach Ausgang des Doppelwurfs erhält dann das eine oder das andere Kind einen Punkt. Gerechte Aufteilungen sind demnach solche, bei denen sich die Gewinnwahrscheinlichkeiten auf $18/36$ für jede Person aufsummieren, also etwa wenn Kind A die Zahlen 2, 3, 4, 7, 10, 11 und 12 erhält und Kind B 5, 6, 8 und 9. Würde Kind A dem Kind B beispielsweise die 7 „geben“, hätte es zwar nach wie vor mehr Gewinnzahlen als Kind B, aber mit $12/36$ eine deutlich geringere Gewinnwahrscheinlichkeit als Kind B mit $24/36$.

Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Wahrscheinlichkeit	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36





Jetzt muss aber endlich mal Schwarz kommen

Beim Roulette ist in den letzten 9 Partien stets eine rote Zahl gekommen. Setzen Sie für die nächste Partie auf Rot oder auf Schwarz?

Manche Menschen setzen auf Rot, weil sie denken, dass das Auftreten von Rot wahrscheinlicher sei, sonst wäre es ja nicht die letzten 9 Male gekommen. Andere entscheiden sich für Schwarz, weil sie denken, dass jetzt endlich auch einmal Schwarz kommen müsse. Im Grunde gilt auch hier: neues Spiel, neues Glück. Auch wenn 9-mal hintereinander Rot kam, ist es für das 10. Spiel genauso wahrscheinlich, dass Rot kommt wie dass Schwarz kommt. Dass 10-mal hintereinander Rot kommt, ist zwar sehr unwahrscheinlich, aber auch nicht unwahrscheinlicher als die Reihenfolge R-R-R-R-R-R-R-R-S. Aber: Dass 10-mal hintereinander Rot kommt, ist unwahrscheinlicher als insgesamt 9-mal Rot und 1-mal Schwarz, denn hier kann Schwarz beim 1., 2., ..., 9. oder beim 10. Spiel gekommen sein. Deshalb denken manche Menschen irrtümlicherweise, dass der Ausgang Schwarz in Spiel 10 wahrscheinlicher ist. So weit die Theorie. Vielleicht ist aber auch das Roulette-Spiel manipuliert ...



Darum geht es

Im Folgenden beschreiben wir die Unterrichtsreihe für das 4. Schuljahr „Wir erforschen die Gewinnzahlen beim Würfeln mit zwei Würfeln“, die sich an den Ausführungen auf pikas.dzlm.de/149 sowie an Foschepoth (2017) orientiert. Die Reihe war wie folgt strukturiert:

- „Sicher, unmöglich, wahrscheinlich und Co.“: Wie wir Wahrscheinlichkeit beschreiben können
- „Würfeln mit einem Würfel“: Wie finden wir heraus, welche Zahl beim Würfeln mit einem Würfel am häufigsten kommt?
- „Würfeln mit zwei Würfeln“: Sind die Spielregeln fair?
- „Wie finden wir heraus, warum manche Zahlen beim Würfeln mit zwei Würfeln häufiger auftreten?“

In der Auseinandersetzung mit den unterschiedlichen Handlungskontexten können vielfältige **Kompetenzerwartungen** erreicht werden. Im *inhaltsbezogenen* Bereich „Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten“ unter dem Schwerpunkt „Wahrscheinlichkeiten“ können die Lernenden

- Zufallsexperimente durchführen und die Ergebnisse übersichtlich darstellen;
- Gewinnchancen einschätzen und Gewinnregeln vergleichen;
- Spielregeln systematisch hinterfragen.

Auch die *prozessbezogenen* Kompetenzen werden gefordert und gefördert, da die Lernenden

- Daten durch Zählen, Messen oder Schätzen gewinnen und verarbeiten (*Problemlösen*);
- zunehmend systematisch und zielorientiert vorgehen (*Problemlösen*);
- Beziehungen und Gesetzmäßigkeiten an Beispielen ansatzweise aufgrund allgemeiner Überlegungen erklären (*Argumentieren*);
- Vermutungen über mathematische Zusammenhänge und Auffälligkeiten anstellen (*Argumentieren*);
- zur Darstellung mathematischer Sachverhalte geeignete Fachbegriffe benutzen (*Darstellen*).

So sind wir vorgegangen

Die Voraussetzungen

Da die Lernenden keine unterrichtlichen Vorerfahrungen zum Thema hatten, wurden zunächst die Begrifflichkeiten *sicher, eher wahrscheinlich, wahrscheinlich, möglich, weniger wahrscheinlich* und *unmöglich* thematisiert. Auf einer Wahrscheinlichkeitsskala wurden die zentralen Begriffe festgehalten und mithilfe von

Wahrscheinlichkeits-
skala

sicher

Ein Ereignis tritt
auf jeden Fall ein.

eher

wahrscheinlich

wahrscheinlich
möglichJe öfter ein Ereignis eintritt,
desto wahrscheinlicher ist es.

weniger

wahrscheinlich

unmöglich

nie

Ein Ereignis
tritt niemals ein.

Wahrscheinlichkeitsskala

jedes Kind in Einzelarbeit zunächst mindestens 30-mal und hielt die Ergebnisse in einer Strichliste fest (pikas.dzlm.de/149). Erwartungsgemäß machten die Lernenden dabei unterschiedliche Entdeckungen und gaben Begründungen, die denen von Paul (vgl. S. 160) nicht unähnlich waren. Dann erhielten Vierergruppen den Auftrag, ihre Ergebnisse zusammenzurechnen, und schließlich kamen je zwei Vierergruppen

zusammen, um ihre Zwischenresultate zu addieren. Diese drei Ergebnisse, die auf jeweils mindestens 240 Würfeln basierten, wurden anschließend im Plenum zusammengeführt und es ergab sich eine Verteilung, aus der die

Alltagsbeispielen illustriert. Die Lernenden sammelten dann weitere Beispiele, die in kleinen Gruppen und anschließend im Plenum diskutiert wurden.

In der zweiten Einheit wurde das Thema „Würfeln mit einem Würfel“ behandelt. Nachdem die zentralen Begriffe wie *Augen* oder *Strichliste* im Sitzkreis wiederholt wurden, würfelte

Zwei Wissenschaftler wollen zu einem Kongress fliegen. Auf dem Flughafen fragt der eine den anderen: „Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in unserem Flugzeug eine Bombe ist?“ – „Na, vielleicht 1 zu 1.000“. Der erste steigt etwas beunruhigt mit ein.

Ein Jahr später fliegen die beiden wieder. Der erste fragt: „Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für zwei Bomben in unserem Flugzeug?“ – „Zwei? Ich denke, 1 zu 1 Million!“ Der erste antwortet: „Da bin ich ja beruhigt, denn eine Bombe habe ich schon in meinem Koffer! Und die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Bomben an Bord sind, ist ja ziemlich gering.“

Lernenden ersehen konnten, dass alle sechs Werte in etwa gleich häufig vorkamen. Hier wurde auch über die Computersimulation gesprochen.

Wie funktioniert das Spiel?

In der nächsten Einheit ging es nun um das Würfeln mit zwei Würfeln, und die Augensumme sollte ermittelt werden. Neu war zudem, dass ein Partnerspiel gespielt wurde, dessen Regeln anhand von Beispielen eingeführt wurden. Anschließend formulierte die Lehrperson den Arbeitsauftrag:

1. Vermutet, ob die Gewinnregeln fair sind oder nicht.
2. Führt das Würfelspiel durch und füllt dabei die Strichliste aus.
3. Wer hat gewonnen? Stimmt eure Vermutung vom Anfang?

Auch wurde bereits der übergeordnete Forschungsauftrag formuliert: Findet heraus und begründet, ob und warum die Gewinnregeln fair sind oder nicht.

Namen: David Ben 2

Würfeln mit zwei Würfeln – Sind die Gewinnregeln fair?

Hier gewinnt Spieler 1:

Augensumme	Strichliste	Insgesamt
1		
2		
3		
4		
10		
11		
12		

Hier gewinnt Spieler 2:

Augensumme	Strichliste	Insgesamt
5		
6		
7		
8		
9		

Welche Augensummen wurden häufig gewürfelt? 7, 8, 10

Klare Aussage
 „Ich bleibe auf jeden Fall
 wahrscheinlich beim KSCI!“
 (Sean Dundee, ehemaliger
 Fußballprofi)



Sind die Spielregeln fair?

In Zweiergruppen führten die Kinder sodann das Spiel durch und hielten die Ergebnisse in einer Strichliste fest. Wie bereits ausgeführt, beträgt die Wahrscheinlichkeit, eine der Gewinnzahlen 5, 6, 7, 8 oder 9 zu erreichen, 24/36. Tatsächlich hat in allen Zweiergruppen jeweils der Spieler B gewonnen, was allerdings nicht unbedingt so hätte sein müssen.

Die Lernenden kamen anschließend zu Mathekonferenzen zusammen, um sich darüber auszutauschen, welche Spieler jeweils gewonnen hatten und welche Zahlen vergleichsweise häufig oder selten gewürfelt worden waren. Jede Gruppe schrieb diese Zahlen auf Kärtchen,

die in der diese Einheit beschließenden Reflektionsphase an die Tafel geheftet und besprochen wurden.

Es zeigte sich, dass in allen Gruppen die 6, 7 und 8 als Zahlen identifiziert wurden, die häufig vorkamen, und die 2 und 12 sehr selten. Auch die 3 und die 11 kamen eher selten vor. Es wurde auch darüber gesprochen, warum die 1 nicht als Ergebnis auftauchen konnte. Als Fazit wurde festgehalten, dass die Spielregeln nicht fair seien, und dass man die Zahlen anders zusammenstellen müsse, da Kind A eher die seltenen und Kind B eher die häufig auftretenden Zahlen hatte. Ein Kind artikuliert, dass es nicht auf die Anzahl der Summen ankomme, sondern darauf, wie häufig eine Summe gewürfelt werden würde. Die Lehrperson fragte, woran es denn liegen könnte, dass manche Zahlen häufig und andere selten kämen. Mit der Äußerung eines Kindes, dass die 12 sehr selten sei, da man dazu 2 Sechsen benötigen würde, ging es in die Pause.

Wie finden wir heraus, warum manche Zahlen häufiger kommen?

In der folgenden Einheit wurde der Impuls aufgenommen, dass beide Würfel eine 6 zeigen müssen, um die 12 zu erzielen, und der übergeordnete Forschungsauftrag wurde formuliert: Wie finden wir heraus, warum manche Zahlen häufiger vorkommen? Exemplarisch wurde diese Frage gemeinsam für 3 und 5 beantwortet.

In Zweiergruppen bearbeiteten die Kinder sodann den Arbeitsauftrag, alle Möglichkeiten zu finden, wie eine bestimmte Würfelsumme zustande kommen kann, und sie in einer Tabelle festzuhalten.

Die Bearbeitungstiefe der einzelnen Gruppen variierte natürlich, wie auch die beiden Arbeitsergebnisse zeigen. An der Tafel wurde daraufhin das Gesamtergebnis festgehalten.

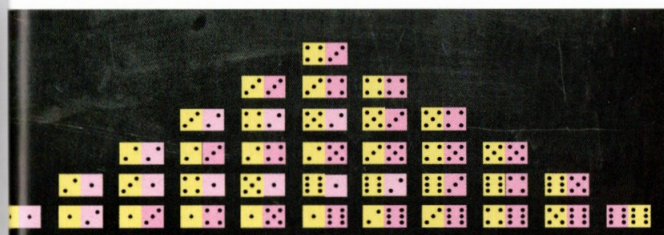
2: 1+1
 3: 2+1 | 1+2
 4: 2+2 | 3+1 | 1+3
 5: 2+3 | 3+2 | 4+1 | 1+4
 6: 3+3 | 4+2 | 2+4 | 5+1 | 1+5
 7: 4+3 | 3+4 | 5+2 | 2+5 | 6+1 | 1+6
 8: 4+4 | 6+2 | 2+6 | 5+3 | 3+5 |
 9: 5+4 | 4+5 | 6+3 | 3+6 |
 10: 5+5 | 6+4 | 4+6 |
 11: 6+5 | 5+6 |
 12: 6+6

Warum sind das alle?
 Weil auf einem Würfel keine Null zu finden ist. Deswegen sind das alle. Und weil es der Würfel nur bis sechs gibt.

Der sinnstiftende, übergeordnete Arbeitsauftrag bestand darin, gerechte Spielregeln zu formulieren. Hierzu gingen die Lernenden in kleinen Gruppen zusammen und formulierten entsprechende Vorschläge, die wiederum im Plenum zusammengetragen wurden. Hier wurden erneut die Begrifflichkeiten *sicher, eher wahrscheinlich, wahrscheinlich, möglich, weniger wahrscheinlich* und *unmöglich* thematisiert.

Was ändert sich, wenn wir ganz oft würfeln?

Auch hier wurden abschließend im Theaterkreis an der Tafel diejenigen Diagramme diskutiert, die die Computersimulationen für 30, 300 und 3.000 Würfe zeigen, mit dem Ziel, die mit steigender Wurffanzahl zunehmende Annäherung der realen Resultate an die statistisch erwartbare Verteilung zu besprechen.



So kann es weitergehen

Im Anschluss könnte man das Würfeln mit zwei Würfeln auf die Multiplikation übertragen. Es wird also wieder mit zwei Würfeln geworfen, aber nun werden die Augenzahlen miteinander multipliziert. Statt 11 gibt es dabei 18 verschiedene Resultate zwischen 1 und 36. Die Tabelle zeigt auf, dass die Gewinnregel, dass ein Kind die geraden und das andere die ungeraden Zahlen erhält, nicht fair ist, da es nur 9 Zellen mit



Soll man beim Lotto 1-2-3-4-5-6 ankreuzen?

Das machen übrigens relativ viele Personen, weil es schön aussieht auf dem Tippschein oder weil sie denken, dass diese Zahlenkombination noch nie gekommen ist. Das erhöht aber nicht die Wahrscheinlichkeit des Auftretens. Die Kombination 1-2-3-4-5-6 ist genauso wahrscheinlich wie jede andere Kombination. Welche der in der Trommel verbliebenen Kugeln als nächste gezogen wird, ist unabhängig davon, welche Kugeln bereits gezogen wurden. Insofern ist es also prinzipiell egal, welche sechs Zahlen man auswählt. Ist aber nicht nur das Gewinnen, sondern auch die Höhe des Gewinns von Interesse, sollte man Folgendes beachten: Im Unterschied beispielsweise zum Roulette ist die Höhe des Gewinns von der Anzahl der Spieler abhängig, die dasselbe Ergebnis erzielen: viele Gewinner – geringerer Gewinn. Daher sollte man die Zahlen ankreuzen, die selten gewählt werden, zum Beispiel Zahlen größer 31, weil häufig Geburtsdaten gewählt werden. Aus diesem Grund sollte man auch 19 oder 20 vermeiden. Und wenn man es dann noch unterlässt, schöne Muster auf dem Lottoschein zu erzeugen, ist man auf dem richtigen Weg.

Dann muss man nur noch die richtigen Zahlen ankreuzen – und darauf hoffen, dass nicht zu viele Lottospieler diese Ausführungen gelesen haben.

ungeraden Zahlen gibt im Vergleich zu 27 Zellen mit geraden Zahlen. Nachdem man dies erforscht hat, kann man überlegen, wie eine gerechte Spielregel aussehen könnte: A erhält zum Beispiel die Zahlen von 2 bis 10, B die anderen.

·	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36



Wahrscheinlichkeit – zum Weiterlesen

Websites



Was fällt dir auf?

Das die 6 öfter vor kommt als die anderen Zahlen.

Versuche deine Entdeckungen zu begründen

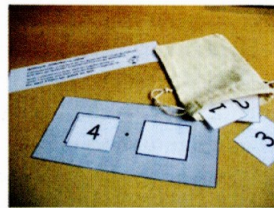
Ich glaube das mein Würfel gerichtet ist. Ich immer wenn ich an das Würfelspiel spiele kommt die 6 nicht so oft vor.

Mehr Informationen und Unterrichtsmaterial finden sich zu den Themen „Glücksspiele: Glücksräder, Würfel“ (pikas.dzlm.de/149) sowie „Ziffernkarten ziehen“ (375) auf der PIKAS-Website. Neben Informationen zum theoretischen Hintergrund sind Einheiten einer Unterrichtsreihe sowie mögliche Unterrichtsplanungen und Kopiervorlagen für Plenumsphasen erhältlich. Ausgewählte Schülerdokumente geben einen Einblick in mögliche Bearbeitungs- und Denkweisen.

„Ziffernkarten ziehen“

Spiel für 2 Personen

Material:
Kärtchen mit den Ziffern 1 bis 4
Beutel
Goldmünzen
Spielfeld



Spielregeln:

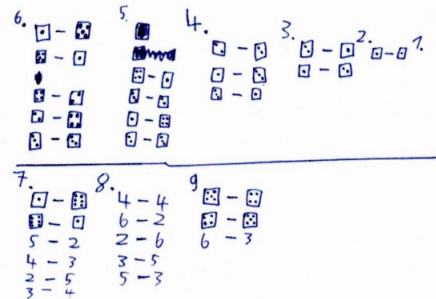
Die Spieler ziehen nacheinander je eine Karte aus dem Beutel. Diese Karten werden auf dem Spielfeld platziert. Das Ergebnis der Malaufgabe wird errechnet. Ist das Ergebnis gerade bekommt Spieler 1 eine Goldmünze, ist es ungerade bekommt Spieler 2 eine. Gewonnen hat, wer als erstes fünf Goldmünzen hat.

In den Bildungsstandards wird für den Bereich „Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten“ neben dem Schwerpunkt „Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen“ mit „Daten erfassen und darstellen“ ein weiterer Schwerpunkt formuliert. Daher wird an dieser Stelle auch auf primakom.dzlm.de/370 hingewiesen. Hier wird beispielgebunden erläutert, welches Hintergrundwissen Lehrpersonen zum „Daten erheben, aufbereiten und interpretieren“ haben sollten.

Literatur

Hasemann, K./Mirwald, E. unter Mitarbeit von Hoffmann, A. (2008): Daten, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit. In G. Walther/M. van den Heuvel-Panhuizen/D. Granzer/O. Köller (Hrsg.): *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*. Berlin: Cornelsen, S. 141–161.
Neubert, B. (2012): *Leitidee: Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeit*. Offenburg: Mildnerberger.

Die primakom-Seite zu „Zufall und Wahrscheinlichkeit“ (primakom.dzlm.de/380) beschreibt zunächst, warum dieses Thema bereits im Unterricht der Primarstufe behandelt werden sollte. Anschließend wird fachliches Hintergrundwissen anhand von Beispielaufgaben diskutiert, bevor Leitideen für unterrichtliche Umsetzungen formuliert und konkrete Einsatzmöglichkeiten beschrieben werden.



Auch einige KIRA-Seiten bieten Unterrichtsanregungen zum Thema Wahrscheinlichkeit.

- Gewinnwahrscheinlichkeit (kira.dzlm.de/167)
- Wahrscheinlichkeiten einschätzen (136)
- Prozessbezogene Kompetenzen: Wahrscheinlichkeiten begründen (160)
- Prozessbezogene Kompetenzen: Gewinnregeln überprüfen und beurteilen anhand von Lotteriespielen (168)

