

Wahrscheinlichkeit in der Grundschule? Möglich? Sicher!

Silke Ruwisch

Nicht erst seit der Verabschiedung bundesweiter Bildungsstandards fordern Curricula und Lehrpläne propädeutische Erfahrungen zur Stochastik bereits in der Grundschule. Der Stellenwert von „Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit“ ist seitdem durch die Aufwertung zu einer von fünf inhaltsbezogenen Leitideen jedoch deutlich höher.

Wohl wissend, dass die eigenen Kenntnisse eher unzureichend und intuitive Vorstellungen häufig auch falsch sind, fühlen sich Lehrerinnen und Lehrer im Inhaltsbereich „Wahrscheinlichkeit“ meist am unsichersten. Klingt die Beschreibung „Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen“ noch eher sperrig, sind die beiden zum Ende der Grundschulzeit erwarteten Teilkompetenzen jedoch ausgesprochen präzise und gut greifbar formuliert: „Grundbegriffe kennen (z. B. sicher, unmöglich, wahrscheinlich)“ und „Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen“. Damit werden bereits wichtige Präzisierungen für die Arbeit in der Grundschule vorgenommen.

► Grundbegriffe kennen

Um die stochastischen Grundbegriffe „sicher“, „wahrscheinlich“, „unmöglich“ (s. **KASTEN** auf S. 4) in der Grundschule zu thematisieren, sind zunächst (Vor-)Aussagen daraufhin zu untersuchen, mit welchem Grad an Sicherheit sie gemacht werden: Wahre Aussagen lassen sich mit „sicher“ kennzeichnen, falsche als „unmöglich“ (vgl. „Konstanz liegt am Bodensee. (w)“ auf S. 6). Spannend sind dann natürlich all jene Aussagen, deren Wahrheitsgehalt wir noch nicht einschätzen können, welche mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit jedoch zu wahren Aussagen werden können.

Grundschulkinder sollen selbstverständlich nicht nur die Wörter richtig anwenden, sondern damit einhergehend ein Gespür für eher wahr werdende und sich eher als falsch erweisende Zukunftsprognosen entwickeln. All diese Phänomene werden zunächst als „möglich“ bezeichnet. (Trotz der Nennung des Wortes „wahrscheinlich“ in den Bildungsstandards plädiere ich zunächst für die Verwendung von „möglich“, da „wahrscheinlich“ im Alltag häufig synonym mit „(fast) sicher“ benutzt wird.) Dabei ist den Kindern schon in einem frühen Alter deutlich, dass die als „möglich“ bezeichneten

WICHTIGE BEGRIFFE

Zufallsversuch und Zufallsexperiment

Als Zufallsversuch bezeichnet man einen zufälligen Vorgang, welcher mindestens zwei mögliche Ergebnisse hat. Der Ausgang eines Zufallsversuchs – also z. B. eines Münzwurfes oder der Ziehung einer Lottozahl – ist nicht vorhersagbar. Wird ein Zufallsversuch unter denselben Bedingungen mehrfach wiederholt, spricht man von einem Zufallsexperiment.

Ergebnis

Jeder einzelne mögliche Ausgang eines Zufallsversuches heißt Ergebnis.

Ereignis

Einzelne Ergebnisse können zu einem Ereignis zusammengefasst werden, z. B. die Ergebnisse des Würfels mit einem Spielwürfel zu Ereignissen wie „kleiner 5“, „gerade Zahl“ oder „größer 4“.



1 Am Wahrscheinlichkeitsstreifen können die Kinder die Einschätzung „möglich“ präzisieren

ten Ausgänge nicht alle gleich wahrscheinlich eintreten. Dieses Gespür, die Einschätzung des Grades an Sicherheit, die als Eintrittswahrscheinlichkeit bezeichnet wird, können Grundschulkinder hervorragend anhand eines Wahrscheinlichkeitsstreifens darstellen (Abb. 1). Die drei Kategorien „sicher“ – „möglich“ – „unmöglich“ werden so nach und nach weiter ausdifferenziert: „sicher“ – „fast sicher“ – „wahrscheinlich ja“ – „halbe, halbe (so oder so)“ – „wahrscheinlich nicht“ – „fast unmöglich“ – „unmöglich“, ohne dass genau diese Begriffe Verwendung finden müssen. Diese eher qualitativen Begrifflichkeiten werden dann durchaus auch schon von Grundschulkindern quantifiziert. So ist insbesondere die Mitte auf dem Wahrscheinlichkeitsstreifen eine wichtige Markierung und wird von Schülerinnen und Schülern auch so verbalisiert: „Das ist ja noch nicht mal die Hälfte, das muss näher an unmöglich sein“ oder „Wenn 5 von 6 rot sind, dann ist Rot zwar nicht ganz so sicher wie bei 6 von 6, aber es ist schon ziemlich nahe dran.“

Insgesamt ist im Unterricht behutsam auf eine sachangemessene Sprache zu achten. Dies soll am Beispiel des Vergleichs von Gewinnchancen verdeutlicht werden. Sind in einem Beutel vier rote und zwei blaue Socken, so vergleichen die Kinder diese Zahlen meist direkt: „4 ist mehr als 2, also kommt Rot häufiger als Blau.“ Dieser direkte Zahlenvergleich zwischen günstigen und ungünstigen Ergebnissen (s. **KASTEN**), auch als Teil-Teil-Verhältnis bezeichnet, ist in dieser Situation plausibel und passend, funktioniert jedoch nur, solange sich die Zahlenvergleiche auf dieselbe Gesamtanzahl aller möglichen Ergebnisse beziehen. Beim klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff nach Laplace wird die Anzahl der günstigen Ergebnisse ins Verhältnis zur Anzahl aller möglichen Ergebnisse gesetzt (s. u. „Der analytisch-kombinatorische

Zugang“), so dass z. B. auch „zwei rote, zwei blaue“ mit „drei rote, drei blaue“ verglichen werden kann. Dies soll kein Plädoyer für die Bruchrechnung in der Grundschule sein, doch gerade bei dem Vergleich „zwei rote, zwei blaue“ mit „drei rote, drei blaue“ werden die Kinder von sich aus schnell statt des direkten Vergleichs der günstigen Ergebnisse die multiplikative Beziehung nutzen: „Das ist bei beiden die Hälfte, also sind die gleich.“ Darauf aufbauend lässt sich eine entsprechend tragfähigere Vorstellung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs sprachlich durch den „von-Ansatz“ schon ab Klasse 3 und einen entsprechenden Bezug realisieren: „3 von 6 sind da rot; hier sind es nur 3 von 8 – das ist die Hälfte, hier ist es weniger als die Hälfte.“

► Verschiedene Zugänge zur Wahrscheinlichkeit

Die Bildungsstandards weisen mit der zweiten Teilkompetenz „Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (z. B. bei Würfelspielen) einschätzen“ bereits darauf hin, dass der grundschulgemäße Zugang zur Wahrscheinlichkeit spielerisch und experimentell erfolgt. Grundsätzlich lassen sich zwei verschiedene Zugänge zur mathematischen Betrachtung zufälliger Prozesse unterscheiden: der analytisch-kombinatorische und der experimentell-frequentistische.

Der analytisch-kombinatorische Zugang

Beim analytischen Zugang wird aufgrund theoretischer Überlegungen vor einem Zufallsexperiment aufgrund der Eigenschaften des jeweiligen Zufallsgerätes auf die sich im Experiment ergebenden Wahrscheinlichkeiten

EMPIRISCHES GESETZ DER GROSSEN ZAHLEN

Je höher die Anzahl der Versuche in einem Zufallsexperiment, umso stabiler die Werte der relativen Häufigkeiten der jeweiligen Ereignisse. Aufgrund dieser Beobachtung ist die relative Häufigkeit eines Ereignisses bei großen Stichproben eine gute Schätzung für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses.

Relative Häufigkeit

Die relative Häufigkeit ist das Verhältnis der Häufigkeit, mit der das Ereignis eintritt, zur Gesamtzahl der Versuche.

geschlossen. Weil der Würfel hochgradig symmetrisch ist, ist keine seiner Seiten als besonders zu erkennen, so dass davon ausgegangen werden kann, dass jede Seite mit derselben Wahrscheinlichkeit oben liegen wird.

Betrachtet man mit demselben Blick eine Münze als Zufallsgerät, so wird auch hier aufgrund der Symmetrie keine der beiden Seiten als „besonders“ einzustufen sein, weshalb ebenfalls von der Gleichwahrscheinlichkeit ausgegangen wird. An diesem Beispiel wird jedoch deutlich, dass es sich zwar um gute theoretische Überlegungen handelt, diese aber ebenso wie beim frequentistischen Zugang (s. u.) zunächst nur als Modellannahmen für das entsprechende Zufallsexperiment gelten müssen. Der dritte Fall, nämlich das Stehenbleiben auf dem Rand, wird in der Modellannahme vernachlässigt, was sich erst nach der Durchführung von Zufallsexperimenten als richtig erweist.

Sind alle Ergebnisse eines Zufallsversuchs gleich wahrscheinlich, liegt also ein Laplace-Experiment vor, ist die Eintrittswahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis

$$\frac{1}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}},$$

beim Würfel somit $\frac{1}{6}$ und bei der Münze $\frac{1}{2}$. In der Regel interessieren jedoch nicht die einzelnen Ergebnisse, sondern komplexere Ereignisse (s. **KASTEN** auf S. 40), z. B. „kleiner als 5“ beim Würfeln. Deren Eintrittswahrscheinlichkeit lässt sich angeben als Quotient aus der Anzahl der günstigen Ergebnisse zur Anzahl aller möglichen Ergebnisse, im Beispiel also $\frac{4}{6}$. Um die Gesamtanzahl der günstigen und der möglichen Fälle zu ermitteln, wird häufig, z. B. beim mehrmaligen Werfen eines Würfels oder einer Münze, auf Kenntnisse aus der Kombinatorik zurückgegriffen.

Der experimentell-frequentistische Zugang

Beim experimentellen Zugang wird die Wahrscheinlichkeit erst *nach* dem Zufallsexperiment aufgrund der relativen Häufigkeiten ermittelt, die sich ergeben haben. Dieses Verfahren findet vor allem immer dann Verwendung, wenn im Vorhinein keine Gleichwahrscheinlichkeit angenommen werden kann und das Zufallsgerät auch nicht so einfach zu analysieren ist, als dass leicht eine andere Wahrscheinlichkeitsverteilung angenommen werden könnte. So sind zwar Schülerinnen und Schüler aufgrund der geometrischen Eigenschaften eines Quaders davon überzeugt, dass jeweils gegenüberliegende Flächen gleichwahrscheinlich fallen sollten und größere Flächen wohl häufiger oben liegen als kleine schmale Flächen, doch lässt sich im Vorhinein kaum eine präzise Aussage zur Wahrscheinlichkeit der einzelnen Flächen machen. Beim experimentellen Zugang handelt es sich somit um einen empirischen Ansatz, für den das Empirische Gesetz der großen Zahlen (s. **KASTEN**) ein einfaches Gütekriterium liefert (je häufiger, desto besser).

Selbstverständlich lässt sich der experimentell-frequentistische Zugang auch bei Laplace-Zufallsgeräten nutzen, also bei Zufallsgeräten, bei denen von vornherein angenommen werden kann, dass alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind. Gerade in der Grundschule sollte dieser Ansatz sogar favorisiert werden, da Grundschulkinder zum einen die geometrischen Eigenschaften der Zufallsgeräte auch erst noch kennen lernen, so dass diese nicht als Begründung für die Gleichwahrscheinlichkeit allen Schülerinnen und Schülern zur Verfügung stehen. Zum anderen sind die experimentellen Erfahrungen in dem Alter deutlich wichtiger als die analytischen Überlegungen. Am besten werden beide Ansätze immer wieder miteinander verbunden, indem *vor* einem Zufallsexperiment Vermutungen geäußert werden, welche *nach* dem Experiment zu überprüfen sind.

► Zufallsgeräte kennen und auswählen

Zufallsgeräte lassen sich nicht nur in hochgradig symmetrisch und weniger symmetrisch bzw. asymmetrisch unterteilen, sondern auch hinsichtlich der Anzahl der möglichen Ergebnisse klassifizieren: Münzen, Wendeplättchen, Nutellabrote, Reißzwecken, ... haben beim Werfen jeweils zwei Ergebnisse. Damit eignen sie sich für

einfache Experimente schon in den ersten Schuljahren. Die Kinder lernen dabei typische Methoden der Datenprotokollierung und -verarbeitung kennen und nutzen, z. B. das Erstellen von Strichlisten und Tabellen.

Mehr Ergebnisse liefert das Würfeln mit einem Spielwürfel oder mit anderen platonischen Körpern: Neben dem Würfel mit 6 gleichwahrscheinlichen Ergebnissen gibt es Tetraeder mit 4, Oktaeder mit 8, Dodekaeder mit 12 und Ikosaeder mit 20 Ergebnissen.

Ebenso gut lassen sich in der Schule Glücksräder oder Kreisel mit verschiedenen Flächeneinteilungen einsetzen: 4er-, 6er-, 8er-, 12er- oder 24er-Unterteilungen können sinnvoll sein. Damit lassen sie sich parallel zu den verschiedenen Würfeln nutzen. Gleichzeitig sind sie ebenso vielseitig und variabel einsetzbar wie Murmeln, Socken, Fische, Legosteine etc. in einem Sack, einer Kiste, einer Tüte als Urne. So wie beim Glücksrad die Gesamtanzahl der Felder festgelegt werden kann, kann die Gesamtanzahl von Objekten in einer Urne frei gewählt werden. Bei beiden Geräten kann dann bestimmt werden, wie viele Felder bzw. Objekte von derselben Art (Farbe, Typ, ...) sein sollen. Glücksräder weisen darüber hinaus eine weitere Variabilität auf: Es besteht die Möglichkeit, auf zwei Glücksrädern mit derselben Unterteilung und denselben Anzahlen von Farben die Farben unterschiedlich anzuordnen (vgl. „Im zweiten Schuljahr mit Glücksrädern experimentieren“ auf S.8).

► Allmähliche Steigerung der Komplexität

Im Anfangsunterricht sollten die Kinder mit bekannten und überschaubaren Zufallsgeräten konfrontiert werden. Münze und Würfel sind hier sicher geeignet. Dabei erfahren die Kinder, dass bei einer entsprechend großen Anzahl an Würfeln die verschiedenen Seiten bzw. Zahlen ungefähr gleich häufig vorkommen. Sie erfahren aber auch, dass trotzdem fünfmal nacheinander Kopf fallen und sogar bei einigen Experimenten der gesamte Ausgang deutlich vom erwarteten abweichen kann.

In späteren Schuljahren sollten sowohl komplexere Geräte als auch komplexere Situationen thematisiert werden. Dafür bieten die verschiedenen Zufallsgeräte unterschiedliches didaktisches Potenzial (vgl. auch Neubert 2011a). Es werden nicht mehr einzelne Ergeb-

nisse betrachtet, sondern Ergebnisse zu Ereignissen zusammengefasst. Am Würfel könnte dies z. B. „gerade Zahl“–„ungerade Zahl“ sein. Bei Glücksrädern und Urnen werden mehrere Felder/Objekte mit demselben Merkmal, z. B. Farbe, versehen. Außerdem können mehrere Merkmale gleichzeitig betrachtet werden: In einem Beutel befinden sich z. B. blaue und rote Socken, die entweder uni oder gestreift sind; beim Würfel könnte ein Ereignis heißen: „gerade Zahl kleiner als 4“.

Eine weitere Steigerung der Komplexität ist beim Vergleich von Gewinnchancen an gleichen oder verschiedenen Zufallsgeräten möglich. Zu der Frage „Welche Gewinnregel würdest du wählen? Warum? Probiere aus!“ lassen sich folgende Variationen vornehmen:

- Gewinnregeln zu demselben Zufallsgerät werden miteinander verglichen, z. B. beim Würfeln mit dem 12er-Würfel die Gewinnregeln „Du gewinnst bei 2 oder 7“ und „Du gewinnst bei 1, 3, 6 oder 8.“ Wenn derart deutliche Unterschiede zu erkennen sind, entscheiden sich bereits Erstklässler richtig (Pfeil 2010, S.23).
- Dieselbe Gewinnregel wird auf verschiedene Zufallsgeräte bezogen, z. B. „Du gewinnst bei 6. Wählst du den 6er- oder den 12er-Würfel oder ist es egal, welchen du nimmst?“ Hier wählt nur noch ungefähr die Hälfte der Erstklässler den richtigen Würfel und auch von den Drittklässlern entscheiden sich nur noch 70 % richtig (Neubert 2011b). Oder: Die Gewinnregel „Du gewinnst bei Rot“ wird auf je ein Glücksrad mit 4er- und 8er-Unterteilung, aber denselben Farbflächenanteilen angewendet.
- Vergleichbare Gewinnregeln werden an strukturgleichen Zufallsgeräten überprüft, z. B. „Rot“ an Glücksrad und Urne mit denselben Verteilungen oder – schon schwieriger – „gerade Zahl“ am Würfel im Vergleich zu „Rot“ bei einem 6er-Glücksrad mit drei roten Flächen.

Dass es bei solchen Fragestellungen reichlich Gesprächsstoff gibt, versteht sich von selbst.

Neubert, B.: Welcher Zufallsgenerator ist der beste? In:

Grundschulunterricht Mathematik 4/2011a, S. 4–6.

Neubert, B.: Welcher Zufallsgenerator ist der beste? –

Überlegungen zu „Zufall und Wahrscheinlichkeit“ in der Grundschule. Vortrag auf der Tagung des Arbeitskreises Grundschule in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik am 4.–6.11.2011b in Tabarz.

Pfeil, C.: „Mit welchem Würfel ist deine Gewinnchance größer?“ In: Grundschulunterricht Mathematik 2/2010, S.22–25.