Gerd Walther/Marja van den Heuvel-Panhuizen/
Dietlinde Granzer/Olaf Köller (Hrsg.)

Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret

Lehrerbücherei
Grundschule

Herausgeber

Gabriele Cwik und **Dr. Klaus Metzger** sind Herausgeber der Lehrerbücherei Grundschule.

Die Herausgeberinnen und Herausgeber des Bandes

Prof. Dr. G. Walther, geb. 1945, studierte Mathematik, Physik und Philosophie und war Lehrer an verschiedenen Gymnasien. Nach der Promotion und Habilitation in Didaktik der Mathematik wechselte er 1981 an die Christian-Albrechts-Universität (CAU) in Kiel (Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik). Er war zeitweise Mitglied des Wissenschaftlichen Beirates des Journals für Mathematik-Didaktik (JMD) und des Beirats der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. Seit Anfang 2003 ist er Geschäftsführender Direktor des Zentrums für Lehrerbildung (ZfL).

Marja van den Heuvel-Panhuizen, geb. 1952, ist diplomierte Grundschullehrerin und arbeitete 11 Jahre als Grund- und Sonderschullehrerin. Nach dem Diplom in Erziehungswissenschaften war sie in der Folgezeit als Wissenschaftliche Mitarbeiterin an verschiedenen Instituten tätig. Seit 1987 arbeitet sie am Freudenthal Institut (Universität Utrecht) zuerst als Senior Researcher und dann als Professorin für Grundschulmathematik. Schwerpunktmäßig forscht sie an der Entwicklung der Bildungstheorie der „Realistic Mathematics Education" und ihren Konsequenzen für die Praxis und Didaktik der Mathematik in der Vor- u. Grundschule sowie der Sek. I.

Dietlinde Granzer, geb. 1957, studierte Lehramt an Grund- und Hauptschulen. Sie wurde in das Nachwuchsförderprogramm des Landes Baden-Württemberg aufgenommen und promovierte an der Pädagogischen Hochschule in Karlsruhe in Pädagogik. Im Jahr 2001 erfolgte die Abordnung an das Kultusministerium Baden-Württemberg. Seit 2005 arbeitet sie als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen an der Humboldt-Universität.

Olaf Köller, geb. 1963, Prof. Dr. phil. habil., studierte Psychologie an der Christian-Albrecht-Universität Kiel. Nach Abschluss des Studiums arbeitete er zunächst am Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften in Kiel und wechselte dann an das Max-Planck-Institut für Bildungsforschung in Berlin. Nach der Habilitation an der Universität Potsdam war er von 2002 bis 2004 Professor für Pädagogische Psychologie an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg. Von 2004 bis 2009 war er Direktor des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB). Seit 2009 ist er Direktor am IPN und Professor für empirische Bildungsforschung an der Christian-Albrechts-Universität Kiel.

Gerd Walther/Marja van den Heuvel-Panhuizen/
Dietlinde Granzer/Olaf Köller (Hrsg.)

Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret

Mit CD-ROM

IQB
Institut zur Qualitätsentwicklung
im Bildungswesen

Cornelsen

Die in diesem Werk angegebenen Internetadressen haben wir überprüft (Redaktionsschluss: Dezember 2009). Dennoch können wir nicht ausschließen, dass unter einer solchen Adresse inzwischen ein ganz anderer Inhalt angeboten wird.

www.cornelsen.de

Bibliografische Information: Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.ddb.de abrufbar.

5. Auflage 2011

Redaktion: Stefan Giertzsch
Herstellung: Brigitte Bredow, Berlin
Layout, Satz und Sachzeichnungen: Rainer J. Fischer, Berlin
Umschlaggestaltung: Claudia Adam, Darmstadt
Druck und Bindung: fgb · freiburger graphische betriebe
Printed in Germany
ISBN 978-3-589-05130-4

Gedruckt auf säurefreiem Papier,
umweltschonend hergestellt aus chlorfrei gebleichten Faserstoffen.

Inhalt

1 Vorwort der Herausgeber

In Deutschland fehlte bis in die 1990er-Jahre die systematische Überprüfung von Erträgen schulischer Bildungsprozesse, wie dies in vielen Ländern üblich war und ist. Ein Hauptinteresse der Bildungsplanung lag bis dahin in der Entwicklung und Erprobung von Modellen zur Optimierung der Arbeit in Einzelschulen und dem Entwurf didaktischer Modelle und deren Einführung in die Unterrichtspraxis *(Input-Orientierung)*. Die Vergewisserung über das im Unterricht Erreichte trat demgegenüber in den Hintergrund.

Dies änderte sich abrupt nach der Veröffentlichung der Ergebnisse der Dritten Internationalen Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie (TIMSS) im Jahre 1997. Die Bereitstellung von Informationen über Ertragslagen deutscher Schulen in den Bereichen Mathematik und Naturwissenschaften stürzte das Bildungssystem aufgrund der mediokeren Leistungen unserer Schülerinnen und Schüler in die Krise. Infolge von TIMSS kam es zur sogenannten empirischen Wende in der Erziehungswissenschaft, und große Schulleistungsstudien auf regionaler, nationaler und internationaler Ebene wurden initiiert. Auf politischer Ebene wurde 1997 mit den Konstanzer Beschlüssen der Kultusministerkonferenz (KMK) die Grundlage für eine langfristige Beteiligung Deutschlands an internationalen Schulleistungsstudien gelegt. Kritische Reflexionen über die Messbarkeit von Bildungserträgen traten in den Hintergrund zugunsten einer Überzeugung, dass fachliche Kompetenzen mithilfe von Schulleistungstests mess- und überprüfbar seien, eine Überzeugung, die durch das Agieren von Lehrkräften im schulischen Alltag, in dem Lernerfolgskontrollen selbstverständlich sind, gestützt wurde. Im Vordergrund stand jetzt die Frage, welche konkreten Leistungsniveaus Schülerinnen und Schüler erreichten (*Output* oder *Outcome-Orientierung*) und welche Rückschlüsse diese auf notwendige Reformmaßnahmen im Bildungssystem zuließen.

Den vorläufigen Höhepunkt dieser Entwicklung stellte PISA 2000 dar. Das erneut enttäuschende Abschneiden deutscher Jugendlicher löste zusätzliche Maßnahmen der Qualitätssicherung aus. In allen 16 Bundesländern wurden Programme für flächendeckende Vergleichsarbeiten für die Grundschule sowie für die Sekundarstufe I in verschiedenen Fächern aufgelegt. Maßnahmen der externen Evaluation, wie der Schulinspektion, wurden geplant und auf den Weg gebracht, und auf Seiten der KMK wurden große Anstrengungen unternommen, um für die schulischen Kernfächer bundesweit verbindliche *Bildungsstandards* zu erarbeiten, die klare, überprüfbare Lernziele im Sinne von Leistungsstandards definieren. Mit ihrem Beschluss vom 4. Dezember 2003 hatte die KMK ein erstes Ziel dieser Bemühungen erreicht und bundesweit geltende Bildungsstandards für den mittleren Abschluss in den Fächern Deutsch, Mathematik und erste Fremdsprache (Englisch/Französisch) verabschiedet. Rund neun Monate später folgten die Standards für die Naturwissenschaften und für den Hauptschulabschluss sowie die Standards für Deutsch und Mathematik in der Grundschule. Mit den Bildungsstandards ist das Ziel verbunden, ein transparentes System der Qualitätssicherung in Deutschland zu etablieren. Zudem sollen sie helfen, Unterrichtsprozesse zu optimieren, um so zu höheren Bildungserträgen zu gelangen. Bildungsstandards mit ihrem Bezug zu Schülerkompetenzen sind explizit so formuliert, dass sie mithilfe entsprechender Aufgaben bzw. Tests überprüft werden können. Diese Messbarkeit zeichnet sie national und international aus, und es ist diese Eigenschaft, die es erlaubt, zu bestimmten Zeitpunkten festzustellen, ob und in welchem Ausmaß Kinder für das weitere Leben adäquat gerüstet sind bzw. ob Optimierungsbedarf besteht.

Aus der Möglichkeit, Bildungsstandards in Aufgaben zu transformieren, ergeben sich allerdings nicht nur Implikationen für die Leistungsmessung auf der Basis kompetenzortientierter Testitems. Vielmehr ist damit auch die Grundlage geschaffen, *Unterrichtsmaterial*, das sich an den Vorgaben der Standards orientiert, zu entwickeln. Dieses Material kann vielfältige Aufgaben im Sinne der Bildungsstandards erfüllen, sei es der Aufbau von Kompetenzen, deren Einübung oder auch deren Überprüfung in Form von Klassenarbeiten bzw. Schulaufgaben. Bildungsstandards konstituieren somit nicht nur die Grundlage für die Qualitätssicherung im Bildungssystem, sondern geben wichtige Anregungen für die Unterrichtsentwicklung, hier im Sinne eines Unterrichts, der mehr Nachhaltigkeit beim Wissenserwerb verspricht. Zu Letzterem will das vorliegende Buch einen wesentlichen Beitrag leisten. Es möchte auf der Basis der bundesweit geltenden Bildungsstandards konkrete Aufgabenbeispiele zeigen und Anregungen, vielleicht auch Visionen, für einen kompetenzorientierten Mathematikunterricht geben. Es erhebt keinesfalls den Anspruch, die aktuellen Schulbücher für den Mathematikunterricht in der Grundschule ersetzen zu wollen.

Die bislang eher abstrakt gehaltenen Bildungsstandards werden durch dieses Buch und die darin enthaltenen Aufgaben konkreter, und Lehrkräfte können Eindrücke gewinnen, wie man auf der Basis der Standards möglicherweise unterrichten kann. Technisch gesprochen bekommen sie Anregungen für die *Implementierung* der Bildungsstandards. Wir wünschen uns in diesem Sinne, dass dieses Buch dazu beitragen wird, die Lücke zwischen den vorgegebenen Zielen – den Standards – und ihrer Überprüfung mithilfe standardbasierter Tests ein Stück weit zu schließen, indem Lehrkräfte Anregungen erhalten, durch welche Unterrichtsmaßnahmen Kinder Kompetenzen erwerben und damit auch die vorgegebenen Standards in späteren Tests besser erreichen können. Dies bedeutet nicht etwa, dass Kinder mithilfe dieses Buchs für die Testung der Standards vorbereitet werden sollen. Vielmehr soll es *eine*, natürlich nicht die einzige, Grundlage dafür sein, diejenigen mathematischen Kompetenzen aufzubauen, die Kindern ihre schulische Karriere und später die erfolgreiche Bewältigung gesellschaftlicher und beruflicher Anforderungen erleichtert. Sind diese Kompetenzen erfolgreich aufgebaut worden, so sind selbstverständlich auch gute Leistungen in den standardbasierten Tests zu erwarten. Gute Testleistungen werden dann einen gelungenen Unterricht, nicht aber ein erfolgreiches *Teaching to the Test* abbilden.

Zur CD-ROM

Auf der beiliegenden CD-ROM finden Sie das komplette Aufgabenmaterial, z. T. versehen mit Lösungen und Kommentaren sowie mit exemplarischen Schülerlösungen.

Die Aufgabenstellungen liegen in zwei Dateiformaten vor, zum einen als PDF-Datei, zum anderen als Word-Datei. Letztere gibt die Möglichkeit, ggf. Aufgabenstellungen zu varriieren, Teilaufgaben wegzulassen bzw. neu anzuordnen oder das Zahlenmaterial auszutauschen.

Alle Materialien sind im A4-Format angelegt und können ausgedruckt werden.

Eine Datenbank verhilft dazu, die Aufgaben gezielt nach allgemeinen und sachbezogenen mathematischen Kompetenzen, Klassenstufen und Anforderungsbereichen zu filtern.

Ein Unternehmen wie die Fertigstellung dieses Buches kommt nicht ohne breite Unterstützung aller Beteiligten aus. Unser Dank gilt den Lehrkräften und wissenschaftlichen Beratern, welche unter erheblichem Zeitdruck Aufgaben entwickelt haben. Die dabei entstandenen Aufgaben sind ohne Frage Indikatoren einer neuen Aufgabenkultur im Mathematikunterricht der Primarstufe. Einige der involvierten Lehrkräfte haben die Aufgaben im Unterricht erprobt und damit die Grundlage für ein breites Repertoire von Schülerlösungen gelegt. Hiefür gebührt ihnen und den Kindern unser besonderer Dank. Die fachdidaktischen Kolleginnen und Kollegen haben auf der Basis dieser Vorarbeiten in den letzten Monaten trotz vieler anderer professioneller Belastungen ihre Kapitel zum kompetenzorientierten Unterricht zügig verfasst. Dabei sind Aufsätze entstanden, die von ihrem Duktus zweifelsohne ein breites Publikum in der Fachöffentlichkeit, der Bildungspolitik und vor allem in den Schulen ansprechen werden.

Das IQB ist eine wissenschaftliche Einrichtung der 16 Länder, das vollständig durch die Länder finanziert wird. Ohne die großzügigen Zuwendungen aller Länder – trotz schwieriger Finanzlagen – wäre dieses Projekt nicht durchführbar gewesen. Den Zuwendungsgebern möchten wir hierfür ausdrücklich danken.

Abschließend bleibt der Wunsch, dass mit diesem Buch konkrete Anregungen für eine Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts in der Grundschule gegeben werden können, dass als Folge einer solchen Konkretisierung der Bildungsstandards auch ihre Akzeptanz in den Kollegien spürbar zunehmen wird und dass in naher Zukunft der Unterricht in der Breite in selbstverständlicher Weise „standardorientiert“ sein wird.

Die Herausgeber

Berlin und Kiel, im Juni 2007

2 Grußwort des Präsidenten der Kultusministerkonferenz

Bundesweit einheitliche, verbindliche Bildungsstandards gehören heute selbstverständlich zu Schule. Sie sichern die Qualität des Unterrichts, sie entwickeln den Unterricht weiter, sie gewährleisten vergleichbare Leistungen in den einzelnen Ländern. Die Kultusministerkonferenz hat dies – im Oktober 1997 – mit dem Konstanzer Beschluss initiiert. Damals hat sie sich darauf verständigt, dass die deutschen Schulen an wissenschaftlich fundierten, internationalen Vergleichstests teilnehmen sollen, um zuverlässige Rückmeldungen über Stärken und Schwächen der Schülerinnen und Schüler in zentralen Kompetenzbereichen zu erhalten. Inzwischen machten die Ergebnisse von TIMSS, PISA und IGLU deutlich: Die bislang überwiegende Inputsteuerung hat nicht zur erwünschten Qualität im Bildungssystem geführt. Dementsprechend steuern die Länder nun auf den international bewährten „Dreiklang" um:

- auf mehr Eigenständigkeit der Schulen,
- auf verbindliche Standards,
- auf regelmäßige Evaluation.

Die KMK koordiniert diesen Prozess.
Schulen sind für Unterrichtsentwicklung verantwortlich, für interne und externe Evaluation, sie überprüfen die eigene Arbeit und stellen sich zugleich einer standardisierten Rückmeldung. Qualität lässt sich nur dann solide messen, wenn klare Maßstäbe vorliegen. Standards sind die Voraussetzung dafür, erworbene Kompetenzen zu vergleichen und die Unterrichtsqualität weiterzuentwickeln. Deshalb hat die Kultusministerkonferenz nach PISA einen besonderen Schwerpunkt ihrer Arbeit auf die Entwicklung und Einführung von nationalen Rahmenvorgaben gelegt.

Bundesweit geltende Bildungsstandards gibt es derzeit für Deutsch, Mathematik, Erste Fremdsprache (Englisch/Französisch) für den Mittleren Schulabschluss (Jahrgangsstufe 10), für Deutsch, Mathematik, Erste Fremdsprache (Englisch/Französisch) für den Hauptschulabschluss (Jahrgangsstufe 9), für Deutsch, Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4) sowie für Biologie, Chemie, Physik für den Mittleren Schulabschluss (Jahrgangsstufe 10).

Mit Beginn des Schuljahres 2004/2005 sind die Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss in den Fächern Deutsch, Mathematik und Erste Fremdsprache übernommen worden. Die Bildungsstandards für den Primarbereich, für den Hauptschulabschluss und für die naturwissenschaftlichen Fächer sind zu Beginn des Schuljahres 2005/2006 verbindlich eingeführt worden. Damit kann die Qualitätsentwicklung in den Schulen aller Länder der Bundesrepublik Deutschland zum ersten Mal an einem gemeinsam vereinbarten Maßstab, an abschlussbezogenen Regelstands ausgerichtet werden.

Mit der Verabschiedung von Bildungsstandards ist es jedoch nicht getan. Die Kultusministerkonferenz hat stets betont, dass diese nur erste Schritte in einem umfassenden, kontinuierlichen Weiterentwicklungsprozess sind. Rahmenvorgaben sind nämlich lediglich dann sinnvoll und effektiv, wenn sie regelmäßig evaluiert werden. Deshalb soll die Einhaltung der Standards künftig sowohl landesweit als auch länderübergreifend überprüft werden. Die Schülerinnen und Schüler erhalten Unterstützung durch kompetenzorientierte Unterrichtsmaterialien, die sich an den Bildungsstandards orientieren. Erste Vorarbeiten hierzu wurden zunächst unter der Ägide des deutschen PISA-Konsortiums durchgeführt. Ende 2004 hat die Kultusministerkonferenz das bundesweit tätige, von den Ländern gemeinsam getragene Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) an der Humboldt-Universität zu Berlin gegründet. Dort werden nun in Kooperation mit Fachdidaktikern und Lehrkräften empirisch abgesicherte Aufgaben für die Überprüfung der Bildungsstandards (sogenannte „Testaufgaben“) sowie zusätzliche Aufgaben zum Zwecke der Implementierung (sog. „Aufgaben für den Unterricht“) entwickelt. Letztere sollen die Standards konkretisieren.

Die vorliegende Publikation dokumentiert die Ergebnisse für den kompetenzorientierten Mathematikunterricht im Primarbereich. Sie beschreibt die Grundlagen der Bildungsstandards. Darüber hinaus erläutern Mathematikdidaktikerinnen und -didaktiker ihre Vorstellungen von kompetenz- bzw. standardorientiertem Unterricht und illustrieren diese mit anschaulichen Aufgabenbeispielen. Sie füllen die Bildungsstandards „mit Leben“. Dieses Kompendium unterstützt Lehrkräfte und Akteure in der Lehrerausbildung sowie in der Lehrerfort- und -weiterbildung dabei, den Mathematikunterricht an der „Philosophie“ der Bildungsstandards zu orientieren. Ich danke allen, die an dieser grundlegenden Veröffentlichung mitgewirkt haben. Sie trägt wesentlich zur Akzeptanz und zur Ausschöpfung des Potenzials der Bildungsstandards bei, die Schülerinnen und Schüler in ihren Lernprozessen und in ihrer Kompetenzentwicklung nachhaltig unterstützen. Deshalb wünsche ich dieser Publikation eine große Resonanz und eine Schrittmacherfunktion für weitere fachspezifische Aufgabensammlungen auf der Basis der Bildungsstandards.

Prof. Dr. E. •ürgen Zöllner
Präsident der Ständigen Konferenz der Kultusministerder Länder
in der Bundesrepublik Deutschland, Juni 2007

3 Die Bildungsstandards Mathematik

Gerd Walther/Christoph Selter/Johanna Neubrand

In diesem Kapitel wird im Anschluss an die Beschreibung zweier Unterrichtsausschnitte ein Überblick über die Bildungsstandards Mathematik in der Grundschule gegeben. Dabei werden zunächst Intention und Struktur der Bildungsstandards beleuchtet. Danach beschreiben wir die Entstehung der Bildungsstandards und erinnern daran, dass die in ihnen zum Ausdruck kommende ausdrückliche Betonung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen an eine längere mathematikdidaktische Tradition anknüpfen kann, die bereits Mitte der 80er-Jahre ihren Niederschlag auf der Lehrplanebene gefunden hat. Anschließend werden wir mit der Entwicklungsfunktion eine wichtige Funktion der Bildungsstandards erörtern und danach die allgemeinen mathematischen Kompetenzen anhand von Beispielen ausführlich und detailliert darstellen. Zum Schluss werden Bedingungen erörtert, die insbesondere für die Entwicklung von allgemeinen Kompetenzen im Mathematikunterricht förderlich sein können.

3.1 Eine Aufgabenstellung – zwei Arten von Unterricht

In einem Schulbuch der vierten Klasse finden sich die folgenden Aufgaben:

a) 4000 + 2	b) 1000 + 20	c) 500 + 50	d) 250 – 6	e) 2000 – 10
4000 – 2	1000 – 20	500 – 50	250 + 6	2000 + 10

Stellen wir uns, um die Ausführungen dieses Kapitels vorzubereiten, zwei fiktive Unterrichtsszenarien vor, in denen diese Aufgaben bearbeitet werden.

- *Unterrichtsstunde 1:* Die Schüler bestimmen für jede Additions- und Subtraktionsaufgabe in den Aufgabenpärchen das Ergebnis. Anschließend sammelt die Lehrerin die Ergebnisse. Fehlerhafte Resultate werden verbessert. Danach geht es zu einer anderen Aufgabe.
- *Unterrichtsstunde 2:* Die Lehrerin geht zunächst so vor wie in Unterrichtsstunde 1. Allerdings gibt sie durch eine zusätzliche Aufgabenstellung „Addiert in jedem Aufgabenpärchen die beiden Ergebnisse“ und durch Öffnung des Kontextes anhand der Fragestellung „Was fällt auf?“ eine bedeutsame und ausbaufähige Lernanregung, deren Konkretisierung wir noch ein wenig weiterverfolgen werden.

Die Schüler berechnen zunächst jeweils die Summe der beiden vorher gewonnenen Ergebnisse für jedes Aufgabenpärchen. Beim Aufgabenpärchen a) ergibt sich 8000, bei d) das Resultat 500. Was fällt den Schülern an diesen Zahlen auf? Wie hängen diese mit den gegebenen Zahlen zusammen? Welche Regelmäßigkeit, welches Muster verbindet sie? Fragen dieser Art schaffen Sprechanlässe für die Schüler, die zur *Kommunikation* zwischen den am Unterricht Beteiligten führen können.

Die Entdeckung von Schülern – vielleicht zunächst „nur" an *einem* Zahlenpärchen –, dass die Summe der beiden Ergebnisse das Doppelte der jeweils ersten Zahl ist, entspricht einer *Problemlösung*: Es wird ein Zusammenhang zwischen Zahlen erkannt, ohne dass dafür ein unmittelbar abrufbares Verfahren zur Verfügung stünde.

Da diese Entdeckung von Schülern bei verschiedenen Aufgabenpärchen gemacht wird, kann gefragt werden, wie dieser Sachverhalt – durch *Argumente* – erklärt werden könnte. Solche Argumente werden in einem lebendigen Unterricht nicht monologisch geäußert, sondern sind in den kommunikativen Austausch zwischen Schülern und Lehrerin eingebettet. Die Argumentation wird von geeigneten *Darstellungsformen* begleitet, etwa Addition der beiden Terme (z.B. 4000 + 2 + 4000 – 2) „in einer Zeile" oder schematische Darstellung am Rechenstrich.

Bislang stehen die im Aufgabentext vorgegebenen Aufgaben im Mittelpunkt. Das erkannte Muster drängt förmlich danach, dass die Schüler ähnliche Aufgabenpärchen erfinden; dies ist zugleich eine Kontrollmöglichkeit, ob die Kinder „das" Muster der Aufgabenpärchen erfasst haben. Struktureinsicht, Kreativität und Problemlösefähigkeit sind gefragt, wenn die Kinder zu einer vorgegebenen Zahl, z. B. 280, ein „passendes" Aufgabenpärchen finden sollen (z. B. 140 + 6, 140 – 6). Und als Herausforderung: Was passiert, wenn die vorgegebene Zahl ungerade ist (z. B. 281)?

Wenn die Schüler gebeten werden, selbst „solche" Aufgabenpärchen zu erfinden, ohne dabei Zahlen der gegebenen Aufgabenpärchen zu benutzen, so ist dies ein beachtlicher Verallgemeinerungsschritt über das auf der Schulbuchseite Gegebene hinaus. Ein noch größerer Sprung wäre es zu fragen, ob denn die festgestellte Regelmäßigkeit für *jedes* Aufgabenpärchen, also auch für die eben selbst erfundenen oder noch gar nicht hingeschriebenen gilt. Hier kommt es darauf an, eine neue Darstellungsweise zu finden (Idee der Platzhalter), die den allgemeinen Sachverhalt auszudrücken vermag. Vergleichen wir nun die beiden fiktiven Unterrichtsstunden. Ein wesentliches Anliegen dürfte jeweils die weitere Entwicklung bzw. Festigung grundlegender inhaltlicher mathematischer Fertigkeiten und Fähigkeiten, kurz: „rechnerischer" Kompetenzen sein. In dem konkreten Beispiel geht es um das Anwenden von mündlichen Rechenstrategien bzw. – bei der Wahl anspruchsvollerer Zahlenwerte – der schriftlichen Verfahren der Addition und Subtraktion. In der zweiten Stunde kommt ein Weiteres hinzu. Es werden bewusst Anlässe geschaffen, bei denen Kinder sogenannte allgemeine mathematische Kompetenzen entwickeln, wie etwa *Probleme mathematisch lösen, Kommunizieren, Argumentieren, Darstellen*. Bei genauerer Betrachtung zeigt sich, dass diese Kompetenzen nicht isoliert stehen, sondern umgekehrt auch die Entwicklung und Festigung von inhaltsbezogenen Kompetenzen fördern. Um auf der Grundlage von Argumenten zu verstehen, dass die Summe der Ergebnisse eines Aufgabenpärchens das Doppelte der jeweils ersten Zahl ist, können Rechengesetze, wie etwa das Vertauschungsgesetz (z. B. bei 4000 + 2 + 4000 – 2 = 8000) als grundlegendes Muster der Addition (vgl. Kap. 4), genutzt werden. Innerhalb der Unterrichtsstunde 1 war das nicht erforderlich.

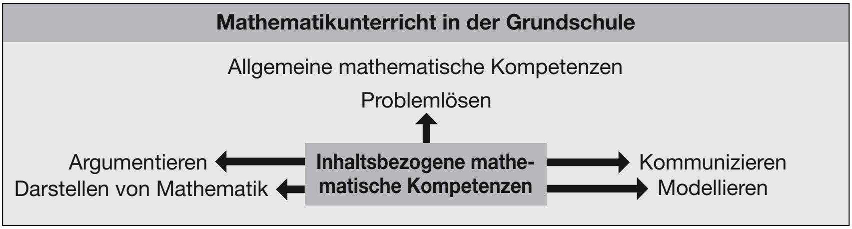
Die beiden Stunden unterscheiden sich zudem in der Art der Anforderungen, die an die Schüler gestellt werden. In der ersten und am Anfang der zweiten Unterrichtsstunde wenden die Schüler durchweg bekannte Verfahren an, was durchaus von unterschiedlichen Schwierigkeiten und daraus resultierenden Fehlern bestimmt sein kann. Insgesamt wird dabei aber von den Schülern eher eine *reproduktive Leistung* verlangt. Diese kann freilich von Schülerinnen und Schülern nur dann erbracht werden, wenn sie bereits über ein leicht zu mobilisierendes System von Grundfertigkeiten und Grundwissen verfügen (vgl. Kap. 4). Darüber hinaus müssen die Schüler in der zweiten Stunde bei jedem Aufgabenpärchen zwischen der Ergebnissumme und den gegebenen Zahlen einen *Zusammenhang herstellen*. Beim Erfinden eigener Aufgabenpärchen und Aufgabenpärchen mit vorgegebener Ergebnissumme ist zusätzlich *Reflektieren* auf die bisherige Arbeit und dabei das Bewusstmachen des zugrundeliegenden Musters sowie *Verallgemeinern* erforderlich. Genau diese Orientierung von Mathematikunterricht in der Grundschule an der Entwicklung und Festigung von inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen in enger Verbindung mit allgemeinen mathematischen Kompetenzen unter Berücksichtigung der drei gerade beschriebenen, kognitiven Anforderungsbereiche (Reproduktion, Herstellen von Zusammenhängen, Reflektieren und Verallgemeinern) ist die zentrale Intention der Bildungsstandards Mathematik.

3.2 Zum Hintergrund der Bildungsstandards

Intention und Struktur

Die Bildungsstandards beschreiben auf nationaler Ebene, orientiert an einer Idee von mathematischer Grundbildung im Primarbereich, mathematische Kompetenzen, die Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe erreichen sollen. Unterschieden wird zwischen *inhaltsbezogenen* und *allgemeinen mathematischen* Kompetenzen.

Das folgende Bild führt die in den Bildungsstandards ausgewiesenen fünf allgemeinen mathematischen Kompetenzen im Einzelnen auf und weist auf die inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen hin (vgl. dazu KMK 2005a). Wichtig ist die durch das Bild angedeutete enge Verbindung der beiden Kompetenzfelder. Neben diesem normativen Anspruch der Bildungsstandards an die mathematischen Leistungen am Ende des vierten Schuljahres (vgl. Kap. 10) soll unter konstruktiv-produktiver Perspektive eine kontinuierliche Verbesserung des Mathematikunterrichts erreicht werden.



Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen

Die inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen beziehen sich auf fünf mathematische Leitideen:
- Zahlen und Operationen,
- Raum und Form,
- Muster und Strukturen,
- Größen und Messen,
- Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit.

Die Leitideen sollen den Schülern helfen, zentrale mathematische Konzepte und den vernetzten Charakter der Mathematik zu erkunden, ohne sich durch die Grenzen, die mit den traditionellen curricularen Teilgebieten Arithmetik, Geometrie, Größen und Sachrechnen bzw. Stochastik gesetzt werden, beschränken zu lassen. (vgl. OECD 1999, S. 54). Das Sachrechnen tritt nicht als eigene Leitidee auf, ist aber in den anderen Leitideen integriert und erhält zudem über die allgemeine mathematische Kompetenz Modellieren zusätzliches Gewicht. Die „neue“ Leitidee *Muster und Strukturen* spielt wegen ihrer grundlegenden fachlichen Bedeutung insofern eine besondere Rolle, als sie die übrigen Leitideen in fundamentaler Weise durchdringt (vgl. Kap. 4).

Zu den Leitideen werden in unterschiedlichem Abstraktionsgrad inhaltsbezogene Kompetenzen formuliert, etwa zu *Zahlen und Operationen* auf der ersten Ebene die folgenden:

- Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen verstehen,
- Rechenoperationen verstehen und beherrschen,
- in Kontexten rechnen.

Auf der nächsten Ebene werden die einzelnen Kompetenzen noch feiner aufgeschlüsselt. Zu *Rechenoperationen verstehen und beherrschen* beispielsweise heißt es:

- die vier Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge verstehen,
- die Grundaufgaben des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen, deren Umkehrungen sicher ableiten und diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen,
- mündliche und halbschriftliche Rechenstrategien verstehen und bei geeigneten Aufgaben anwenden,
- verschiedene Rechenwege vergleichen und bewerten; Rechenfehler finden, erklären und korrigieren,
- Rechengesetze erkennen, erklären und benutzen,
- schriftliche Verfahren der Addition, Subtraktion und Multiplikation verstehen, geläufig ausführen und bei geeigneten Aufgaben anwenden.

Die Kapitel 4 bis 8 dieses Buches sind der ausführlichen Behandlung der fünf Leitideen anhand zahlreicher Beispiele gewidmet.

Allgemeine mathematische Kompetenzen

Den allgemeinen mathematischen Kompetenzen ist eine herausragende Rolle bei der Entwicklung von auf Verständnis gegründeten inhaltlichen mathematischen Kompetenzen zugedacht. Die mathematische Grundbildung für Schülerinnen und Schüler hängt also wesentlich davon ab, in welchem Maße im Unterricht Anlässe geschaffen werden, selbst oder gemeinsam *Probleme mathematisch zu lösen*, über das Verstehen und das Lösen von Aufgaben zu kommunizieren, über das Zutreffen von Vermutungen oder über mathematische Zusammenhänge *zu argumentieren*, Sachsituationen in der Sprache der Mathematik *zu modellieren* und für die Bearbeitung von Problemen geeignete *Darstellungen zu ersinnen* oder auszuwählen (vgl. S. 26 f.). Personale Kompetenzen, wie die Entwicklung des mündlichen und schriftlichen Ausdrucksvermögens, das selbstständige Arbeiten und die Darstellung der eigenen Arbeitsergebnisse, Vertrauen in die eigenen Fähigkeiten, sowie soziale Kompetenzen, wie die Fähigkeit um Hilfe zu bitten und solche zu leisten, die Fähigkeit und Bereitschaft zur Gruppenarbeit, die Offenheit für Kritik usw., werden in Verbindung mit allgemeinen mathematischen Kompetenzen bei der individuellen oder gemeinsamen Bearbeitung von herausfordernden Aufgaben entwickelt.

Anforderungsbereiche
Durch die drei Anforderungsbereiche der Bildungsstandards werden die kognitiven Anforderungen an Schüler bei der Bearbeitung von Aufgaben in plausibler, aber empirisch noch nicht hinreichend fundierter und daher vorläufiger Form (Genaueres in KMK 2005b) beschrieben (KMK 2005a, S. 13).

Anforderungsbereiche
Anforderungsbereich I: „Reproduzieren“ *Das Lösen der Aufgabe erfordert Grundwissen und das Ausführen von Routinetätigkeiten.*
Anforderungsbereich II: „Zusammenhänge herstellen“ *Das Lösen der Aufgabe erfordert das Erkennen und Nutzen von Zusammenhängen.*
Anforderungsbereich III: „Verallgemeinern und Reflektieren“ *Das Lösen der Aufgabe erfordert komplexe Tätigkeiten wie Strukturieren, Entwickeln von Strategien, Beurteilen und Verallgemeinern.*

Die Anforderungsbereiche erlauben erfahrungsbasierte Einschätzungen von Aufgaben hinsichtlich Angemessenheit, Qualität und Komplexität der von Schülerinnen und Schülern zu erbringenden kognitiven Leistungen. Die Zuordnung von Anforderungsbereichen zu Aufgaben ist nicht immer eindeutig, weil sie im Unterricht zum Beispiel von der spezifischen Situation der Klasse abhängig ist.

Andererseits kann das Wissen um die Existenz der verschiedenen Anforderungsbereiche einem vorwiegend auf Routinen und Verfahren und somit auf Reproduktion ausgerichteten Unterricht vorbeugen. Hierzu eignen sich besonders Aufgaben, die der Leistungsheterogenität von Grundschülern dadurch Rechnung tragen, dass sie im gleichen inhaltlichen Kontext ein breites Spektrum an unterschiedlichen Anforderungen und Schwierigkeiten abdecken (vgl. S. 16 f.). So können Aufgaben in einem differenzierenden Unterricht eingesetzt werden, in dem „alle Kinder am gleichen Inhalt arbeiten, aber nicht unbedingt dieselben Aufgaben lösen“ (KMK 2005a, S. 13).

Mit der in den Bildungsstandards eingeforderten Kompetenzorientierung ist gemeint, dass Schülerinnen und Schüler im Unterricht nicht „totes“ oder „träges“ Wissen anhäufen, sondern bis zum Ende der vierten Jahrgangsstufe entsprechende Anforderungen tatsächlich bewältigen können. Dabei gilt, dass die Entwicklung von Kompetenzen eine langfristige Aufgabe von Schule ist, an der in mehr oder weniger bewusster und expliziter Weise auch andere Fächer beteiligt sind, etwa beim Kommunizieren oder Argumentieren der muttersprachliche Unterricht oder beim Modellieren der Sachunterricht.

Moderne Auffassungen vom Lernen legen nahe, dass die Entwicklung von Kompetenzen durch Tätigkeiten erfolgt. Etwas platt ausgedrückt bedeutet dies, dass die Entwicklung des Argumentierens dadurch erfolgt, dass die Lernenden durch entsprechende Aufgaben immer wieder zum Argumentieren angeregt bzw. herausgefordert werden. Der Gedanke, Kompetenzen durch entsprechende Tätigkeiten zu entwickeln, kann in analoger Weise auch auf die Entwicklung inhaltsbezogener Kompetenzen übertragen werden.

Abschließend: Bildungsstandards sind als Impuls für Qualitätsentwicklung von Mathematikunterricht formuliert. Zentrales Anliegen ist ein vernetztes, kumulatives, anschlussfähiges und auf Verstehen ausgerichtetes Lernen, bei dem den allgemeinen mathematischen Kompetenzen im kognitiven und affektiven Bereich eine zentrale Rolle zukommt. Dies wird auch deutlich in der folgenden zentralen Textstelle (KMK 2005a, S. 6):

> *„Das Mathematiklernen in der Grundschule darf nicht auf die Aneignung von Kenntnissen und Fertigkeiten reduziert werden. Das Ziel ist die Entwicklung eines gesicherten Verständnisses mathematischer Inhalte. Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen verdeutlichen, dass die Art und Weise der Auseinandersetzung mit mathematischen Fragen ein wesentlicher Teil der Entwicklung mathematischer Grundbildung ist. Deren Entwicklung hängt nicht nur davon ab, welche Inhalte unterrichtet wurden, sondern in mindestens gleichem Maße davon, wie sie unterrichtet wurden, d. h., in welchem Maße den Kindern Gelegenheit gegeben wurde, selbst Probleme zu lösen, über Mathematik zu kommunizieren usw. Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen sind mit entscheidend für den Aufbau positiver Einstellungen und Grundhaltungen zum Fach. In einem Mathematikunterricht, der diese Kompetenzen in den Mittelpunkt des unterrichtlichen Geschehens rückt, wird es besser gelingen, die Freude an der Mathematik und die Entdeckerhaltung der Kinder zu fördern und weiter auszubauen.“*

Zur Entstehung der Bildungsstandards

Gegen Ende des Schuljahres 2000/01 wurden im Ergänzungsteil der Internationalen Grundschul-Lese-Untersuchung (IGLU) auf nationaler Ebene die Mathematikleistungen von Viertklässlern erhoben (Walther et al., 2003). Dabei ergaben sich zwei äußerst beunruhigende Ergebnisse:

1. Knapp 20 Prozent der Kinder beendeten die vierte Klasse mit zum Teil erheblichen Defiziten im mathematischen Wissen, bei Fertigkeiten insbesondere des Rechnens und beim Sachrechnen (Walther et al., 2003, S. 222 f.). Gut 40 Prozent der Schülerinnen und Schüler konnten z. B. die Aufgabe 810 – 790 nicht im Kopf rechnen, und rund die Hälfte der Kinder scheiterte an folgender Textaufgabe: „Hans hat 8 Birnen. Er hat viermal so viele Birnen wie Peter. Wie viele Birnen hat Peter?“

Da die meisten Kinder nach der vierten Klasse eine weiterführende Schule besuchen - mit Ausnahme von Kindern in Bundesländern mit sechsjähriger Grundschule – liegt hier für Schüler mit solchen Defiziten bereits am Anfang des weiteren Bildungsverlaufs eine beträchtliche Hürde.

2. Der Vergleich der Leistungsergebnisse von Viertklässlern in einigen Ländern der Bundesrepublik zeigte zum Teil deutliche Unterschiede, gerade auch hinsichtlich des Anteils der Kinder an der o.a. „Risikogruppe". Dieser Anteil lag im Minimum bei 12 %, im Maximum bei knapp 25 % der Viertklässler des jeweiligen Bundeslandes (Walther et al. 2004b, S. 136 f.).

Rückblickend zeigen diese Befunde, dass trotz des im internationalen Vergleich verhältnismäßig guten Abschneidens der Schülerinnen und Schüler in Deutschland beim Mathematiktest von IGLU erhebliche Defizite im mathematischen Wissen und Können bei einem nicht unwesentlichen Teil der Viertklässlerinnen und Viertklässler bestanden. Der Ländervergleich zeigte zudem einerseits, dass die Entwicklung und Förderung des mathematischen Potenzials von Kindern, überspitzt ausgedrückt, auch vom Bundesland abhängt, in dem sie wohnen. Andererseits ist auch festzustellen, dass es in bestimmten Bundesländern offenbar besser gelingt, etwa die Größe der Risikogruppe zu verkleinern.

Damit weisen die Ergebnisse von IGLU in diesen Punkten tendenziell in die gleiche Richtung wie entsprechende Befunde der PISA-Studie für Jugendliche am Ende der Sekundarstufe I (Deutsches PISA Konsortium 2001, Baumert et al., 2002). Defizite am Ende dieser Schulstufe in Mathematik, Deutsch und Erster Fremdsprache haben hier nicht nur negative Auswirkungen auf anschließende schulische Bildungsgänge, sondern mindern in gravierendem Maße berufliche (Aus-)Bildungschancen.

Aus den Ergebnissen der internationalen Vergleichsuntersuchungen zog die Kultusministerkonferenz im Dezember 2003 erstens den Schluss, dass die in Deutschland übliche Inputsteuerung des schulischen Bildungssystems allein, etwa über Lehrpläne und in den jeweiligen Ländern zugelassene Schulbücher, nicht zu den erwünschten Ergebnissen führt (KMK 2005, S. 5). So wurde die Art der Steuerung des Bildungssystems umgestellt und durch ein für Deutschland neues Instrument ergänzt (vgl. auch Klieme et al. 2003, S. 77): Bildungsstandards geben an, was Schülerinnen und Schüler am Ende eines gewissen Zeitraums können sollen.

In der Konsequenz hieß das, dass die erwarteten Leistungen der Schülerinnen und Schüler zu definieren waren, und zwar so detailliert, dass ihr Erreichen durch gute Testaufgaben überprüft werden kann. Zweitens sollte mit den Bildungsstandards die Qualitätsentwicklung von Mathematikunterricht forciert werden.

Die in den Bildungsstandards Mathematik formulierten Kompetenzen sind jedoch keine „Erfindung“ der jüngsten Zeit. Bei den inhaltsbezogenen Kompetenzen ist Vieles von dem wiederzufinden, auf das kompetente Lehrerinnen in ihrem Unterricht ohnehin Wert legen. Allerdings bekommt dieser Bereich durch die „Brille“ Muster und Strukturen eine neue Qualität (vgl. Kap. 4). Neu ist allerdings die große Bedeutung, die die Bildungsstandards der Entwicklung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen in Verbindung mit substantiellen mathematischen Inhalten im Unterricht beimessen. Wie die folgenden Ausführungen andeuten, gründet diese Akzentverschiebung auf eine bereits mehrere Jahrzehnte dauernde Entwicklung in der Mathematikdidaktik – sowohl auf nationaler wie auf internationaler Ebene. Hierzu beschreiben wir einige Meilensteine:

Meilenstein 1: 1975 stellt Heinrich WINTER die Frage nach allgemeinen Lernzielen für den Mathematikunterricht. Demnach soll der Mathematikunterricht Schülerinnen und Schülern Möglichkeiten geben,

- schöpferisch tätig zu sein,
- rationale Argumentation zu üben,
- die praktische Nutzbarkeit der Mathematik zu erfahren,
- formale Fertigkeiten zu erwerben (vgl. WINTER 1975, S. 107 ff.).

Meilenstein 2: 1985 erscheinen die Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein Westfalen, die auf WINTERS allgemeinen Lernzielen aufbauen und mit dem Begriffspaar Strukturorientierung – Anwendungsorientierung eine allgemein anerkannte Bildungsperspektive formulieren. Dieser Lehrplan ist wegweisend für viele spätere Lehrpläne in anderen Bundesländern, nicht zuletzt aufgrund der Einforderung der allgemeinen Lernziele kreativ sein, argumentieren und mathematisieren.

Meilenstein 3: 1989 stellt der amerikanische Lehrerverband NCTM erstmals Standards zur Debatte und betont dabei explizit auch Fähigkeiten wie Problemlösen, Argumentieren oder Kommunizieren (vgl. die Überarbeitung dieser Standards in NCTM 2000). Auch in einigen anderen europäischen Ländern werden Standards eingeführt.

Meilenstein 4: 1995 entsteht in Deutschland abermals eine breite Diskussion über die allgemeinbildenden Aufgaben des Mathematikunterrichts (HEYMANN 1996; WINTER 1995). WINTER (1995, S. 37) formuliert drei „Grunderfahrungen“, die der Mathematikunterricht ermöglichen soll:

- „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollen, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
- mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennenzulernen und zu begreifen,

- in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen (heuristische Fähigkeiten), zu erwerben."

Allein die Folge der aufgezählten Meilensteine zeigt, dass es in der Mathematikdidaktik eine lange Tradition der Auseinandersetzung mit Bildungszielen und zentralen mathematischen Anforderungen gibt. Einige davon sind direkt oder modifiziert in die Bildungsstandards eingegangen. Die bildungstheoretischen Grundsätze hinter den Bildungsstandards beziehen sich implizit, aber doch deutlich erkennbar auf die Grundbildungskonzepte, wie sie vor allem Heinrich Winter beschrieben hat (1., 2. und 4. Meilenstein).

Die Entwicklungsfunktion von Bildungsstandards

Es sind vor allem zwei Funktionen, die die Bildungsstandards erfüllen: die *Entwicklungs-* und die *Überprüfungsfunktion*. In ihrer Entwicklungsfunktion wollen sie einen Unterricht unterstützen, der nicht nur „auf die Aneignung von Kenntnissen und Fertigkeiten reduziert" ist, sondern vielmehr auf „die Entwicklung eines gesicherten Verständnisses mathematischer Inhalte" (vgl. S. 22) abzielt. Sie bieten zudem, expliziter als dies Lehrpläne bis dato geleistet hatten, mit ihrer Überprüfungsfunktion Möglichkeiten an, sich der Erträge dieses Unterrichts zu vergewissern, indem untersucht wird, in welchem Maße die Standards zu den inhaltsbezogenen und allgemeinen Kompetenzen von den Schülern erreicht wurden. Da hierzu das Kap. 10 informiert, beschreiben wir im Folgenden die Entwicklungsfunktion etwas ausführlicher.

Die eingangs skizzierten Unterrichtsszenarien zeigen exemplarisch auf, dass sich durch die Betonung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen der Unterricht ändert. Diese erfordern eine Unterrichtskultur, die die eigene Tätigkeit der Schülerinnen und Schüler in den Vordergrund rückt. Die Entwicklung mathematischer Grundbildung „hängt nicht nur davon ab, *welche* Inhalte unterrichtet wurden, sondern in mindestens gleichem Maße davon, *wie* sie unterrichtet wurden, …" (KMK 2005a, S. 6).

Eine erste „produktive" Wirkung entfalten die Bildungsstandards also dadurch, dass Lehrerinnen und Lehrer aus ihnen Anregungen zur *Unterrichtsumgestaltung*, zu einer Weiterentwicklung der *Unterrichtskultur* entnehmen können. Die Bildungsstandards stärken damit von offizieller Seite auch den Rücken von Lehrerinnen, die an solchen Entwicklungsprozessen zwar interessiert sind, sich aber in manchem Kollegium gegen die „Nur Rechnen – Fraktion" schwer behaupten konnten. Am Rande sei in diesem Zusammenhang auf die Materialien des Programms Sinus-Transfer Grundschule hingewiesen (www.sinus-grundschule.de).

Eine zweite „produktive" Funktion betrifft den wechselseitigen Zusammenhang zwischen allgemeinen mathematischen Kompetenzen und den Einstellungen von Schülerinnen und Schülern zur Mathematik. Die Orientierung an allgemeinen Kompetenzen bewirkt, dass die Freude an der Mathematik und die Entdeckerhaltung der Kinder gefördert und weiter ausgebaut werden (vgl. S. 40 f.). Hier ist das persönliche, lebendige Engagement der Lehrerinnen gefragt, die selbst Freude am Umgang mit substanziellen Aufgaben und eine Entdeckerhaltung sowohl gegenüber dem Fach als auch hinsichtlich der Lernprozesse ihrer Schülerinnen und Schüler besitzen. Ein empfehlenswerter Schritt in diese Richtung ist beispielsweise die intensive Bearbeitung und Auseinandersetzung mit den Beispielen in diesem Buch. Auch wenn die Bildungsstandards „Aspekte der Förderung sozialer und personaler Kompetenzen“ nicht explizit ansprechen (KMK 2005a, S. 7), so gilt doch: Erreichte Kompetenz zeigt sich in mehr als nur den kognitiven Leistungen.

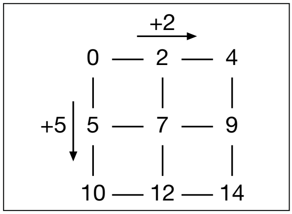
Schließlich gibt es eine dritte „produktive“ Funktion, die den Bildungsstandards zukommt. Durch Aufgabenbeispiele und deren Zuordnung zu Kompetenzen und Anforderungsbereichen wird für Lehrerinnen und Lehrer ein Instrument erkennbar, wie man Aufgaben konstruieren, analysieren, variieren, an individuelle Schülerinnen und Schüler anpassen und zu unterschiedlichen Zwecken einsetzen kann, kurz, wie man Aufgaben als flexible Werkzeuge für Unterrichtsgestaltung einsetzen kann (Walther 2004a).

3.3 Allgemeine Kompetenzen – zentraler Bestandteil mathematischer Bildung

In diesem Abschnitt sollen nun die allgemeinen Kompetenzen etwas ausführlicher dargestellt werden, da sie durch die Bildungsstandards eine Aufwertung erfahren haben. Sie sind in der Unterrichtsrealität selten sauber voneinander zu trennen.
Im Gegenteil: Wie etwa das Eingangsbeispiel (S. 16) verdeutlicht, spricht die Bearbeitung substanzieller Aufgaben in der Regel verschiedene allgemeine Kompetenzen an. Um deren jeweilige Besonderheiten herauszuarbeiten, illustrieren wir im Weiteren jede der fünf allgemeinen Kompetenzen, indem wir die hierzu ausgewählten Aufgaben unter diesem Aspekt besonders beleuchten und Bezüge zu anderen Kompetenzen andeuten (vgl. auch Selter 2004a).

Problemlösen

Wie der Begriff des *Problemlösens* in den Bildungsstandards verstanden wird, kann durch die Auflistung der drei dort angegebenen Unterpunkte deutlich werden:



- mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Bearbeitung problemhaltiger Aufgaben anwenden,
- Lösungsstrategien entwickeln und nutzen (z. B. systematisch probieren),
- Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen.

Wir beschreiben hierzu die Lernumgebung *Zahlengitter*, der folgende Aufgabenvorschrift zugrundeliegt:

Zunächst wird die sogenannte *Startzahl* (hier: 0) in das linke obere Feld eingetragen. Dann schreibt man fortlaufend in die benachbarten Felder die um die *linke* bzw. um die *obere Pluszahl* vermehrte Zahl. Die rechte untere Zahl heißt *Zielzahl*, die mittlere *Mittelzahl* und die anderen *Randzahlen*. Die Verwendung zweier gleicher Pluszahlen (+4; +4) ist ebenso möglich wie die der 0 (vgl. SELTER 2004).

In einem vierten Schuljahr wurde nach einigen Beispielaufgaben (+2 und +5; +8 und +8; +5 und +2) die Aufgabe gestellt, möglichst viele Pluszahl-Paare zu finden, die zur *Zielzahl 20* führten. Einige Kinder äußerten erste Vermutungen, von denen die am häufigsten genannte (+5; +5) zur Verdeutlichung der Aufgabenstellung an der Tafel festgehalten wurde. Die Kinder erhielten dann ein Arbeitsblatt, in dem sie alle von ihnen gefundenen Möglichkeiten notieren sollten, und wurden dazu angeregt, die Pluszahlen-Paare in einer Tabelle einzutragen. Hier waren unterschiedliche Vorgehensweisen der Kinder zu beobachten *(Lösungsstrategien entwickeln und nutzen)*, wie

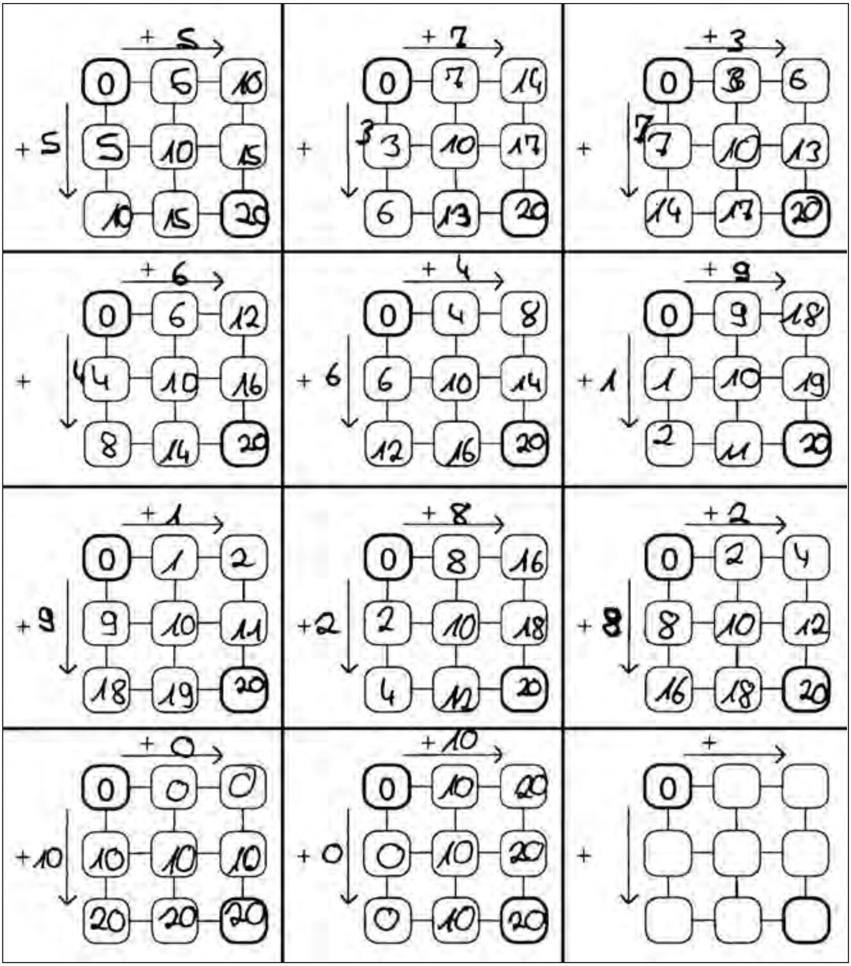
- unsystematisches oder unsystematisch erscheinendes Probieren,
- Ableiten eines Pluszahlen-Paares aus seinem Tauschpaar (aus (+2; +8) wird (+8; +2) gewonnen),
- Zerlegen der Mittelzahl 10 in zwei Summanden, die dann als Pluszahlen dienen, oder
- operatives Verändern der Pluszahlen (z. B. linke Pluszahl um 1 erhöhen, obere um 1 vermindern).

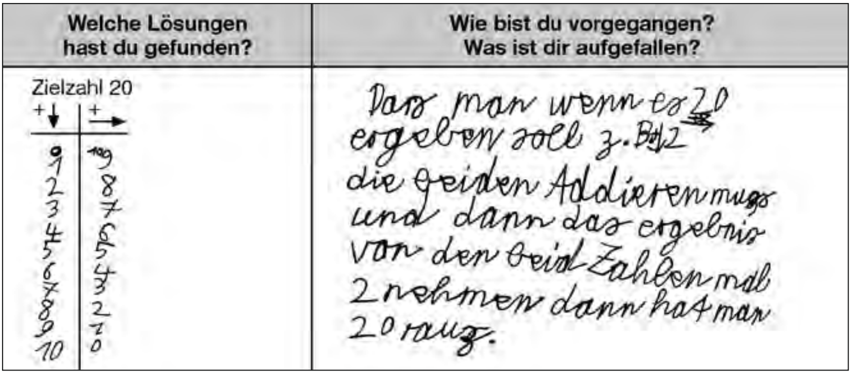
Einige Schüler waren nach knapp fünf Minuten der Meinung, dass keine weiteren Möglichkeiten mehr existieren; bei anderen war dieses nach rund 20 Minuten der Fall. Alle Kinder arbeiteten anschließend an ihrem Forscherbericht zur Zielzahl 20 (Welche Lösungen hast du gefunden? Wie bist du vorgegangen? Was ist dir aufgefallen?).

Durch das geordnete Anhängen aller elf Zahlengitter wurde das Nachdenken über deren Gemeinsamkeiten und Unterschiede angeregt. Die Kinder begründeten, warum sie alle Möglichkeiten gefunden hatten, und lasen aus ihren Forscherberichten vor, wie sie vorgegangen waren und was ihnen aufgefallen war.

In der Zusammenschau der Zahlengitter wurden diverse Auffälligkeiten benannt, wie etwa

- Als Mittelzahl kommt immer die 10 heraus.
- Wenn die linke Pluszahl um 1 größer wird, wird die obere um 1 kleiner.
- Rechts oben (bzw. links unten bzw. rechts unten (Zielzahl) steht immer eine gerade Zahl.
- Die da (die rechte mittlere) und die da (die untere Mittelzahl) sind zusammen immer 30.
- Bei der Zielzahl 20 sind es immer 30, wenn man die Zahlen von links oben nach rechts unten (bzw. von rechts oben nach links unten) addiert.

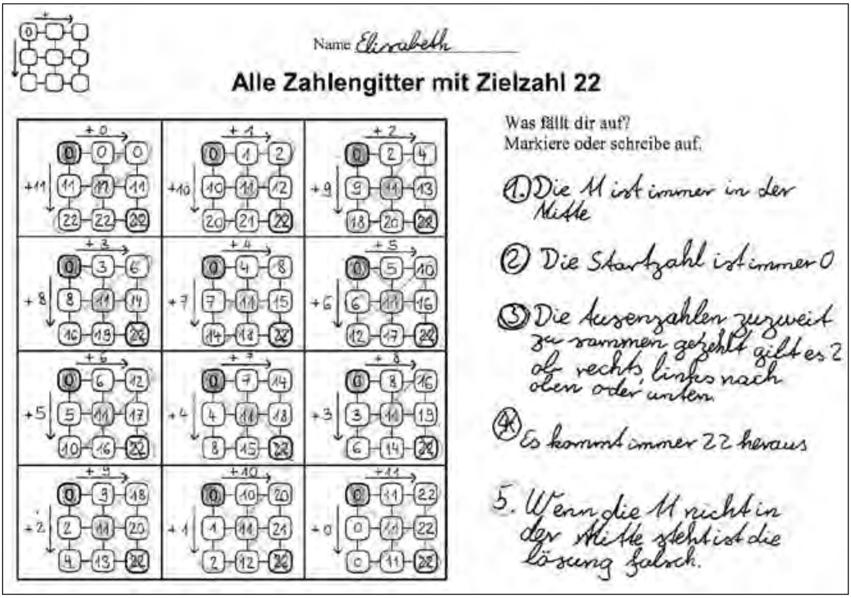




Welche Lösungen hast du gefunden?	Wie bist du vorgegangen? Was ist dir aufgefallen?
Zielzahl 20 +↓ | +→ 0 | 10 1 | 9 2 | 8 3 | 7 4 | 6 5 | 5 6 | 4 7 | 3 8 | 2 9 | 1 10 | 0	Dass man wenn es 20 ergeben soll z.B. 12 die beiden Addieren muss und dann das ergebnis von den beid Zahlen mal 2 nehmen dann hat man 20 raus.

In der folgenden Doppelstunde übertrugen die Schülerinnen und Schüler ihre Erkenntnisse auf Zahlengitter mit der Zielzahl 22 *(Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen)*.

Das vorliegende Beispiel von Elisabeth macht im Original von unterschiedlichen Farben zur besseren Darstellung der eigenen Gedankengänge gebrauch. Mit rosa markierte sie jeweils die Mittelzahl in allen 12 Zahlengittern und notierte unter Punkt 1 (ebenfalls rosa Umkreist): „Die 11 ist immer in der Mitte“. Alle Startzahlen wurden – wie die 2 – dunkelblau gefärbt, und sie schrieb dazu: „Die Startzahl ist immer 0.“



Mit Rot und Grün schlängelte sie jeweils die Zahlen in den beiden Diagonalen ein und fasste die Auffälligkeit unter Punkt 3 wie folgt zusammen: „Die Außenzahlen zu zweit zusammengezählt gibt es 22, ob rechts, links nach oben oder unten." Die Zielzahl wurde – genauso wie die 4 – mit einem braunen Kreuz versehen: „Es kommt immer 22 heraus." Schließlich gab Elisabeth noch an: „Wenn die 11 nicht der Mitte steht, ist die Lösung falsch."

Kommunizieren

Die allgemeine Kompetenz des *Kommunizierens* wird in den Bildungsstandards in den folgenden drei Punkten konkretisiert:

- eigene Vorgehensweisen beschreiben, Lösungswege anderer verstehen und gemeinsam darüber reflektieren,
- mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht verwenden,
- Aufgaben gemeinsam bearbeiten, dabei Verabredungen treffen und einhalten.

Zur Illustration des ersten Punkts, *eigene Vorgehensweisen zu beschreiben, Lösungswege anderer zu verstehen und gemeinsam darüber zu reflektieren*, soll ein Beispiel aus dem vierten Schuljahr gegeben werden. Vor der Behandlung der Division großer Zahlen wurde den Schülerinnen und Schülern folgende Aufgabe gestellt:

„Beim Schulfest wurden 956 Euro eingenommen. Das Geld wird auf vier Klassen verteilt." (in Anlehnung an: Das Zahlenbuch 4, S. 14) Sie wurden gebeten, ihren Lösungsweg so aufzuschreiben, dass andere Kinder ihn verstehen konnten. Sich eigene Gedanken zu machen und diese zu artikulieren, gehörte in dieser Klasse zur Unterrichtskultur. Es ergaben sich eine Reihe durchaus unterschiedlicher Wege, wie etwa das schrittweise Dividieren (Nicole), das zweimalige Halbieren (Mira) oder das Ausnutzen der Hilfsaufgabe (1000 : 4; Murat). Auch eine geschickte Berücksichtigung der Reste (Mehmet), an die konkrete Situation des Geldverteilens gebundene Vorgehensweisen (Phil) oder die Anwendung des im Unterricht noch nicht behandelten Normalverfahrens (Alex) waren zu beobachten.

Die verschiedenen Lösungen wurden dann den Mitschülerinnen und Mitschülern in Mathekonferenzen (vgl. SUNDERMANN/SELTER 2006a) und in Plenumsgesprächen vorgestellt. Die individuellen Ansätze wurden verglichen bzw. voneinander abgegrenzt. Diese Phasen des Austauschs im Sinne eines Lernens von- und miteinander können entscheidend zur Weiterentwicklung des eigenen Vorgehens bzw. zur Ergänzung des eigenen Repertoires beitragen.

Wie rechnest du diese Aufgabe? Schreibe deinen Lösungsweg so auf, dass die anderen Kinder ihn verstehen können.

956 : 4 = 239
800 : 4 = 200
~~100 : 4~~
~~50~~ 60 : 4 = 15
40 : 4 = 10
~~50 : 4~~
52 : 4 = 13
4 : 4 = 1

Ich habe einfach die aufgabe aufgeteilt!

Nicole

Wie rechnest du diese Aufgabe? Schreibe deinen Lösungsweg so auf, dass die anderen Kinder ihn verstehen können.

956 : 4 =

1000 : 4 = 250

250 − 44 : 4 = 11

250 − 11 = 239

Murat

Wie rechnest du diese Aufgabe? Schreibe deinen Lösungsweg so auf, dass die anderen Kinder ihn verstehen können.

~~956 : 2 = 473 : 2 =~~

956 : 2 = 478 : 2 = 239

Ich habe 956 : 2 = 478 ~~has~~ und dann habe
ich 478 : 2 = 239 und das ist das Ergebnis 239

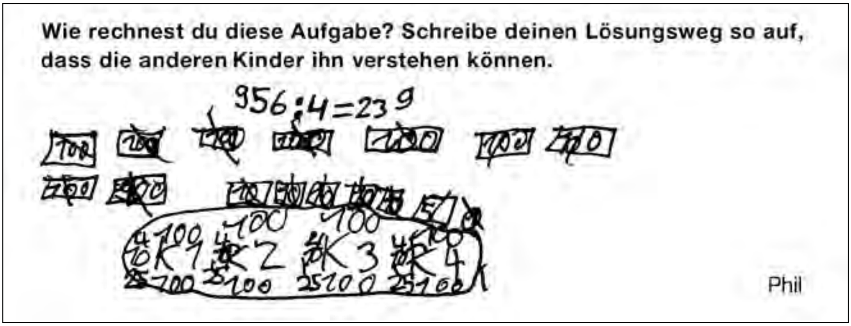
Mira

Wie rechnest du diese Aufgabe? Schreibe deinen Lösungsweg so auf, dass die anderen Kinder ihn verstehen können.

956 : 4 = 239
6 : 4 = 1 R2
50 : 4 = 12 R2
800 : 4 = 200
100 : 4 = 25

238 R4 = 239
239€ kriegt jede Klasse

Mehmet



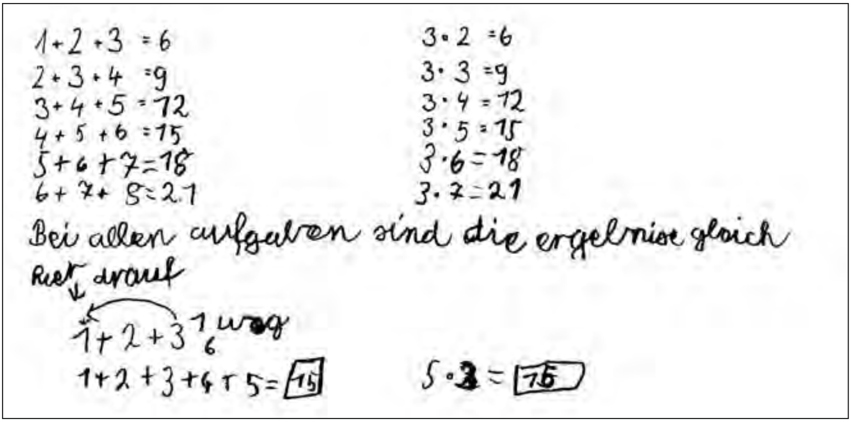
Argumentieren

Unter dem Oberbegriff *Argumentieren* werden in den Bildungsstandards die folgenden Punkte angeführt:

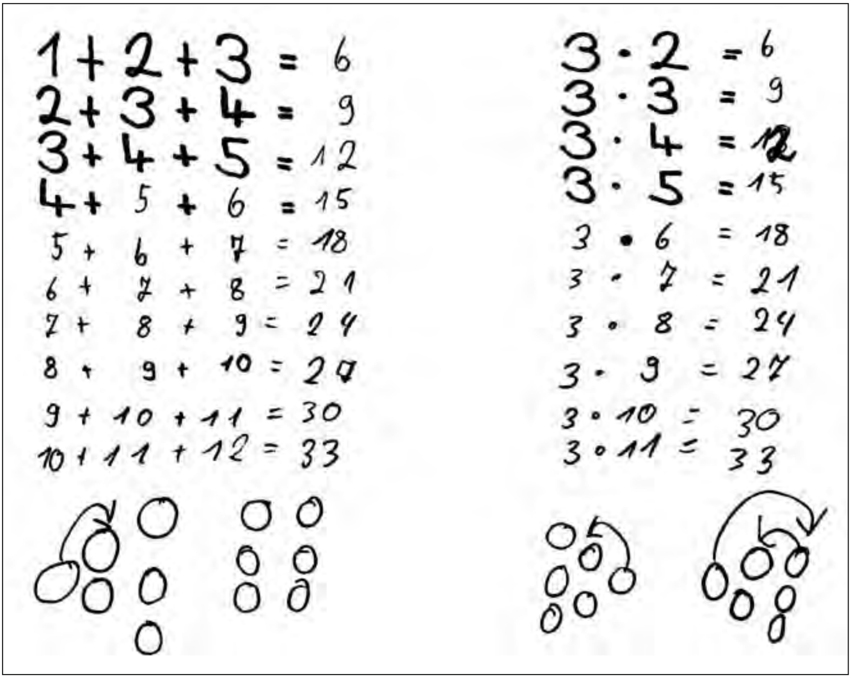
- mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen,
- mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln,
- Begründungen suchen und nachvollziehen.

Dabei ist ein gewisser Zusammenhang zur Kompetenz des Problemlösens zu erkennen, der insbesondere durch den hier wie da angeführten Unterpunkt *Zusammenhänge erkennen* deutlich wird. Auch an dieser Stelle zeigt sich wieder, dass die allgemeinen Kompetenzen häufig nur schwer voneinander zu trennen sind und auf unterschiedliche Weise miteinander verwoben sind.

So sind im Beispiel auf S. 33 oben im linken Aufgabenpäckchen jeweils drei aufeinanderfolgende Zahlen zu addieren. Parallel dazu ist deren mittlerer Summand jeweils mit 3 zu multiplizieren. Die Schüler können dabei sowohl innerhalb einer Serie als auch im Vergleich von Plus- und Malaufgaben eine Reihe *mathematischer Zusammenhänge erkennen* und *Vermutungen entwickeln*. So weisen etwa „zusammengehörige“ Aufgaben stets das gleiche Resultat auf.



Diese Gleichheit kann man verstehen, wenn man den ersten Summanden auf Kosten des dritten um „1“ erhöht, sodass man in der Summe das Dreifache des mittleren Summanden erhält. Allerdings ist es mindestens genauso aufschlussreich, diesen Zusammenhang auf der anschaulichen Ebene anhand repräsentativer Beispiele „einzusehen“.



Dazu stellt man die drei aufeinanderfolgenden Summanden als untereinander angeordnete Punktreihen dar und verschiebt einen Punkt aus der letzten in die erste Zeile.

So kann man unabhängig von der Größe der verwendeten Zahlenwerte stets die Ergebnisgleichheit begründen, wie die Dokumente von Viertklässlern illustrieren, die gebeten worden waren, die ersten drei vorgegebenen Aufgaben auszurechnen, die Serie entsprechend fortzusetzen, Auffälligkeiten zu beschreiben und *Begründungen zu suchen und nachzuvollziehen*.

Ein Wort noch zu den verwendeten Zahlenwerten: Prinzipiell wäre die Behandlung dieser Aufgabe bereits im 2. Schuljahr möglich, würde dann aber vermutlich nur die leistungsstarken Kinder zu Begründungen wie den obigen anregen. Insofern kann es von Fall zu Fall durchaus sinnvoll sein, bei Aufgaben, die die allgemeinen Kompetenzen ansprechen, die rechnerischen Anforderungen etwas herunterzuschrauben, um die volle Konzentration auf das Entdecken, Beschreiben und Begründen lenken zu können.

Ein zweites Beispiel entstammt dem zweiten Schuljahr und illustriert, wie schon Zweitklässler *mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln* können. Bei einer Dreier-Zahlenmauer wurden mehrfach die drei Basissteine vertauscht. Die Kinder sollten die einzelnen Mauern berechnen und eine Vermutung aufstellen, unter welcher Bedingung die Zahl im Zielstein am größten sei. Jessica vermutet ausgehend von diesem Beispiel, dass die Zielzahl am größten sei, wenn man „die größte Zahl als mittlere Basiszahl verwende“.

Modellieren

Beim *Modellieren* im Verständnis der Bildungsstandards geht es in der Hauptsache darum,

- Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen zu entnehmen,
- Sachprobleme in die Sprache der Mathematik zu übersetzen, innermathematisch zu lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation zu beziehen,
- zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen Sachaufgaben zu formulieren.

Im folgenden Beispiel bearbeiteten die Schülerinnen und Schüler am Ende des vierten Schuljahres einige (fiktive) Zeitungsmeldungen, von denen manche einen Fehler enthielten. Unter der Fragestellung „Kann das stimmen?“ sollten sie diese jeweils auf ihren Wahrheitsgehalt prüfen. Um diesen aufzudecken, mussten die Kinder dem vorliegenden Text (vgl. VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN 2001, S. 196) die *relevanten Informationen entnehmen* und andere Daten vernachlässigen, zum Beispiel die Information, dass es neun Schulen in Gevelsberg gebe. Dann war ein mathematisches Modell zu bilden, das im vorliegenden Beispiel darin bestand, die Zahl der Schüler und die Zahl der Klassen durch eine Division zueinander in Beziehung zu setzen und dabei geeignete Überschlagswerte zu verwenden (4000 : 50; *Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen*). Nach zwei fehlgeschlagenen Anläufen kam Nico zu dem numerisch korrekten Ergebnis ‚80’ *(innermathematisch lösen)*. Diese Lösung musste er dann noch *auf die Ausgangssituation zurück beziehen* („Es gibt keine Klasse, in der 80 Kinder sind.“).

4000 Schüler in 48 Schulklassen

Gevelsberg – Die Sommerferien neigen sich dem Ende zu. Die vielen Kinder, die zu Fuß zur Schule unterwegs sind, sind ein Zeichen, dass die 9 Schulen in Gevelsberg wieder geöffnet sind.
Dieses Schuljahr sind es fast 4000 Schüler, die zusammen 48 Schulklassen besuchen. Für manche Schüler waren die Ferien viel zu kurz, aber die meisten freuen sich darauf, ein neues Schuljahr zu beginnen.

~~50:11~~=5 4000:50=~~280~~ 80
Nein, es gibt keine Klasse in der 80 Kinder sind

Darstellen

Für den Bereich des *Darstellens* schließlich geben die Bildungsstandards folgende Unterpunkte an:

- für das Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen,
- eine Darstellung in eine andere übertragen,
- Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten.

Das Unterrichtsbeispiel *Große Hunde – kleine Hunde* spricht nicht nur das Modellieren, sondern auch das Darstellen an (vgl. SUNDERMANN/SELTER 2006, S. 104 ff.). Den Schülerinnen und Schülern standen Datenblätter für sieben Hunderassen zur Verfügung, die wie folgt aufgebaut waren:

Yorkshire Terrier

Der Yorkshire Terrier wurde für die Jagd auf Ratten unter der Erde gezüchtet.

Gewicht:	etwa 3 kg (Kilogramm)
Schulterhöhe:	22 cm
Alter:	14 Jahre und älter

Golden Retriever

Der Golden Retriever wurde für die Jagd auf Enten gezüchtet. Er holt die geschossene Ente aus dem Wasser heraus und bringt sie dem Jäger.

Gewicht:	etwa 32 kg (Kilogramm)
Schulterhöhe:	60 cm
Alter:	10 bis 12 Jahre

Diese Daten sollten für die Beantwortung der Frage benutzt werden, ob große Hunde älter werden als kleine. Den Kindern wurde der Tipp gegeben, dass ihnen das Ordnen der Daten bei der Beantwortung dieser Frage behilflich sein könnte. Naturgemäß gingen sie dabei unterschiedlich vor. Eine Gruppe erstellte eine herkömmliche Tabelle, in deren Spalten sie Alter, Größe und Gewicht eintrug. So kam sie zu der Schlussfolgerung: „Kleine Hunde werden älter."

Eine andere Gruppe erinnerte sich an die in einem anderen Zusammenhang kennengelernte Vierfeldertafel und ordnete die Hunderassen entsprechend ein. Die Eigenproduktion kann als Illustration für den ersten Unterpunkt für das *Bearbeiten mathematischer Probleme geeignete Darstellungen entwickeln, auswählen und nutzen* herangezogen werden.

Ordnet übersichtlich!
Diese Wörter können euch helfen: groß, klein, alt, nicht alt

	alter	größe	gewicht
Deutsche Dogge	7 Jahre	80 cm	85 kg
Berhnerdiner	10 Jahre	75 cm	80 kg
~~Golener Ritter~~ Deutscher Boxer	10 Jahre	63 cm	~~32~~ 30 kg
Goldener Ritter	10-12 J	60 cm	32 kg
Yorkshire Terrier	14 J	22 cm	3 kg
Langhar-Dakel	14-17 J	25 cm	8 kg
& Chihuahua	16-18 J	20 cm	1-2 kg

Ordnet übersichtlich!
Diese Wörter können euch helfen: groß, klein, alt, nicht alt

	klein	groß
nicht alt		deutsche Dogge Golden Retriever Bernhardiner Deutscher Boxer
alt	Chihuahua Langhaar-Dakel Yorkshire Terrier	

3. Unsere Entdeckung:
~~Was wir älter werden~~ kleine Hunde werden älter als große Hunde

Abschließend ziehen wir noch ein Beispiel aus dem zweiten Schuljahr heran. Dadurch soll auf die Notwendigkeit hingewiesen werden, die Förderung allgemeiner Kompetenzen bereits in der Schuleingangsphase beginnen zu lassen: Die Schülerinnen und Schüler sollten verschiedene Darstellungen zueinander in Beziehung setzen und dabei insbesondere prüfen, inwieweit eine vorgegebene bildliche Darstellung zu einer vorgegebenen Rechengeschichte passte (Darstellungen miteinander vergleichen und bewerten). Bei der folgenden Aufgabe kam das Kind zu der Auffassung, dass die Zeichnung den Text nicht geeignet illustrierte.

Ihr Urteil sollten die Schülerinnen und Schüler jeweils durch einen kurzen Text erläutern, indem sie eine Begründung angaben, warum sie das Kreuz bei „stimmt“ oder bei ‚stimmt nicht’ gesetzt hatten.

Schließlich gaben die Kinder in den Fällen, in denen sie „stimmt nicht“ markiert hatten, für das obige Beispiel eine aus ihrer Sicht passendere Zeichnung an (eine Darstellung in eine andere übertragen). Auch bei dieser Teilkompetenz ist wieder eine gewisse Nähe zur dritten Teilkompetenz des Modellierens unverkennbar *(zu Termen, Gleichungen und bildlichen Darstellungen Sachaufgaben formulieren)*.

3.4 Allgemeine Kompetenzen im Unterricht

Eine zentrale Forderung an guten Mathematikunterricht formulieren die Bildungsstandards direkt zu Beginn des Kapitels über die allgemeinen mathematischen Kompetenzen: „Allgemeine Kompetenzen zeigen sich in der lebendigen Auseinandersetzung mit Mathematik, und auf gleiche Weise, in der tätigen Auseinandersetzung, werden sie erworben. Die angestrebten Formen der Nutzung von Mathematik müssen daher auch regelmäßig genutzte Formen des Mathematiklernens sein“ (KMK 2005, S. 9). Hier wird ganz deutlich, dass die Förderung allgemeiner Kompetenzen eine systematisch zu verfolgende, langfristige Aufgabe des Mathematikunterrichts ist, die durch regelmäßige, eigene Aktivitäten der Kinder beständig weiterentwickelt wird. Fünf Punkte, die uns in diesem Zusammenhang wichtig erscheinen, sollen abschließend erläutert werden.

Substanzielle Aufgaben: Unabdingbar für die Entwicklung allgemeiner Kompetenzen ist die Verwendung substanzieller Aufgaben. Es gilt, nach dem bewährten Grundsatz *„multum, non multa"* zu verfahren: Lieber *wenige gute* Aufgabenfelder bzw. Lernkontexte ausführlich und über die verschiedenen Schuljahre hinweg mit unterschiedlichen Fragestellungen immer wieder zu behandeln als *viele isolierte* Aufgaben abarbeiten zu lassen. Substanzielle Aufgaben sind Aufgaben, bei denen sowohl die inhaltsbezogenen als auch die allgemeinen Kompetenzen – auf unterschiedlichen Leistungsniveaus und mit unterschiedlich ausgeprägten Interessensgraden – angesprochen werden. Beispiele finden Leser in diesem Buch in großer Zahl (vgl. auch Hengartner u.a. 2006). Dabei wird deutlich, dass der Einsatz substanzieller Aufgaben dazu beitragen kann, das Problem der begrenzten Unterrichtszeit trotz ständig zunehmender Anforderungen in den Griff zu bekommen, ermöglichen sie es doch, gleichzeitig zu üben und zu entdecken.

Eine Kultur des Erforschens, Entdeckens und Erklärens: Offensichtlich ist, dass dieses umso besser gelingt, je mehr das Entdecken, Erforschen und Erklären und dabei insbesondere auch der *soziale Austausch* zwischen Lehrerin und Kindern sowie auch zwischen den Kindern untereinander zu einem natürlichen Bestandteil des Unterrichts geworden ist. Besonderer Beachtung bedürfen dabei etwa die schlüssige und verständliche Einführung der Aufgabenstellung bzw. der Aufgabenvorschrift anhand wirklich repräsentativer Beispiele mit sinnvoll ausgewähltem Zahlenmaterial, das Schaffen von Zieltransparenz für die Schüler(innen), die Etablierung von Ritualen wie Mathekonferenzen bzw. gleichermaßen offenen wie zielorientierten Unterrichtsgesprächen, der geregelte Austausch über (Vor- und Nachteile bestimmter) Sprech- und Schreibweisen oder die Einräumung von angemessen viel Zeit, damit die Schülerinnen und Schüler die Fragestellungen anhand hinreichend vieler selbst bearbeiteter Beispiele sowie durch das Nachdenken über deren Gemeinsamkeiten und Unterschiede wirklich durchdringen können. Der Lehrperson kommt also die ganz entscheidende Aufgabe zu, die Kinder nach und nach in das Beobachten, Entdecken, Problemlösen, Beschreiben und Begründen einzuführen und sie dabei zu unterstützen. Denn bei vielen Kindern ereignen sich diesbezügliche nennenswerte Lernfortschritte nicht unbedingt spontan.

Maßnahmen der Individualisierung: Somit sollte man nicht davon ausgehen, dass jede substanzielle Aufgabe sämtliche Schüler(innen) „aus der Sache heraus" anspricht und kontinuierlich motiviert, sich damit zielorientiert und trotz ggf. auftauchender Schwierigkeiten auseinanderzusetzten. Kinder sind unterschiedlich – diese Erkenntnis gilt nicht nur für die inhaltsbezogenen, sondern gerade auch für die allgemeinen Kompetenzen. So sind es nicht selten schwächere Schülerinnen und Schüler, die nicht genau wissen, wie sie vorgehen sollen und infolgedessen verständlicher Weise schlecht mit den sich häufenden Frustrationserfahrungen umgehen können. Daher kann es hilfreich sein, durchgängig und für die Kinder transparent zwischen Grundanforderungen und weiterführenden Anforderungen zu unterscheiden. Darüber hinaus macht es z. B. auch Sinn, Tipps für diejenigen Kinder bereitzuhalten, die nach längerem Nachdenken nicht weiterkommen, freilich ohne dabei zu viel vorzugeben.

Kleine Erfolge sehen: Hilfreich ist zudem eine positiv-optimistische Grundeinstellung gegenüber dem Denken und Lernen der Kinder. Denn deren sinnvolle Vorgehensweisen, viel versprechende Denkansätze und erstaunliche Arbeitsergebnisse werden oft nicht erkannt, weil die Lehrperson das Vorgehen der Schüler(innen) und deren Äußerungen nicht sensibel genug beobachtet (bzw. dieses in der Hektik des Alltagsgeschäfts nur schwerlich kann) und sie zudem unfertiges oder ihr nicht auf Anhieb verständliches Denken als fehlerhaft oder defizitär ansieht (vgl. Selter/Spiegel 2003). Es zahlt sich nach unserer Überzeugung für Erwachsene wie für Kinder aus, wenn Erstere auch die kleinen Erfolge und Fortschritte der Lernenden in der Auseinandersetzung mit prozessorientierten Aufgaben sehen und anerkennen, statt von ihnen mit Blick auf Idealzielsetzungen zu schnell zu viel zu verlangen.

Offene Formen der Leistungsfeststellung: Damit sich die allgemeinen Kompetenzen in der Unterrichtspraxis durchsetzen können, ist es erforderlich, sie auch im Rahmen von Leistungsfeststellungen angemessen zu berücksichtigen (vgl. Sundermann/Selter 2006). Ähnlich wie im Deutschunterricht das Beurteilen der Texte von Kindern in der Regel aufwändiger ist als die bloße Beurteilung der Fertigkeiten im Rechtschreiben, ist die Beurteilung von Aufgaben(teilen), die die allgemeinen Kompetenzen ansprechen, häufig nicht so unkompliziert wie die reine Bewertung des (End)Resultats. Aber Ersteres ist erforderlich und ausgehend von einem Kriterienkatalog auch leistbar, wobei man sich der unvermeidlichen Subjektivität der eigenen Wahrnehmungen durchaus bewusst, aber mit positiver Einstellung um individuelle Gerechtigkeit bemüht sein sollte. Die typischen Klassenarbeitsaufgaben und Testitems haben hier angesichts der Reichhaltigkeit von substanziellen Aufgaben und den dadurch möglich werdenden Leistungen von Schülerinnen und Schülern aufgrund ihrer Einschränkungen in der Regel nur eine recht begrenzte Aussagekraft.

Schlussbemerkung: Bei aller Wichtigkeit der in diesem Buch explizit erläuterten inhaltsbezogenen- und allgemeinen Kompetenzen: Der Erfolg von Unterricht wird auch daran festgemacht, inwieweit es gelingt, die fachbezogene Lernfreude und Leistungsbereitschaft der Kinder zu erhalten und auszubauen. Die Entwicklung von Einstellungen und Haltungen gilt als unverzichtbarer Bestandteil mathematischer Bildung, was in den Bildungsstandards (2004, S. 8) an zentraler Stelle deutlich wird und daher abschließend nochmals zitiert werden soll:

> *„Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen sind mit entscheidend für den Aufbau positiver Einstellungen und Grundhaltungen zum Fach. In einem Mathematikunterricht, der diese Kompetenzen in den Mittelpunkt des unterrichtlichen Geschehens rückt, wird es besser gelingen, die Freude an der Mathematik und die Entdeckerhaltung der Kinder zu fördern und weiter auszubauen."*

4 Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept

Erich Ch. Wittmann/Gerhard N. Müller

Im Abschnitt *„Standards für inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen"* der Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich tritt ein Bereich *Muster und Strukturen* in folgender Formulierung auf:

Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen	■ strukturierte Zahldarstellungen (z.B. Hundertertafel) verstehen und nutzen ■ die Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern (z.B. Zahlenfolgen oder strukturierten Aufgabenfolgen) erkennen, beschreiben und fortsetzen ■ arithmetische und geometrische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben
funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen	■ funktionale Beziehungen in Sachaufgaben erkennen, sprachlich beschreiben (z.B. Menge – Preis) und entsprechende Aufgaben lösen ■ funktionale Beziehungen in Tabellen darstellen und untersuchen ■ einfache Sachaufgaben zur Proportionalität lösen

Es fällt auf, dass in der linken Spalte allgemeine, inhaltsunabhängige Kompetenzen aufgeführt sind, bei ihrer Ausformulierung in der rechten Spalte aber alle großen Inhaltsbereiche der Grundschulmathematik angesprochen werden (Arithmetik, Geometrie sowie Größen und Sachrechnen). Dies ist ein klares Indiz dafür, dass der Bereich *Muster und Strukturen* den Inhaltsbereichen *über*geordnet ist. In neueren Lehrplänen, die sich ausdrücklich auf die Bildungsstandards beziehen, wird er daher aus gutem Grund nicht als eigener Bereich ausgewiesen, sondern ist in die Inhaltsbereiche integriert.

Im vorliegenden Kapitel soll herausgearbeitet werden, dass es sich bei *Muster und Strukturen* nicht einfach um einen Aspekt des Mathematikunterrichts unter anderen handelt, sondern dass dieser Aspekt grundlegend ist. Es wird sich zeigen, dass *Muster und Strukturen* nicht weniger als das *Wesen* der Mathematik bezeichnen und dass die neuen Aufgabenformate und Unterrichtsformen, wie sie im vorhergehenden Kapitel auf der Grundlage der Bildungsstandards beschrieben werden, den Weg für einen fachlich authentischen Unterricht eröffnen, der zudem das Lernen erheblich erleichtert.

Das Kapitel ist folgendermaßen aufgebaut: Um den Blick von Anfang auf das grundsätzliche Anliegen dieses Beitrags zu lenken, wird im ersten Abschnitt anhand einiger Beispiele illustriert, wie das Mathematikbild von Menschen ihre Einstellung zum Lehren und Lernen von Mathematik prägt. Es sollt dabei deutlich werden, dass die Veränderung dieser Einstellung Voraussetzung für die Umsetzung der Bildungsstandards in der Praxis ist. Im zweiten Abschnitt wird die heutige Auffassung von Mathematik als „Wissenschaft von Mustern“ sowie ihr Bezug zu den Bildungsstandards erläutert. Die Beispiele von Abschnitt 4.1 werden im Anschluss daran vor diesem Hintergrund bewertet.

Im dritten und umfangreichsten Abschnitt wird anhand repräsentativer Beispiele (Lernumgebungen) aus dem Bereich der Multiplikation gezeigt, wie der Unterricht auf dieser fachlichen Basis gestaltet werden kann und welche praktischen Vorteile sich daraus für die Lehrkräfte und die Kinder ergeben.

Vorab sei schon darauf hingewiesen, dass sich die Begriffe *Muster* und *Struktur* nicht scharf definieren und nicht voneinander abgrenzen lassen. Meistens werden die Begriffe synonym gebraucht. Wir verwenden *Muster* in diesem Kapitel als Oberbegriff und sprechen vor allem dann von *Struktur*, wenn es sich um grundlegende, vorgegebene *Muster* handelt (s. Abschnitt 4.2).

4.1 Einige Stimmen zur Mathematik und zum Lehren und Lernen von Mathematik

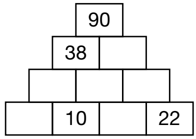
(1) Schauplatz Elternhaus: Brief eines Vaters an eine Lehrerin
(Namen geändert)

Betreff: Nichtrechnen einer Matheaufgabe durch Julia

Sehr geehrte Frau Bachmann,
heute hatte Julia mit ihrer Hausaufgabe ein kleines Problem. Die letzte der insgesamt 5 Aufgaben über Zahlenmauern machte ihr Schwierigkeiten. Aus Jux habe ich mich dann selbst an die Lösung gemacht und festgestellt, dass der Sachverhalt auf ein Gleichungssystem von 6 Gleichungen mit sechs Unbekannten führt. Das Gleichungssystem insgesamt ist zwar linear unabhängig, lässt sich also lösen (s. Anlage), aber nur die erste der Gleichungen ist separierbar und so durch einfaches Umstellen lösbar. Da Ausprobieren anhand der möglichen Kombinationen selbst bei vollständig systematischem Vorgehen, was ich von meiner Tochter nicht verlangen wollte, zu einer mehrere Stunden währenden Aufgabe geworden wäre, habe ich ihr die Aufgabe erlassen.
Ich bitte um Ihr Verständnis.

Mit freundlichem Gruß
Prof. Dr.-Ing. Jochen Karcher

Es ging bei dieser Aufgabe darum, die fehlenden Zahlen in der nebenstehenden Zahlenmauer zu bestimmen.



(2) Schauplatz Lehrerzimmer: Bericht einer Lehrerin aus der Erprobung eines neuen Unterrichtswerks

Während der Behandlung des Abschnitts über das Einpluseins ist mir aufgefallen, dass im Buch der Zehnerübergang nicht vorkommt. Ich habe das Buch dann unserem Rektor gezeigt, wir haben beide genau gesucht und nirgends einen Hinweis auf dieses Verfahren gefunden. Das halten wir für einen gravierenden Fehler. Ich habe mich daher entschlossen, den Zehnerübergang nachzuholen. Das kam aber offensichtlich zu spät, da sich die Kinder schon andere Wege angeeignet hatten und viele nicht mehr bereit waren, nach der Vorschrift des Zehnerübergangs zu rechnen. Ich muss aber zugeben, dass sie das Einspluseins trotzdem schon recht gut können.

(3) Schauplatz Klassenzimmer: Hospitation im ersten Schuljahr

5 + 1 = 15 + 1 =	5 + 2 = 16 + 2 =	3 + 2 = 13 + 2 =	7 + 2 = 17 + 2 =	4 + 3 = 14 + 3 =

Die Studierenden schauen über die Klasse verteilt den Kindern beim Rechnen von Päckchen zu. Nach Beendigung des Päckchens in (s. oben) zeigt eine Studierende auf die beiden letzten Aufgaben und fragt das neben ihr sitzende Kind: „Wie viel ist *denn 13 + 4?*“ Das Kind überlegt kurz und sagt: *„Das ist auch 17, aber das dürfen wir nicht rechnen.“* Die Studierende fragt weiter: *„Und wie viel ist 14 + 13?“* Das Kind überlegt etwas länger und antwortet: *„Da kommt 27 raus. Aber das dürfen wir erst recht nicht rechnen.“*

(4) Schauplatz Fernsehen: Sendung „Kulturzeit“ in 3sat
Der Moderator interviewt einen Mathematiker, dem gerade der Communicator-Preis der Deutschen Forschungsgemeinschaft überreicht worden ist, und merkt im Gespräch an:

„Von Mathematik kann man natürlich erst auf den höheren Stufen sprechen. In der Grundschule wird ja nur gerechnet.“

(5) Schauplatz Politik: Politischer Aschermittwoch 2007
Der Redner der FDP zeigt die Doppelseite des Mathematikbuchs „eines Berliner Viertklässlers“, auf der zu den Themen „Brot“ und „Milch“ zwei analoge

Aufgaben gestellt sind (s. unten), liest eine der Aufgaben vor und stellt unter dem Beifall der Zuhörer fest:

> „Es geht um Rechnen, Mathematik. Ich weiß nicht, ob das hier die Rechenfähigkeit erhöht oder ob es hier um pure Ideologie geht. Eines zeigt es mir ganz genau: Wir müssen mehr tun für die Bildung in diesem Land."
>
> **Aufgabe 1:**
>
> 2004 kostete ein Brötchen 40 Ct. Für den Weizenanteil erhielt der Bauer weniger als 2 Ct. Was sagst du dazu?
>
> **Aufgabe 2:**
>
> Der Betrag, den der Bauer für 1 l Milch bekommt, ist seit 20 Jahren immer mehr gesunken. Ein Traktor, der 1980 etwa 35 000 DM gekostet hat, kostete im Jahr 2000 aber etwa 35 000 €. Was sagst du dazu? 2 DM entsprechen ungefähr einem €.

(6) Schauplatz Schule: Elternabend

Die Eltern blättern beim Elternabend ein neuartiges Mathematikbuch für ihre Schulanfänger durch. Erstaunter Kommentar eines Elternpaars (beide promovierte Mathematiker):

> *„Das ist ja richtige Mathematik!"*

(7) Schauplatz Freizeit: Tribüne eines Fußballstadions

Ein Zuschauer vertreibt sich vor Beginn eines Bundesligaspiels die Zeit mit dem Lösen von Sudokus. Sein Nachbar, der beobachtet hat, wie schnell die fehlenden Ziffern gefunden werden, spricht ihn an:

> „Na, Sie sind ja der geborene Mathematiker!" Antwort: „Ich Mathematiker? Das wüsst' ich aber. Nee, das hier is' nich' Mathe."

(8) Schauplatz Wissenschaft: Erfahrungen eines Nobelpreisträgers

Gerhard Binnig, Nobelpreis in Physik 1986:

> „Kreativität an unseren Schulen? – Meine Behauptung ist, dass wir [an Schulen und Universitäten] Kreativität überhaupt nicht trainieren.

(9) Schauplatz Wirtschaft: Berufliche Bildung

Aus dem Vorwort einer Broschüre des Instituts der deutschen Wirtschaft über „Kreativität in der beruflichen Bildung":

> Angesichts des schärfer werdenden Wettbewerbs auf nationalen und internationalen Märkten sind die Wirtschaft und das Bildungswesen Deutschlands herausgefordert, ihre Konkurrenzfähigkeit zu erhalten und weiterzuentwickeln. Damit der Standort Deutschland im globalen Wettbewerb mithalten kann, fordern Politiker und Wirtschaftsvertreter in seltener Einmütigkeit Innovationen in Unternehmen, Forschung und Bildung. Als Voraussetzung für neue, intelligente Produkte und Dienstleistungen wird die Kreativität angesehen … Die Autoren sind sich darin einig, dass bereits bei der elterlichen Erziehung, in Schule und beruflicher Bildung die Fundamente für Kreativität gelegt werden.

(10) Schauplatz Familie: Früherziehung
Richard Feynman, Nobelpreis für Physik 1965:

> Als ich noch sehr klein war und in einem Hochstuhl am Tisch saß, pflegte mein Vater mit mir nach dem Essen ein Spiel zu spielen. Er hatte aus einem Laden in Long Island eine Menge alter rechteckiger Fliesen mitgebracht. Wir stellten sie vertikal auf, eine neben die andere, und ich durfte die erste anstoßen und beobachten, wie die ganze Reihe umfiel. So weit, so gut. Als Nächstes wurde das Spiel verbessert. Die Fliesen hatten verschiedene Farben, Ich musste eine weiße aufstellen, dann zwei blaue, dann eine weiße, zwei blaue, usw. Wenn ich neben zwei blaue eine weitere blaue setzen wollte, insistierte mein Vater auf einer weißen.
> Meine Mutter, die eine mitfühlende Frau ist, durchschaute die Hinterhältigkeit meines Vaters und sagte: „Mel, bitte lass den Jungen eine blaue Fliese aufstellen, wenn er es möchte. Er ist ja noch so klein.“ Mein Vater erwiderte: „Nein, ich möchte, dass er auf Muster achtet. Das ist das Einzige, was ich in seinem jungen Alter für seine mathematische Erziehung tun kann. Wenn ich einen Vortrag über die Frage „Was ist Mathematik?“ halten müsste, hätte ich damit die Antwort schon gegeben: Mathematik ist die Wissenschaft von den Mustern.“

4.2 Mathematik als Wissenschaft von Mustern und die Beziehung dieses Mathematikbildes zu den Bildungsstandards

Die obigen Beispiele zeigen, dass in der Gesellschaft die Vorstellungen über Mathematik, Mathematiklernen und Lernen im Allgemeinen weit auseinanderklaffen. Es ist bei dieser Sachlage nicht verwunderlich, dass aus diesem Grund auf allen Ebenen erhebliche Reibungsverluste entstehen, die den Erfolg des Mathematikunterrichts insgesamt stark beeinträchtigen. *Um die Umsetzung der Bildungsstandards zu sichern, ist es daher zwingend notwendig, das Bild von Mathematik, das den Bildungsstandards zugrundeliegt, zusammen mit den Bildungsstandards ins öffentliche Bewusstsein zu heben*. Nur dann ist gewährleistet, dass die neuen Aufgabenformate und Lehr-/Lernformen, die den Standards entsprechen, nicht als methodisch-didaktische Kosmetik missverstanden werden, sondern die Tiefenstrukturen des Unterrichts erreichen und ihn vom „wohl verstandenen Fach“ her verändern.

Im Folgenden wird zuerst das anzustrebende Mathematikbild allgemein beschrieben und dann anhand der Beispiele aus Abschnitt 1 illustriert.

Mathematik als Wissenschaft von Mustern

Über die Frage „Was ist Mathematik?“ hat es in den letzten Jahrzehnten unter Mathematikern und Mathematikdidaktikern eine intensive Diskussion gegeben. In den fünfziger und sechziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts wurde folgende Antwort gegeben (Brockhaus-Enzyklopädie, Stichwort „Mathematik“):

> **„Mathematik …** *eine der ältesten Wissenschaften, hervorgegangen aus den Aufgaben des Zählens und Messens, der praktische Fragestellungen zugrundelagen, zu deren Behandlung ursprünglich Zahlen und geometrische Figuren herangezogen wurden … Bis heute erhält die Mathematik starke Impulse aus dem Versuch, mit mathematischen Mitteln zur Beschreibung naturwissenschaftlicher, ökonomischer u. a. Vorgänge beizutragen. Der Aufgabenbereich der Mathematik wurde mit der Abstrahierung von der ursprünglichen Bedeutung der untersuchten Objekte wesentlich erweitert und führte zu einer 'Wissenschaft von den formalen Systemen¨. Danach versteht man unter der* ***modernen Mathematik*** *die Wissenschaft von den abstrakten Strukturen und logischen Folgerungen, die durch Festlegung von wenigen Grundannahmen über Relationen und Verknüpfungen zwischen den Elementen einer Menge bestimmt werden … Die Mathematik ist gekennzeichnet durch eine hohe Präzision ihres Begriffssystems, Strenge ihrer Beweismethoden und einen stark deduktiven Charakter ihrer Darlegung … .“*

Die „moderne Mathematik“ („Mengenlehre“) bildete den Hintergrund für weltweite Lehrplan- und Studienplanreformen in den Jahren 1960–1975. Nach dem Scheitern dieser Reformen kam es in der Philosophie der Mathematik zu einer Neubesinnung und Neuorientierung. Man konnte dabei zurückgreifen auf eine mathematische Praxis jenseits des Formalismus, die während der Hochblüte der „modernen Mathematik“ schon klar beschrieben, aber in ihrer Bedeutung seinerzeit kaum erkannt wurde. In seinem Buch „Prelude to Mathematics“ bezeichnete Sawyer bereits 1955 die Aufgabe der Mathematik als „Klassifikation und Studium aller möglichen Muster“. Unter „Muster“ (engl.: *pattern*) verstand er dabei *„jegliche Art von Regelmäßigkeit, die der menschliche Geist erkennen kann“* (Sawyer 1982, S. 12).

Devlin, einer der einflussreichsten zeitgenössischen Autoren, hat die heutige Sichtweise von Mathematik unter Bezug auf Sawyer folgendermaßen beschrieben:

> *In den letzten zwanzig •ahren ist eine Definition [von Mathematik] aufgekommen, der wohl die meisten heutigen Mathematiker zustimmen würden: Mathematik ist die Wissenschaft von den Mustern. Der Mathematiker untersucht abstrakte „Muster" – Zahlenmuster, Formenmuster, Bewegungsmuster, Verhaltensmuster und so weiter. Solche Muster sind entweder wirkliche oder vorgestellte, sichtbare oder gedachte, statische oder dynamische, qualitative oder quantitative, auf Nutzen ausgerichtete oder bloß spielerischem Interesse entspringende. Sie können aus unserer Umgebung an uns herantreten oder aus den Tiefen des Raumes und der Zeit oder aus unserem eigenen Innern (Devlin 1° ° 8, S. 3-4).*

Alle Sätze, Formeln und Algorithmen der Mathematik sind in diesem Sinn „Muster". So sagt der Satz „Die Winkelsumme im Dreieck ist 180°" etwas für *alle* Dreiecke in der (Euklidischen) Ebene aus, die binomischen Formeln $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ gelten für *alle* Paare von Zahlen und die schriftlichen Rechenverfahren sind auf *alle* natürlichen Zahlen anwendbar.

Die regelmäßige Wiederholung gleicher Formelemente ist auch bei der umgangssprachlichen Verwendung des Wortes „Muster" ersichtlich: Ein Muster kann (1) eine Vorlage sein, nach der etwas mehrfach hergestellt wird (z. B. ein Warenmuster), oder (2) ein Vorbild, das als „mustergültig" und nachahmenswert gilt, oder (3) die Abfolge eines oder mehrerer Motive in einem Kunstwerk, einem technischen Objekt oder im Verhalten (z. B. Ornament, Strickmuster, Verhaltensmuster).

In der Wissenschaft wird unter einem „Muster" ganz allgemein jedes wiederholt zu beobachtende regelhafte Phänomen verstanden. In der Brockhaus-Enzyklopädie wird die Bedeutung von „Pattern" in den Sozialwissenschaften und in der Sprachwissenschaft z. B. folgendermaßen erläutert:

> **„Pattern** … ein bestimmtes (ritualisiertes oder institutionalisiertes) Verhaltensmuster, eine soziale Grundstruktur, ein Denkmodell, eine gegliederte Anordnung oder ein aus bestimmten, immer wiederkehrenden Elementen zusammengefügtes Ablaufschema …" bzw. „… ein Strukturmodell, nach dem eine unbegrenzte Anzahl gleich gebauter Sätze mit unterschiedlichen lexikalischen Elementen gebildet werden kann … ."

Das Denken in Mustern bedeutet eine entscheidende Steigerung der Denkökonomie, weil viele Einzelfälle mit einem Schlag gemeinsam erfasst werden können. Unser ganzes kognitives System ist auf Muster ausgerichtet, denn das Gehirn wäre gar nicht in der Lage, jeden Einzelfall gesondert zu behandeln. Erkennen basiert immer auf Musterbildung. Die Begriffe, die wir benutzen, sind allgemeiner Natur. In der Mathematik wird die Abstraktion aber bewusst zum Programm erhoben und so weit wie nur möglich getrieben. Mithilfe mathematischer Begriffe können daher auch ganz verschieden erscheinende Dinge unter einen Hut gebracht werden. Insofern ist für dieses Fach die Bezeichnung „Wissenschaft von Mustern" gerechtfertigt.

Die Denkökonomie, die mit „Mustern“ einhergeht, ist auch für das Lernen von entscheidender Bedeutung: Je mehr ein Kind einzelne Zahlen, einzelne Figuren, einzelne Rechnungen, einzelne Wissenselemente und Fertigkeiten, usw. „unter einen Hut bringen“ kann, desto geringer wird sein Gedächtnis belastet, desto leichter fällt ihm die Übersicht und desto gezielter kann es seine Kenntnisse einsetzen.

An dieser Stelle wird oft eingewandt, dass es ein Kennzeichen leistungsstarker Kinder sei, in Mustern zu denken, und dass schwächere Kinder dazu nicht in der Lage seien. Diese Argumentation ist einseitig. Sinnvoller erscheint es, die Beziehung zwischen größerer Leistungsfähigkeit und der Nutzung von Mustern als wechselseitig anzusehen: Leistungsstarke Kinder sind gerade deshalb leistungsstark, weil sie gelernt haben, Muster zu nutzen. Je mehr es gelingt, auch schwächeren Kindern ein Verständnis für Muster zu vermitteln, desto ökonomischer können auch sie denken und desto bessere Lernfortschritte können auch sie machen. Die Erfahrungen zeigen im übrigen, dass viele Kinder, denen das Rechnen schwerfällt, erstaunliche Fähigkeiten zeigen, wenn es darum geht, Muster in Daten zu entdecken, die im Unterricht gemeinsam zusammengetragen worden sind.

Im Hinblick auf das Lernen ist folgende Tatsache wichtig: Grundlegende Muster müssen zu einem bestimmten Teil definiert und vorgegeben werden, wofür man vorwiegend die Bezeichnung „Struktur“ (oder in der höheren Mathematik „Raum“) verwendet. Auf dieser Grundlage werden im Forschungsprozess weitere Muster entdeckt, beschrieben, begründet, unter den Forschern kommuniziert und zur Lösung realer Probleme genutzt. Mathematik wird hier als produktive Tätigkeit sichtbar.

Es ist das Verdienst von Hans Freudenthal, die Bedeutung dieser Tatsache für die Didaktik klar erkannt zu haben (Freudenthal 1973, S. 110):

> „Es ist richtig, dass man Worte wie Mathematik, Sprache, Kunst in doppelter Bedeutung verwendet. Bei der Kunst ist es ganz klar; es gibt die fertige Kunst, die der Kunsthistoriker studiert, und es gibt die Kunst, die der Künstler betreibt. Dass es mit der Sprache ähnlich steht, scheint nicht so auffallend zu sein. Sprachwissenschaftler betonen es jedenfalls ausdrücklich und nennen es eine Entdeckung de Saussures. Dass es neben der fertigen Mathematik noch Mathematik als Tätigkeit gibt, weiß jeder Mathematiker unbewusst, aber nur wenigen scheint es bewusst zu sein, und da es nur selten betont wird, wissen Nichtmathematiker es gar nicht … Dass man keinen Unterrichtsstoff dem Schüler als Fertigfabrikat aufdrängen soll, dürfte heutzutage weithin akzeptiert werden … Nacherfundene Kenntnisse und Fertigkeiten werden besser verstanden und schärfer eingeprägt als solche, die weniger aktiv erworben wurden.“

Die überragende Bedeutung der in den Bildungsstandards ausgewiesenen allgemeinen mathematischen Kompetenzen besteht nun darin, dass sie zentrale mathematische Prozesse bei der mathematischen Tätigkeit erfassen – im Forschungsprozess wie im Lernprozess. Daher kommt ihnen auf allen Stufen *eine führende Rolle für die Umsetzung der Bildungsstandards und für die Vermittlung eines angemessenen Bildes von Mathematik zu. Die inhaltsbezogenen Kompetenzen erhalten mathematisches Leben nur in Verbindung mit den allgemeinen Kompetenzen.*

Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen sind eine Fortschreibung der bereits 1975 von Heinrich Winter formulierten „allgemeinen Lernziele", mit denen die wesentlichen Schritte bei der Untersuchung einer „Situation" noch deutlicher erfasst werden (Winter 1975):

- *„Mathematisieren":* Die durch bestimmte Daten gegebene Situation wird zuerst mithilfe mathematischer Begriffe (Zahlen, Gleichungen, geometrische Formen, Funktionen, ...) beschrieben („simuliert").
- *„Explorieren":* Mit diesen Begriffen kann man nach bestimmten Regeln operieren und dabei weitere Daten gewinnen. Ziel ist die Entdeckung von Mustern und/oder deren Nutzung zur Lösung von Aufgaben.
- *„Argumentieren":* Im dritten Schritt gilt es, die vermuteten Muster zu begründen bzw. die Lösungswege mithilfe von Mustern zu erklären.
- *„Formulieren":* Schließlich werden die Erkenntnisse mündlich und/oder schriftlich dargestellt und mitgeteilt.

Das Verständnis von Mathematik als Wissenschaft von Mustern wirft auch Licht auf die Beziehung zwischen der „reinen" und der „angewandten" Mathematik. Auch wer nur an der Mathematisierung realer Situationen interessiert ist, kommt um die Untersuchung innermathematischer Fragestellungen *um ihrer selbst willen* nicht herum, denn nur auf diese Weise kann ein „spielerischer Überschuss" von Mustern erworben werden, der für erfolgreiches Mathematisieren erforderlich ist. Die großartigen Erfolge der Mathematik sind wesentlich darauf zurückzuführen, dass viele ihrer Theorien nach innermathematischen Kriterien entwickelt wurden und dann für die Umwelterschließung zur Verfügung standen. Mathematische Muster und Strukturen kommen streng genommen in der Realität gar nicht vor, sondern sind theoretische Konstrukte, die in die Realität „hineingelesen" werden. Man kann bei Anwendungen der Mathematik zwar einzelne Zahlen, einzelne Einmaleinsaufgaben und einzelne Rechnungen interpretieren, aber nicht die Menge *aller* Zahlen, nicht das *gesamte* Einmaleins und nicht das Rechensystem *als* Ganzes.

Damit diese Strukturen für die mathematische Bearbeitung zugänglich werden, bedarf es *künstlicher* Verkörperungen wie z. B. Zwanzigerfeld, Hundertertafel, Zahlengerade, Einmaleinstafel, Stellenwerttafel und Plättchen. Diese Repräsentationen sind trotz ihres theoretischen Charakters aber auch von großer praktischer Bedeutung: Sie eignen sich gut, um reale Situationen zu modellieren.

Bereits um einfache Sachaufgaben verstehen zu können, kommt es ganz wesentlich darauf an, Muster in die Sachsituation hineinzulesen, die im Text gar nicht genannt sind. Bei der Lösung müssen die jeweils genannten Daten in einen größeren Zusammenhang gebracht und mathematisch verknüpft werden. Dies gelingt umso leichter, je mehr Muster zur Verfügung stehen und je mehr man gelernt hat, in Beziehungen zu denken (s. dazu auch „Lösung einer Sachaufgabe“, S. 62 f.). Der ungarische Mathematiker ALFRED RÑNYI hat ARCHIMEDES in einem fiktiven „Dialog über die Anwendungen der Mathematik“ in diesem Sinn folgende Worte in den Mund gelegt (RÑNYI 1967, S. 53):

> *„Die Römer werden die Mathematik niemals wirklich verstehen ihr Trachten ist zu sehr auf das Praktische gerichtet, für abstrakte Theorien haben sie keinen Sinn … Man kann die abstrakte Mathematik nicht von ihren Anwendungen trennen. Wer die abstrakte Mathematik ablehnt, versperrt sich den Weg zu ihren Anwendungen. Wer die Mathematik mit Erfolg anwenden will, muss Phantasie besitzen und träumen können.“*

Konkretisierung an den Beispielen des ersten Abschnitts

Die in Abschnitt 4.1 beschriebenen Episoden sind von diesem Mathematikbild aus folgendermaßen zu bewerten:

Schauplatz (1): Die angemessene Methode zur Lösung der Zahlenmaueraufgabe ist das systematische Probieren. Die fehlende Zahl in der zweiten Zeile von oben wird direkt ermittelt: 90 – 38 = 52. Auf direktem Weg kann man zwar nicht weiterrechnen, aber man kann an irgendeiner Stelle eine Zahl versuchsweise ansetzen, etwa in dem Feld links unten, z. B. 10. Diesen sogenannten „falschen Ansatz“ (lat.: *regula falsi*) nutzten die Mathematiker mit großem Erfolg schon vor Tausenden von Jahren. Die Berechnung der weiteren Felder von unten nach oben ergibt in der zweiten Zeile von unten die Zahlen 20, 18 und 30. Die Summe 18 + 30 für das Feld darüber ist aber nicht 52, wie es sein soll, sondern nur 48, ein Wert, der aber schon erfreulich nahe an 52 liegt. Man verändert dann die Zahl links unten z. B. zu 9, und erhält damit in der zweiten Zeile von unten die Zahlen 19, 19 und 31. Jetzt ist 19 + 31 = 50, eine Zahl, die noch näher an 52 liegt. Eine weitere Verkleinerung der Zahl links unten auf 8 führt zur Lösung. Dieser Lösungsweg entspringt der allgemeinen mathematischen Kompetenz *„Problemlösen“*.

Schauplatz (2): Der sogenannte „Zehnerübergang im „Teilschrittverfahren“ beruht auf einer ganz bestimmten Verwendung des Assoziativgesetzes der Addition: Der zweite Summand wird passend zerlegt, damit das Zwischenergebnis 10 entsteht. Beispiel: 6 + 6 = 6 + 4 + 2 = 12. Die Festlegung dieses Rechenwegs als Norm widerspricht aber dem Wesen der Mathematik. Das Assoziativgesetz kann ja auch noch ganz anders verwendet und auch andere Gesetze können noch herangezogen werden, um Ergebnisse von Aufgaben zu ermitteln. Für die Verwendung von Rechengesetzen gibt es in der Mathematik keine festen Vorschriften, im Gegenteil: Die Arithmetik und die Algebra leben von der freien Anwendung der Rechengesetze. Bei der Aufgabe $6 + 6$ etwa kann man sich auf die Aufgabe $5 + 5 = 10$ stützen und dann 2 hinzufügen. Bei $13 - 9$ kann man zwar zuerst 3 und dann noch 6 abziehen, aber man kann die 9 auch von 10 wegnehmen und hat als Ergebnis dann $1 + 3 = 4$, was in diesem Fall viel einfacher ist. Es gibt also nicht *den* Zehnerübergang, sondern Zehnerüber-*gänge* (Plural!).

Schauplatz (3): Die strikte Beschränkung auf bestimmte Zahlräume ist nicht sinnvoll. Gute mathematische Aufgabenstellungen ermöglichen immer individuelle Grenzüberschreitungen, ja regen sie sogar an. Der zwanglose Blick in die „Zone der nächsten Entwicklung“ ist für das Lernen hilfreich, darf aber nicht forciert werden. Das einzelne Kind muss selbst entscheiden können, wie weit es gehen kann und möchte.

Schauplatz (4): Dieses Beispiel zeigt, dass die Aufklärung über die Wurzeln mathematischen Denkens in der frühen Kindheit verstärkt werden muss.

Schauplatz (5): Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen signalisieren eine klare Erweiterung der Unterrichtsziele über bloßes „Rechnen“ hinaus. Das „Rechnen“ wird aber keineswegs vernachlässigt (s. den Inhaltsbereich *Zahlen und Operationen* in den Bildungsstandards). Zum Modellieren gehört auch die kritische Bewertung von Sachverhalten (s. Abb.). Der Milchpreis ist seit Jahren ein brisantes Thema.

Schauplatz (6): Diese Episode zeigt, dass sogar mathematisch gebildete Eltern überrascht sind, wenn bereits in der Grundschule echte Mathematik, nicht nur „Rechnen“, betrieben wird.

Schauplatz (7): Die Bearbeitung von Sudokus ist sehr wohl eine mathematische Tätigkeit im Sinne der obigen Beschreibung. Man kann sich nur wünschen, dass die Fantasie beim Herausfinden der richtigen Zahlen, die unermüdliche und hartnäckige Suche, die Erkennung und Korrektur von Fehlern usw. als Vorbild für die Beschäftigung mit Mathematik in der Schule verstanden wird. Im Vergleich mit dem Schauplatz (1) z.B. heißt das, dass „Zahlenmauern“ als eine Art Sudoku gesehen und bearbeitet werden sollten.

Schauplatz (8): Diese Klage ist für den Mathematikunterricht in besonderer Weise berechtigt. Der Ausweg aus der Misere führt nur über ein anderes Mathematikbild.

Schauplatz (9): Solche Stimmen aus der Wirtschaft sind leider selten und die Mathematik wird, wenn „Kreativität“ gefordert wird, kaum einbezogen, da in der beruflichen Bildung ein verengtes Mathematikbild vorherrscht.

Schauplatz (10): Diese Episode unterstreicht die Bedeutung einer frühen Heranführung von Kindern an die wahre Mathematik und gibt gleichzeitig ein schönes Beispiel dafür, wie die mathematische Frühförderung aussehen kann.

4.3 Die Nutzung von Mustern beim Lernen und Üben im Themenbereich *Multiplikation natürlicher Zahlen*

In diesem Abschnitt sollen aus den Überlegungen des vorhergehenden Abschnitts konkrete Folgerungen für die Unterrichtspraxis gezogen werden. Nach unseren Erfahrungen gelingt dies am besten durch ausgearbeitete Praxisbeispiele, die von den Lehrerinnen und Lehrern leicht nachvollzogen, ohne besonderen Aufwand in der Praxis „inszeniert“ und dabei getestet werden können. Die folgenden Lernumgebungen wurden bewusst aus einem einzigen Themenbereich gewählt, um deutlich zu machen, dass *Muster und Strukturen* nicht nur punktuelle Bedeutung haben, sondern die Behandlung von Themenbereichen insgesamt bestimmen und für die Herausarbeitung durchgehender curricularer Linien genutzt werden können. Der Begriff „Lernumgebung“ wird hier bewusst verwendet, weil er die freieren Lehr-/Lernformen gut zum Ausdruck bringt, die durch die allgemeinen Kompetenzen der Bildungsstandards gefordert werden.

Der Themenbereich „Multiplikation“ gehört zur inhaltlichen Leitidee *Zahlen und Operationen* der Bildungsstandards und zieht sich durch alle Grundschuljahre. Im Unterpunkt *Rechenoperationen verstehen und beherrschen* ist die Kompetenz *Rechengesetze erkennen, erklären und benutzen* aufgeführt. Diese Kompetenz ist nicht nur inhaltlich, sondern auch im Hinblick auf die allgemeinen Kompetenzen von besonderer Bedeutung. Die Rechengesetze sind nämlich die grundlegenden Strukturen (Muster) der Multiplikation, von denen aus das Lernen, Üben und Anwenden der Multiplikation in wachsenden Zahlräumen in Verbindung mit allgemeinen Kompetenzen gesteuert werden kann.

Für die Multiplikation gelten folgende Gesetze:

(1) Vertauschungsgesetz (Kommutativgesetz) $a \cdot b = b \cdot a$
(2) Verbindungsgesetz (Assoziativgesetz) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
(3) Verteilungsgesetz (Distributivgesetz) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

a, b und c sind dabei Variable, für die beliebige Zahlen eingesetzt werden können.

In dieser Form können die Gesetze in der Grundschule natürlich nicht behandelt werden. Sie werden aber mithilfe rechteckiger Punktfelder für Kinder leicht zugänglich.

Die Einführung des Einmaleins mithilfe von Punktfeldern

Der Themenbereich Multiplikation wird im zweiten Schuljahr mit dem Einmaleins eröffnet. Aus gutem Grund knüpft man dabei an die Umwelt an. Reale Beispiele eignen sich gut, um zu verdeutlichen, dass eine Malaufgabe die verkürzte Darstellung einer Summe mit gleichen Summanden ist.

Von einer eigentlichen *mathematischen* Behandlung des Einmaleins kann aber erst dann gesprochen werden, wenn eine schematische Darstellung von Malaufgaben zur Verfügung steht, an der man *alle möglichen Aufgaben und Beziehungen* zwischen ihnen aufzeigen kann.

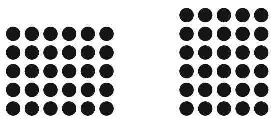
Winter hat als eine solche schematische Darstellung rechteckige Punktfelder (Punktmuster) vorgeschlagen (Winter 1984, S. 13):

> „Zur Vertiefung der Grundgedanken des multiplikativen Rechnens und vor allem zum Aufbau von Beziehungen zwischen verschiedenen Einmaleins-Sätzen (Netzstruktur des Wissens!) eignet sich kaum etwas so gut wie Umstrukturierungsübungen an rechteckigen Punktmustern (Kringelmustern)."

Bequeme Hilfsmittel für das Operieren an und mit Punktfeldern sind das Hunderterfeld und der „Malwinkel", ein Stück Karton, aus dem an einer Ecke ein Quadrat ausgeschnitten ist (Wittmann/Müller 1990, S. 12–13). Der Malwinkel wird so auf das Hunderterfeld gelegt, dass im Ausschnitt Punktfelder erscheinen. Durch Veränderung seiner Lage können Punktfelder aller Einmaleinsaufgaben abgegrenzt werden (s. S. 55, Abb. unten).

Die Überlegenheit rechteckiger Punktfelder zeigt sich nicht nur darin, dass die Addition gleicher Summanden auf einen Blick ersichtlich ist, sondern vor allem darin, dass damit die Rechengesetze, deren formale Darstellung für die Grundschule völlig ungeeignet ist, handelnd erfasst werden können.

(1) Vertauschungsgesetz:
Rechteckfelder kann man um 90° drehen. Die Reihenfolge der Faktoren wird dabei vertauscht, die Anzahl der Punkte bleibt aber unverändert (s. Abb.).

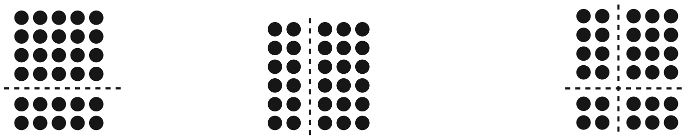


5 · 6   6 · 5

(2) Verbindungsgesetz:
Wenn sich ein Faktor (eine Seite eines Rechteckfelds) in ein Produkt aufspalten lässt, kann man das Feld entsprechend unterteilen, die Teile auf der anderen Seite anfügen und das Vertauschungsgesetz anwenden (s. Abb.).

(2 · 5) · 3   2 · (3 · 5)
2 · (5 · 3)

(3) Verteilungsgesetz:
Ein Rechteckfeld kann vertikal oder horizontal in zwei Rechteckfelder oder durch eine horizontale und vertikale Linie in vier Rechteckfelder zerlegt werden (s. Abb.).



$6 \cdot 5 = 4 \cdot 5 + 2 \cdot 5$ $6 \cdot 5 = 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3$ $6 \cdot 5 = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3$

Die Lernumgebung „Erarbeitung des Einmaleins am Hunderterfeld“ kann nun folgendermaßen beschrieben werden:
Inhaltliches Ziel: Berechnung der Ergebnisse von Einmaleinsaufgaben mithilfe der Addition
Demonstrationsmaterial: Hunderterfeld (Folie für OHP), Einmaleinswinkel (Karton)
Arbeitsmaterial: Hunderterfeld und Einmaleinswinkel (Karton)
Aktivitäten: Gemeinsam werden am OHP mit dem Malwinkel einige Malaufgaben gelegt und die Ergebnisse berechnet. Die Kinder legen dann selbst weitere Aufgaben und bestimmen die Ergebnisse.

Das heute allgemein übliche Hunderterfeld ist durch die vertikale und die horizontale Mittellinie in vier 5×5-Felder unterteilt, wie es dem Distributivgesetz entspricht. Dadurch wird die Zerlegung von Malaufgaben in Additionsaufgaben oder in leichtere Malaufgaben nahegelegt. Die Kinder können dabei auf ihre Kenntnisse bei der Addition zurückgreifen (s. Abb. unten). Auch umständlich erscheinende Rechenwege haben in diesem Stadium ihre Berechtigung.

$6 \cdot 5 = 25 + 5 = 30$
$6 \cdot 5 = 10 + 10 + 10 = 30$
$6 \cdot 5 = 12 + 12 + 6 = 30$

$9 \cdot 9 = 25 + 20 + 20 + 8 + 8 = 81$
$9 \cdot 9 = 100 - 10 - 9 = 81$
$9 \cdot 9 = 10 \cdot 9 - 9 = 90 - 9 = 81$

Allgemeine mathematische Kompetenzen *(Finden, Beschreiben, Begründen* und *Vergleichen von Rechenwegen)* kommen hier von selbst ins Spiel.

Im Rückblick sollte besprochen werden, welche Aufgaben „einfach" sind. Zu diesen gehören die Aufgaben „1 mal …", „… mal 1", „2 mal …" und „… mal 2" sowie „… mal 10" und „10 mal …", aber auch noch andere Aufgaben wie z. B. $5 \cdot 5$. Um zu erkennen, dass „10 mal eine Zahl" gleich „die Zahl mal 10" ist, muss das Vertauschungsgesetz herangezogen werden.
Beispiel: $10 \cdot 7 = 7 \cdot 10 = 70$.

Wir werden Punktfelder auch bei den folgenden Lernumgebungen heranziehen, möchten aber darauf hinweisen, dass sie keineswegs die einzige Darstellung für die Multiplikation sind. Das Abtragen gleicher Summanden auf der Zahlenreihe, das zur linearen Funktion führt, ist ebenso wichtig. Aus Raumgründen können wir in diesem Beitrag nur kurz darauf eingehen (Lösung einer Sachaufgabe, S. 62 f.).

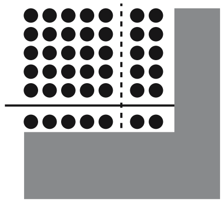
Operative Behandlung der Einmaleinsreihen

Dieser Zugang wurde von Arnold Fricke und Heinrich Besuden ausgearbeitet und ist inzwischen Standard. Es genügt daher, ihn nur kurz anzusprechen, um die Beziehung zu den Rechengesetzen deutlich zu machen.

Ausgangspunkt ist die Erkenntnis, dass es neben den ganz leichten Malaufgaben „1 mal …", „2 mal …" und „10 mal …" einen weiteren relativ leichten Aufgabentyp gibt, der umso leichter fällt, wenn vorher das Halbieren intensiv geübt worden ist: „5 mal …" ist die Hälfte von „10 mal …".

Wenn die Kinder die Ergebnisse der leichten Aufgaben…" („Kernaufgaben", „Königsaufgaben") „1 mal …", „2 mal…", „5 mal …" und „10 mal …" auswendig können, sind sie in der Lage, die Ergebnisse der anderen Malaufgaben durch Addition und Subtraktion zu berechnen (s. Beispiel unten 7er-Reihe).

$1 \cdot 7 = \mathbf{7}$	$6 \cdot 7 = \mathbf{35} + \mathbf{7} = 42$
$2 \cdot 7 = \mathbf{14}$	$7 \cdot 7 = \mathbf{35} + \mathbf{14} = 49$
$3 \cdot 7 = \mathbf{14} + \mathbf{7} = 21$	$8 \cdot 7 = \mathbf{70} - \mathbf{14} = 56$
$4 \cdot 7 = \mathbf{14} + \mathbf{14} = 28$	$9 \cdot 7 = \mathbf{70} - \mathbf{7} = 63$
$5 \cdot 7 = \mathbf{35}$	$10 \cdot 7 = \mathbf{70}$



$6 \cdot 7 = 5 \cdot 7 + 1 \cdot 7$

An Punktfeldern können diese Rechnungen im Anschluss an die vorhergehende Übung gut erklärt werden. Die Unterteilung des Hunderterfelds in vier Sektoren ist hierbei eine große Hilfe.

Wenn das Prinzip der Ableitung von „schweren" aus „leichten" Aufgaben an einigen Reihen erarbeitet worden ist, können es die Kinder selbstständig auf die anderen Reihen übertragen.

In einem ersten Durchgang werden die Ergebnisse der Kernaufgaben noch vorgegeben. Wenn die Kernaufgaben automatisiert sind, empfiehlt es sich, diese wichtigen Rechnungen in einem zweiten Durchgang noch einmal durchführen zu lassen.

Auch bei dieser Lernumgebung ergeben sich auf ganz natürliche Weise Anlässe für die Förderung allgemeiner Kompetenzen (*Problemlösen*, *Argumentieren* und *Kommunizieren*).

Operative Beziehungen zwischen Einmaleinsaufgaben

Diese Lernumgebung ist inspiriert durch das Kapitel „Investigations“ in Sawyer (1964, S. 172 ff.). Sie ist so reichhaltig, dass sie im Rahmen dieses Beitrags lediglich angedeutet werden kann. Wir beschränken uns auf einen Ausschnitt, der aber die Möglichkeiten eines Ausbaus erahnen lässt (s. Wittmann/Müller 1990, S. 122 ff.). Es wird vorausgesetzt, dass die Kinder das Einmaleins schon ein Stück weit beherrschen.
Inhaltliches Ziel: Übung des Einmaleins
Demonstrations- und Arbeitsmaterial: Hunderterfeld und Malwinkel
Aktivitäten: Man startet mit einer Malaufgabe der Form „1 mal x“, z. B. $1 \cdot 4$, und entwickelt daraus ein Päckchen nach folgender Regel (s. folgendes Beispiel): In jeder Zeile nehmen die Faktoren von einem Feld zum nächsten um je 1 zu. Jede Aufgabe in der zweiten Zeile entsteht aus der darüber stehenden dadurch, dass der erste Faktor um 1 erniedrigt und der zweite um 1 erhöht wird. Die Pünktchen am Schluss deuten an, dass das Päckchen fortgesetzt werden kann, wenn und so weit ein Kind das möchte.

1 · 4 =	2 · 5 =	3 · 6 =	4 · 7 =	5 · 8 =	6 · 9 =	7 · 10 =	...
0 · 5 =	1 · 6 =	2 · 7 =	3 · 8 =	4 · 9 =	5 · 10 =	6 · 11 =	...

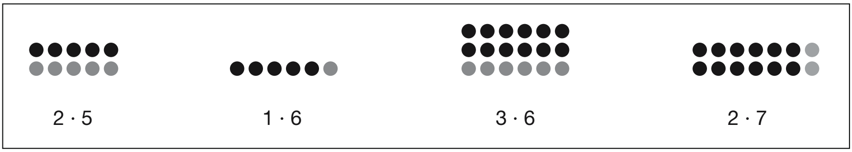
Wenn die Ergebnisse berechnet sind, zeigt sich ein Muster, das die Kinder ganz sicher entdecken werden, da es sehr auffällig ist (s. unten): Jedes Ergebnis in der zweiten Zeile ist um 4 kleiner als das Ergebnis der darüber stehenden Aufgabe. Damit ist eine Selbstkontrolle aus der Sache heraus möglich.

1 · 4 = 4	2 · 5 = 10	3 · 6 = 18	4 · 7 = 28	5 · 8 = 40	...
0 · 5 = 0	1 · 6 = 6	2 · 7 = 14	3 · 8 = 24	4 · 9 = 36	...

Um das Muster zu erklären, muss aufgezeigt werden, warum diese Beziehung allgemein gilt. Da nur in sozialer Interaktion ein Verständnis dafür entwickelt werden kann, was in der Mathematik eine Erklärung (ein Beweis) ist, müssen die Kinder bei ihren Argumentationsversuchen angeleitet werden.

In der Darstellung von Malaufgaben durch Punktfelder steckt die volle Information über die Multiplikation. Daher ist es möglich, das beobachtete Muster mithilfe von Punktfeldern zu begründen. Auf dieser Stufe kann kein Beweis in allgemeiner Form geführt werden. Es ist völlig ausreichend, wenn die Kinder den Beweisgedanken an mehreren Beispielen wiederholen und sich dabei mehr oder weniger klarmachen, dass bei jedem Beispiel „im Prinzip" die gleiche Überlegung angestellt wird. Dies kann in folgender Form geschehen:

Bei den ersten beiden Aufgaben des Päckchens ist der Unterschied 4 zwischen den Ergebnissen 4 und 0 offenkundig. Warum bleibt dieser Unterschied auch bei den folgenden Aufgaben bestehen? Um diese Frage zu beantworten, wird auf die linke Seite der Tafel das 2 · 5-Feld gezeichnet, auf die rechte Seite das 1 · 6-Feld (s. Abb.). Das linke Feld hat eine *Zeile* (mit 5 Punkten) mehr, das rechte eine *Spalte* (mit 1 Punkt) mehr: Der Unterschied zwischen 5 und 1 ist 4. Die Felder werden jetzt erweitert: links zu einem 3 · 6-Feld und rechts zu einem 2 · 7-Feld.



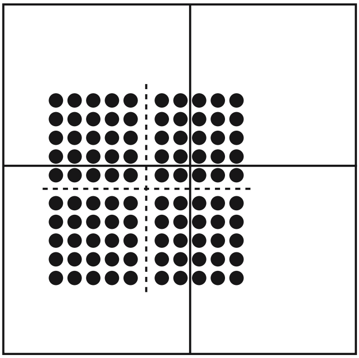
Wieder muss die „überschüssige" Zeile (6 Punkte) mit der „überschüssigen" Spalte rechts (2 Punkte) verglichen werden. Der Unterschied bleibt 4. Eine weitere Erweiterung führt zu den Feldern 4 · 7 und 3 · 8. Die „überschüssige" Zeile mit 7 Punkten hat wieder 4 Punkte mehr als die „überschüssige" Spalte mit 3 Punkten, usw. Von Punktfeld zu Punktfeld nimmt sowohl die „überschüssige" Zeile als auch die „überschüssige" Spalte um 1 zu. Der Unterschied bleibt konstant 4.

Auch wenn solche Begründungen von den Kindern nur mit Unterstützung der Lehrkraft geleistet werden können: allein der gründliche Umgang mit Punktfeldern als konkreten Darstellungen von Malaufgaben lohnt sich.

An diesem Beispiel zeigen sich die praktischen Vorteile von Lernumgebungen, die auf mathematischen Mustern fußen: Diese Lernumgebungen bieten umfangreiches Übungsmaterial sowohl für inhaltsbezogene Kompetenzen (hier für das Einmaleins) als auch für allgemeine Kompetenzen. Arbeitsblätter sind überflüssig. Die Kinder können die vorgegebene Regel leicht selbst abwandeln, z. B. die Aufgabenkette mit 1 · 3 oder 1 · 5 statt 1 · 4 starten, und sie können ihre Rechnungen an den entdeckten Mustern kontrollieren (echte Selbstkontrolle). Sie können die Regeln zur Erzeugung von Aufgaben auch selbst abwandeln.

Produktives Üben des Einmaleins mit dem Malkreuz

Die folgende schlichte Lernumgebung ist ein weiteres Beispiel dafür, wie mithilfe von Mustern eine große Zahl von Übungsaufgaben erzeugt und für eine echte Selbstkontrolle aus der Sache heraus gesorgt werden kann (Wittmann/Müller 1990, S. 133 ff.).
Inhaltliches Ziel: Übung des Einmaleins
Demonstrations- und Arbeitsmaterial: Hunderterfeld und Malwinkel, „Folienkreuz“, d. h. eine Transparentfolie, auf die mittig eine horizontale und eine vertikale Linie eingezeichnet sind.
Aktivitäten: Mithilfe des Folienkreuzes wird das Hunderterfeld dem Distributivgesetz entsprechend in vier Teilfelder unterteilt. Die „große“ Malaufgabe $10 \cdot 10$ wird damit in vier „kleine“ Malaufgaben zerlegt, deren Ergebnisse zusammen 100 ergeben müssen (s. Beispiel links).



·	7	3	
4	28	12	40
6	42	18	60
			100

Rechts davon ist die entsprechende Zerlegung mithilfe des Malkreuzes schematisch dargestellt.

Die Zahlen links außen und oben geben die horizontale bzw. die vertikale Zerlegung der Faktoren 10 an, die Zahlen innen die Ergebnisse der vier kleinen Malaufgaben, entsprechend den Teilfeldern der Zerlegung im linken Beispiel. Wenn richtig gerechnet wurde, müssen die beiden horizontalen Teilsummen ganze Zehner sein (im Beispiel $4 \cdot 10 = 40$ und $6 \cdot 10 = 60$) und zusammen 100 ergeben. Auch die vertikalen Teilsummen müssen ganze Zehner sein und zusammen 100 ergeben ($7 \cdot 10 + 3 \cdot 10 = 70 + 30 = 100$).

Die Kinder können sich mit dem Folienkreuz selbst Aufgaben stellen, sie in Malkreuze, deren Schema auf einem Arbeitsblatt vorgegeben ist, übertragen, die Ergebnisse berechnen und kontrollieren. Das Einmaleins wird auf diese Weise gründlich geübt, und es werden dabei Beziehungen zwischen den Aufgaben deutlich. Allgemeine Kompetenzen treten bei dieser Lernumgebung aber hinter die Übung des Einmaleins zurück.

Statt des Hunderterfeldes kann auch ein anderes Punktfeld mithilfe des Folienkreuzes zerlegt werden, das mit dem Malwinkel am Hunderterfeld gelegt wird.

Multiplikative Rechenketten

Rechenketten bilden einen besonders ergiebigen Kontext für die Förderung allgemeiner Kompetenzen. Sie bieten viele Möglichkeiten zur Variation, was wiederum den Vorteil hat, dass Prozesse des *Problemlösens, Entdeckens, Beschreibens* und *Begründens* in ähnlicher Form vielfach wiederholt werden. Auch diese allgemeinen Kompetenzen bedürfen ja der Übung.

JANA ENGBERT (2006) hat in einem Unterrichtsexperiment in einem 3. Schuljahr Rechenketten einer bestimmten Bauart benutzt (s. folgendes Beispiel).

Start Ziel

$$\square \xrightarrow{\cdot\, n} \square \xrightarrow{\pm\, k \cdot n} \square \xrightarrow{:\, n} \square$$

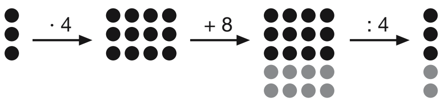
Wenn n und k variiert und beide Rechenzeichen benutzt werden, ergibt sich eine große Vielfalt von speziellen Ketten (s. folgendes Beispiel).

$$\square \xrightarrow{\cdot\, 2} \square \xrightarrow{+\, 2} \square \xrightarrow{:\, 2} \square$$

$$\square \xrightarrow{\cdot\, 4} \square \xrightarrow{+\, 8} \square \xrightarrow{:\, 4} \square$$

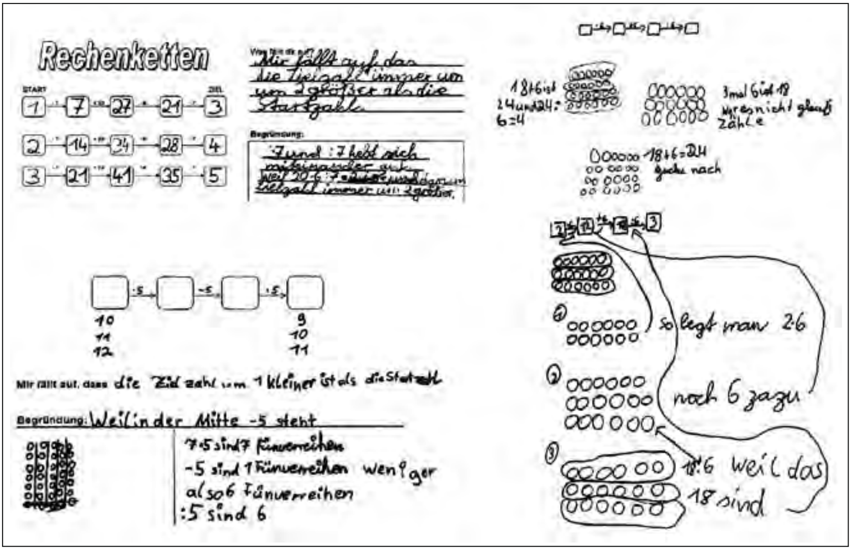
$$\square \xrightarrow{\cdot\, 3} \square \xrightarrow{-\, 3} \square \xrightarrow{:\, 3} \square$$

Wenn man mit verschiedenen Zahlen startet, erkennt man ein auffälliges Muster: Die Zielzahl ist immer um k größer bzw. kleiner als die Startzahl.



Auch dieses Muster kann mithilfe von Punktfeldern begründet werden :
In dem Unterrichtsexperiment bearbeiteten die Kinder eine Reihe von Rechenketten dieser Art und versuchten, die beobachteten Muster zu beschreiben und zu begründen.

Die Abbildung auf der S. 61 gibt einen Eindruck von den Versuchen der Kinder.



Die Autorin zieht aus ihrem Experiment folgende Schlüsse (ENGBERT, S. 33):

> *„Die Entwicklung [allgemeiner Kompetenzen] wird durch soziale Interaktion während der Phase des Entdeckens, Beschreibens, Begründens und Erfindens gefördert. Organisatorisch erfolgte diese Interaktion vor allem in Form von gemeinsamen Unterrichtsgesprächen im Klassenverband und im Rahmen von Rechenkonferenzen in Kleingruppen. Die Durchführung der Rechenkonferenzen musste anfänglich noch angeleitet werden, mit der Zeit ergab sich aber eine immer größer werdende Selbstständigkeit der Kinder … Das Nachvollziehen der Beschreibungs- und Begründungsansätze und das Hineinversetzen in das Denken anderer Kinder stellte sich für viele Kinder als schwierig heraus. Das Anknüpfen und Eingehen auf vorher Gesagtes sowie das aktive Zuhören sollten auch im Rahmen anderer Fächer und Lernbereiche noch stärker gefördert werden …“.*

Produktives Üben der schriftlichen Multiplikation

Auch die Übung der schriftlichen Multiplikation lässt sich mit der Erforschung von Mustern verbinden, wie die folgende Lernumgebung zeigt, die mit ganz geringen Mitteln auskommt. Für sie wird keinerlei Arbeitsmaterial benötigt.

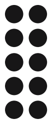
Die Kinder führen mit einer Reihe von Startzahlen die Rechungen folgender Rechenketten aus (s. Beispiele S. 62 links und rechts):

1. Die gewählte Zahl wird zuerst mit 2, das Ergebnis mit 5 multipliziert.
2. Die gewählte Zahl wird zuerst mit 5 multipliziert, das Ergebnis noch einmal mit 5 und das neue Ergebnis mit 4.

327 · 2	654 · 5		327 · 5	1635 · 5	8175 · 4
654	3270		1635	8175	32700

Wenn die Kinder mehrere Beispiele gerechnet haben, werden sie feststellen, dass die Zielzahl der ersten Rechenkette immer das 10fache der Startzahl ist und die Zielzahl der zweiten Rechenkette das 100fache der Startzahl – vorausgesetzt, sie haben sich nicht verrechnet.

Zur Begründung der Muster kann man bei diesen großen Zahlen jetzt nicht mehr auf Punktfelder zurückgreifen, bei denen jeder Punkt 1 bedeutet. Man kann aber Punktfelder neu interpretieren: Ein dicker Punkt bedeutet die Zahl 327 (oder irgendeine andere Zahl). Zwei dicke Punkte nebeneinander das Doppelte dieser Zahl. Wenn man 5 Doppelpunkte untereinander setzt, erhält man 10 Punkte, d. h. das 10fache der Zahl.



327	327
327	327
327	327
327	327
327	327

Statt eines Punktes kann man auch die Zahl selbst hinschreiben. „ …mal 2“ bedeutet, die Zahl zweimal anzuschreiben. Wenn das Ergebnis der Verdopplung fünfmal hingeschrieben ist, steht die Zahl insgesamt 10-mal da (s. Beispiel rechts). Analog lässt sich das Muster der zweiten Rechenkette begründen: Man denkt sich für jeden Punkt des Hunderterfeldes die Startzahl. Dann steht die Startzahl links oben fünfmal da, im linken oberen Quadranten des Hunderterfeldes 5 · 5-mal (25-mal) und insgesamt 4 · 25-mal (100-mal).

Lösung einer Sachaufgabe

Zum Abschluss dieses Abschnitts soll an einem Beispiel noch gezeigt werden, wie Muster der Multiplikation bei der Lösung von Sachaufgaben angewandt werden können. Mit diesem Beispiel wird gleichzeitig die zweite Gruppe von Kompetenzen des Bereichs *Muster und Strukturen* illustriert (s. Einleitung dieses Kapitels). Wir greifen den Unterpunkt „Einfache Sachaufgaben zur Proportionalität lösen“ heraus. Die folgende Aufgabe ist eine Variation einer niedersächsischen Vergleichsarbeit vom Jahre 2006:

Beispiel
Einmal in der Woche müssen alle Raubtiere im Zoo fasten. An jedem anderen Tag bekommt ein Löwe etwa 7 kg Fleisch. Der Zoo kauft von einem Schlachthof ein großes Stück Fleisch, das 350 kg wiegt. Wie lange können 2 Löwen damit versorgt werden?

Zur Lösung stellt man sich vor, dass ein Löwe an 6 der sieben Tage einer Woche 7 kg Fleisch frisst. Mithilfe des Musters „7er-Reihe“ berechnet man, dass dies in einer Woche $6 \cdot 7$ kg = 42 kg sind. Der zweite Löwe benötigt ebenso viel Fleisch, zusammen benötigen die beiden Löwen das Doppelte von 42 kg, also 84 kg. Da sie Woche für Woche 84 kg Fleisch fressen, ist für die weitere Rechnung das Muster der 84er-Reihe maßgeblich. Diese Reihe muss durchlaufen werden bis zum größten Vielfachen, das unter 350 kg liegt. Die Frage lautet: Wie oft passen 84 kg in 350 kg hinein?

Diese Frage kann durch eine halbschriftliche Division beantwortet werden (s. Rechnung rechts):
Ergebnis der Rechnung: 4 Wochen und 1 Tag.

```
     350 : 84 = 4  R. 14
     168 : 84 = 2
     ------------
R.   182
     168 : 84 = 2
     ------------
R.    14
```

Da bei dieser Sachsituation nur Überschläge einen Sinn haben, lautet das real sinnvolle Ergebnis „4 Wochen“.

Wer das Rechnen im Tausender gut beherrscht, kann das Ergebnis aber vorher schon überschlagen und auch mit weniger Aufwand erhalten: 84 kg ist weniger als 100 kg. Also reicht das Fleisch mehr als 3 Wochen. 84 kg ist etwas weniger als 90 kg. Da 90 kg $\cdot$ 4 = 360 kg ist (Zehnereinmaleins) und 350 kg nur wenig darunter liegt, könnte das Fleisch 4 Wochen reichen. Jetzt rechnet man halbschriftlich $4 \cdot 84$ kg = 320 kg + 16 kg = 336 kg. Das sind 14 kg weniger als 350 kg. Man könnte auch 84 kg zuerst verdoppeln, 168 kg, und diesen Wert noch einmal verdoppeln und würde auf andere Weise 336 kg erhalten.

Wie man sieht, bildet das halbschriftliche Rechnen im Tausender die Verständnisgrundlage für die Lösung dieser Sachaufgabe. Die Proportionalität tritt in Form von Vielfachen-Reihen auf (7er-Reihe, 84er-Reihe). Es empfiehlt sich, im Unterrichtsgespräch den funktionalen Zusammenhang mithilfe einer Tabelle zu verdeutlichen.

	1 Tag	1 Woche	2 Wochen	4 Wochen	
1 Löwe	7 kg	42 kg	84 kg	168 kg	
2 Löwen	14 kg	84 kg	168 kg	336 kg	

4.4 Schlussbemerkungen

Im Rückblick auf die Abschnitte 4.2 und 4.3 möchten wir abschließend einige für die Ausrichtung des Unterrichts auf die Bildungsstandards und auf das mit ihnen verbundene Mathematikbild wichtige Aspekte herausstellen.

(1) Im Vergleich mit der Charakterisierung der Mathematik als „Wissenschaft von Mustern“ in Abschnitt 4.2 wirken die Beispiele in Abschnitt 4.3 winzig, im Hinblick auf die heutigen schulischen und gesellschaftlichen Randbedin-

gungen gleichwohl anspruchsvoll, besonders was die Anforderungen im Bereich der allgemeinen Kompetenzen anbelangt. Angesichts dieser riesigen Spanne stellt sich die Frage, ob es realistisch ist, die Mathematik schon in der Grundschule als „Wissenschaft von Mustern" zu entwickeln. JOHN DEWEY hat sich mit der Problematik „Kind und Fach" schon vor mehr als 100 Jahren in einem grundlegenden Artikel befasst und ist zu folgendem Schluss gekommen (DEWEY 1976, S. 277 – 278):

> *„Wir müssen davon ausgehen, dass die Faktoren „Kind" und „Fach" im Grunde genommen im pädagogischen Prozess verbunden sind, weil dieser seinem Wesen nach gerade die Wechselwirkung und den Ausgleich der Faktoren zum Ziel hat. … Das Kind und die Fachinhalte sind … Pole, die einen einzigen Prozess definieren. … Wenn man es so betrachtet, geht es im Unterricht nicht darum, zu hoch erscheinende Fachinhalte verfrüht zu unterrichten, sondern darum, mit ihrer Hilfe eine im Augenblick wichtige Entscheidung zu treffen." (Übers. E.Ch.W.)*

Genauso wie sich die Mathematik historisch aus kleinen Anfängen entwickelte und erst im Laufe von Jahrtausenden und Jahrhunderten auf den heutigen Stand kam, kann auch ein einzelner Mensch nur im Laufe von Jahren und Jahrzehnten ein gewisses Kompetenzniveau erreichen. Es wäre falsch, einzelne Entwicklungszustände für sich zu bewerten und Unterrichtsmaßnahmen aufzugeben, weil diese zu diesem Zeitpunkt nutzlos erscheinen. Jede Erkenntnisstufe muss mit ihren Mängeln und Unzulänglichkeiten als unerlässliche Voraussetzung für die nächstfolgende Stufe gesehen und gewürdigt werden. Wie SUSANNE STEINWEG in einer umfangreichen empirischen Studie am Beispiel von Zahlenmustern gezeigt hat (STEINWEG 2001), bringen Kinder ein Verständnis für Muster mit, auf das man aufbauen kann. Im Laufe der Zeit kumulieren sich kleine, fast unmerkliche Fortschritte im Verständnis zu größeren Fortschritten und werden sichtbar. Diese Fortschritte sind umso größer, je intensiver, systematischer und schlüssiger inhaltliche Grundideen über Jahre hin entwickelt werden und je selbstverständlicher die allgemeinen mathematischen Kompetenzen von Anfang an gefördert werden. In den Bildungsstandards heißt es dazu ausdrücklich:

> *Die [mit den allgemeinen mathematischen Kompetenzen] angestrebten Formen der Nutzung von Mathematik müssen daher auch **regelmäßig genutzte Formen** des Mathematiklernens sein. (Hervorh. d. Autoren).*

Mit den allgemeinen Kompetenzen entwickelt sich auch das damit verbundene Mathematikbild.

(2) Bei der Entdeckung, Beschreibung und Begründung von Mustern sowie der Lösung von Problemen und der Erklärung von Lösungswegen mithilfe von Mustern benötigen die Kinder Freiheiten. Unterrichtseinheiten, in denen die Bearbeitung von Aufgaben im Detail vorgeschrieben ist, müssen daher gegen-

über „Lernumgebungen“ zurücktreten, die bewusst Spielräume bieten. Die Lernumgebungen in Abschnitt 4.3 sind dafür gute Beispiele. Die größte Bedeutung kommt Lernumgebungen für produktives Üben zu, weil sie in besonderer Weise zur Vernetzung allgemeiner und inhaltsbezogener Kompetenzen führen. Auch dies wird durch den Abschnitt 4.3 unterstrichen.

(3) Sachaufgaben kann man umso leichter lösen, je mehr inhaltsbezogene Muster zur Verfügung stehen, die man in die jeweilige Situation „hineindenken“ kann. Wie das Beispiel in Abschnitt 4.3 (Lösung einer Sachaufgabe) zeigt, sind es nicht isolierte Rechnungen, die zu verständnisvollen Lösungen führen, sondern Rechnungen, die in umfassendere Muster eingebettet sind. Die Lernumgebungen zur Multiplikation im Abschnitt 4.3 sind darauf ausgerichtet, den Blick der Kinder für Beziehungen zwischen Zahlen und Rechnungen zu schärfen. Daher bilden sie eine hervorragende Grundlage für das Sachrechnen. Eine Reduktion des Unterrichts auf das bloße Ausrechnen von Ergebnissen unterminiert das Denken in Beziehungen ebenso wie eine zu starke Ausrichtung auf Anwendungen.

(4) Neben der Erforschung und Anwendung inhaltsbezogener Muster unter starker Betonung der allgemeinen Kompetenzen gibt es im Mathematikunterricht einen zweiten Zielbereich, bei dem allgemeine Kompetenzen nur eine untergeordnete Rolle spielen: die Automatisierung grundlegender inhaltsbezogener Wissenselemente und Fertigkeiten. Beide Zielbereiche sind zueinander komplementär: Muster schaffen die für die Automatisierung nötige Verständnisgrundlage und umgekehrt ist Grundwissen, das in automatisierter Form zur Verfügung steht, eine unentbehrliche Hilfe für die Erforschung von Mustern.

Auch dieser Punkt wird durch den Abschnitt 4.3 illustriert: Die Begründung der Kernaufgaben des Einmaleins sowie die Herleitung der anderen Einmaleinsaufgaben aus den Kernaufgaben mithilfe der Rechengesetze sind hierfür gute Beispiele.

(5) Der Lernerfolg steht und fällt mit dem Üben, gleichgültig ob es sich um inhaltsbezogene oder allgemeine Kompetenzen handelt. Wenige grundlegende Dinge dauerhaft und gründlich zu lernen und zu üben, ist besser als viele Dinge jeweils nur oberflächlich. Statt eines Flickenteppichs kleiner und kleinster Muster sollte man sich daher bewusst auf „große“ Muster konzentrieren und sie systematisch entfalten. Auch hierfür ist der Abschnitt 4.3 ein gutes Beispiel.

5 Zahlen und Operationen

Renate Rasch/Sybille Schütte

5.1 Struktur und Inhalt des Kompetenzbereichs

Was ist das Besondere am Kompetenzbereich *Zahlen und Operationen*?

Das Arbeiten mit natürlichen Zahlen und das Rechnen mit diesen Zahlen stehen im Mittelpunkt des Mathematikunterrichts der Grundschule. Der Kompetenzbereich *Zahlen und Operationen* gliedert sich in drei Bereiche:

- Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen verstehen,
- Rechenoperationen verstehen und beherrschen,
- in Kontexten rechnen.

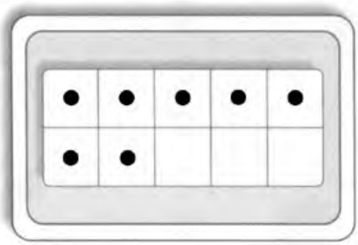
Die Bereiche sind eng miteinander verbunden und bauen aufeinander auf.

Der Kompetenzbereich *Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen verstehen* bildet die Grundlage für die schon vorhandenen und die sich entwickelnden Rechenfähigkeiten.

Unser Zahlsystem ist ein dekadisches Stellenwertsystem. Das Bewusstwerden des analogen Aufbaus der Zehner, Hunderter, Tausender,… ist Grundlage für das Rechnen. Die ersten wichtigen Strukturen sind im Zusammenhang mit dem Zehnerraum zu beachten. Neun Grundzahlen und die Null sind charakteristisch für das Zehnersystem. Jede einzelne Grundzahl sollte in ihrem Aufbau vielfältig durchdrungen, mit Mengenbetrachtungen verbunden und zu anderen Zahlen in Beziehung gesetzt werden. Dabei spielt die Zahl als Ganzes, zerlegt in Teile und als Teil von anderen Zahlen eine Rolle.

Um die Vorstellungen der Kinder anzuregen und das (simultane) Erfassen kleiner Gruppierungen zu fördern, ist das Arbeiten mit festen und flexiblen Mengendarstellungen in Verbindung mit handelnden und schriftlichen Aktivitäten wichtig, z. B. das Arbeiten mit Augenzahlen auf dem Würfel bzw. mit weiteren Punktmustern oder das Hantieren mit Plättchen, Steinchen usw.

Aufgabenbeispiel (Kl. 1)
Nehmt eine Anzahl Plättchen. Legt die Plättchen so, dass man schnell sehen kann, wie viele es sind. Probiert verschiedene Möglichkeiten aus und übertragt eine Anordnung ins Heft. Schreibt die passenden Zahlen und Aufgaben dazu.



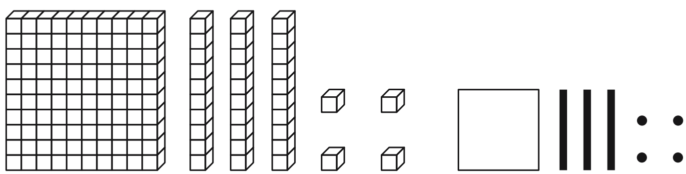
Die ersten 10 Zahlen lassen sich auch gut im Zehnergitterfeld darstellen. Dieses hat mehrere Vorteile und hat sich gerade bei rechenschwachen Kindern als wichtige Stütze des Zahlverständnisses bewährt. (vgl. Gerster/Schulz 2000) Die Zahl wird optisch in verschiedene Teilportionen gegliedert und man sieht durch die freibleibenden Stellen auch immer die Ergänzung zur 10.

Grundlegendes Wissen zum Aufbau unseres Zahlsystems wird beim Erschließen des Hunderterraums erworben: Je nach Stellung der Ziffer in einer zwei- oder mehrstelligen Zahl wird ein anderer Wert repräsentiert, bei zweistelligen Zahlen sind es Zehner und Einer. Die deutsche Sprache bildet die Zahlbildung in umgekehrter Reihenfolge ab: „zweiundvierzig“ anstelle von „vierzigundzwei“. Das muss beim Zahlerwerb mitgelernt und auch bei der Bildung größerer Zahlen immer wieder eingeordnet werden.

Aufgabenbeispiel (Kl. 1/2) (kann so in etwa mündlich gegeben werden)
Zähle ausgehend von einer Zahl im Zwanzigerraum (Zehnerraum) vorwärts und schreibe die Zahlen mit. Färbe Zahlen mit der gleichen Zehnerzahl in der gleichen Farbe. Kreise Zahlen ein, die die gleiche Einerzahl haben. Stelle die von dir markierten Zahlen vor. Wie sind die Zahlen zusammengesetzt?

Anschauungsmittel können die Zahlbildung und die Besonderheiten, die damit verbunden sind, verdeutlichen. Dies gilt vor allem für die Kernidee der Bündelung. Beispielsweise kann mit Mehrsystemblöcken der Gedanke des Zusammenfassens von 10 Elementen einer Ebene zu einem Element der nächsthöheren Ebene erhellt werden. Zehn Würfelchen ergeben eine Zehnerstange, zehn Zehnerstangen werden zu einer Hunderterplatte zusammengelegt, 10 Hunderterplatten ergeben einen Tausenderwürfel usw. Analogien unseres Zahlaufbaus werden besonders gut deutlich. Die handelnden Aktivitäten können mit entsprechenden Darstellungen auf dem Papier bis hin zur symbolischen Darstellung verbunden werden und erreichen dadurch tieferes Verstehen (s. Beispiel unten).

134



Aktivitäten mit Plättchen in der Stellenwerttafel oder dem Schulabakus ermöglichen Einsichten zum Bündeln und Entbündeln sowie zur Beziehung Ziffernwert und Stellenwert einer Zahl. Darüber hinaus sollten weitere Zahleigenschaften angesprochen und in ihrer Bedeutsamkeit für das Rechnen bedacht werden.

Aufgabenbeispiel (Kl. 2/3)
Finde Zahlen, die du als Summe von drei gleichen Summanden schreiben kannst. Schreibe die Summanden auf. Anschließende Lösungsdiskussion: Wie hast du diese Zahlen gesucht? Welche der von dir notierten Zahlen gehören zur Dreierreihe? Wie hast du weitere durch 3 teilbare Zahlen gefunden?

Aufgabenbeispiel (Kl. 3/4)
Finde immer 3 Zahlen, die gut zusammenpassen. Schreibe auf, warum das deiner Meinung nach so ist.

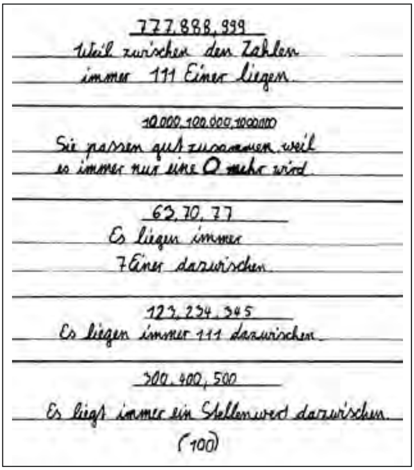


Abb. 1: Viertklässler erläutern Zahlbeziehungen[1]

Zur Entwicklung der Fähigkeit, sich im Zahlenraum bis 1 000 000 orientieren zu können, sind kardinale Aktivitäten und Kontextbezüge wichtig. Zahlen, die Etappen unseres Zahlsystems markieren, wie die 10, die 100, die 1000 oder eine Million, sollten auch als Zahl an sich bewusst wahrgenommen werden. „Was, 100 ist so wenig?“, sagen Grundschulkinder in der Regel, wenn sie 100 Perlen in ein Glas zählen.

[1] Die mit einem* gekennzeichnezen Abbildungen stammen von RENATE RASCH 2007.

Aufgabenbeispiel (Kl. 4)
Eine Million? Wie viel ist das, das kann ich mir nicht vorstellen, sagt ein Kind. Wie würdest du es erklären? Schreibe auf.

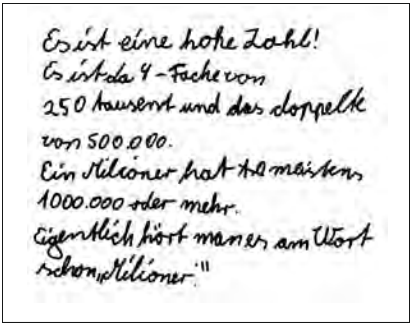


Abb. 2: Viertklässler stellen ihr Wissen und ihre Vorstellungen zur Million vor*

Weitere Aufgaben, die zum Erforschen von Zahlen und Zahlbeziehungen anregen könnten:

- Notiere deine Hausnummer und schreibe alles auf, was du über diese Zahl weißt.
- Wähle ungerade Zahlen aus, die du (ohne Rest) durch 3 teilen kannst.
- Wähle eine große Zahl und versuche, sie anschaulich darzustellen.
- Welche Zahlen kommen nach den Millionen? Schreibe auf, was du darüber weißt.

Orientierungsunterstützung gibt es für die Lernenden auch durch ein zählendes Durchschreiten der Zahlenräume sowie durch den Einsatz des Zahlenstrahls und des Rechenstrichs (vgl. Abb. 14).

Der Bereich *Rechenoperationen verstehen und beherrschen* ist ein sehr komplexer Kompetenzbereich, der verschiedene Fähigkeiten einschließt. Die Schülerinnen und Schüler wissen oder lernen, wie man Zahlen zerlegt, um bequem rechnen zu können bzw. um ein bestimmtes Zwischenergebnis zu erreichen. Sie erwerben Algorithmen, um die schriftlichen Verfahren flüssig und sicher ausführen zu können. Hilfreich und teilweise notwendig beim Rechnen sind automatisierte Wissensbestandteile (vor allem Aufgaben des Einspluseins und Einmaleins), die das Arbeitsgedächtnis beim Rechnen entlasten, schnell zu Analogien führen und die Bewältigung komplexer Rechenvorgänge ermöglichen. Das Lernen des Kleinen Einspluseins und Einmaleins erfolgt auf der Grundlage von Beziehungen, die die Aufgaben miteinander verbinden. Das Bewusstmachen solcher Beziehungen reduziert den Anteil der einzuprägenden Aufgaben und führt zu Assoziationen, die das Lernen stützen.

Aufgabenbeispiel (Kl. 1 sinngemäß)
Lernpakete schnüren. Übe die Aufgaben mit der Summe bzw. der Ausgangszahl 15. Welche Aufgaben gehören dazu? Entdecke Zweier- und Vierergruppen, die gut zusammenpassen. Erkläre den Zusammenhang. (7 + 8/8 + 7; 15 – 8/15 – 7; 9 + 6/6 + 9; 15 – 6/15 – 9; 10 + 5/5 + 10; 15 – 5/15 – 10; ...) Präge dir die kleinen Gruppen ein, dann die große Gruppe.

Vor allem beim mündlichen und halbschriftlichen Rechnen steht neben der Sicherheit Flexibilität im Vordergrund, verbunden mit dem Ziel, ein vorteilhaftes und effektives Rechnen zu erreichen. Um diesem Anspruch gerecht zu werden, ist vielfältiges Wissen über Zahlen und Zahlbeziehungen, über Verknüpfungsmöglichkeiten in Verbindung mit Rechengesetzen Voraussetzung.

Aufgabenbeispiel (Kl. 3)		
Die folgenden Aufgaben stehen jeweils miteinander in Beziehung. Wie kannst du das beim Rechnen nutzen? Erkläre.		
135 + 120	516 + 12	684 – 140
235 + 120	516 + 14	674 – 140
335 + 120	516 + 16	664 – 140

Beim verknüpfenden Rechnen wird das Kommutativ- und Assoziativgesetz genutzt. Die Tatsache, dass man Summanden vertauschen und beliebig zusammenfassen kann, wird gut verinnerlicht. Anspruchsvoller ist es, zu erkennen, wann diese Aktivitäten sinnvoll sind und zu Rechenvorteilen führen. Die Beweggründe zum Nutzen dieser Rechengesetze sollten diskutiert und dabei die eigene Rechenintention mit einbezogen werden.

Aufgabenbeispiele (Kl. 3/4)
1. In welcher Reihenfolge würdest du rechnen, um Rechenvorteile zu erhalten? Begründe. 23 + 18 + 17 + 12   39 + 43 + 11 + 27   56 + 25 + 35 + 14 2. Notiere Malaufgaben. Versuche diese Aufgaben mit mehr als 2 Faktoren zu schreiben. Rechne die Teilaufgaben in unterschiedlicher Reihenfolge aus. Beschreibe deine Rechenbeobachtungen. Aufgabenbeispiel: **6 · 24** 6 · 12 · 2   3 · 2 · 24   3 · 2 · 6 · 4 ...

Vorteile beim Rechnen können darüber hinaus genutzt werden, wenn Kinder lernen, Rechenzahlen so zu verändern, dass sie zunächst mit „vollen" Zehnern oder Hundertern rechnen können. Dies erfordert allerdings schon ein gutes Zahl- und Rechengefühl. Die hier zu gewinnenden Einsichten können durch die Veranschaulichung mit Mehrsystemblöcken unterstützt werden.

Aufgabenbeispiel (Kl. 3/4)
Versuche in jeder Aufgabe mit einem glatten Hunderter zu rechnen. Repariere dann dein Ergebnis, sodass es wieder zur Ausgangsaufgabe passt. 298 + 542   402 + 275   542 – 197   798 – 458 Rechenbeispiel: 298 + 542; 300 + 542 = 842; 842 – 2 = 840

Mathematisch fortgeschrittene Schüler können hier auch auf die Konstanzgesetze aufmerksam gemacht werden: Eine Summe bleibt gleich, wenn ich beide Summanden gegensinnig verändere (298 + 542 = 300 + 540). Eine Differenz bleibt gleich, wenn ich beide Zahlen in gleicher Weise verändere (798 – 458 = 800 – 460).

Für die Flexibilität des Rechnens ist die Fähigkeit wichtig, zahlbezogen entscheiden zu können, ob mündlich, halbschriftlich oder schriftlich gerechnet werden sollte.

Aufgabenbeispiel (Kl. 3/4)
Bei welcher Aufgabe ist es sinnvoll, schriftlich zu rechnen? Begründe. Entscheide, welche Aufgabe du im Kopf rechnen kannst. Begründe und erkläre. 630 – 417   864 – 321   715 – 238   919 – 915   542 – 498

Der Kompetenzbereich *In Kontexten rechnen* hat verschiedene auf das Rechnen bezogene Funktionen und solche, die weit darüber hinausgehen. Die Einbettung von Operationen in Kontexte unterstützt das Verstehen von Beziehungen zwischen den vier Grundrechenarten. Über Sachbezüge kann z. B. inhaltlich deutlich werden, dass auch anspruchsvollere Rechenoperationen wie die Multiplikation und die Division mit additiven Konzepten bewältigt werden können.

Aufgabenbeispiel (Kl. 1)
Kaffeetrinken bei den 7 Zwergen hinter den 7 Bergen: Jeder Zwerg isst zwei Stücke Kuchen. Wie viele Kuchenstücke wurden gegessen?

Für Schulanfänger ist der operative Ansatz bei dieser Aufgabe hauptsächlich das „Zuordnen": Mit Material wird die erzählte Situation nachgebildet (erst die

Zwerge, dann werden jeweils die Kuchenstücke zugeordnet) und die Lösung ausgezählt. Aber auch additive Lösungsansätze sind zu beobachten: Immer zwei Elemente werden zusammengelegt und dabei die Anzahl der Zwerge berücksichtigt.

Über leicht verständliche Sachbezüge ist es möglich, Einsichten in das Beziehungsgefüge einer Rechenaufgabe zu gewinnen: Wie lässt sich das aufschreiben, was man im Kopf gedacht (gerechnet) hat?

Aufgabenbeispiel (Kl. 2)
Teilen fällt nicht immer leicht. Ich esse gern Schokolade. 26 Schokoladenriegel soll ich mit meiner Schwester teilen. Wie viele muss ich abgeben (wenn es gerecht sein soll)? Notiere die Lösungszahl und versuche dann aufzuschreiben, wie du gerechnet hast.

Zur Lösungszahl 13 wurden z. B. die folgenden Rechnungen bzw. Terme notiert: 10 + 3 + 10 + 3; 13 + 13 = 26; 26 – 13 = 13; 26 – 10 – 3 + 13 = 26; 20 – 10 = 10/6 – 3 = 3. Einige Kinder konnten die Division auch auf der Aufgabenebene abbilden. Sie notierten 26 : 2 = 13 und 26 : 13 = 2 oder 20 : 2 + 6 : 2 = 13.

Mit Sachaufgaben kann dazu angeregt werden, komplexere mathematische Zusammenhänge zu bewältigen. Die Situationen, die diesen Aufgaben zugrundeliegen, bieten schon Grundschulkindern Gelegenheiten, sich z. B. mit kombinatorischen Problemen, proportionalen Beziehungen oder dem Teilen in einem bestimmten Verhältnis auseinanderzusetzen. Erst diese Aufgabengruppe regt intensive Denkprozesse und probierende Aktivitäten an (Rasch 2003).

Aufgabenbeispiel (Kl. 3/4)
Tim und Paul haben zusammen 30 Legosteine. Tim hat 6 mehr als Paul. Wie viele hat Tim? Wie viele hat Paul?

Kinder, die diesen Zusammenhang verstehen können, merken recht schnell, dass sie mit den gewohnten Denkwegen nicht zur Lösung gelangen (z. B.: die Hälfte von 30 und bei einem Teil 6 dazu und beim anderen Teil 6 weg). Das weitere Nachdenken führt die Lösenden zu interessanten operativen Zusammenhängen, z. B.: „30 + 6 = 36 … Es müssen Zahlen der Sechserreihe sein.“ Sie werden zum Nutzen von Arbeitsmitteln angeregt, die ihre Denkwege stützen. Auf diese Weise entdeckten Viertklässler die Strategie: 6 Dinge zur Seite legen, dann jedem gleich viel zuordnen und bei einem Teil die 6 weggelegten Dinge wieder dazugeben. Um die Denkprozesse bewusst werden zu lassen, ist dann wiederum die Überlegung wichtig, wie sich die Aktivitäten mit Rechenaufgaben aufschreiben lassen.

Welche Bedeutung hat der Kompetenzbereich *Zahlen und Operationen*?

Mathematikunterricht verbinden Grundschulkinder vor allem mit dem Rechnen. Und wenn man sie fragt, was sie in Mathe am liebsten machen, führen die meisten von ihnen, auch die Kinder mit Lernproblemen, das Rechnen an. Trotz dieser hohen allgemeinen Akzeptanz, ist gerade das Rechnen für einen Teil der Kinder mit großem Aufwand verbunden. Was zeichnet die besten Rechner aus und wo haben die weniger fitten Kinder ihre Grenzen?

Mathematisch fortgeschrittene Schüler können schon zu Schulbeginn Erstaunliches leisten. Sie fallen durch ihre weit entwickelten Zählfähigkeiten auf, durch den sicheren Umgang mit Mengen, durch das schnelle Auffassen von Zahlstrukturen und durch den fast spielerischen Erwerb des Rechnens. Dabei sind es nicht nur die additiven Konzepte, die schnell verinnerlicht werden. Ausgehend von diesen kann auch auf multiplikative Zusammenhänge und solche des Teilens früh geschlossen werden. Da das Rechnen auf den Strukturen unseres Zahlsystems aufbaut, brauchen die leistungsstarken Kinder häufig nicht einmal mehr Rechenunterweisung für die größeren Zahlenräume – vieles können sie sich selbst erschließen bzw. haben es sich schon erschlossen, bevor es im Unterricht „drankommt." Diese Entwicklung schafft für diese Schülergruppe viele freie Kapazitäten für mathematisches Lernen über das „reine Rechnen" hinaus. Vor allem die fortgeschrittenen Schülergruppen können mathematische Zusammenhänge gut durchdringen, Regeln und Gesetzmäßigkeiten verstehen und anwenden und diesbezügliche Kompetenzen im Austausch mit den Gleichaltrigen wieder zurück an die Lerngemeinschaft geben.

Aufgabenbeispiel (Kl. 1)
Anne hat doppelt so viele Sammelbilder wie Tine. 18 Sammelbilder liegen auf dem Tisch. Wie viele Sammelbilder hat Anne, wie viele hat Tine?

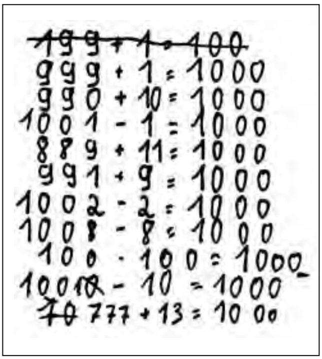
Eine leistungsstarke Erstklässlerin stellte die in ihrer Arbeitsgruppe gefundene Lösung in folgender Weise dar:

> *„Also, wir haben das Ergebnis 6 + 12 gefunden und da sind wir drauf gekommen, weil, wir haben uns immer so'ne Zahl genommen, zum Beispiel 1 und dann verdoppelt und von 6 das Verdoppelte und dann plus und das war dann 18 und dann haben wir noch 'nen Satz dazu geschrieben."*

Bei Kindern, für die der Erwerb mathematischen Wissens eher schwierig ist, wird häufig die ganze Kraft benötigt, um sich die „Rechentechnik“ anzueignen. Ihre Lernvoraussetzungen sind ungünstiger. Sie bauen Zahlen vielfach sehr stark ordinal auf und bleiben dadurch u. a. auch dann noch beim Zählen, wenn ihre Mitschüler schon längst kleine Einheiten und Zahlzerlegungen mit Unterstützung der Wahrnehmung überblickend erfassen können. Beim Rechnen fehlen ihnen diese kleinen Strukturen und sie werden nicht selten zu zählenden Rechnern. Sie können sich in der Folge nur wenige Grundaufgaben einprägen. Spätestens bei zweistelligen Zahlen brauchen auch Kinder mit Rechenstörungen das Rechnen unter Nutzung der Stellenwertstrukturen. Mehrstellige Zahlen kann man beim Rechnen in Zehnerpotenzen zerlegen. Das ist für die meisten Kinder eher leicht. Den Schwächsten fehlt auch hier die Einsicht und sie nutzen am liebsten die Zahlen, die sie sehen und vernachlässigen mitunter den Wert dahinter (So rechnen sie bei Aufgaben wie 68 – 32 häufig lieber 6 – 3 und 8 – 2 als 60 – 30 und 8 – 2 oder als 68 – 30 – 2.). Dies klappt solange kein Zehner überschritten werden muss. Es kommt ihnen entgegen, wenn sie ihre Rechenzahlen untereinander schreiben können.

Diese Kindergruppe kann lernen, die fehlenden Voraussetzungen zumindest ein Stück weit auszugleichen. Deshalb ist es wichtig, verstärkt am Bündelungsprinzip zu arbeiten. So kann erlernt werden, mit geeigneten Anschauungsmitteln (z. B. mit Mehrsystemblöcken), den Aufbau der fehlenden Strukturen zu unterstützen oder die in der Regel geringer vorhandene Kopfrechenkapazität durch ein höheres Maß an eigens für sich entwickelte Schriftlichkeit zu unterstützen. Offene Aufgabenstellungen und Wahlaufgaben ermöglichen ihnen, Kompetenzen ausgehend von ihrem Niveau aufzubauen.

Aufgabenbeispiel (Kl. 3)
Schreibe Rechnungen, die 1000 ergeben.



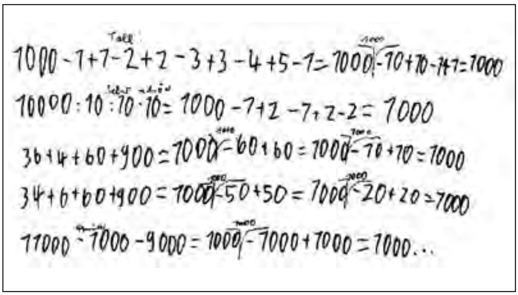


Abb. 3: Rechnungen von Drittklässlern mit der Zielzahl 1000*

Während sich die mathematisch fortgeschrittenen Kinder auf anspruchsvollen Rechenwegen auf die 1000 zu und von der 1000 weg bewegen (s. rechte Abb. 3), gestattet der offene Arbeitsauftrag schwächeren Schülern Rechenaktivitäten in der Nähe der Zielzahl auszuwählen (s. Abb. 3).

5.2 Kompetenzaufbau im Unterricht

Wie entwickeln Kinder Kompetenzen im Bereich *Zahlen und Operationen*?

Kinder kommen mit vielfältigen Vorerfahrungen zum Bereich *Zahlen und Operationen* in die Schule, wie die in den letzten Jahren entwickelten diagnostischen Instrumente zeigen (vgl. van Luit/van de Rijt/Hasemann 2001). Wegen des unterschiedlichen Ausprägungsgrades der Vorerfahrungen sollte Mathematikunterricht vom ersten Schultag an einen vielfältigen Umgang mit Zahlen aufgreifen.

Aufgabenbeispiele (Kl. 1)
Schreibe die Zahlen auf, die du schon schreiben kannst. Lies deine Zahlen einem anderen Kind vor. Sucht eure Zahlen im Rechenbuch. Untersucht ein Kartenspiel nach Zahlen. Zählt die Abbildungen, schreibt die Zahlen auf. Bildet mit Stäbchen, Plättchen, … Rechnungen. Stellt euch gegenseitig eure Rechnungen vor. Wer kann schon Rechenaufgaben aufschreiben?

Viele wichtige mathematische Kompetenzen entwickeln sich bereits im Zusammenhang mit dem Erwerb der Zahlwortreihe, also im vorschulischen Bereich (vgl. Hasemann 2007). Mit der wachsenden Zählsicherheit wird der analoge Aufbau der ersten Zehner bewusst. Diese Analogien können in Abhängigkeit von der Leistungsfähigkeit des Kindes mitunter recht schnell auf größere Zahlenräume übertragen werden. Damit solche Prozesse wirksam werden können, ist es wichtig, trotz der intensiven Arbeit mit einzelnen Zahlen von Anfang an über den Zahlenraum bis 10 hinauszuarbeiten.

In Verbindung mit kardinalen Aktivitäten mit Mengen entsteht ein Teile-Ganzes-Verständnis, das die Kinder in die Lage versetzt, Zahlen in unterschiedliche „Teilportionen“ zu zerlegen. Dies ist zugleich die Grundlage für geschicktes vereinfachendes Rechnen. So geht es beim gleichsinnigen oder auch gegensinnigen Verändern von Termen zur Erleichterung des Rechnens ja immer um ein geschicktes „Portionieren“, im Sine der Veränderung von Teilen eines gleich bleibenden Ganzen.

Die weitere Entwicklung von Rechenfähigkeiten erfolgt im Zusammenspiel verschiedener Komponenten. Die immer wiederkehrenden Rechenstrategien werden zur wichtigen Stütze. Das Rechnen in kleinen und großen Schritten wird erlernt – ein Zerlegen von Zahlen in Abhängigkeit von der konkreten Aufgabe und dem eigenen Rechenvermögen (s. Abb. 4).

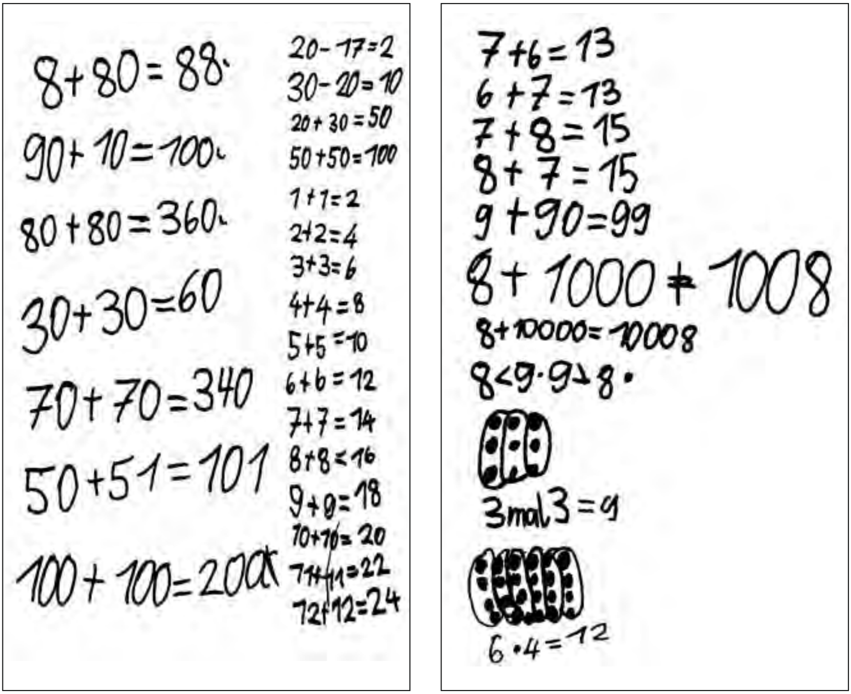


Abb. 4: Eine Schülerin am Ende der Klasse 1: „Das kann ich schon rechnen."

Mit den größer werdenden Zahlenräumen lernen die Kinder, wie man beim mündlichen Rechnen Rechenschritte notieren kann, um der eigenen Kopfrechenkapazität gerecht werden zu können (halbschriftliches Rechnen; vgl. Padberg 2005). Die schriftlichen Verfahren eröffnen die Möglichkeit, auch das Rechnen mit großen Zahlen ohne technische Hilfsmittel zu bewältigen. Erst die Gesamtheit der Rechenarten und das flexible Zugreifen auf diese, führen zum Rechnen als Denk- und Alltagsinstrument.

Welcher Unterricht kann zur Kompetenzentwicklung beitragen?

Das Lernen sollte so organisiert werden, dass es möglichst gut an die Vorkenntnisse der Kinder anknüpft. Aufgabenstellungen, die zur Diagnostik geeignet sind, ermöglichen diese Einblicke, z.B. der folgende Auftrag vor der Behandlung des „Großen Einmaleins" (halbschriftliches Multiplizieren):

Aufgabenbeispiele (Kl. 3)
Notiere Malaufgaben, die du schon rechnen kannst.

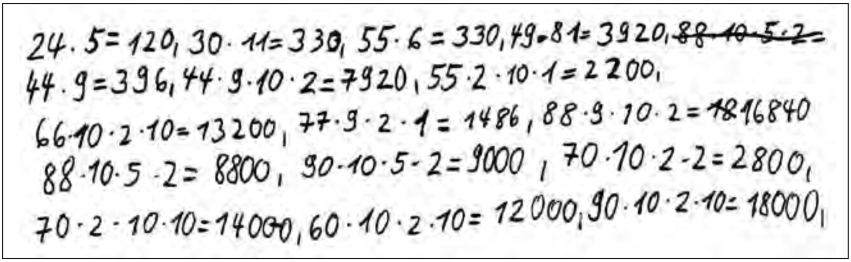

24 · 5 = 120, 30 · 11 = 330, 55 · 6 = 330, 49 · 81 = 3920, ~~88 · 10 · 5 · 2 =~~
44 · 9 = 396, 44 · 9 · 10 · 2 = 7920, 55 · 2 · 10 · 1 = 2200,
66 · 10 · 2 · 10 = 13200, 77 · 9 · 2 · 1 = 1486, 88 · 9 · 10 · 2 = 1816840
88 · 10 · 5 · 2 = 8800, 90 · 10 · 5 · 2 = 9000, 70 · 10 · 2 · 2 = 2800,
70 · 2 · 10 · 10 = 14000, 60 · 10 · 2 · 10 = 12000, 90 · 10 · 2 · 10 = 18000,

Abb. 5: Multiplikationen eines Drittklässlers*

Die bei den Schülern sichtbar werdenden Vorläuferfähigkeiten (vgl. Abb. 5) könnten die Lehrperson beim Start in den „neuen“ Unterrichtsinhalt dazu anregen, den Unterricht auf den vorliegenden Schüleraufgaben aufzubauen. Eine Auswahl der Aufgaben der Kinder könnte geordnet angeboten werden: z.B. Multiplikationen aus dem „Kleinen Einmaleins“; Multiplikationen mit Zehner- und Hunderterzahlen; Multiplikationen mit zweistelligen Zahlen; Multiplikationen mit 1 und 0. Die Kinder, die die „neuen“ Aufgaben schon rechnen können, könnten ihre Rechenwege, Analogieschlüsse, berücksichtigte Regeln usw. vorstellen. Die Lehrperson stellt effektive Rechenwege in den Mittelpunkt, erweitert sie evtl., regt zur Veranschaulichung an, bekräftigt Wesentliches und organisiert das festigende Üben.

Einen Teil der mathematischen Zusammenhänge, die beim Rechnen, Probieren und Knobeln nützlich sind, entdecken Grundschulkinder bei der Begegnung mit Zahlen und beim Rechnen selbst. Die Aufgabe der Lehrenden muss es sein, diese Entdeckungen aufzugreifen und auf weitere ableitbare oder noch nicht entdeckte Beziehungen aufmerksam zu machen. Das Bewusstwerden dieser Prozesse erfolgt in engem Zusammenhang mit der mündlichen und schriftlichen Sprache der Kinder.

Aufgabenbeispiele (Kl. 3/4)
Baue ein Zahlenhaus mit einer zweistelligen Zahl im Dach. Finde alle Zahlenpaare, die die von dir gewählte Zahl als Summe ergeben. ■ Vergleiche die gefundenen Terme miteinander. Was stellst du fest? Erkläre. ■ Errechne den Unterschied zwischen den Zahlen, die ein Paar ergeben. Notiere die Differenz hinter jedem Paar. Was stellst du fest? Vergleiche deine Erkenntnisse mit denen eines anderen Kindes. Fasst eure Entdeckungen zusammen und stellt sie den anderen vor.

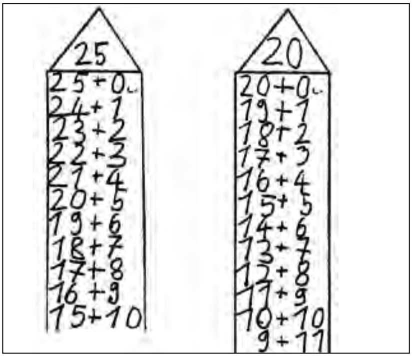


Abb. 6: Ausschnitte aus Zahlenhäusern als Grundlage für Entdeckungen

Zur Planung des Unterrichts, bei dem die obige Aufgabe im Mittelpunkt stehen soll, könnte die Lehrperson zum Beispiel folgende Zusammenhänge mit Blick auf die Lernenden durchdenken:

„Summanden können vertauscht werden. Man findet also zu jeder gefundenen Aufgabe eine zweite (ausgenommen gleiche Summanden). Ordnet man die Terme nach der Größe, gelingt es besser, alle möglichen Zahlenpaare zu finden. Wenn man die Zahlenpaare miteinander in Beziehung setzt, kann entdeckt werden: Ein Summand wird immer um 1 kleiner, der andere dann um 1 größer, die Summe bleibt gleich. Auch diese Erkenntnis würde bei der vollständigen Suche nach Zahlenpaaren helfen.
Was kann entdeckt werden, wenn der Unterschied (die Differenz) zwischen den Zahlenpaaren untersucht wird? Wenn die Terme schon geordnet sind, wird die Differenz immer um 2 größer (oder kleiner) – Warum eigentlich? (Ein Summand wird um 1 kleiner, der andere um 1 größer. Kommt hier die 2 her?)
Bei einem Zahlenhaus zur 25 entsteht als Differenz immer eine ungerade Zahl. Es interessiert also, wie ist das mit den Häusern bei einer geraden Zahl im Dach, …“

Anregungen für Aufgabenformate, die zum Entdecken mathematischer Zusammenhänge Anlass geben, findet man auch in WITTMANN/MÜLLER 1992.

Welche Merkmale muss ein Unterricht aufweisen, der zu Erkenntnissen dieser Art anregt?

- Zunächst: Man muss inhaltlich nicht alles ausschöpfen, was möglich ist, und man kann solche mathematischen Ideen über mehrere Schuljahre tragen.
- Das Wichtigste ist vielleicht eine eher „lockere“ Herangehensweise: Was könnt ihr erkennen, was kannst du formulieren? Die zu erwartenden Antworten sind unvollständig, nicht perfekt.
- Man kann das Erlernen mathematischer Zusammenhänge nicht so systematisch entwickeln wie Unterrichtsinhalte, bei denen vorgegebene Abläufe befolgt werden können. Die neue Erkenntnis muss auf dem eigenen Vermögen der Kinder beruhen, kann nicht von „oben“ aufgesetzt werden. Vieles bleibt individuelles Lernen – dem Einen sind diese Erkenntnisse möglich, dem Anderen nicht bzw. nur ein Stück weit.

- Bis zum Ende der Grundschulzeit sollte ein (kleiner) mathematischer Wortschatz (z. B. Summe, Summand, Gleichung; wenn, …, dann usw.) aufgebaut werden. Erkannte Zusammenhänge müssen sonst aufwändig und umständlich beschrieben werden.

Mit Intensität und Systematik sollte am Grundwissen gearbeitet werden. Ohne dieses sind anspruchsvolle mathematische Inhalte kaum zu bewältigen. Das kleine Einspluseins und Einmaleins muss trainiert werden, ebenso das Verdoppeln/Halbieren, das Zerlegen von Zahlen usw. Unterrichtsabschnitte, die zum Lernen anleiten und die Gelerntes prüfen, gehören ebenso zum Mathematikunterricht wie Phasen des Entdeckens und Diskutierens mathematischer Zusammenhänge.

5.3 Vernetzung des Kompetenzbereiches *Zahlen und Operationen* mit weiteren inhaltsbezogenen Kompetenzen

Der Bereich *Zahlen und Operationen* ist grundlegend für die anderen Inhaltsbereiche. Grob kann dabei zwischen Struktur- und Anwendungsorientierung unterschieden werden. Bei der Strukturorientierung, die typisch für innermathematisches Arbeiten ist, liegt die Verbindung zum Bereich *Muster und Strukturen* nahe, bei der Anwendungsorientierung besteht eine Verbindung zu den Bereichen *Größen und Messen* sowie *Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit*, da in diesen Bereichen mit Zahlen gearbeitet wird. Zählen und Messen sind die einfachsten „Anwendungen“ von Mathematik auf die Gegebenheiten der Erfahrungswelt.

Der Bereich *Raum und Form* kann zum einen unter struktureller Perspektive betrachtet werden, dann geht es beispielsweise um die Veranschaulichung von Zahlbeziehungen in geometrischer Form, wobei besonders symmetrische Strukturen den Darstellungen auch einen ästhetischen Eigenwert geben. Zum anderen hat Geometrie auch viel mit Messen zu tun, wobei dann auch Zahlen und Operationen angewandt werden.

Im Folgenden wird an einfachen und komplexeren Beispielen die Verbindung des Bereichs *Zahlen und Operationen* zu den einzelnen inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen exemplarisch beschrieben.

Zahlen und Operationen in Verbindung zu *Muster und Strukturen*

Wenn man Zahlen und Aufgaben vergleicht, lassen sich häufig Muster und Strukturen entdecken. Es geht also nicht nur um die Geläufigkeit im Rechnen sondern darüber hinaus um mathematisches Arbeiten.

Als einfaches Beispiel seien hier „sinnfällige Anschauungsbilder“ beschrieben, wie sie vom 1. Schuljahr an die Entwicklung formaler mathematischer Darstellungen, wie beispielsweise Gleichungen, vorbereiten können. Wir greifen hier zwei heraus, die sich bereits im traditionellen Mathematikunterricht bewährt haben, deren Möglichkeiten heute aber gerade im Sinne der Förderung prozessbezogener Kompetenzen noch besser ausgeschöpft werden können. Ihre Eignung ist auch dadurch begründet, dass sie im Schwierigkeitsgrad gut variiert werden können.

Die **Zahlenwaage** kann mathematische Beziehungen, wie sie für Gleichungen gelten, anschaulich verstehbar machen. Auch wenn Schülerinnen und Schüler heutzutage in ihrer Lebenswelt mechanische Waagen häufig nicht mehr beobachten können, sollten in der Schule diese sinnlichen Erfahrungen des Ausgleichens, das Ins-Gleichgewicht-Bringen ermöglicht werden.

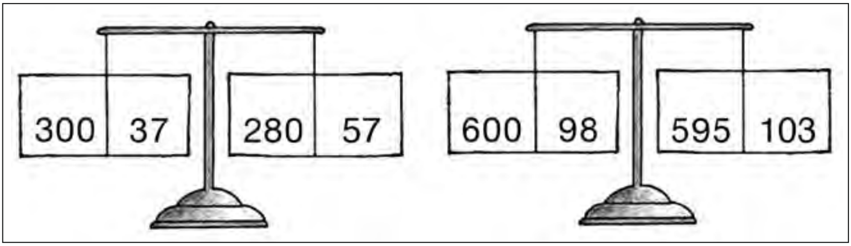


Abb. 7: Zahlenwaage

Die Zahlenwaage ist ein sinnfälliges Anschauungsbild für Aufgabenbeziehungen in Form von Summengleichungen. Mit diesem Format wird das Ausgleichen der Summanden innerhalb der Terme leichter verständlich. Ohne den Wert des Terms (anschaulich das Gewicht) zu verändern, kann man beispielsweise den ersten Summanden um 20 erhöhen, wenn man gleichzeitig den zweiten Summanden um 20 vermindert (z.B. $280 + 57 = 300 + 37$). Die Arbeit mit dem Bild der Waage macht somit eine Struktur, eine Regel für Termumformungen bzw. für die Arbeit mit Gleichungen verständlich und führt zu einer Regelvermutung und -begründung.

Später kann auf diese Erfahrungsgrundlage zurückgegriffen werden: *Kannst du die Aufgabe vereinfachen? Denk an die Zahlenwaage*!

Das **Zahlenhaus** ist ein bekanntes Aufgabenformat für Zerlegungen von Zahlen: Im Dach steht die Zahl, in den Stockwerken darunter jeweils Zerlegungen in zwei Zahlen, deren Summe die Dachzahl ergibt. Dieses Format wurde schon bei den ersten Zahlen im ersten Schuljahr eingesetzt. Bei größeren Zahlen wachsen die Möglichkeiten der Zerlegung sehr schnell und der Blick für ihre Beziehungen wird noch interessanter. So kann man über Zahlenhäuser zu Summengleichungen kommen, ohne dass die Schülerinnen und Schüler hier auf besondere Schwierigkeiten stoßen. Die Gleichwertigkeit der Zahlenpaare in den Etagen (bei additiver Verknüpfung) leuchtet unmittelbar ein, sie ist ja Konstruktionsprinzip.

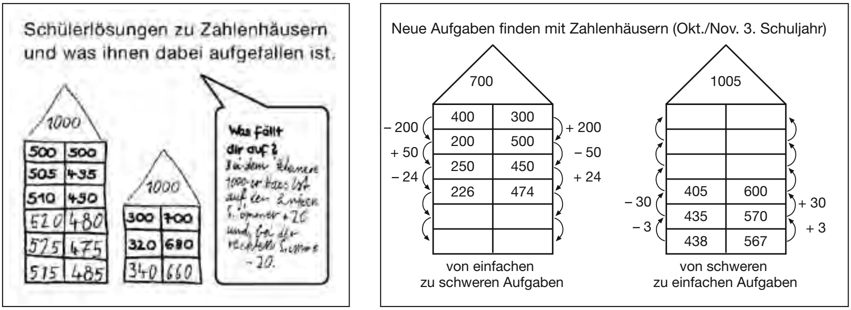


Abb. 8: Zahlenhäuser

Faszinierend für Kinder ist es, aus einfachen Aufgaben schwierige zu machen. Das stärkt das Kompetenzgefühl und die Lust an der Mathematik. Dass 400 + 300 = 700 ist, ist für die meisten Kinder sehr leicht. Dass man daraus über einige einfache Veränderungen im Zahlenhaus 226 + 474 = 700 machen kann, ist für die Schüler zunächst überraschend. Man kann auch umgekehrt vorgehen und aus schwierigen Aufgaben einfache machen. Das gegensinnige Verändern ist hier Konstruktionsprinzip, seine Übertragung auf geschickte Rechenverfahren damit gut vorbereitet. Wir ermöglichen hierdurch nicht nur frühe Kompetenzerfahrungen in diesem Bereich, sondern bereiten die geschickte Rechenstrategie des Vereinfachens im Zahlenbereich bis 1000 vor.

Für die Grundschulmathematik hat es sich bewährt, zwischen „Erforschen“, „Entdecken“ und „Erfinden“ zu unterscheiden (vgl. auch Erläuterungen im Abschnitt „Kommunizieren und Argumentieren“, S. 85 f.). Entdeckungen beziehen sich immer auf regelhafte Beziehungen und passen damit gut zum Bereich *Muster und Strukturen*. Hier ein Beispiel:

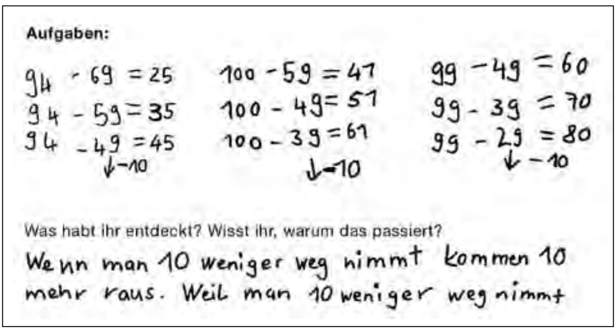


Abb. 9: aus Rathgeb-Schnierer 2004

Magische Quadrate werden häufig in den Schulbüchern thematisiert. Man kann mit diesen Formaten bereits im 1. Schuljahr beginnen. Wenn die Schüler das Prinzip erkannt haben („Gleiche Summen auf allen Geraden durch die Figur“), kann man sie auffordern durch Drehen der Zahlen neue „Zauberquadrate“ zu finden.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Auch hier kann man den Schwierigkeitsgrad auf verschiedene Weise variieren. Zum einen kann der Zahlenraum beginnend mit den Zahlen von 1 bis 9 in einem Neunerquadrat beliebig ausgedehnt werden. Die Schülerinnen und Schüler werden dabei allmählich herausfinden, dass im Neunerquadrat die „Zauberzahl“ (die immer gleiche Summe) das Dreifache der mittleren Zahl ist.

In nicht vollständig ausgefüllten Quadraten sollen die fehlenden Zahlen unter Beachtung der Regel ergänzt werden.

Aufgabenbeispiel (Kl. 1)

Setze die Zahlen 8, 7, 1 und 9 so ein, dass ein Zauberquadrat entsteht.

2		6
	5	
4	3	

Unterschiedliche Schwierigkeiten ergeben sich durch die Anzahl von Leerstellen bis hin zum eigenen Konstruieren von magischen Quadraten durch additive oder multiplikative Veränderung.

Additive Veränderung

2	7	6
9	5	1
4	3	8

$\xrightarrow{+2}$

4	9	8
11	7	3
6	5	10

Multiplikative Veränderung

2	7	6
9	5	1
4	3	8

$\xrightarrow{\cdot 2}$

4	14	12
18	10	2
8	6	16

Abb. 10: Erzeugung neuer magischer Quadrate

Neben der Übung von Rechenfertigkeiten wird hier also das Erkennen von Beziehungen, das Finden und Beschreiben von Regeln, sowie das Nutzen von Regeln zur Neukonstruktion verlangt.

Gleichzeitig üben die Schülerinnen und Schüler eine probierende und experimentierende Arbeitshaltung, die allgemein für Problemlösungsprozesse vorteilhaft ist.

Zahlen und Operationen in Verbindung zu *Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit*

Was sagen uns die Zahlen in Tabellen und grafischen Darstellungen? Hier geht es um den konkreten Bedeutungshintergrund von Zahlen. Die Erfahrung zeigt, dass das Interpretieren vielen Schülerinnen und Schülern besonders schwerfällt. Deshalb sollte dieser Tätigkeit im Unterricht genügend Zeit eingeräumt werden. Die Schwierigkeit der konkreten Interpretation von Rechnungen auf der symbolischen Ebene wird manchmal von Lehrpersonen unterschätzt. Es handelt sich hier um die „Übersetzung“ zwischen verschiedenen Abstraktionsebenen. Solche Übersetzungsleistungen werden in der Regel den Bereichen *Modellieren* und *Darstellen* zugeordnet. Sie sollen bereits möglichst früh geübt werden, da die im 4. Schuljahr erwarteten Leistungen recht anspruchsvoll sind und langfristig vorbereitet werden müssen. Ein Beispiel einer einfachen Tabelle ist die folgende. Für die Beantwortung der Fragen müssen jedoch bereits die Zahlen in unterschiedlicher Weise kombiniert werden.

Aufgabenbeispiel (Kl. 2)

Alter	Anzahl der Mädchen	Anzahl der Jungen
8	5	4
9	7	8
10	3	0

Ergänze die richtigen Zahlen: ___ Kinder besuchen die 2. Klasse.
___ Kinder sind 9 Jahre alt.
___ Jungen sind in der Klasse.
Finde zwei weitere Aussagen. Fertigt eine Tabelle für eure eigene Klasse an.

Man kann bereits im 2. Schuljahr mit der Interpretation solcher Tabellen beginnen. Anspruchsvoller ist die Interpretation dieser Tabelle, die zum Thema Wasserverbrauch im 4. Schuljahr eingesetzt werden könnte.

Aufgabenbeispiel (Kl. 4)

	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
Baden, duschen	135 l	145 l	142 l	138 l	248 l	485 l	263 l
Wäsche waschen	60 l	60 l	60 l		120 l	12 l	

Die Aufgabe könnte wie folgt lauten:
Hier wurde der Wasserverbrauch einer 5-köpfigen Familie während einer Woche gemessen. Die Tabelle zeigt einen Ausschnitt der festgestellten Verbrauchsmengen. Überlege: Wie kommen die unterschiedlichen Verbrauchsmengen an den verschiedenen Wochentagen wohl zustande?

Um die Daten zu interpretieren, müssen die Schülerinnen und Schüler Erfahrungen aus ihrer Alltagswelt einbringen. Anschließend können sie aufgefordert werden, den Verbrauch pro Kopf für jeden Tag zu berechnen und den durchschnittlichen Wasserverbrauch einer Person pro Tag.

5.4 Vernetzung des Kompetenzbereiches *Zahlen und Operationen* mit den allgemeinen (prozessbezogenen) mathematischen Kompetenzen

Die prozessbezogenen Kompetenzen werden in der Regel nicht isoliert entwickelt, sondern stehen miteinander in enger Verbindung. Besonders deutlich wird dies beim Kommunizieren und Argumentieren. Für die Entwicklung und die Überprüfung prozessbezogener Kompetenzen kann man allerdings Aufgaben bzw. Aufgabenteile auf eine bestimmte Kompetenz zuspitzen.

Problemlösen/Flexibles Rechnen
Von Problemlösen kann man eigentlich immer sprechen, wenn Schülerinnen und Schüler mit einer Aufgabe konfrontiert werden, für die ihnen kein Lösungsweg geläufig ist. Dies kommt insofern häufiger zum Tragen, als man stärker dazu übergegangen ist mit „herausfordernden Situationen" zu arbeiten, anstatt einen nach Schwierigkeiten gestuften Gang mit aufeinander aufbauenden Aufgaben vorzugeben. Bei herausfordernden Situationen müssen die Schülerinnen und Schüler eigene Lösungswege finden. Mathematik eignet sich gut für ein solches Vorgehen, da die Rechenoperationen logisch aufeinander aufbauen und anspruchsvollere Aufgaben auch mit einfachen Mitteln zu lösen sind, wenn dies auch für Erwachsene häufig etwas umständlich wirkt.

Der Vorteil der Erarbeitung eigener Lösungswege liegt darin, dass die Schüler eine Haltung entwickeln, auch Aufgaben, für die sie nicht sofort einen Lösungsweg wissen, in Angriff zu nehmen. Zugleich entwickeln sie ein „Problembewusstsein" und sind damit für geschicktere Lösungswege aufgeschlossen, die sie von den anderen Schülern oder von der Lehrerin gezeigt bekommen.

Das langfristige Ziel: Aufgaben geschickt lösen
Wenn man verhindern will, dass sich Schülerinnen und Schüler darauf beschränken, Rechenverfahren und Rechenstrategien nur schematisch anwenden, muss man ihren „Zahlenblick" schulen (vgl. SCHÜTTE 2008), auch dies bereits vom 1. Schuljahr an. Im Grunde geht es immer um die geschickte Manipulation der Teile-Ganzes-Beziehungen. Dazu gehört das quasi-simultane Erfassen im ersten Schuljahr ebenso wie das gegensinnige Verändern von

Zahlen in Summentermen oder das gleichsinnige Verändern von Zahlen in Subtraktionstermen.

Das langfristige Ziel ist das Entwickeln unterschiedlicher aufgabenadäquater Lösungsstrategien beim Addieren und Subtrahieren. Im dritten Schuljahr kann man durch geschickt gewählte Aufgaben die Schüler immer wieder anregen, sich die Zahlen genau anzusehen und dadurch die Lösung zu „sehen" statt (mit irgendeinem Routineverfahren) zu rechnen.

Aufgabenbeispiel (Kl. 3)					
636 + 363	452 + 399	502 + 477	43 + 28 + 17	56 + 35 + 35 + 14	397 + 503
829 – 824	829 – 532	512 – 399	310 – 290	503 – 497	602 – 398

Möglichkeiten des geschickten Rechnens sind gegeben durch die Nähe zum nächsten vollen Hunderter, durch die Nähe der Zahlen zueinander (z. B. 503 – 497 oder auch 829 – 824) oder durch Vertauschung der Summanden.

Kommunizieren und Argumentieren

Beim Aufbau prozessbezogener Kompetenzen ist die Wahl geeigneter Aufgaben nur ein, wenn auch wichtiger, Teil, es kommt auch sehr auf die *Unterrichtskultur* an, deren Güte man u. a. daran feststellen kann, wie die Schülerinnen und Schüler miteinander kommunizieren.

Abb. 11: Rechenkonferenz: Die Schüler wählen Minusaufgaben aus und beschreiben ihre Rechenstrategie (© Die Matheprofis 2, S. 94, Oldenbourg Verlag).

Erforschen

Forscheraufgaben eignen sich gut, um mathematische Zusammenhänge zu erkennen und Vermutungen anzustellen und zu prüfen, wie auch Begründungen zu suchen und nachzuvollziehen. Um einen häufigen Schülerfehler zu thematisieren, wurden die folgenden „Forscheraufgaben" entwickelt.

26 – 15 =	67 – 32 =
25 – 16 =	62 – 37 =

„Was passiert eigentlich, wenn man die Einer bei Minusaufgaben vertauscht?"
(vgl. Rathgeb-Schnierer 2004)

Fehler suchen

Fehler zu suchen ist eine sehr beliebte Tätigkeit von Schülerinnen und Schülern, können sie sich hier doch als kompetent erleben. Beim „Fehler finden" werden mathematische Aussagen auf Korrektheit geprüft. „Denkfehler" werden entdeckt und richtige Strategien müssen begründet werden. Auch hier lernen die Schüler also zu argumentieren.
Dabei ist es günstig, typische Fehler zu thematisieren. Beispielsweise:
73 – 54 = 21 Wo steckt der Fehler?
Anton sagt: „Ich habe 70 – 50 gerechnet und dann 4 – 3, das gibt doch 21."
Was würdest du darauf antworten?

Erfinden

„Erfinden" im hier verstandenen Sinne meint Transferleistungen, wie die Übertragung eines entdeckten Prinzips auf neue (eigene) Aufgaben. Schülerinnen und Schüler, denen die sprachliche Beschreibung einer Entdeckung schwer fällt (zum Beispiel Kindern mit nicht-deutscher Herkunftssprache) haben hier die Gelegenheit, mit der Übertragung auf neue Aufgaben ebenfalls sehr anspruchsvolle Leistungen zu zeigen. Außerdem sind „Erfindungen" ein interessanter Anlass für mathematische Gespräche im Klassenplenum.

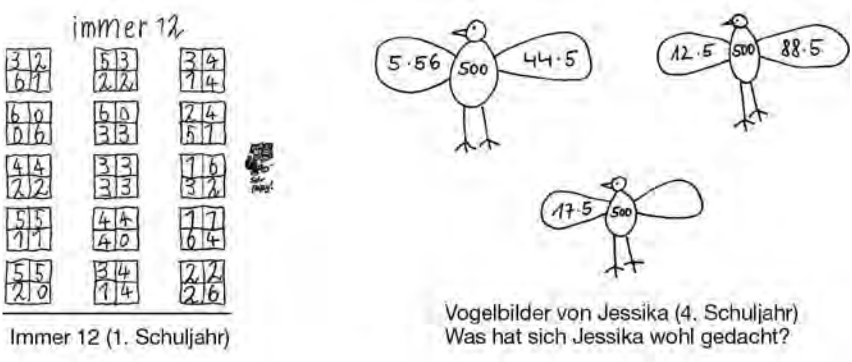


Abb. 12: Erfindungen nach einem Muster und freie Erfindungen

Modellieren und Konkretisieren

Der Mathematikunterricht ist nicht nur als ein Fach anzusehen, in dem es vorwiegend um zunehmende Abstraktion geht, vielmehr müssen heute auch „konkrete“ Erfahrungsmöglichkeiten geschaffen werden, die in der Lebenswelt mit ihrer Durchdrungenheit mit fertigen Mathematisierungen nicht mehr so ohne weiteres möglich sind. Der Mathematikunterricht ist daher in mancher Hinsicht gefordert, konkreter zu sein als die außerschulische Lebenswirklichkeit, in dem er fertige Ergebnisse von Mathematisierungen beispielsweise durch Skizzen nachvollziehbar macht.

Aufgabenbeispiel (Kl. 3)

Viele Schüler/innen haben Probleme bei der Berechnung von Entfernungen. Wie weit sind die Orte von einander entfernt?

Abb. 13: km-Schilder Ortsentfernungen

Die Skizzen sollen bereits eine Hilfe darstellen. Wenn dies nicht genügt, könnte eine Anschlussaufgabe lauten:

Aufgabenbeispiel (Kl. 3)

Baut verschiedene Orte und verbindet sie mit Straßen. Stellt passende Hinweisschilder mit Entfernungsangaben auf. Überlegt euch Fragen dazu, die euer Nachbar lösen kann.

Darstellen

Die Darstellung mathematischer Sachverhalte ist eine recht anspruchsvolle Kompetenz, erfordert sie doch Übersetzungsleistungen zwischen den verschiedenen Repräsentationsmodi. Dies sind konkretes Handeln, bildliche Darstellung und die Darstellung in verbaler Form oder in Form von mathematischen Zeichen.

Die Darstellung eigener Lösungswege erfordert zudem, sich „beim eigenen Denken zuschauen“ zu können und den Lösungsweg in eine für andere verständliche Form zu bringen.

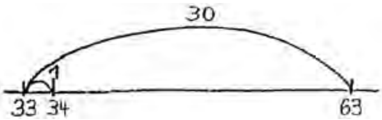


Abb. 14: Darstellung von Lösungswegen mit dem Rechenstrich. Aufgabenbeispiel: 63–29.

Darstellen setzt das Erkennen der wesentlichen (mathematischen) Beziehungen voraus, die dann in einer anderen modalen Ebene, sei es einer Skizze, einer Tabelle, einer verbalen Beschreibung oder einer symbolischen Gleichung zum Ausdruck gebracht werden.

Solche Übersetzungen dienen entweder der Veranschaulichung und sind damit ein Zugang zum tieferen Verständnis (zum Beispiel die Veranschaulichung von Rechenoperationen mit dem Rechenstrich), oder sie dienen zur Unterstützung des Rechnens. Beispielsweise verwendet man beim Rechnen mit Zeitspannen gern Pfeildiagramme. Im Allgemeinen geht es um die Anwendung zeichnerischer Hilfsmittel, wie Skizzen oder Tabellen. Manchmal sind sich Lehrpersonen gar nicht bewusst, dass hier Übersetzungsleistungen erforderlich sind.

Stundenband, Rechenstrich und Pfeilbild zeigen hier verschiedene, im Abstraktionsgrad unterschiedliche Darstellungen desselben Sachverhalts.

Aufgabenbeispiele (Kl. 3)

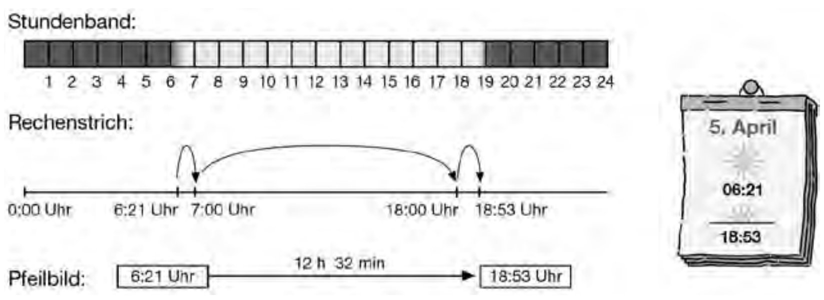


Abb. 15: Tageslänge (Umsetzung in Anlehnung an „Die Matheprofis 3“, S 69)

Die vielfältigen Vernetzungen des Themenbereichs *Zahlen und Operationen* mit den anderen Themenbereichen konnten hier nur in einigen Kernideen skizziert werden. Ausgehend von diesem Gerüst, lassen sich in den Schulbüchern viele weitere Beispiele finden und in diesen Kompetenzbereich einordnen.

6 Größen und Messen

Andrea Peter-Koop/Marcus Nührenbörger

6.1 Struktur und Inhalt des Kompetenzbereichs *Größen und Messen*

In Bezug auf den Kompetenzbereich *Größen und Messen* erwerben und vertiefen Kinder im Mathematikunterricht der Grundschule

- Wissen über die Größenbereiche (Länge, Geldwerte, Zeit/Zeitspannen, Masse/Gewicht sowie Flächen- und Rauminhalte) und ihre Repräsentanten, Bezeichnungen und Relationen,
- Fähigkeiten in Bezug auf das Messen und das Schätzen von und Rechnen mit Größen sowie die Klassifizierung von Messinstrumenten,
- Vorstellungen über Größen im Sinne von Stützpunktvorstellungen.

Was ist das Besondere am Kompetenzbereich *Größen und Messen*?

Das Wissen über Größen und die Einsicht in Messprozesse eröffnen Kindern in der Grundschule die Tür zum Verstehen und zum kritisch-reflexiven Umgang mit ihrer physikalischen Umwelt und diesbezüglichen Daten mit Mitteln der Mathematik. Dieser unmittelbare Bezug zur Lebenswelt macht die Bedeutung des Inhaltsbereichs *Größen und Messen* im Hinblick auf mathematische Grundbildung und die Entwicklung mathematischer Mündigkeit aus (vgl. Winter/Walther 2006).

Neben den konkret erfahrbaren Lebensweltbezügen hat der Kompetenzbereich *Größen und Messen* im Mathematikunterricht eine besondere Rolle in Bezug auf die Verbindung von arithmetischen und geometrischen Inhalten und Kompetenzen. Größen – und vor allen das Messen – sind im Mathematikunterricht ein wichtiges Bindeglied zwischen Arithmetik (*Zahlen und Operationen*) und Geometrie (*Raum und Form*).

Es ist wichtig, dass Kinder in diesem Kompetenzbereich den sachgerechten Umgang mit Größen und ihren standardisierten Messinstrumenten erlernen, die Struktur von Einheiten und Untereinheiten sowie den Unterschied zwischen Zählen und Messen erkennen und verstehen und Vorstellungen über Größen im Sinne von Stützpunktvorstellungen entwickeln.

Größenbereiche und ihre Repräsentanten, Bezeichnungen und Relationen

In der Grundschule erwerben und vertiefen Kinder grundlegende Kompetenzen in Bezug auf Größen durch den Umgang mit entsprechenden Repräsentanten, direkte und indirekte Vergleiche sowie entsprechende sprachliche und mathematische Bezeichnungen.

Die folgende Übersicht zeigt die in der Grundschule behandelten Größenbereiche und ihre entsprechenden Repräsentanten, ihre spezifische Terminologie und die durch den Vergleich von Repräsentanten beschriebenen Relationen.

Größenbereiche	Repräsentanten	Bezeichnungen (Terminologie)	Relationen
Längen	Stäbe, Wegstrecken …	lang, kurz (qualitativ) km, m, dm, cm, mm bzw. Fuß, Hand … (quantitativ)	kürzer bzw. länger als gleich lang
Geldwerte	Geldscheine, Münzen, Preise …	viel, wenig (qualitativ) €, Ct, $, … (quantitativ)	weniger (billiger) bzw. mehr (teurer) als gleich viel wert
Zeitspannen	Abläufe, Vorgänge …	lang, kurz (qualitativ) Jahr, Monat, Woche, Tag, h, min, sec bzw. Klatschen … (quantitativ)	dauert kürzer bzw. länger als dauert genau so lang wie
Gewichte (Massen)	Gegenstände, Körper von Menschen oder Tieren	leicht, schwer (qualitativ) t, kg, g, mg, Zentner, Pfund … (quantitativ)	leichter bzw. schwerer als genau so schwer wie
Flächeninhalte	ebene Formen, Flächen, Grundstücke …	groß, klein (qualitativ) m^2, dm^2, cm^2, mm^2, ha, a bzw. Einheitsquadrate … (quantitativ)	größer bzw. kleiner als genau so groß wie
Rauminhalte	Gefäße, Körper …	wenig, viel, (fast) leer bzw. voll (qualitativ) m^3, dm^3, cm^3, mm^3, hl, l bzw. Becher, Eimer … (quantitativ)	weniger als bzw. mehr als genau so viel wie

Größen und Messen als Bindeglied zwischen den Kompetenzbereichen *Zahlen und Operationen* und *Raum und Form*

Im Kontext von Größen werden Zahlen zu *Maßzahlen* (vgl. Padberg 2005, S. 15) und dienen somit der Beschreibung von Sachverhalten, z. B. der Länge des Schulweges oder dem Gewicht eines neugeborenen Babys. In geometrischen Kontexten kommen Messprozesse bei der Bestimmung von und beim Umgang mit ebenen und räumlichen Figuren zum Tragen. Maßzahlen in Form von Längen-, Flächen- oder Winkelangaben bzw. Angaben zu Rauminhalten sind bedeutsam, wenn zum Beispiel in der Grundschule eine Strecke der Länge 5 cm gezeichnet oder in der Sekundarstufe I mithilfe der Kongruenzsätze die Länge einer Seite eines gegebenen Dreiecks berechnet werden soll. Grundsätzlich ist es wichtig, dass Schülerinnen und Schüler ein Verständnis von Maßzahlen haben und Maßzahlen von Rechenzahlen unterscheiden können. Beim Rechnen mit Maßzahlen ergeben sich Besonderheiten. Während beim Addieren und Subtrahieren von Größen, d. h. beim Aneinanderfügen bzw. Abtrennen von Repräsentanten einer Größe, Maßzahlen miteinander verrechnet werden (z. B. bei der Berechnung des Größenunterschiedes von zwei Kindern), werden Größen aus dem gleichen Größenbereich in der Regel nicht mit Größen, sondern mit Zahlen multipliziert oder dividiert[1] (z. B. bei der Ermittlung des Gesamtgewichts von 3 Stück Butter Ý 250 g oder des Umfangs eines Quadrats mit der Seitenlänge 2 cm). Auch bei der Umwandlung von einer Einheit in eine andere (Wie viele m sind 3 km? Wie viele min sind 3½ h?) wird mit einer Rechenzahl operiert. Zudem kann zwischen zwei verschiedenen Maßzahlen stets eine weitere gefunden werden, hingegen existiert zwischen zwei benachbarten natürlichen Zahlen keine weitere natürliche Zahl.

Zu bedenken gilt, dass die Beziehung zwischen Größen und ihrer mathematischen Darstellung (Symbolisierung) immer der Interpretation des Kontextes und der mathematischen Zeichen durch die Kinder bedarf – sie ergibt sich nicht von selbst. Dafür brauchen sie entsprechende Grundlagen und Kompetenzen im Umgang mit Größen (vgl. dazu 6.2).

Des Weiteren stellen wir uns Zahlen häufig in Verbindung mit Abständen vor, z. B. anhand eines Zahlenstrahls. Hier entfaltet die Größe „Längen" ihre Kraft. Es sind im Gegensatz zu den anderen Größen vor allem die Längen, die von Geburt an wichtig sind und auch bereits von Säuglingen wahrgenommen werden. Längen stellen eine Denkform für andere mathematische Inhalte wie die Zeit („dauert nicht mehr lang", „lange Zeit", „der Winter ist noch weit weg") oder für Zahlbeziehungen („die Hälfte einer Zahl" kann man sich als Mitte

[1] Ausnahmen bilden hier bezogen auf die Grundschule die abgeleiteten Größen, Geschwindigkeiten sowie Flächen- und Rauminhalte.

zwischen der Zahl und der Null vorstellen) dar. Die Bedeutung der Länge wird auch daran deutlich, dass sie in Form der Skalierung bei den Messinstrumenten anderer Größen verwendet wird, z. B. bei einer analogen Waage oder Uhr, beim Thermo- oder Tachometer. Allerdings kann eine naive Übernahme der arithmetischen Vorstellungen zum Zählen in den Bereich des Messens zu Schwierigkeiten führen (vgl. dazu Kapitel 6.2, „Erfahrungen und Kompetenzen von Kindergartenkindern“).

Grundstruktur eines Mess-Systems

Messen ist nicht gleichzusetzen mit Zählen, sondern folgt drei zentralen Kernideen. Unabhängig von den verschiedenen Größenbereichen folgt jedes Mess-System einer einheitlichen Grundstruktur: Es muss eine Einheit gefunden werden. Diese muss wiederholt benutzt und dabei gezählt werden, wenn das zu Messende größer ist als die Maßeinheit. Die Einheit muss systematisch untergliedert werden, wenn keine Maßzahl aus den natürlichen Zahlen das zu Messende völlig erfassen kann.

Am Beispiel der Größe „Längen“ sollen diese für ein Verständnis des Messvorgangs grundlegenden *Kernideen* erläutert werden.

1. *Auswahl einer Einheit:*
   Grundlage eines jeden Messprozesses sind geeignete und passende Einheiten. Beim Messen von Längen sind dies Strecken oder Objekte, die konstant gleich groß bleiben und linear gedeutet werden. Grundsätzlich lassen sich *standardisierte Einheiten,* wie z. B. Meter und Zentimeter von willkürlich gewählten, sogenannten *nicht-standardisierten* Einheiten, wie z. B. Schritten oder Stäben unterscheiden.
2. *Vervielfachen von bzw. Zerlegen in Einheiten:*
   Ein Repräsentant für die ausgewählte Einheit, z. B. Zentimeter, muss ohne Zwischenräume und Überlappungen hintereinander abgetragen werden. Dabei verlangt der Messkontext im Hinblick auf die Präzision einerseits feinere Einheiten (wenn das zu messende Objekte z. B. länger als 3 cm und kürzer als 4 cm ist), andererseits ein situatives Verständnis und konventionelle Entscheidungen über die Grenzen der Präzision.
3. *Zählen der Anzahl an Einheiten und Untereinheiten:*
   Jeder Messprozess ist dadurch gekennzeichnet, dass die abgetragenen Einheiten mitgezählt bzw. bei verschiedenen Einheiten verrechnet werden. Anders als bei der geläufigen kardinalen Interpretation von Null als „nichts“, muss die Null beim Messen als Startpunkt erkannt werden. Wenn keine natürliche Maßzahl das zu Messende vollständig erfassen kann, muss die Einheit systematisch untergliedert werden können. Durch die Verwendung standardisierter Einheiten wird sichergestellt, dass das Messergebnis un-

abhängig von der messenden Person ist[2] und dass kleinere bzw. größere Einheiten in systematischer Beziehung zur Basiseinheit stehen.

Der Prozess des Messens erfordert also grundsätzlich die Verbindung von Raum- und Zahlvorstellungen mit der Idee von wiederholbaren, zerlegbaren und zählbaren Einheiten. Nicht zuletzt weil der Größenbereich Länge die Kernideen des Messens besonders deutlich widerspiegelt, kommt dieser Größe im Grundschulunterricht große Bedeutung zu. Längen sind in der Regel der erste Größenbereich, der im Unterricht systematisch erarbeitet wird.

Klassifizierung von Messinstrumenten

Die beim Messen eingesetzten Instrumente lassen sich dahingehend unterscheiden, ob sie auf standardisierten (normierten) oder auf willkürlichen (nicht-normierten) Einheiten basieren. Die folgende Abbildung veranschaulicht am Beispiel des Größenbereichs Längen eine entsprechende Klassifizierung von Messinstrumenten, wie sie Kindern im Unterricht sowie in ihrem Alltag begegnen.

Repräsentation nicht-normierter Einheiten	
gegenständliche, zweckentfremdete Messwerkzeuge *Heft, Würfel* *Stab, Stift*	körpereigene, intuitiv-historische Messwerkzeuge *Elle, Handspanne, Daumen* *Schritt, Fuß*

Repräsentation normierter Einheiten		
Repräsentation einzelner Einheiten *Maßstäbe*	konventionelle Messwerkzeuge *Messrad, Geodreieck, Tafellineal*	Veranschaulichung des linearen Messprozesses *Maßband, Zollstock Lineale*

Neben dem Erwerb von Wissen und Fähigkeiten im Umgang mit Größen beim Messen und Rechnen, ist auch der Aufbau von Größenvorstellungen wesentliche Grundlage dieses Kompetenzbereichs wie die folgenden Ausführungen verdeutlichen.

[2] Man stelle sich die unterschiedlichen Längenangaben vor, wenn ein Grundschulkind mit Schuhgröße 32 und ein erwachsener Mann mit Schuhgröße 43 die Länge einer Wand mithilfe ihrer Füße messen.

Größenvorstellungen

Vorstellungen zu Größen haben ihren Ursprung stets in konkreten Handlungserfahrungen, die zu individuellen Vorstellungsbildern ausgebaut werden. Diese Bilder sind die eigentlichen geistigen Träger der Bedeutungen, die ein Kind zu einer Größe, einer Maßeinheit oder einer Messoperation entwickelt. Die Vorstellungen müssen inhaltsreich und bildlich fassbar sowie zugleich auch vage und unpräzise sein, um flexibel in Beziehung zu anderen Vorstellungen sowie zu realen Gegebenheiten gesetzt werden zu können.

Der Aufbau realistischer Vorstellungen von Größen, sogenannte *Stützpunktvorstellungen* (Winter 1992), ist für diesen Kompetenzbereich ein zentrales Unterrichtsziel, sodass in Messsituationen entweder die passenden Messinstrumente bzw. Maßeinheiten gewählt oder in Abwesenheit von Messwerkzeugen geeignete Schätzungen vorgenommen werden können.

Die Entwicklung von Stützpunktvorstellungen bedarf eines Zusammenspiels zwischen konkreten Messprozessen einerseits und verinnerlichten Messerfahrungen andererseits. Wesentlich ist hierbei die *bewusste* Auseinandersetzung mit den jeweiligen konkreten Aktivitäten, die im Unterricht erörtert, diskutiert und reflektiert werden sollten. Winter (1992) weist darauf hin, dass realistische Größenvorstellungen sich nicht von selbst entwickeln und auch nicht über viele formale Einheitenumwandlungen.

Während in Bezug auf Längen, Zeitspannen, Gewichte oder Rauminhalte konkrete Messungen durchgeführt werden können, kann der Geldwert eines Objektes nicht gemäß der drei Kernideen gemessen werden. So nimmt Geld nicht nur aufgrund der spezifischen gesellschaftlichen Wahrnehmung eine besondere Stellung bei der Arbeit mit Größen ein.

Welche Bedeutung hat der Kompetenzbereich *Größen und Messen*?

Die Bedeutung des Kompetenzbereichs *Größen und Messen* für Grundschulkinder liegt im Wesentlichen in seiner alltäglichen Nützlichkeit im Hinblick auf den Zugang zu ihrer Umwelt und deren Erschließung mithilfe der Mathematik. Kaum ein mathematischer Inhaltsbereich hat so konkrete und direkte Verknüpfungen zur Lebenswelt. Bereits seit dem frühen Kindesalter beobachten Kinder ihre Eltern und andere Erwachsene beim Messen – seien es genaue Abmessungen mithilfe von Messinstrumenten, z. B. beim Abwiegen von Mehl mit der Küchenwaage, oder mithilfe von Stützpunktvorstellungen, und/oder dem Einsatz willkürlicher Einheiten, z. B. bei der Bestimmung der Breite eines Raumes durch Schrittlängen. Sie entwickeln Neugier am Umgang mit verschiedenen Messwerkzeugen und bauen bereits vor Schulbeginn diesbezüglich erste subjektive Vorstellungen und Kenntnisse auf (s. 6.2, „Erfahrungen und Kompetenzen von Kindergartenkindern"), die dann im Unterricht systematisiert und vertieft werden. Die zentrale Bedeutung des Größenbereichs liegt für Kinder darin, dass sie den Unterschied zwischen Zählen und Messen erkennen und verstehen.

Besondere Bedeutung kommt dem Größenbereich „Geldwerte" zu – im Lebensalltag wie auch im Mathematikunterricht. Schon früh erleben Kinder wie ihre Eltern, Geschwister oder andere Menschen in Geschäften ihre Einkäufe mit Bargeld (oder auch EC- oder Kreditkarten) bezahlen und Wechselgeld bekommen. Diesbezügliche Beobachtungen des Umgangs mit Geld werden von Kindern, lange bevor sie selbst mit Geld umgehen, häufig in ihrem Spiel nacherlebt. Man denke nur an das beliebte Spiel mit dem Kaufladen.

Im Mathematikunterricht wird darüber hinaus die Tatsache, dass sich das dezimale Stellenwertsystem in einer für Kinder meist leicht zugänglichen Form mit Geld modellieren lässt, genutzt. Besonders beim (Ent-)Bündeln bei der Erarbeitung des Stellenwertsystems sowie zur Veranschaulichung der schriftlichen Rechenverfahren wird an geeigneten Geldsorten ihre dezimale Struktur und die in ihnen „verkörperte" Bündelungsidee bewusst herangezogen.

6.2 Kompetenzaufbau im Unterricht

Die fachlichen und fachdidaktischen Grundlagen und Bedingungen des Kompetenzaufbaus in Bezug auf *Größen und Messen* sollen im Folgenden aus zwei sich ergänzenden Perspektiven erläutert werden:

- in Form eines Überblick unter Bezug auf *außerschulische Vorerfahrungen* der Kinder einerseits und *fachdidaktische Grundlagen* andererseits sowie
- in Bezug auf die konkrete *Gestaltung des Unterrichts*.[3]

Wie entwickeln Kinder Kompetenzen im Bereich *Größen und Messen*?

Lange bevor im Unterricht Wissen und Fertigkeiten in Bezug auf verschiedene Größen und den Einsatz von und sachgerechten Umgang mit Messinstrumenten erworben werden, erkunden Kinder diesen Kompetenzbereich in ihrem häuslichen Umfeld, ohne dass diese Begegnungen im direkten Bezug zum Unterricht stehen. Anders als z. B. schriftliche Rechenverfahren, die in der

[3] Wir danken den Kindern und Lehrerinnen der Wartburgschule Münster und der Borndalschule Altenberge für die Zusammenarbeit bei der Vorbereitung der in diesem Kapitel vorgestellten Unterrichtsvorschläge und Eigenproduktionen.

Regel schulisch erworben werden, entwickeln Kinder erste Einsichten in Messprozesse und Messinstrumente vielfach an außerschulischen Lernorten. So sind die meisten Kinder z. B. bereits mehrfach in verschiedenen Situationen gemessen und gewogen worden, kennen Anfangszeit und Dauer ihrer Lieblingssendungen im Fernsehen und haben den Wert konventioneller Messinstrumente und Maßeinheiten auf vielfache Weise direkt oder indirekt erfahren. Wer misst im Alltag die Körpergröße eines Kindes schon mit Stäben oder Handspannen?

Erfahrungen und Kompetenzen von Kindergartenkindern

Bereits Kindergartenkinder nehmen offenbar Alltagssituationen, in denen sie mathematisch tätig sind und Erfahrungen im Umgang mit Größen und beim Messen sammeln, bewusst wahr, wie ihre Kommentare zu Fotos belegen, die Eltern im Rahmen eines Bilderbuchprojektes von Situationen gemacht hatten, in denen die Kinder ihrer Meinung nach im weitesten Sinne mathematisch tätig waren (vgl. Peter-Koop/Grüßing 2006).

Abb. 1: Größenerfahrungen von Kindergartenkindern

Bemerkenswert ist, dass die Kinder vielfach schon geeignete Begriffe zur Beschreibung ihrer Aktivitäten wählen konnten (wie z. B. das Kind an der Messlatte auf dem Foto rechts) sowie ihren eigenen Messaktivitäten bereits sinnvolle standardisierte Einheiten zuordnen konnten. Auch wenn beide Mädchen zusammen sicherlich nicht 500 kg wiegen, ist ihnen offensichtlich bewusst, dass man das Körpergewicht in der Einheit Kilogramm angibt. Die Ausbildung entsprechender Stützpunktvorstellungen sowie die Fähigkeit, die Gewichtsangabe korrekt ablesen zu können, gehören hingegen zu den schulisch zu erwerbenden Kompetenzen.

Erfahrungen und Kompetenzen und deren Vernachlässigung im Unterricht

Traditionelle Ansätze des Unterrichts nehmen diese Erfahrungen und das Interesse an und (Vor-)Wissen der Kinder über standardisierte Einheiten jedoch häufig nicht auf. Zu beobachten ist im Unterricht vielmehr oft eine Überbetonung willkürlicher Maßeinheiten. Dies geschieht meist mit dem gut gemeinten Ziel, die Kinder die offensichtlichen Grenzen willkürlicher Einheiten in Bezug auf Genauigkeit und Vergleichbarkeit von Messungen selbst entdecken und so den Sinn standardisierter Einheiten erkennen zu lassen. Anders als die Menschen im Mittelalter, die noch keine standardisierten Einheiten kannten[4], begegnen Kindern standardisierte Messinstrumente von früher Kindheit an. Allerdings wird bei einem solchen Unterrichtsansatz meist der kindliche Zugang zum Messen, der sich im Wesentlichen in einem fundierten Interesse am Umgang mit ihnen bekannten Messwerkzeugen wie Waage, Maßband oder Uhr manifestiert, außer Acht gelassen. Kinder können so kaum Verbindungen zwischen den unterrichtlichen und ihren lebensweltlichen Messerfahrungen herstellen.

Unbedacht bleibt dabei auch, dass es viel schwieriger ist, sich Strategien für den Einsatz willkürlicher Einheiten zu überlegen, als die Skalierung eines Messwerkzeugs abzulesen. Beim Anlegen und Abzählen willkürlich gewählter Längenmaßeinheiten wird weder die Bedeutung der Null noch das wiederholte Anlegen linearer Segmente, die Einheiten bzw. Untereinheiten repräsentieren, beim Messvorgang deutlich, was den Kindern ein Durchschauen der jedem Messvorgang zugrundeliegenden Strukturen (vgl. Abschnitt 6.1) jedoch erschwert.

Vermeidung von Fehlern und Fehlvorstellungen

Ein Unterricht, der nicht die vielfältigen Erfahrungen und bereits (ansatzweise) entwickelten Kompetenzen von Kindern beim Umgang mit Größen und Messinstrumenten einbezieht, führt häufig zu typischen Fehlermustern und Fehlvorstellungen. Am Beispiel des Größenbereichs Längen soll illustriert werden, wie gerade das vermeintlich kindgemäße Messen mit willkürlich gewählten Messwerkzeugen zu Verständnisschwierigkeiten beim Kompetenzaufbau führen kann:

- *Die fehlende Skalierung bei willkürlichen Messwerkzeugen unterstützt die rein arithmetische Deutung des Messens als Zählen*. Das „Messen“ einer Tischlänge mit Streichhölzern oder Papierfüßen impliziert (von der Lehr-

[4] Das Ur-Meter wurde z. B. nach umfangreichen Messungen und Berechnungen erst Ende des 18. Jahrhunderts festgelegt und nach zahlreichen Wirren 1840 endgültig bestätigt.

kraft ungewollt und vielfach unbewusst) die Deutung des Messens mit willkürlichen Einheiten als Zählen von Objekten.

- *Das Messen mit flächigen Objekten erschwert die Fokussierung auf die Linearität der Längenmessung.* Grundschulkinder entwickeln aufgrund von unterrichtlichen Messerfahrungen beim Abtragen von Papierfüßen oder Heften vielfach „flächige Vorstellungen“ von Längeneinheiten, wie anhand der folgenden Abbildung veranschaulicht wird.

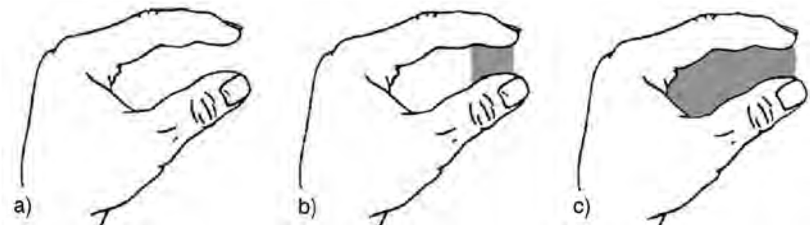


Abb. 2: Der Versuch der Darstellung eines Zentimeters (a) kann fälschlicherweise als flächige Vorstellung (vgl. b und c) interpretiert werden (Nührenbörger 2005, S.20).

Diese Fehlvorstellung kann noch später in der Sekundarstufe die Abgrenzung von Längen, Flächen und Volumina nachhaltig beeinträchtigen und erschweren.

- *Der Zusammenhang zwischen Einheiten und Untereinheiten wird nicht erkannt.* Das Zerlegen eines zu messenden Objekts in eine Anzahl an gleich großen Abschnitten, die als kleinere Einheiten gesehen werden bzw. das Verständnis der Beziehungen zwischen zwei Einheiten, ist für Kinder oft schwierig und wird durch das Handeln mit willkürlichen Einheiten in keiner Weise unterstützt, sondern eher behindert.

Welcher Unterricht kann zur Kompetenzentwicklung beitragen?

Kompetenzaufbau in Bezug auf *Größen und Messen* kann am besten gelingen, wenn im Unterricht

- das *Vorwissen* der Kinder im Hinblick auf standardisierte Maßeinheiten und Messinstrumente einbezogen wird,
- der *Aufbau einer Skalierung* ebenso explizit thematisiert wird wie der Zusammenhang zwischen Einheiten und ihren Untereinheiten,
- beim Messen im Unterricht *bedeutsame Situationen* gewählt werden, die eine aktive Auseinandersetzung mit *Vergleichs-, Mess- und Schätzaktivitäten* sowie die Reflexion der eigenen konkreten Handlungserfahrungen im Umgang mit verschiedenen *konventionellen* und *nicht-standardisierten Messwerkzeugen* anregen und erfordern,

- alltagstaugliche *Stützpunktvorstellungen* und wechselseitige Bezüge zwischen verschiedenen Größen, die das Vorstellen und Behalten stützen, aufgebaut und genutzt werden.

Zentrale Kernkompetenzen in Bezug auf Größen und Messen am Ende der vierten Klasse sind zum einen, *Größenvorstellungen zu besitzen*, und zum anderen, *mit Größen in Sachsituationen umzugehen*. Vorschläge für die Gestaltung des Unterrichts mit dem Ziel, diese Kompetenzen zu entwickeln und die beschriebenen, häufig zu beobachtenden Fehlvorstellungen zu vermeiden, finden sich in den folgenden Abschnitten. Direkte Bezüge zu den in den Bildungsstandards formulierten Teilkompetenzen sind dabei zur leichteren Orientierung immer kursiv gesetzt.

Erhebung und Einbeziehung des Vorwissens

Um die sich entwickelnden Lernprozesse zielgerichtet zu unterstützen, sollten zum einen Lernstandserhebungen durch diagnostische Gespräche oder aber mit kleinen Vortests durchgeführt werden; zum anderen muss den Kindern die Gelegenheit gegeben werden, im Unterricht ihre Lernausgangslage zu zeigen und ihr Wissen anzuwenden. So können die Kinder ihnen bereits bekannte Messinstrumente in den Unterricht mitbringen und diese vorstellen und reflektieren. Aufschlussreich sind in diesem Kontext selbst gezeichnete Bilder von Kindern über Einheiten oder über Messwerkzeuge.

Lineal- und Uhrenbilder, die eine arithmetische Interpretation der Mess-Skala vermuten lassen, basieren oftmals lediglich auf Zahlen oder auf Zahlen in Verbindung mit Strichen (s. Abb. 3a). In der Vorstellung der Kinder gehören die Striche zwar „irgendwie" zur Skala, sie sehen darin aber keine Bedeutung bzw. eine inhaltliche Verbindung zu den Zahlen.

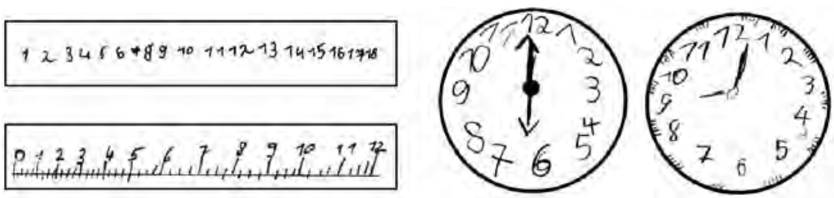


Abb. 3a: „Zahlen-Lineale/-Uhren" und „Zahlen-Zwischenstriche-Lineale/-Uhren"

Von den „Zahlen-Linealen/-Uhren" und „Zahl-Zwischenstriche-Linealen/-Uhren" sind Bilder zu unterscheiden, auf denen die eingezeichneten Striche in Beziehung zu den Zahlen gesetzt werden (s. Abb. 3b). Während die „Zahl-Strich-Lineale/-Uhren" darauf hinweisen, dass die Kinder noch keine Untereinheiten erkennen (cm und mm bzw. h und min), werden die Zerlegungen und Beziehungen in den „Einheits-Linealen/-Uhren" deutlich. Es werden Unterschiede zwischen den gezeichneten Strichen und den notierten Zahlen gemacht.

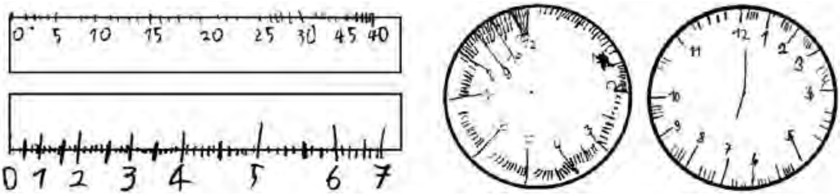


Abb. 3b: „Zahl-Strich-Lineal/-Uhr“ und „Einheits-Lineal/-Uhr

Thematisierung der Skalierung

Das Verständnis der Kernideen des Messens wird von den außerschulischen Messerfahrungen beim Umgang mit konventionellen Messwerkzeugen beeinflusst. Der Prozess des Abtragens, Zählens und Zerlegens einer Einheit ist hier allerdings nicht mehr konkret zu erleben, sondern wird visuell durch das Anlegen und Ablesen einer Mess-Skala ersetzt.

Das Messen mit Linealen oder analogen Uhren basiert auf dem korrekten Umgang mit der Messskala und dem Ablesen der Maßzahl. Auch wenn Kinder bereits über umfangreiche Vorerfahrungen verfügen und einfache Messprozesse beherrschen, ist ihnen nicht unbedingt bewusst, wie Start- und Endpunkt eines Messprozesses in Beziehung zueinander stehen: Welche Bedeutung hat die Zahl „0“ auf der Skala? Wie viele Minuten sind vergangen, wenn der Minutenzeiger einer Uhr bei „5“ stand und nun bei „10“ ankommt? Wie lang ist eine Strecke, die bei „5“ auf einem Lineal ansetzt und bei „10“ endet? Viele Kinder werden hier als Antwort entweder die letzte Zahl – ggf. in Verbindung mit der Einheit – nennen („10“) oder aber die Anzahl der Striche abzählen und so auf „6“ kommen.

Der in der Schule geforderte Umgang mit einem Lineal setzt nicht unbedingt auch ein Verständnis der Beziehungen zwischen linearen Einheiten, dem Messprozess und der Messskala voraus. Daher gelingt es auch Kindern mit einem rein mechanischen Verständnis, eine Länge oder Uhrzeit zu bestimmen. Diese Kinder sind allerdings am Ende der Grundschule häufig nicht in der Lage, ihr Wissen über den Umgang mit einem Lineal oder der Uhr auf andere Messinstrumente (wie z.B. auf den Zollstock oder die Stoppuhr) zu übertragen oder situativ das passende Instrument auszuwählen.

Im Zuge der Auseinandersetzung mit Mess-Situationen sollten Kinder die Beziehung zwischen dem konkreten Abtragen einer Einheit und der Skala nachvollziehen, indem sie selbst geeignete Skalen zum Messen kreieren. Lineal und Uhr bedienen sich ebenso wie andere konventionelle Messinstrumente einer linearen Mess-Skala. Die festgelegte Verteilung der Striche und Zahlen veranschaulicht visuell die drei Kernideen des Messens: Die Bedeutung der Zahlen, das Vervielfachen der konstanten Basiseinheit und die Zerlegung in gleiche Teile sowie die Beziehung zwischen der Zahlenfolge und den räumlichen Abschnitten. Diese strukturell bedeutsamen Informationen sind aber nicht selbsterklärend. Vielmehr werden sie zu Trägern von Bedeutungen, wenn Kinder ihre Aufmerksamkeit darauf fokussieren und dazu ihr Wissen um den Messprozess konstruktiv aufgreifen, indem sie selbst eine Skalierung herstellen.

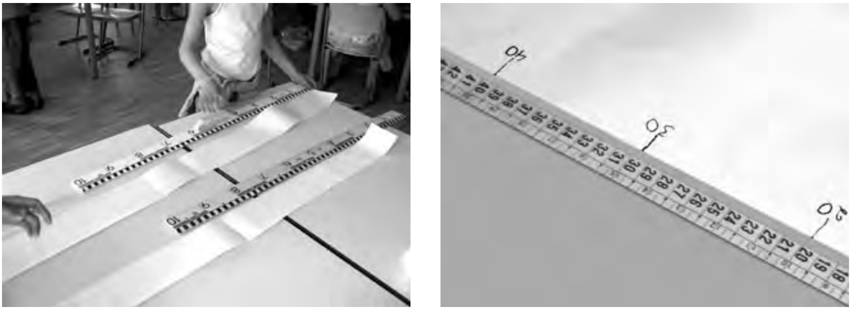


Abb. 4: Aufgabenbeispiel zur Entwicklung der Skalierung auf einem 1-m-Lineal

Im Bereich der Rauminhalte lässt sich ebenfalls im Unterricht leicht eine Skalierung entwickeln, indem die Kinder an einer Flasche für jeden „Becher" Saft, der hineingefüllt wird, einen Strich als Markierung setzen. So kann anhand der Skalierung abgelesen werden, wie viele Becher Saft in der Flasche enthalten sind.

Einsicht in den Aufbau und die Bedeutung einer linearen Mess-Skala ist zwar im Rahmen der Bildungsstandards nicht explizit als zu erwerbende Kompetenz formuliert, unterliegt aber als Basiskompetenz den beiden Teilkompetenzen *Größen vergleichen, messen und schätzen* und *mit geeigneten Einheiten und unterschiedlichen Messgeräten sachgerecht messen*. Die bewusste Auseinandersetzung mit der Skalierung auf Messinstrumenten fördert zugleich auch deren Verinnerlichung, sodass diese auch als Stützpunktvorstellung genutzt werden können, wenn Kinder *in Sachsituationen angemessen mit Näherungswerten rechnen und dabei Größen begründet schätzen*.

Thematisierung von Beziehungen zwischen Einheiten und Untereinheiten

In der Grundschule sollen die Kinder die *verschiedenen Standardeinheiten aus den Bereichen Geldwerte, Längen, Zeitspannen, Gewichte und Rauminhalte kennenlernen*, indem sie die Einheiten im Messprozess konkret erfahren und einsetzen. Das flexible Wissen um Standardeinheiten umfasst die sachgerechte Einschätzung, in welchen Mess-Situationen welche Einheit zu wählen ist. Dies sollte im Unterricht thematisiert und reflektiert werden, z.B. anhand folgender Aufgaben:

In welcher Einheit misst du …
- … den Umfang eines Baumstammes, die Länge deines Haares, der Schulstraße, eines Flusses, die Tiefe einer Pfütze?
- … die Dauer des Zähneputzens, eines 50-m-Laufes, des Unterrichts, der Ferien?
- … das Gewicht deines Tornisters, eines Ohrringes, eines Schneeballes, einer Turnmatte?
- … den Inhalt deiner Trinkflasche, die Wassermenge in der Badewanne, in einer großen Pfütze?

Bei der Größe Geld ist es wichtig, die einzelnen Münzen zu vergleichen, zu ordnen und vor allem in Beziehung zueinander zu setzen. Es bietet sich an, einzelne Beträge mit anderen Beträgen darzustellen und zu diskutieren, welchen Wert die Scheine und einzelnen Münzen haben. Die Eigenproduktionen aus einem zweiten Schuljahr in Abb. 5 zeigen in diesem Zusammenhang nicht nur die zahlenraumsprengende Auseinandersetzung mit 500 € 5 Ct, sondern offenbaren auch Schwierigkeiten – bei der anzahlorientierten Zerlegung von 23 € in 2 €, 20 Ct und 1 Ct sowie der stellenwertorientierten Zerlegung von 77 € in 7 € und 7 €.

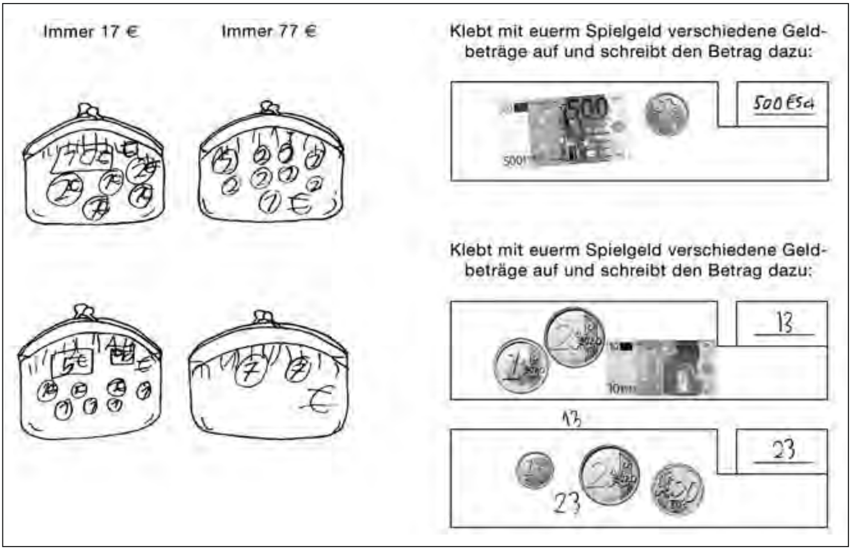


Abb. 5: Eigenproduktion zu Geldbeträgen (Nührenberger/Pust 2006, S. 147)

Zu sicheren Kenntnissen über Standardeinheiten gehört auch die Fähigkeit, flexibel *Größenangaben in unterschiedlichen Schreibweisen darzustellen und umzuwandeln*. Gerade im Kontext von Geldwerten erkennen jüngere Kinder nicht immer, dass eine einzige Münze mehr wert sein kann als viele andere einer kleineren Einheit, da die Beziehungen untereinander kaum sinnlich erfahrbar sind. Im Kontext der einzelnen Größen sind die Beziehungen zwischen den verschiedenen Einheiten ebenso bedeutsam wie die Verknüpfung mit qualitativen oder zwischen verschiedenen quantitativen Begriffen; wie z. B. bei der Auseinandersetzung mit Sprichwörtern oder dem Vergleich alter historischer und gegenwärtiger konventioneller Maße.

Die Rechenfertigkeit, von einer Maßeinheit in eine andere umzurechnen, sollte nicht darauf beschränkt sein, dass die Kinder eine Technik erlernen und sinnleer üben, um wie viele Stellen ein Komma verschoben werden muss. Vielmehr bieten herausfordernde Umrechnungssituationen (z. B.: Wie viele Stunden hat ein Jahr?) die Chance, dass Kinder bewusst ihre Kenntnisse über die Beziehungen zwischen Einheiten anwenden und kritisch überprüfen.

Besonders schwierig sind für Kinder die verschiedenen Systeme der Umwandlung von einer Maßeinheit in eine andere; denn der Umwandlungsfaktor bei Rauminhalten beträgt 1000, bei Längen 1000 bzw. 100 bzw. 10 und bei der Zeit 60. Daher sollten die Kinder die Beziehungen innerhalb einer Größe ebenso kennen wie die Kommaschreibweise. Bei der Kommaschreibweise ist darauf zu achten, dass hier nicht die Vorstellung aufgebaut wird, das Komma trenne zwei Größen voneinander. Diese führt häufig zu Fehlinterpretationen der Art, dass 1,35 m größer als 1,5 m sei, da 35 größer als 5 ist. Gerade in Verbindung mit der Stellenwerttafel können Schwierigkeiten im Umgang mit der Null durch das stellenwertgerechte Notieren aufgefangen werden.

In der Grundschule werden bereits im Zusammenhang mit Zeitspannen oder Rauminhalten erste *grundlegende Erfahrungen zu im Alltag gebräuchlichen Bruchzahlen gesammelt und verstanden*. Diese können mithilfe von Uhren oder Messbechern dargestellt werden. Hier sollten auch Umrechnungen stattfinden wie: ½ l = 0,5 l = __ ml bzw. ¾ h = __ min.

Abb. 6: Elementare Erfahrungen zu Brüchen

Wahl bedeutsamer Vergleichs-, Mess- und Schätzaktivitäten

Zu einem umfassenden und flexiblen Messverständnis gehören auch die Kenntnis und der Vergleich verschiedener Messwerkzeuge und deren variierende Bedeutung in Abhängigkeit zur Mess-Situation. *Ein sachgerechter Umgang mit geeigneten Einheiten und unterschiedlichen Messgeräten* wird angeregt, wenn im Unterricht bezogen auf unterschiedliche Größenbereiche und Messinstrumente immer wieder folgende Fragen thematisiert werden, die Kindern helfen, im Laufe der Grundschule ein Gefühl für den Messprozess zu bekommen bzw. einen „Mess-Sinn" zu entwickeln: (Siehe dazu auch die Dokumentation der Unterrichtseinheit „Längen" auf der CD-ROM.)

- Was ist eine sinnvolle Mess-Strategie?
- Wie kann man das Messresultat bestimmen und benennen?
- Wie genau muss ich messen?
- Wie können verschiedene Objekte geeignet gemessen werden?
- Mit welchen Messgeräten könnte ich das Objekt ggf. auch noch messen?

Abb. 7 Messen mit unterschiedlichen Messwerkzeugen (Lineal, 5-cm-Stab, Maßband)

Im Hinblick auf diese Fragen müssen sich die Kinder der verschiedenen Messverfahren und Maßeinheiten bewusst sein und diese im Hinblick auf die Messsituation abwägen können. Als Messverfahren kommen das Vergleichen, Messen und Schätzen in Frage. Schon jüngere Kinder beherrschen in der Regel einfache Vergleiche von Objekten. Dennoch sind Vergleichssituationen nicht immer einfach zu bewältigen – insbesondere dann, wenn die üblichen Vergleichsstrategien nicht angewandt werden können, wie z. B. in alltäglichen Spielsituationen: beim Vergleich der Abstände der Kugeln beim Boccia, bei der Bestimmung des Umfangs von Bäumen, bei der Bestimmung der Länge von verschiedenen kurvenreichen Wegen, Wellen oder Spiralen. Solche Vergleichssituationen sollten daher im Unterricht ebenso thematisiert werden.

Authentische Mess-Situationen bewahren die Schüler dabei vor einer künstlichen Inszenierung, die keinen Beitrag für das Umweltverständnis der

Kinder und für die Entwicklung ihres sachrechnerischen Verständnisses liefert. Sie können in umfangreiche Projekte eingebunden sein oder als „authentischer Schnappschuss“ den Unterricht kurzfristig bereichern, wie z. B. anregende Lernumgebungen und -beobachtungen zum „Kakaoeinsammeln“, bei der Erstellung eines Geburtstagskalenders oder in Zusammenhang mit Ausflügen, Pflanzen und Tieren oder dem eigenen Körper, der eigenen Schule oder Stadt. In solchen Situationen müssen die Schüler auch *angemessen mit Näherungswerten rechnen* und dabei *Größen sinnvoll schätzen*.

Im Unterricht werden Schülerinnen und Schüler häufig dazu angeregt, vor dem Messen zu schätzen, obwohl sie noch nicht über ausreichende Stützpunktvorstellungen verfügen. Dies kann zur Folge haben, dass manche Kinder eher raten als schätzen oder aber zunächst messen und einen leicht veränderten Messwert als Schätzung notieren. Gerade wenn die (möglichst geringe) Differenz zwischen dem Schätz- und Messwert im Vordergrund der unterrichtlichen Reflexion steht, erhöht sich die Gefahr, dass das Schätzen von den Kindern als etwas „Unmathematisches“ abqualifiziert wird.

Aufbau von Stützpunktvorstellungen

Zu allen Größen sollen Grundschulkinder die verschiedenen Maßeinheiten kennenlernen und in der Lage sein, ihnen verschiedene *Repräsentanten zuzuordnen, die im Alltag wichtig sind*. Hier kann eine Sammlung von Repräsentanten zu einer Standardeinheit in Form eines Plakates oder eines Bildes eine Auswahl an individuell wichtigen Objekten anbieten, die zum Aufbau von Stützpunktvorstellungen genutzt werden können (s. Abb. 8).

Abb. 8: Längen- und Zeitplakate zu Standardeinheiten

Der Aufbau von Größenvorstellungen wird wesentlich von konkreten Messerfahrungen geprägt, die nach und nach allein in der Vorstellung stattfinden können. Die Fähigkeit, realistisch zu *schätzen*, setzt die Verinnerlichung von Vergleichsmaßen voraus. Erst auf der Basis ausreichender Messerfahrungen zu einer Größe können Stützpunktvorstellungen aktiviert und miteinander in Beziehung zum zu schätzenden Objekt gesetzt werden. Voraussetzung ist folglich, dass zuvor grundlegende Erfahrungen zum Messen und Umgang mit konventionellen Messinstrumenten gesammelt worden sind.

Die Größenbereiche „Zeitspannen“ und „Gewicht“ sind ohne den Einsatz von Messinstrumenten nicht sichtbar. Zudem sind erlebte Zeitspannen sehr anfällig gegenüber eigenen subjektiven Empfindungen. Der Vergleich von Zeitspannen – gerade wenn diese nicht parallel ablaufen – fordert heraus, die Zeitdauer mit einer periodischen Bewegung zu verbinden, z. B. rhythmisches Klatschen, Gehen oder die Konstruktion von Wasser-, Sand- und Kerzenuhren. Auch wenn die Größen „Gewicht“ und „Rauminhalte“ bereits auf grundlegenden Messerfahrungen zu anderen Größen aufbauen, besitzen sie ihre spezifischen Besonderheiten und Schwierigkeiten, so dass auch hier grundlegende Messerfahrungen erforderlich sind. So können mit den Händen Objekte verglichen werden, bevor diese mit einer Tafelwaage und mithilfe von Gewichtsstücken gemessen werden. Hier ist es auch wichtig, dass die Schüler erfahren, dass selbst Dinge, deren Gewicht man nicht spürt (z. B. Luft in einem Ballon, ein Faden Wolle) gemessen werden können. Ebenso sind trotz des unterrichtlichen Aufwands die Beobachtung und eigene Durchführung des Umschüttens von Flüssigkeiten (oder auch Sand, Reis …) von einem Gefäß in ein anderes wichtige Quellen der Erkenntnis, wenn diese Versuche im Zusammenhang mit dem Messen und ggf. auch der Erstellung einer Mess-Skala stehen.

Der Umgang mit wichtigen *Bezugsgrößen aus der Erfahrungswelt in Sachsituationen* soll an einem Beispiel aus der 3. Klasse aufgezeigt werden:

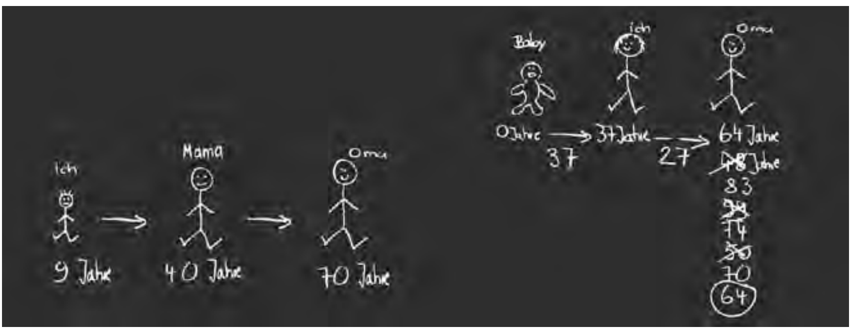


Abb. 9: Wie alt bin ich, sind meine Eltern, meine Großeltern?

Hier werden die unterschiedlichen Altersspannen von Grundschulkindern, Eltern und Großeltern thematisiert und zueinander in Beziehung gesetzt. Die von den Kindern im Unterricht bestimmten Altersspannen innerhalb ihrer eigenen Familie können per Interview mit den Eltern überprüft und anschließend untereinander verglichen und strukturiert werden. Erst der Auftrag, das Alter eines Kindes der Parallelklasse ebenso zu schätzen und zu begründen wie das Alter von dessen Mutter und Großmutter, führt jedoch dazu, dass die Kinder einer Gruppe sich explizit über ihre exemplarischen Angaben austauschen müssen.

Die folgende Übersicht liefert Beispiele für sinnvolle Stützpunktvorstellungen zu den verschiedenen Größenbereichen, die Kinder im Mathematikunterricht der Grundschule aufbauen sollten und die ihnen dabei helfen, *in Sachsituationen angemessen mit Näherungswerten zu rechnen und dabei Größen begründet zu schätzen*. Diese Stützpunktvorstellungen können je nach sozialem und kulturellem Kontext, in dem sich die Kinder befinden, variieren.

Geld: weniger als 1 €: Bleistift, Kaubonbon – 1 € bis 5 €: Zeitschrift, Farbkasten, Schulhefte – 5 € bis 10 €: kleine Playmobilfigur, Taschenbuch – 10 € bis 50 €: Spiel, Tornister, Hose, Pullover – 50 € bis 100 €: Jacken, Inliner – 100 € bis 500 €: Fahrrad, Möbel – 500 € bis 1000 €: Computer – 1000 € bis 10 000 €: Motorrad, Urlaub – 10 000 € bis 100 000 €: Auto – mehr als 100 000 €: Haus

Längen: 1 mm: Strich – 1 cm: Fingerbreite – 10 cm: Handspanne – 1 m: großer Schritt, Türbreite – 2 m: Türhöhe – 10 m: LKW-Länge – 100 m: Länge eines Fußballfeldes – 1 km: $2\frac{1}{2}$ Runden auf dem Sportplatz – 10 km: fast eine Stunde Rad fahren – 100 km: eine Stunde Auto fahren – 1000 km: Nordsee – Alpen

Gewichte: 1 g: 2 Büroklammern – 2 g: Teebeutel – 10 g: Brief – 100 g: Brötchen, Heft – 1 Pfund: Kaffee – 1 kg: Mehl, Zucker – 5 bis 10 kg: Kiste Wasser, Putzeimer voll Wasser – 10 kg bis 100 kg: Mensch – 100 kg bis 1 t: Gorilla, Motorroller (nicht mehr allein von einem Menschen zu tragen) – mehr als 1 t: Auto, Elefant

6.3 Vernetzung der Kompetenzbereiche

Aufgabenformate zum Kompetenzbereich *Größen und Messen* sind nicht nur immer auch mit *allgemeinen mathematischen Kompetenzen* verbunden, indem sie Schülerinnen und Schüler zum *Darstellen, Kommunizieren, Argumentieren, Problemlösen* und *Modellieren* herausfordern, sondern vielfach auch mit Kompetenzen in wenigstens einem weiteren Inhaltsbereich (vgl. 6.1). Dies trifft besonders auf mathematisch reichhaltige und beziehungsreiche Aufgaben zu, die verschiedene Lösungswege oder auch mehrere richtige Lösungen zulassen. Im Folgenden sollen die Vernetzungen des Kompetenzbereichs *Größen und Messen* mit den weiteren inhaltsbezogenen Kompetenzen sowie auch mit den verschiedenen allgemeinen Kompetenzen herausgearbeitet und anhand von konkreten Aufgaben illustriert werden. Konkrete Bezüge zu inhaltsbezogenen und allgemeinen Kompetenzen sowie auch zu den verschiedenen Anspruchsniveaus, denen eine Aufgabe unterliegen kann, sind zur leichteren Orientierung erneut kursiv gesetzt.

Vernetzung des Kompetenzbereichs *Größen und Messen* mit den weiteren inhaltsbezogenen Kompetenzen

Wie bereits eingangs ausgeführt, bildet der Kompetenzbereich *Größen und Messen* im Mathematikunterricht ein wichtiges Bindeglied zwischen den Kompetenzbereichen *Zahlen und Operationen* sowie *Raum und Form*. So ist beim Rechnen mit Größen oder auch bei Umwandlungsaufgaben immer auch die Verbindung mit arithmetischen Kompetenzen erforderlich. Wenn es um die Bestimmung von Flächen- und Rauminhalten geht – in der Grundschule geschieht dies in der Regel mithilfe von Einheitsquadraten und Einheitswürfeln – werden geometrische Grundvorstellungen angesprochen, denn diesen Aufgaben liegt vielfach die in Kapitel 7 näher ausgeführte Passungsidee zugrunde.

Darüber hinaus stehen Größen häufig auch in einer funktionalen Beziehung zueinander, wenn z.B. angegeben ist, dass 4 Brötchen 1,04 € kosten. Solche funktionalen Beziehungen wiederum liegen im Schnittfeld zum Kompetenzbereich *Muster und Strukturen*, denn hier werden strukturelle Aspekte betont und genutzt. Auch zum Kompetenzbereich *Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit* ergeben sich Überschneidungen. Wenn die Kinder in *Beobachtungen, Untersuchungen und einfachen Experimenten Daten sammeln, strukturieren und in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen darstellen oder aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen*, können diese Daten natürlich Maßzahlen sein. Man denke zum Beispiel an die Erstellung einer (tabellarischen) Übersicht, aus der die Körpergrößen aller Kinder der Klasse oder die Morgentemperaturen eines Monats hervorgehen. Um mit Daten in Form von Maßzahlen umgehen zu können, müssen Kinder *Standardeinheiten aus den Bereichen Geldwerte, Längen, Zeitspannen, Gewichte und Rauminhalte kennen* und ggf. auch *Größen in unterschiedlichen Schreibweisen darstellen (umwandeln)* können. Diesbezügliche Kontexte sind häufig im Sachunterricht angesiedelt und/oder entstehen in Projekten.

Im Folgenden soll exemplarisch anhand von entsprechenden Aufgaben die Vernetzung des Kompetenzbereichs *Größen und Messen* mit inhaltsbezogenen Kompetenzen in Bezug auf *Zahlen und Operationen*, *Muster und Strukturen* sowie *Raum und Form* verdeutlicht und illustriert werden.

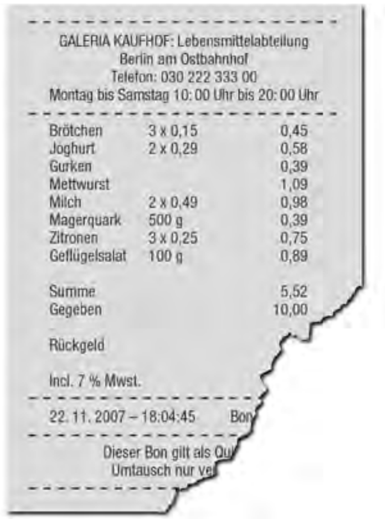
Vernetzung mit dem Kompetenzbereich *Zahlen und Operationen*

Das Themenfeld „Einkaufen/Supermarkt“ bildet den Kontext für vielfältige Aufgaben im Schnittfeld von Rechnen und dem Umgang mit Größen. Die folgende Aufgabe lässt sich in ähnlicher Form in den verschiedenen Schulbüchern und Lehrgängen für die 4. Klasse finden.

Aufgabe

Ein Stück vom Kassenzettel fehlt.
Timo weiß genau, dass er mit einem 10-Euro-Schein bezahlt hat.

Wie viel Geld bekam er an der Kasse zurück?


GALERIA KAUFHOF: Lebensmittelabteilung
Berlin am Ostbahnhof
Telefon: 030 222 333 00
Montag bis Samstag 10:00 Uhr bis 20:00 Uhr

Brötchen	3 x 0,15	0,45
Joghurt	2 x 0,29	0,58
Gurken		0,39
Mettwurst		1,09
Milch	2 x 0,49	0,98
Magerquark	500 g	0,39
Zitronen	3 x 0,25	0,75
Geflügelsalat	100 g	0,89
Summe		5,52
Gegeben		10,00
Rückgeld		

Incl. 7 % Mwst.

22. 11. 2007 – 18:04:45 Bon

Dieser Bon gilt als Qu
Umtausch nur ve

Schwerpunktmäßig angesprochen wird die Kernkompetenz *mit Größen in Sachsituationen umgehen*. Konkret sollen die Schülerinnen und Schüler eine *Sachaufgabe zum Größenbereich Geldwerte lösen*. Denkbar sind verschiedene Lösungsstrategien wie Weiterzählen, Ergänzen (hier einer Größe in Dezimalangabe) bis zum Zehner oder Subtrahieren. Für einige Schülerinnen und Schüler ist die Aufgabe sicherlich so leicht, dass sie im Kopf rechnen, andere rechnen halbschriftlich (z.B. 5,52 € + 0,48 € = 6 €; 6 € + 4 € = 10 €) oder schriftlich. Um die Aufgabe lösen zu können, müssen die Kinder selbst bei der Strategie Weiterzählen *den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems verstehen* (Kernkompetenz *Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen verstehen*). Die Strategien Ergänzen oder Subtrahieren setzen ferner voraus, dass die Kinder *Rechenoperation verstehen und beherrschen*, d.h. in diesem Fall konkret, dass sie die *Grundrechenarten Addition und Subtraktion verstehen* und je nachdem, ob im Kopf, halbschriftlich oder schriftlich gerechnet wird, *mündliche und halbschriftliche Rechenstrategien verstehen und bei geeigneten Aufgaben anwenden* bzw. *das schriftliche Verfahren der Subtraktion verstehen, ausführen und anwenden können*. Auch *Lösungen mithilfe von Überschlagsrechnungen*, die dann verfeinert werden, sind denkbar, ebenso wie die Kontrolle der Ergebnisse durch das Anwenden der Umkehroperation. Darüber hinaus ist die Aufgabe untrennbar von der Kompetenz in *Kontexten rechnen*; u. a. müssen die Kinder *die Beziehung zwischen Sache und den einzelnen Lösungsschritten durchschauen* und *ihr Ergebnis auf Plausibilität* prüfen.

Unabhängig von der Wahl der Strategie ist die Aufgabe dem *Anforderungsbereich I* zuzuordnen, weil die Aufgabe lediglich Grundwissen und das Ausführen von Routinetätigkeiten verlangt.

Vernetzung mit dem Kompetenzbereich *Raum und Form*

Verbindungen zwischen Größen und Messen und geometrischen Inhalten ergeben sich in erster Linie bei Aufgabenformaten zur Bestimmung von Flächen- und Rauminhalten. Das Verständnis und der korrekte Einsatz entsprechender Formeln zur Bestimmung von Flächeninhalt, Umfang, Rauminhalt und Oberfläche, die in der Sekundarstufe systematisch erarbeitet werden, wird in der Grundschule zunächst durch handlungsgestützte Aufgaben vorbereitet.

So finden sich z. B. bereits in Unterrichtsvorschlägen und Lehrwerken für das erste und zweite Schuljahr bezogen auf die Lernumgebung „Tangram“ Aufgaben, die das Auslegen gegebener Umrisse mit verschiedenen Grundformen wie Dreieck und Quadrat (vgl. dazu auch Kapitel 7) verlangen. Die Verbindung solcher „Passungsaufgaben“ mit Maßeinheiten erfolgt dann auf der Basis diesbezüglicher Handlungserfahrungen mithilfe von Einheitsquadraten (z. B. Pappquadrate mit der Kantenlänge 1 cm) zur Bestimmung von Flächeninhalten sowie mit Einheitswürfeln (z. B. Holz- oder Plastikwürfel mit der Kantenlänge 1 cm oder 1 dm). Handlungsgestützte Aufgabenformate, bei denen die Kinder mit solchen Einheitsquadraten oder Einheitswürfeln Flächen oder Körper auslegen[5], um ihren Flächen- oder Rauminhalt zu bestimmen, vermitteln Grundvorstellungen, die dann bei der Lösung von Aufgaben auf ikonischer Ebene wie dem folgenden Aufgabenbeispiel sowie später in der Sekundarstufe auf rein formaler Ebene beim Rechnen und Schätzen aktiviert

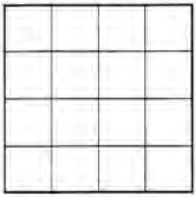
[5] Hier sollte unbedingt der Unterschied zwischen Länge, d. h. der Kantenlänge eines Einheitsquadrats oder Einheitswürfels, und Fläche klar herausgearbeitet werden (vgl. auch 6.2).

Name	Klasse	Datum

Meterquadrate

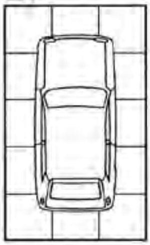
⊢—⊣ 1 Meter (Maßstab 1:100) ☐ 1 Meterquadrat

1.



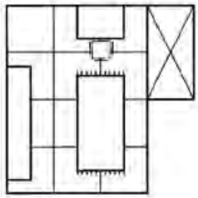
Sandkasten
..... Meterquadrate

2.



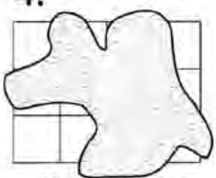
Garage
..... Meterquadrate

3.



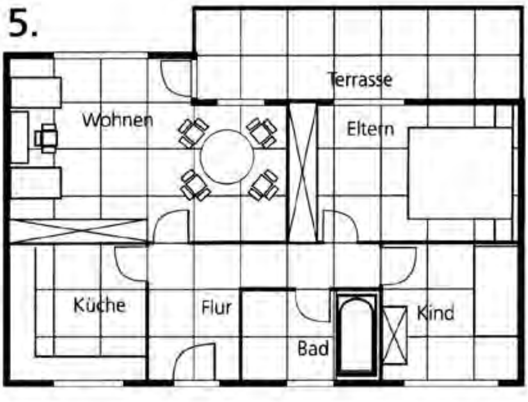
Kinderzimmer
..... Meterquadrate

4.



Kleiner Teich
..... Meterquadrate

5.



Wohnung
..... Meterquadrate

6. Kleines Schwimmbecken: 6 m Breite, 8 m Länge ..... Meterquadrate
7. Blumen-/Gemüsebeet: 4 m Länge, 3 m Breite ..... Meterquadrate
8. Lagerraum: 11 m Länge, 7 m Breite ..... Meterquadrate

und genutzt werden können. Einheitsquadrate mit der Kantenlänge 1 m, sogenannte Meterquadrate, sind die Grundlage für Übungsvorschläge für das dritte und vierte Schuljahr (Wittmann/Müller 1994, S. 50–51). Mit von den Kindern selbst hergestellten Meterquadraten aus Papier wird zunächst der Klassenraum ausgemessen und später zu Hause das eigene Zimmer. Wenn Kinder die Beziehung zwischen Länge und Fläche verstanden haben, ist ihnen schnell klar, dass man die Meterquadrate nicht immer tatsächlich hinlegen muss. Kennt man die Länge und die Breite einer rechteckigen Fläche in Metern, kann man die benötigte Anzahl von Meterquadraten mit einer Malaufgabe berechnen. Dabei ist wichtig, dass die Kinder den Zusammenhang zwischen einem rechteckigen Meterquadratmuster und dem zugehörigen rechteckigen Punktmuster erkennen, denn betont wird hierbei die *geometrische Anordnung* und Abzählung von Meterquadraten.

Die Auseinandersetzung mit den Beziehungen zwischen einer zu ermittelnden Fläche und quadratischen Teilflächen verlangt von den Kindern nicht nur das *Umgehen mit Größen in Sachsituationen* (hier Längen und Einheitsflächen) beim *Lösen einer Sachaufgabe mit Größen*. Ausgehend von Größenvorstellungen sollen sie ferner *Größen messen und schätzen*. Indem sie mithilfe der Meterquadrate die *Flächeninhalte ebener Figuren durch Auslegen mit Einheitsflächen messen*, ist zugleich der Inhaltsbereich *Raum und Form* angesprochen. Die arithmetische Verknüpfung der Meterquadratmuster mit der zugehörigen Malaufgabe wiederum erfordert das *Verständnis von Grundrechenarten* (hier der Multiplikation), womit auch Kompetenzen bezogen auf den Inhaltsbereich *Zahlen und Operationen* zum Tragen kommen.

Die einzelnen Teilaufgaben sind im Wesentlichen dem *Anforderungsbereich II* zuzuordnen, da das Erkennen und Nutzen von Zusammenhängen erforderlich ist. Bei der vierten Aufgabe mit dem kleinen Teich, müssen ferner Strategien für den Umgang mit einer nicht geradlinig begrenzten Fläche entwickelt werden, daher betrifft sie den *Anforderungsbereich III*. An diesem Beispiel wird zugleich deutlich, dass Aufgaben häufig nicht nur Kompetenzen aus verschiedenen mathematischen Inhaltsbereichen verlangen, sondern dass die Lösung meist auch eng verbunden mit *allgemeinen mathematischen Kompetenzen* ist. So verlangt die Bestimmung des Flächeninhalts des Teiches von den Schülern *Problemlösekompetenzen*, denn sie müssen sich Strategien überlegen, wie sie mit dem hier erstmals auftretenden Problem „nicht-geradlinie Begrenzung“ umgehen. Eine Strategie könnte es zum Beispiel sein, das Meterquadrat in vier „Viertelmeterquadrate“ zu zerlegen, um entstehende kleinere Teilflächen besser erfassen zu können.

Abschließend soll daher die Vernetzung des Kompetenzbereichs *Größen und Messen* mit allgemeinen mathematischen Kompetenzen anhand von einigen illustrierenden Beispielen herausgearbeitet werden.

Vernetzung des Kompetenzbereichs *Größen und Messen* mit den allgemeinen mathematischen Kompetenzen

Wenn im Unterricht verschiedene Lösungsstrategien vorgestellt, verglichen und diskutiert werden oder mit einem Partner bzw. in einer Kleingruppe gearbeitet werden soll, ist das nicht möglich, ohne miteinander zu *kommunizieren* und eigene oder fremde Lösungsansätze *argumentativ* zu unterstützten bzw. zu widerlegen. Ein fach- und schülerorientierter (Mathematik-)Unterricht verlangt daher auch immer Kompetenzen in Bezug auf *Kommunizieren* und *Argumentieren*. Dabei ist die Kommunikation von mathematischen Ideen und Lösungswegen häufig auch an geeignete *Darstellungen* gebunden, wie anhand der folgenden Aufgabe für das dritte Schuljahr deutlich wird.

Aufgabe
In einer Brieftasche sind 4 verschiedene Geldscheine. Zusammen sind es mehr als 100 € aber weniger als 200 €. a) Welche Geldscheine können es sein? b) Finde alle Möglichkeiten! c) Welche Beträge ergeben sich bei den einzelnen Möglichkeiten?

Diese Aufgabe im Schnittfeld der Inhaltsbereiche *Zahlen und Operationen* und *Größen und Messen* verlangt das *Rechnen in Kontexten* – konkret das *Lösen einer einfachen kombinatorischen Aufgabe durch Probieren bzw. systematisches Vorgehen*. Dabei müssen die *Standardeinheiten des Größenbereichs Geldwerte* und die „Stückelung" der Geldscheine (Sachwissen) bekannt sein. In Bezug auf allgemeine mathematische Kompetenzen erfordert die Aufgabe *Problemlösekompetenzen*, denn vor allem in Teil b) müssen *geeignete Lösungsstrategien entwickelt und genutzt* werden. Die Lösung der Aufgabe erscheint ohne eine geeignete *Darstellung* der verschiedenen Lösungen kaum möglich. Mögliche Darstellungsformen sind (1) die Notation der Additionsaufgaben, (2) das Zeichnen der Geldscheine oder (3) das Anfertigen einer Tabelle. Um begründen zu können, dass tatsächlich alle Möglichkeiten gefunden wurden, ist es weiterhin hilfreich, die einzelnen Möglichkeiten in sinnvoller Weise zu ordnen, um anhand einer entsprechenden Darstellung überzeugend argumentieren zu können.

Auch aus der Perspektive der Anforderungsbereiche ist diese Aufgabe interessant. Ähnlich vielseitig wie die erforderlichen allgemeinen Kompetenzen ist auch die Bandbreite der in den drei Aufgabenteilen enthaltenen Anforderungen. Während in Teil a) das *Herstellen eines Zusammenhangs* zwischen verschiedenen Geldscheinen und ihrer Gesamtsumme hergestellt werden muss *(Anforderungsbereich II)*, erfordert Teil b) komplexe Tätigkeiten wie das

Strukturieren, Entwickeln von Strategien und Verallgemeinern (Anforderungsbereich III). Teil c) hingegen verlangt lediglich das *Ausführen von Routinetätigkeiten (Anforderungsbereich I)*. Die Aufgabe erfüllt daher die Anforderungen in Bezug auf Binnendifferenzierung, denn schwächere Schüler finden vielleicht eine oder zwei Lösungen und berechnen die Summe, während leistungsstärkere Schüler beim Finden aller Lösungen herausgefordert werden.

Während die allgemeinen Kompetenzen *Darstellen, Kommunizieren* und *Argumentieren* nicht unbedingt einschlägig mit dem Inhaltsbereich *Größen und Messen* verbunden sind, sondern vielmehr enge Züge mit allen fünf Inhaltsbereichen aufweisen, ergeben sich in Bezug auf die Kompetenzen *Problemlösen* und vor allem auch *Modellieren* besonders enge Vernetzungen.

Problemlösen Modellieren

Problemlöseaufgaben unterscheiden sich von Routineaufgaben, die in der Regel die Anwendung eines bekannten Algorithmus oder Lösungsansatzes verlangen und meist ein eindeutiges Ergebnis haben, dadurch, dass sie den Schülerinnen und Schülern echte Entscheidungsmöglichkeiten über ihren Lösungsweg erlauben. Das heißt, dass es ihnen aufgrund der Aufgabenstellung möglich sein muss, ggf. auch verschiedene Wege einzuschlagen oder unterschiedliche Ansätze zu entwickeln. Ein wichtiges Kriterium für eine Problemlöseaufgabe ist damit die Offenheit.

Innermathematisches Problemlösen[6] findet sich häufig bei Aufgaben aus den Bereichen Zahlen und Operationen (z. B.: Zwei Zahlen ergeben die Summe 17. Welche beiden Zahlen können das sein?), *Raum und Form* (z. B.: Finde alle möglichen Würfelnetze!) sowie *Muster und Strukturen* (z. B. Fortsetzung von Zahlenketten). Problemlösen in außermathematischen Situationen wird hingegen auch als *Modellieren* bezeichnet. Hierbei findet mathematisches Problemlösen in engerem Sinne erst dann statt, wenn ein Modell, das eine gegebene Sachsituation beschreiben soll, gefunden ist. Die Ergebnisse des Problemlösens werden anschließend vor dem Hintergrund des konkreten Sachkontextes interpretiert. Außermathematisches Problemlösen bzw. Modellieren ist daher eng mit den beiden eher anwendungsbezogenen Inhaltsbereichen *Daten, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit* (vgl. Kapitel 8) sowie *Größen und Messen* verbunden.

Allerdings gibt es auch Anwendungsaufgaben, die zwar Modellierungsprozesse verlangen, aber eindeutig nicht den Problemlöseaufgaben zugeordnet werden, wie das folgende Aufgabenbeispiel für die 3. Klasse zeigt:

[6] Ein schönes Beispiel für innermathematisches Problemlösen (Aufgabenpärchen) findet sich im Einleitungsteil von Kapitel 3.1.

Aufgabe
Leonie hat zum Geburtstag ein Fahrrad mit Kilometerzähler bekommen. In der ersten Woche fährt sie 63 km, in der zweiten Woche 25 km und in der dritten Woche 8 km. a) Wie viel zeigt der Kilometerzähler nach drei Wochen an? b) In der vierten Woche macht sie mit ihren Eltern einen Ausflug. Nun zeigt der Zähler 127 km an.

Inhaltlich erfordert die Aufgabe das *Umgehen mit Größen (hier Längen und Zeitspannen) in Sachsituationen* beim *Lösen einer zweiteiligen Sachaufgabe*. In Bezug auf allgemeine mathematische Kompetenzen sind hier Kompetenzen beim Modellieren erforderlich, denn die Kinder müssen ein *Sachproblem in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen* und *die Lösung dann auf die Ausgangssituation beziehen*. Kompetenzen beim Problemlösen spielen hier allerdings keine Rolle. Teil a) verlangt vielmehr die Addition von 3 Längenangaben, in Teil b) muss die errechnete Summe von der Gesamtkilometerzahl subtrahiert werden. Grundlage hierfür ist, dass die Kinder die *Zusammenhänge* zwischen Zeit und gefahrenen Kilometern erkennen und für ihre Rechnungen *nutzen*. Entsprechend ist die Aufgabe dem *Anforderungsbereich II* zuzuordnen.

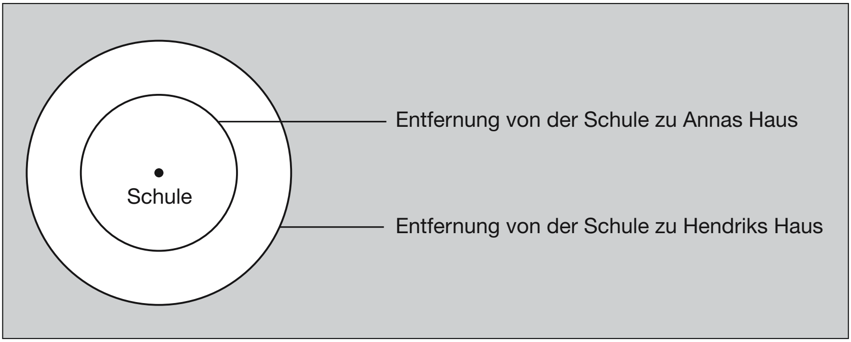
Die folgende Aufgabe jedoch erfordert sowohl Kompetenzen beim Problemlösen als auch beim Modellieren:

Aufgabe
Hendrik wohnt 700 m von der Schule entfernt, Anna nur 500 m. Wie weit wohnen sie voneinander entfernt? Begründe deine Antwort mit einer Zeichnung.

Verlangt ist erneut das *Umgehen mit Größen in Sachsituationen* beim Lösen einer Aufgabe mit Größen. Auch hier müssen die Schülerinnen und Schüler modellieren, indem sie *ein Sachproblem in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und die Lösung(en) auf die Ausgangssituation beziehen*. Rechnerisch ergeben sich schnell zwei Lösungen:

- Geht man davon aus, dass Anna und Hendrik genau in entgegensetzten Richtungen von der Schule wohnen, kommt man schnell zu der Antwort 1200 m.
- Unter der Annahme, dass sie die ersten 500 m bis zu Annes Haus einen gemeinsamen Weg haben, muss Hendrik noch 200 m allein weitergehen.

Erst die *Darstellung* der Situation mithilfe einer Zeichnung lässt die Komplexität der Aufgabe und somit ihren Problemcharakter erahnen:



Die Zeichnung veranschaulicht, dass Anna irgendwo auf der Kreislinie im Radius von 500 m um die Schule wohnt, Hendrik entsprechend irgendwo auf der Kreislinie von 700 m um die Schule. Nun kann man prima die beiden leicht arithmetisch zu bestimmenden Lösungen 1200 m und 200 m (nämlich die maximale und die minimale Entfernung) einzeichnen. Allerdings sind alle möglichen Positionen auf den beiden Kreislinien denkbar – folglich kommen auch Entfernungen zwischen 200 m und 1200 m infrage. Zeichnet man die Situation, indem man pro 100 m einen cm wählt, kann man leicht die Entfernungen verschiedener Möglichkeiten *abmessen*, indem man die zwei jeweils auf einer der beiden Kreislinien liegenden Punkte verbindet, diese Strecke misst und in m *umrechnet*. Während die beiden rechnerischen Lösungen „nur" das *Erkennen und Nutzen von Zusammenhängen* erfordern (*Anforderungsbereich II*), gelingt die umfassende Lösung der Aufgabe erst durch die Entwicklung entsprechender Strategien mittels einer Zeichnung und setzt die Fähigkeit zum *Verallgemeinern* (Betrachtung aller möglichen Fälle) voraus, betrifft also *Anforderungsbereich III*.

Eng verbunden mit dem Inhaltsbereich *Größen und Messen* ist ferner ein weiterer Aufgabentyp, der in besonderem Maße Kompetenzen beim Problemlösen und Modellieren erfordert – sogenannte FERMI-*Probleme*[7]. Hierbei handelt es sich um komplexe Probleme, die eigene Datenerhebungen ebenso verlangen, wie das Treffen plausibler Annahmen. Charakteristisch ist ferner, dass FERMI-Probleme bei der Formulierung meist völlig ohne oder nur mit wenigen Zahlen auskommen und in der Regel mit einem durch Überschlagsrechnung gewonnenen Ergebnis beantwortet werden (vgl. auch PETER-KOOP 2003). Bezogen auf die Grundschule lassen sich viele FERMI-Aufgaben finden, die Kompetenzen im Bereich *Größen und Messen* erfordern, wie z. B. die folgenden Aufgaben:

[7] Dieser Aufgabentyp geht auf den italienischen Physiker ENRICO FERMI (1901–1953) zurück.

Aufgabe
Wie viele Kinder wiegen so viel wie ein Eisbär? (vgl. VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN 1996) Wie viel Wasser verbraucht ein Kind aus eurer Klasse in einer Woche? Wie viele Fahrzeuge stehen in einem 3 km langen Stau auf der Autobahn?

Alle drei Aufgaben erfordern die *Kenntnis von Standardeinheiten* aus den jeweiligen Größenbereichen sowie darüber hinaus z. T. auch das *Umwandeln von Größenangaben*. Ferner müssen die Kinder mit *Näherungswerten rechnen und dabei Größen begründet schätzen* (z. B. die Länge eines Kleinwagens oder eines LKW). In allen Fällen gibt es keinen Standardalgorithmus oder eine Routinetätigkeit, die direkt und zielführend angewandt werden könnte. Verlangt sind also *Problemlösekompetenzen*. Dass die unterrichtliche Beschäftigung mit FERMI-Aufgaben zugleich Kompetenzen beim *Darstellen* des Lösungswegs, beim *Kommunizieren* mit Gruppenarbeitspartnern (gerade bei FERMI-Aufgaben ergeben sich klare Vorteile des sozialen Lernens) und beim *Argumentieren* hinsichtlich der Schlüssigkeit der eigenen Lösung bei der Vorstellung im Klassenplenum erfordert, liegt auf der Hand. Darüber hinaus liegen den Lösungen von FERMI-Aufgaben immer auch *Modellbildungsprozesse* zugrunde, denn eine komplexe *Sachsituation muss in ein mathematisches Modell übersetzt* werden[8], *innermathematisch gelöst* und *die rein mathematische Lösung vor dem Hintergrund der Sachsituation interpretiert werden* (vgl. WINTER 1994).

Kompetenzen beim Modellieren sind bei der Lösung von Sachaufgaben mit Größen unterschiedlichster Art darüber hinaus immer auch dann gefordert, wenn die Kinder *zu bildlichen Darstellungen Sachaufgaben formulieren* oder *Sachtexten und anderen Darstellungen der Lebenswirklichkeit die relevanten Informationen entnehmen* müssen. (Siehe auch die Dokumentation der Unterrichtseinheit „Geldwerte“ auf der CD-ROM.)

Wünschenswert in Bezug auf die Aufgabenkultur im Mathematikunterricht sind mathematisch reichhaltige und beziehungsreiche Aufgaben, die verschiedene Lösungswege auf unterschiedlichen Niveaus zulassen. Charakteristisch für solche Aufgaben ist, wie anhand der Beispiele deutlich gemacht wurde, die Vernetzung und das Zusammenspiel verschiedener inhaltlicher und allgemeiner Kompetenzen und im Hinblick auf die leistungsheterogene Lerngruppe auch die Einbeziehung unterschiedlicher Anforderungsbereiche – nicht nur aber besonders auch bei Aufgaben zum Bereich *Größen und Messen*.

[8] Bezogen auf die Stauaufgabe muss das nicht zwingend ein arithmetisches Modell sein. Vielfach bieten sich auch geometrische Modelle an (vgl. dazu Kapitel 7.2).

7 Raum und Form

Bernd Wollring/Hans-Dieter Rinkens

7.1 Zu Beginn

Wir illustrieren die Bildungsstandards zur Mathematik für die Grundschule im Inhaltsbereich *Raum und Form* durch *20 Aufgabenbeispiele*[1]. Diese Aufgaben stellen nicht den Anspruch, den Inhaltsbereich *Raum und Form* erschöpfend zu beschreiben, wir setzen bewusst Akzente.

Die Aufgaben sind als Anregungen für Lehrerinnen und Lehrer gedacht und sollen Entwicklungskerne sein, um eigene Aufgaben zu konzipieren. Sie repräsentieren Aufgabenformate. Kompetenzen, zumal mehrere Kompetenzen zugleich auszubauen, ist mit einzelnen Aufgaben nicht zu lösen. Den Weg dorthin skizzieren wir durch thematisch gebündelte Aufgabensätze, die wir *Lernumgebungen* nennen und die flexibel dem eigenen Bedarf anzupassen sind.

Mit *Raum und Form* verbindet man zunächst „Geometrie“ schlechthin und damit das Beschreiben, Zeichnen und Ausmessen von Figuren und Körpern. Das aber ist nur ein Teil dessen, was die Bildungsstandards mit *Raum und Form* ansprechen. Inhaltlich heben sie für die Grundschule zentrale Kompetenzen – sowohl Begrifflichkeiten wie Aktivitäten – heraus, die auch für die Weiterentwicklung geometrischen Denkens bedeutsam sind. Zugleich, sozusagen quer dazu, beschreiben sie *allgemeine mathematische Kompetenzen*, in deren Entwicklung diese inhaltlichen Aspekte einzubetten sind.

7.2 Allgemeine Kompetenzen im Inhaltsbereich *Raum und Form*

> *Allgemeine mathematische Kompetenzen zeigen sich in der lebendigen Auseinandersetzung mit Mathematik und auf die gleiche Weise, in der tätigen Auseinandersetzung, werden sie erworben. (KMK, Bildungsstandards, S. 7)*

Aufgaben und Lernumgebungen zu *Raum und Form* sollen also ein gestaltendes und erschließendes Umgehen mit *Raum und Form* ermöglichen. Hier ist mehr verlangt als Zeichnen, denn gestalterische Möglichkeiten zu *Raum und*

[1] Dank gebührt den Mitarbeitern B. Spindeler/G. Lilitakis für hilfreiche konstruktive Kritik.

Form sollen experimentelles und entdeckendes Arbeiten unterstützen. Gefordert ist darüber hinaus ein erweitertes Verständnis von *Raum und Form*:
Raum: Das Wort ist hier zu verstehen wie das englische ”space”: Es meint nicht nur den dreidimensionalen Anschauungsraum, sondern auch den zweidimensionalen, also die Ebene. Es kann auch eine Gerade oder eine Kugeloberfläche meinen, in der man geometrische Objekte unterscheidet. Es ist auch nicht nur gegenständlich zu deuten, sondern hat darüber hinaus einen Bestandteil, der andeutet, dass Gegenstände in diesem Raum verschiedene Konstellationen bilden und Beziehungen haben können und in diesem Raum zu gestalten sind. „Raum“ signalisiert *„Spielraum“* und *„Werkraum“* für darin befindliche Objekte.
Form: Eine ähnlich erweiterte Auffassung fordert die Bezeichnung „Form“. Gemeint sind geometrische Gestalten allgemein: linienartige, flächige und solche im dreidimensionalen Raum. Gemeint sind aber auch Formen als Träger von Eigenschaften, die häufig mit der Funktion dieser Formen im *„Spielraum“* oder *„Werkraum“* zusammenhängen.

Die Bildungsstandards nennen fünf *allgemeine Kompetenzen*, die nicht inhaltsbezogen formuliert sind: **A**: **A**rgumentieren, **D**: **D**arstellen, **K**: **K**ommunizieren, **M**: **M**odellieren, **P**: **P**roblemlösen (KMK, Bildungsstandards, S. 7). In einem ersten Zugang beschreiben wir exemplarisch, was sie für den Inhaltsbereich *Raum und Form* bedeuten.

Argumentieren

Viele Menschen erinnern sich aus der weiterführenden Schule, dass mit dem Erscheinen der Geometrie im Unterricht auch das Beweisen und damit das *Argumentieren* erstmalig als Schwerpunkt auftritt. In der Scholastik heißt *„more geometrico“* keineswegs „anschaulich“, sondern „streng logisch“ erklären. Doch ehe das Erklären formalisiert wird, muss das Klären geübt werden. *Raum und Form* bieten besondere Anlässe zum *Argumentieren*:

Aufgabe 1: Parkettieren mit Dreiecken durchführen und begründen

a) Gegeben sind viele deckungsgleiche Dreiecke.
Kann man damit die Ebene lückenlos überdecken? Wie geht es?
Worauf muss man achten? Warum muss man darauf achten?
b) Geht es auch mit deckungsgleichen Vierecken?

Das Besondere dieser Aufgabe ist, dass hier mit dem Bewegen der Dreiecke ein *Vorgang*, ein *Prozess* angeregt wird. Hier muss man Dreiecke entweder als konkrete materielle Stücke darstellen und bewegen oder als gedachte Stücke in der Vorstellung so bewegen, dass sie auf bestimmte Art zueinander passen. Viele geometrische Begriffe schließen solche *realen oder gedachten*

Vorgänge ein, hier sind es Dreiecke mit ihren eventuell besonderen Eigenschaften und ihren Bewegungen.

> *Das Arbeiten im Inhaltsbereich* **Raum und Form** *zielt darauf, sich Objekte im Raum verinnerlicht vorstellen, verinnerlicht bewegen und verinnerlicht ändern zu können.*

Diese Kennzeichnung beschreibt die Entsprechung zwischen konkret vorliegenden Gegenständen und vorgestellten Gegenständen in *Raum und Form*. Und sie berührt eine Kompetenz, die in den Bildungsstandards zu *Raum und Form* explizit ausgewiesen ist, nämlich *Sich im Raum orientieren*.

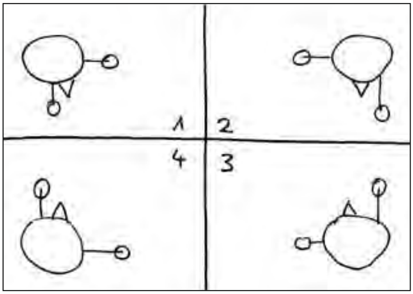
Darstellen und Kommunizieren
„Geometrie als Sprache der Formen" ist eine nicht nur für Waldorfschulen gültige Kennzeichnung (v. Baravalle 1963). Geometrische Formen und geometrische Abbildungen sind in der Grundschule mit gesprochener oder geschriebener Sprache nicht immer leicht darzustellen, da diese Sprache dort noch nicht genug ausgebaut ist: *Kompetenz im Handeln geht vor Kompetenz im Sprechen, und die geht vor Kompetenz im Schreiben*. Die Darstellungen zu *Raum und Form* ihrerseits können und müssen daher auch ebene oder räumliche Gestalten einbeziehen, etwa in Bildern oder in Plänen. Deutlich wird, dass der Inhaltsbereich *Raum und Form* geradezu paradigmatisch die Kompetenzen *Darstellen und Kommunizieren* einfordert:

> *Geometrie bedeutet Bilder und Pläne zu lesen und Bilder und Pläne zu machen.*

Raum und Form werden durch Bilder und Pläne dokumentiert und mithilfe von Bildern und Plänen gestaltet. Ein Plan ist eine Beschreibung zu einer Gestalt mithilfe von Gestalten und dient dazu, die Gestalten zu dokumentieren, zu rekonstruieren oder zu verändern. Das klingt kompliziert, ist es aber nicht. Denken Sie an einen Plan zu einem „Lego"-Haus oder zu Ihrer Wohnung. Deutlich wird die Bedeutung von Plänen in der *Legende von den Nilfeldern*: Die Felder an den Ufern des Nils, die den Ägyptern ihre Nahrungsgrundlage boten, wurden, wenn der Nil Hochwasser führte, überschwemmt und in ihrer Gestalt unkenntlich. Man musste sie nach dem Hochwasser irgendwie wiederfinden. Dazu wurden sie, bevor das Hochwasser kam, ausgemessen und die Messergebnisse in einem Plan festgehalten. Mithilfe eben dieses Plans wurden sie, sobald das Hochwasser sich wieder zurückgezogen hatte, erneut eingemessen, sodass sie wieder genau dort markiert waren, wo sie sich vor dem Hochwasser befunden hatten.

Diese Legende illustriert die zentrale Idee Pläne zu machen, die auch in dem Wort „Geo-Metrie" zum Ausdruck kommt. Ein Plan ist eine Darstellung, das *Darstellen* ist eine der zentralen Kompetenzen in den Bildungsstandards. Ein Plan dient aber nicht nur dem, der ihn gemacht hat, sondern er soll auch einem Kommunikationspartner dazu dienen, auf bestimmte Tatsachen zu schließen, etwas zu konstruieren oder zu rekonstruieren. Pläne dienen der Kommunikation. Auch das *Kommunizieren* ist eine zentrale Kompetenz der Bildungsstandards. Der Inhaltsbereich *Raum und Form* bietet eine – wenn nicht die – wesentliche Grundlage zur Entwicklung der Kompetenzen *Darstellen* und *Kommunizieren*.

Ein Beispiel: Zwei oder vier Kinder stehen auf eine bestimmte Art symmetrisch zueinander. Das nennen wir ein „Kinder-Muster“. Auf dem Boden ist das Kinder-Muster aufgezeichnet. Das nennen wir einen „Boden-Plan“. Den Boden-Plan kann man verkleinert abzeichnen, so entsteht ein „Papier-Plan“ zum Mitnehmen. Die folgenden Aufgaben verbinden Kinder-Muster und Pläne:



Aufgabe 2: Vom Kinder-Muster zum Plan
Vier Kinder stehen in einem Kinder-Muster. Zeichne erst einen Boden-Plan, dann einen Papier-Plan dazu, um festzuhalten, wie die Kinder stehen.

Aufgabe 3: Vom Plan zum Kinder-Muster
Du hast einen Papier-Plan zu einem Kinder-Muster. Bitte andere Kinder, sich so aufzustellen, wie es der Papier-Plan zeigt, und prüfe, ob sie genauso stehen, wie die Kinder am Vortag gestanden haben. Wenn du möchtest, zeichne den Kindern einen Boden-Plan.

Modellieren

Es scheint, als sei die Kompetenz *Modellieren* noch nicht angesprochen. Tatsächlich ist sie angesprochen. Das zeigen Pläne, die Kinder im ersten (!) Schuljahr zu Kinder-Mustern hergestellt haben. Vor allem anderen ist wichtig, dass sie funktionieren: Andere Kinder im ersten Schuljahr konnten diese Pläne lesen, denn sie konnten sich nach diesen Plänen passend aufstellen.

Wie sehen die Pläne aus? Sie zeigen keine fotorealistischen Bilder von Kindern, sondern stellen Kinder auf eine ganz bestimmte Art dar: Sie charakterisieren die Kinder im Raum durch ebene Bilder, sie zeigen ebene Modelle der dreidimensionalen Objekte. Diese Pläne wurden mit dem Anspruch hergestellt, bestimmte Dinge klar darzustellen, und mit der Freiheit, bestimmte Dinge vergessen zu dürfen.

Die Farbe der Kleidung, die Größe und das Geschlecht der Kinder etwa spielen für die Aufgaben hier keine Rolle und sind daher in den Plänen nicht dargestellt. Die Sichtrichtung aber und die Haltung der Arme sind im Kontext dieser Aufgaben bedeutsam und daher auch in den Plänen wiedergegeben.

Pläne machen beinhaltet Modellieren.

Ein weiteres Beispiel soll die Kraft des Modellierens mit Mitteln von *Raum und Form* verdeutlichen, so wie es die Bildungsstandards vorsehen.

> *Sachtexten … die relevanten Informationen entnehmen, Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen. (KMK, Bildungsstandards, S. 8)*

Das beschreibt die üblichen Modellbildungskreisläufe, mit denen man allerdings häufig eher das Modellieren einer Sachlage mithilfe einer Rechnung verbindet. Das muss gar nicht so sein. Betrachten wir dazu das folgende bekannte Beispiel zu einer offenen Sachaufgabe, die „Stau-Aufgabe".

Aufgabe 4: Stau-Aufgabe ohne Anleitung
Vor einer roten Ampel hat sich ein 100 Meter langer Stau gebildet. Wie viele Fahrzeuge befinden sich darin und wie viele Personen?

Dies ist die Modellierungs-Aufgabe schlechthin. Sie fordert einen Befund, nicht eine Lösung. Meist wird die Aufgabe durch eine Rechnung bearbeitet, die Annahmen über die Art und Größe der Fahrzeuge und die Situation auf der Straße enthält. Dabei werden von den Schülern häufig überraschend realitätsferne Aussagen als Befunde angeboten. Eine Alternative bietet die folgende Variante der Stau-Aufgabe, die zunächst ein Modellieren durch *Raum und Form* einfordert:

Aufgabe 5: Stau-Aufgabe mit geometrischer Anleitung
Vor einer roten Ampel hat sich ein 100 Meter langer Stau gebildet. Wie viele Fahrzeuge befinden sich darin und wie viele Personen? So geht's: Klebe mehrere Bögen Kästchenpapier aneinander, sodass ein 1 Meter langer Streifen entsteht. Der stellt das 100 Meter lange Straßenstück dar. Schneide nun aus Kästchenpapier Stückchen, die verschiedene Fahrzeuge darstellen und die in der Größe zu deiner Papierstraße passen. Lege damit den Stau so, wie du ihn dir vorstellst, und beantworte dann die Fragen.

Hier ist die geometrische Anleitung recht eng gefasst. Man kann sie offener gestalten oder anderes Material, möglicherweise räumliches, für das Modellieren der Straße und der Autos verwenden.

Diese Aufgabe macht das Angebot, das Modellieren mit Mitteln von *Raum und Form* anzugehen. Sie erfordert Aufwand. Aber sie soll exemplarisch zeigen, dass hier ein *materieller Spielraum* geschaffen wird, mit dem die Situation realitätsnah darzustellen ist. Entscheidend ist, dass man die „Automodelle" in dieser Arbeitsumgebung bewegen kann, bis man darüber einig ist, wie man sich den Stau vorstellt. Erst dann fixiert man das Ergebnis, etwa durch Festkleben der Stücke oder durch Aufschreiben der Sachlage. Es entsteht ein Dokument. *Raum und Form* erzeugen eigene Elemente mathematischer Sprache, im *Spielraum* wie im *Dokumentationsraum*.

Mathematisches Denken ist auch und wesentlich das Denken in Gestalten von Raum und Form.

Raum und Form bieten Gestalten zum Lösen oder Bearbeiten von Problemen, die mit Zahlen und den darauf bezogenen Operationen allein nicht greifbar sind. Viele Mathematiker und Ingenieure denken in Gestalten und nicht nur in Formeln. Das Betonen von *Raum und Form* ist wie das Betonen von *Mustern und Strukturen* eine der zentralen Veränderungen, die ein in der Schule noch verbreitetes traditionelles Mathematikbild zu einem angemessenen Mathematikbild erweitern (s. Kapitel 4 zu *Muster und Strukturen*).

Problemlösen als eine weitere wichtige allgemeine Kompetenz zieht sich wie ein roter Faden durch unsere Aufgabenbeispiele.

7.3 Inhaltsbezogene Kompetenzen im Bereich *Raum und Form*

Sich im Raum orientieren

- *Über räumliches Vorstellungsvermögen verfügen*
- *Räumliche Beziehungen erkennen, beschreiben und nutzen (Anordnungen, Wege, Pläne, Ansichten)*
- *Zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z.B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen)*

Geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen

- *Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen*
- *Körper und ebene Figuren in der Umwelt wiedererkennen*
- *Modelle von Körpern und ebenen Figuren herstellen und untersuchen (bauen, legen, zerlegen, zusammenfügen, ausschneiden, falten …)*
- *Zeichnungen mit Hilfsmitteln sowie Freihandzeichnungen anfertigen*

Einfache geometrische Abbildungen erkennen, benennen, darstellen
- *Ebene Figuren in Gitternetzen abbilden (verkleinern und vergrößern)*
- *Eigenschaften der Achsensymmetrie erkennen, beschreiben und nutzen*
- *Symmetrische Muster fortsetzen und selbst entwickeln*

Flächen und Rauminhalte vergleichen und messen
- *Flächeninhalte ebener Figuren durch Zerlegen vergleichen und durch Auslegen mit Einheitsflächen messen*
- *Umfang und Flächeninhalt von ebenen Figuren untersuchen*
- *Rauminhalte vergleichen und die Anzahl von Einheitswürfeln bestimmen*

(KMK, Bildungsstandards, S. 10)

Sich im Raum orientieren
Gleich die erste Kompetenz erfordert Aktivitäten, die auch tatsächlich im zwei- oder dreidimensionalen Raum stattfinden, etwa das Arbeiten mit konkreten Würfeln oder anderen konkreten Gegenständen. Deutlich gefordert ist hier, dass die Orientierung im Raum durch Pläne dokumentiert wird. Die allgemeinen Kompetenzen fordern dies ein. Wir beschreiben dazu im nächsten Abschnitt drei Lernumgebungen: *„Wege führen“, „Würfel und Würfelgebäude herstellen“, „Würfelnetze finden und ordnen“*.

Geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen
Gemeint sind nicht nur ebene Figuren, sondern auch räumliche Gestalten. Die in den Bildungsstandards ausgewiesenen Beispiele benennen die zu bearbeitenden Figuren nicht konkret und zeigen in den Unterpunkten deutliche Überblendungen mit den Punkten *Sich im Raum orientieren* und *Einfache geometrische Abbildungen erkennen, benennen und darstellen*. Wir sehen darin die Forderung, die gefragten geometrischen Figuren nicht allein zu benennen und darzustellen, sondern auch mit ihnen zu operieren, Zusammenhänge zwischen ihnen zu finden und auch nach ihrer *Funktionalität* zu fragen.

Aufgabe 6: Das verrückte Zimmer

Was wäre, wenn die Dinge so aussähen wie in dem „verrückten Zimmer“?

Solche Fragen entfachen nicht nur ein reges *Kommunizieren* über die Zweckmäßigkeit geometrischer Formen; es wird vor allem *argumentiert*, warum diese Form nicht geeignet und jene zweckmäßiger ist (Backe-Neuwald 1999). Dabei werden auch *geometrische Eigenschaften* umgangssprachlich umschrieben.

Darüber hinaus ist die Funktionalität eine oft intuitiv benutzte Grundlage für das *Modellieren* einer Situation mithilfe von geometrischen Formen. Gefragt, um welches Unterrichtsfach es sich bei solchen Aufgaben gehandelt habe, vermuteten die Viertklässler:

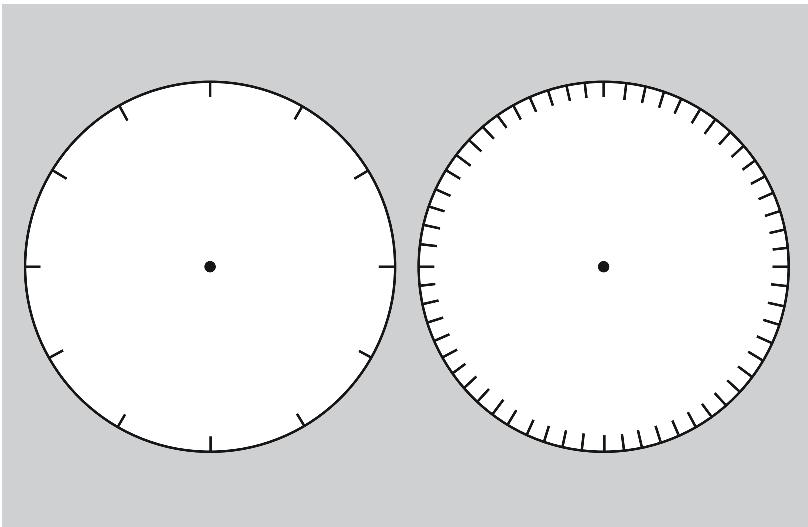
- *Sachunterricht*, denn es ging um Geräte und Gegenstände,
- *Sprachunterricht*, denn es wurde viel gesprochen und in einem Schreibgespräch auch geschrieben,
- *Kunst* und *Geometrie*, denn es ging um Formen.

Modellieren liegt auch vor, wenn man bestimmte ebene Formen durch Zahlenmuster kennzeichnet und umgekehrt bestimmte Zahlenmuster mithilfe von ebenen Formen.

Dies ist Gegenstand der folgenden Aufgaben, in denen Vielecke in Zeichenuhren und die Zahlenmuster dazu betrachtet werden.

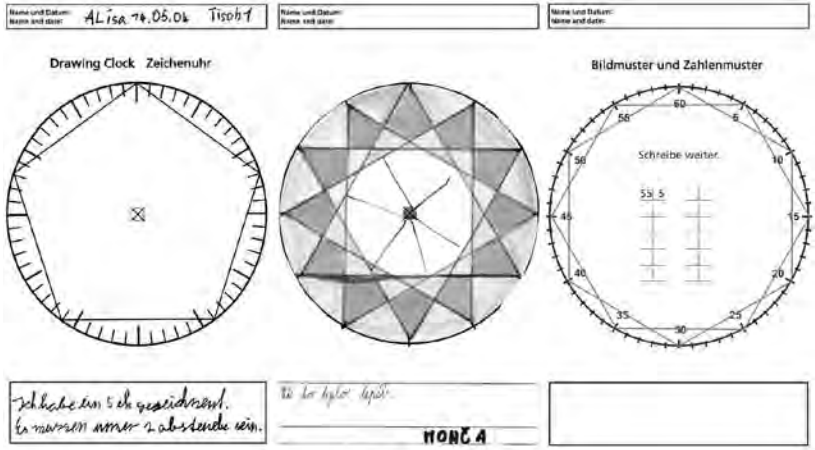
Aufgabe 7: Stundenuhr und Minutenuhr

Hier sind Zeichenvorlagen, eine „Stundenuhr“ und eine „Minutenuhr“. Zeichne dort hinein Quadrate, sechsstrahlige Sterne, regelmäßige Fünfecke und regelmäßige zehnzackige Sterne.



Aufgabe 8: Zahlenmuster und Bildmuster

a) Schreibe zu deinen Figuren das Zahlenmuster auf.
b) Nun umgekehrt: Hier ist ein Zahlenmuster. Zeichne das Bildmuster dazu in eine Minutenuhr.



Diese Aufgaben sind für Gestaltungen und Differenzierungen offen, sie kennzeichnen ein Aufgabenformat. Ziffernblätter sind den Kindern aus ihrer Lebenswelt bekannt und bieten als Werkzeug die Möglichkeit, regelmäßige ebene Formen zu erschließen. Wenn in den Zeichenuhren die Stundenzahlen oder Minutenzahlen eingetragen sind, dann kann man die Figuren – oder besser die Bildmuster – in den Zeichenuhren durch Zahlenmuster beschreiben; umgekehrt werden aus Zahlenmustern durch Zeichnen Bildmuster.

Einfache geometrische Abbildungen erkennen, benennen, darstellen

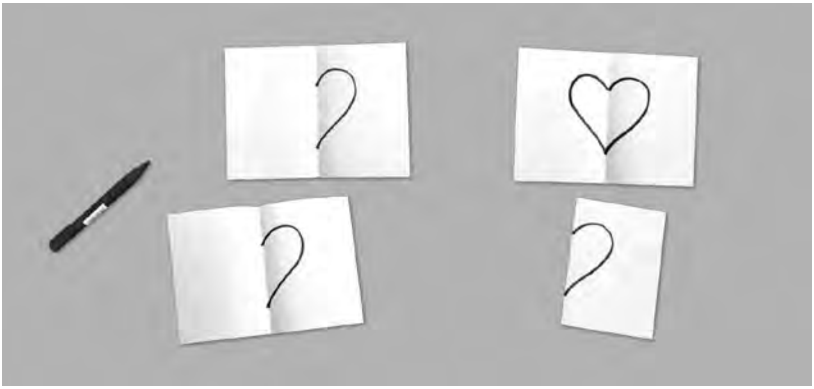
Gemeint sind hier zwei Arten mathematischer Abbildungen: Kongruenzabbildungen („Deckabbildungen“) und Ähnlichkeitsabbildungen, oder anschaulich formuliert: Bewegen von Formen und deren Vergrößern und Verkleinern.

Achsensymmetrie und symmetrische Muster

Das Zeichnen achsensymmetrischer Gestalten auf Papier mit einem quadratischen Kästchengitter ist vertraut und sinnvoll. Die typische Technik ist das Ausmessen und Einmessen zur Herstellung solcher Figuren unter Ausnutzen der Kästchen. Zur ständigen begleitenden Kontrolle kann ein Spiegel dienen, aufgesetzt auf die Spiegelachse. Achsensymmetrie als *„Spiegelsymmetrie“* kennzeichnet einen der Zugänge zur Symmetrie. Ein anderer ist Achsensymmetrie als *„Faltsymmetrie“*.

Aufgabe 9: Transparentkopieren: Achsensymmetrisches Herz

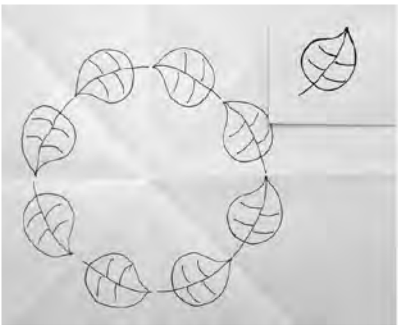
a) Hier siehst du ein halbes Herz gezeichnet. Falte das Papier und zeichne das durchschimmernde halbe Herz nach. Falte das Papier wieder auf und zeichne noch einmal das durchschimmernde halbe Herz nach. Jetzt ist ein ganzes Herz entstanden, es ist achsensymmetrisch.
b) Zeichne auf diese Art achsensymmetrische Formen.

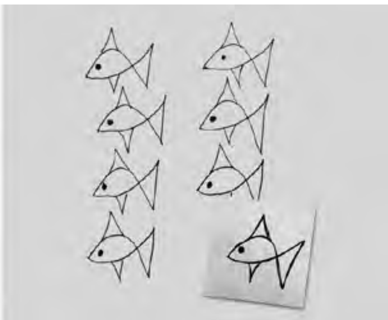


Das Transparentkopieren eröffnet viele Möglichkeiten, „große Formen“ mit bestimmten Strukturen aus „kleinen Formen“ herzustellen:

Aufgabe 10: Kränze, Paraden und Schilde aus kongruenten Figuren

Zeichne ein Blatt oder eine andere Figur, die dir gefällt, auf ein kleines Blatt Papier, und dann auf ein großes Blatt Papier einen „Kranz“ aus lauter solchen gleich aussehenden Figuren. (Oder eine „Parade“ oder einen „Schild“.)
Paraden nennen wir Muster, die durch paralleles Verschieben deckungsgleicher Figuren entstehen, *Schilde* entstehen durch Achsenspiegelungen und *Kränze* durch Drehen von deckungsgleichen Figuren.





Paralleles Verschieben kann unterstützt werden, indem man das Zeichenblatt im geraden Knick eines gefalteten Blattes führt, das auf dem Tisch fixiert ist. Drehen kann unterstützt werden durch einen auf dem Tisch mit Tape fixierten Reißnagel, dessen Spitze nach oben zeigt und mit einem Radiergummi über dem aufgesteckten Zeichenblatt gesichert ist. So kann zu Weihnachten eine Uhr mit 12 Tannenbäumen auf dem Ziffernblatt entstehen. Die Kinder bewegen das Zeichenblatt über dem kleinen auf dem Tisch festgeklebten Muster dann genau so, wie es den Kongruenzabbildungen Schieben, Drehen und Spiegeln entspricht.

Aufgaben dieses Typs geben Entdeckungsspielräume, sind mathematisch substanziell und anregend für den gegenseitigen Austausch zwischen den Kindern. Entscheidend ist hier, dass nicht nur Symmetrie und Kongruenz nachträglich an gegebenen Figuren als Eigenschaften festgestellt werden, sondern dass *Symmetrie und Kongruenz als Prinzipien zum Herstellen der Figuren* dienen. Damit ist der Prozesscharakter dieser Begriffe für Kinder zugänglich.

Dies genau meinen die Bildungsstandards: Es geht nicht um das Formalisieren der Begriffe, auch nicht darum, sie in einer Kunstsprache exakt zu charakterisieren. Es geht vielmehr darum, sie aus Handlungserfahrungen heraus anzubahnen, in denen bereits die volle Substanz des mathematischen Begriffes steckt und sie im Kommunikationsprozess durch geeignete Artikulationsunterstützung „zur Sprache“ zu bringen.

Vergrößern und Verkleinern

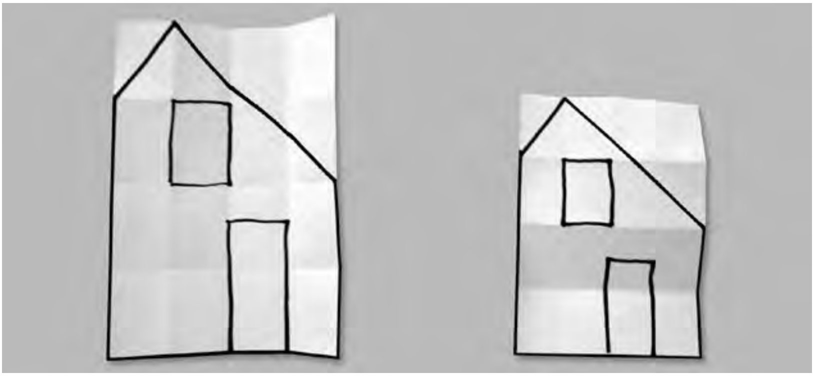
Vergrößern und Verkleinern ist ein mathematisches Thema, das tief in den Sachunterricht und in fächerverbindende Projekte hineinreicht. Als im Religionsunterricht eine Klasse beschloss, die Arche Noahs nachzubauen, lernte sie dabei auch viel über Tiere und Schiffe und sehr viel Mathematik.

Es ist schwierig Lernumgebungen zu organisieren, die ein kontinuierliches Verkleinern und Vergrößern räumlicher oder ebener Gestalten ermöglichen. Am Bildschirm geht’s. Aber konkret geschieht Vergrößern und Verkleinern im Wesentlichen durch Umbauen von Bildern und Bauwerken, die aus gelegten Stücken oder gegebenen Bauelementen bestehen oder durch Vervielfachen oder Teilen entsprechender gut zugänglicher Maße.

Zum Vergrößern oder Verkleinern ebener Figuren lassen sich Kästchengitter nutzen. Man kann aber ähnliche Gitter auch selbst herstellen. Die folgende Aufgabe nutzt aus, dass Papierbögen der Formate DIN A4 und DIN A5 im mathematischen Sinn zueinander ähnlich sind. Man kann auch quadratische Papierblätter nehmen, da auch alle Quadrate im mathematischen Sinn zueinander ähnlich sind.

Aufgabe 11: Vergrößern über Papiergröße und Gitter

Hier ist ein DIN-A4-Blatt mit einem gefalteten 4 × 4 Gitter und einem Bild darin. Daneben ist ein kleineres Blatt DIN A5. Falte darin ein 4 × 4-Gitter und zeichne das verkleinerte Bild ein.



Anspruchsvoller wird das Vergrößern, wenn es handelnd ohne Vorgabe ähnlicher Gitter erfolgen soll, z. B. durch legen einer Figur und anschließendes legen einer doppelt so großen Figur, die genauso aussieht. Unterschiedliche Erkenntnisse ergeben sich, wenn die Kinder dabei Stäbchen oder geometrische Plättchen benutzen.

Flächen und Rauminhalte vergleichen und messen

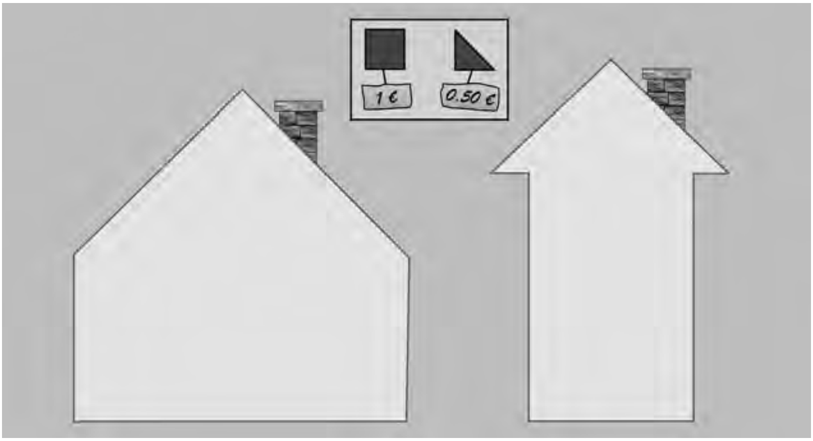
Dieser Bereich der Bildungsstandards stellt erhebliche Ansprüche an den Mathematikunterricht. Das Messen von Flächeninhalten und das Benennen passender Einheiten dazu sind nicht in allen Bundesländern explizit in den Lehrplänen ausgewiesen. Bei genauerer Betrachtung stehen in den Formulierungen der Bildungsstandards auch nicht die Einheiten im Vordergrund, sondern vielmehr die *Prozesse des Messens*. Wir unterscheiden zwei Aspekte des Messens (s. Kapitel 6 zu *Größen und Messen*):

Invarianz des Inhalts

Beim Bestimmen von Rauminhalten etwa werden Volumenbestimmungen zu alltäglich vertrauten, aber komplexen Objekten wie Krügen, durch Umschütten möglich. Oder man erhält beim Legen von Figuren mit einer bestimmten Anzahl von Plättchen verschiedene Formen mit gleichem Flächeninhalt, auf den man den Blick lenken kann, indem man die Plättchen „wertvoll“ macht, wie etwa in der folgenden Aufgabe. Dadurch wird der bis dahin weniger vertraute Größenbereich der Flächenmaße durch den vertrauteren Größenbereich der Geldwerte illustriert.

Aufgabe 12: Kostbare Häuser

1. Lege die Häuser mit kleinen Dreiecken und Quadraten aus. Wie teuer werden sie?
2. Nun lege selbst ein Haus für 5 Euro.



Messen als Vergleichen
Bei dem Auslegen oder Überdecken eines Flächenstückes mit Einheitsquadraten oder dem Ausfüllen einer räumlichen Gestalt mit Einheitswürfeln ist das *Anpassen* entscheidend: Bei bestimmten Gestalten „passen" die zusammengesetzten Einheitsquadrate oder Einheitswürfel genau, bei anderen dagegen nicht genau, sodass man dort nur Näherungswerte gewinnt. Die Gegenstände, welche die Einheiten repräsentieren, sollte man konkret und von den Einheiten unterscheidbar benennen, etwa *„Zentimeterquadrat"* und *„Zentimeterwürfel"* wie in der folgenden Aufgabe.

Aufgabe 13: Würfel bauen und Rauminhalt messen

1. Du hast Würfel mit der Kantenlänge 5 cm, sie heißen „5-cm-Würfel". Du baust aus 5-cm-Würfeln einen 10-cm-Würfel. Wie viele Würfel werden benötigt?
2. Stelle dir einen „Zentimeterwürfel" vor, das ist ein Würfel mit 1 cm Kantenlänge. Aus Zentimeterwürfeln wird ein 5-cm-Würfel gebaut. Wie viele Zentimeterwürfel benötigt man?
3. Wie viele Zentimeterwürfel passen in einen 10-cm-Würfel?

Ähnliche Aufgaben lassen sich für die Oberfläche stellen. Solche Aufgaben sollten durch Bauen und Messen begleitet sein, sodass Erfahrungen aus dem Handeln erwachsen.

7.4 Vernetzen der Kompetenzen: Von Aufgaben zu Lernumgebungen

Die bisher genannten Beispiele machen deutlich, dass der Bereich *Raum und Form* mit schriftlich gestellten Aufgaben und mit den Darstellungsmöglichkeiten von Papier und Bleistift allein nicht zu erschließen ist. Man kann wohl später Stift- und Papier-Aufgaben stellen, aber man kann die dazu nötigen Erfahrungen und Erkenntnisse nicht in Stift- und Papier-Situationen allein gewinnen.

Insbesondere bei Aufgaben zu dreidimensionalen räumlichen Gestalten ist zu bedenken, dass das Lesen der dazugehörenden ebenen bildlichen Darstellungen eine besondere eigene Anforderung darstellt, etwa beim Deuten von „Schrägbildern" zu Würfelbauwerken. Häufig wird hier der Fehler gemacht, dass auf den Raum bezogene Kompetenzen gleichgesetzt werden mit der Fähigkeit, solche Bilder angemessen zu interpretieren.

Daher ist insbesondere im Kompetenzbereich *Raum und Form* das Arrangieren geeigneter Lernumgebungen notwendig. *Lernumgebungen* beschreiben Arbeitssituationen zu *Aufgabenformaten* und Aufgabenformate sind die rahmenden Formen für *spezifische Aufgaben*.

Unter den für Lernumgebungen kennzeichnenden Leitideen (Wollring 2007) sind in diesem Kontext zwei von besonderer Bedeutung. Eine betrifft die *Artikulation*. Das ist die Art und Weise, wie man sich ausdrückt, die Gegenstände darstellt und miteinander korrespondiert. Die andere betrifft das *Differenzieren*. Das ist die Option, die Lernumgebung auf ganz verschiedene Anspruchsniveaus einzustellen und dennoch den mathematischen Kern zu bewahren.

Die folgende Lernumgebung dient als ein Beispiel für die Entwicklung der Kompetenz *Sich Orientieren im Raum*. Sie fordert darüber hinaus eine Kooperation ein und verlangt von den beteiligten Partnern, eine solche Kooperation überhaupt erst aufzubauen.

Lernumgebung „Wege führen"

Es geht bei dieser Lernumgebung darum, geometrische Gestalten, hier die Gestalt eines Weges, unter bestimmten Bedingungen zu entwickeln und jemandem mitzuteilen. Die Bedingungen werden durch einen „Raum" mit Start, Ziel, Passagen und Hindernissen dargestellt. In diesem so gegebenen Raum muss man sich orientieren.

Zwei Partner kooperieren, die wir *Lotse* und *Kapitän* nennen. Der Lotse führt den Kapitän mithilfe gesprochener oder geschriebener Mitteilungen einen Weg vom Start zum Ziel und muss dabei Bedingungen einhalten. Der Kapitän fährt „im Nebel", er kann das Land und andere Hindernisse nicht sehen und muss dem Lotsen blind folgen. Drei Bögen Papier werden zur weiteren Bearbeitung verwendet:

Bogen 1: Lageplan
Hier sind in eine Wasserfläche deutlich erkennbar Küsten und Inseln eingezeichnet. Das gedachte Schiff kann sich auf dem Wasser bewegen, auf dem Land naturgemäß nicht.

Bogen 2: Karte des Lotsen
Darauf zeichnet der Lotse seinen Weg durch das Wasser an den Hindernissen vorbei.

Bogen 3: Karte des Kapitäns
Darauf zeichnet der Kapitän seinen Weg nach Anweisung des Lotsen.

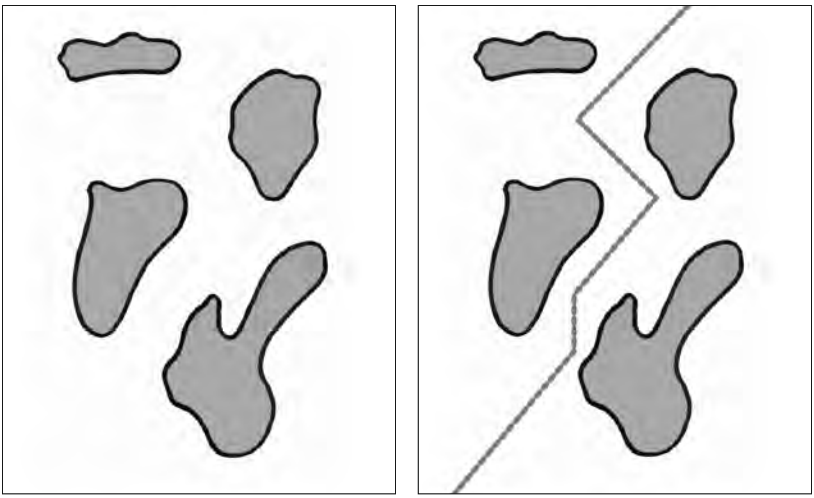
Aufgabe 14: Wege führen

Lotse und Kapitän arbeiten zusammen.

a) Bogen 1 wird unter Bogen 2 gelegt. Der Lageplan wird auf der Karte des Lotsen durchscheinend sichtbar.
Der Lotse trägt einen sicheren Weg für das Schiff durch die Inselwelt auf dem Lageplan ein.

b) Der Lotse beschreibt dem Kapitän seinen Weg durch die Inselwelt. Der Lageplan wird nicht gezeigt. Der Kapitän zeichnet nach dieser Beschreibung den Weg in seine Karte ein.

c) Vergleicht die beiden Karten.



Diese Lernumgebung ist ein Grundmuster für kommunikative Lernumgebungen zur Orientierung in der Ebene und im Raum. Sie lässt sich auf vielfältige Art ausgestalten und differenzieren:

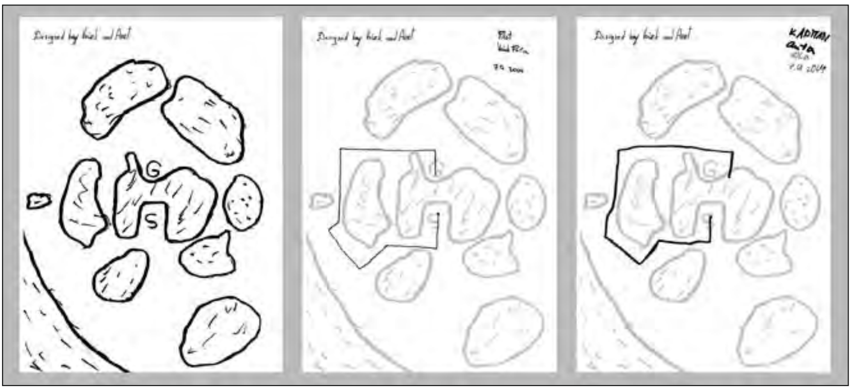
- Der Lageplan (Bogen 1) kann sich auf verschiedenste Situationen beziehen. Er kann etwa einen Supermarkt mit lauter rechteckigen Regalen darstellen, eine Stadt mit rechtwinklig oder anders verlaufenden Straßen, das Klassenzimmer oder das unterirdische Reich eines Maulwurfs. Und vor allem: Die Kinder können selbst Pläne entwerfen.
- Die Karten (Bögen 2 und 3) können Unterstützungen enthalten, etwa ein Kästchengitter oder Maßangaben oder bestimmte Ortsmarken.
- Es kann mit zwei Lageplänen gearbeitet werden: Der Lotse hat einen vollständigen, der Kapitän einen unvollständigen, der immerhin einige Orientierungspunkte enthält.
- Es können verschiedene Messhilfen hinzugezogen werden.

Die eigentliche Anforderung liegt darin, dass die Kinder zur Orientierung im Raum und in der Fläche ein eigenes System der Verständigung miteinander entwickeln. Sie können die Ergebnisse selbst kontrollieren und so herausfinden, ob ihre Vereinbarungen tragfähig sind.

Die Verständigung lässt sich auf verschiedene Arten vereinfachen oder erschweren, etwa dadurch, dass man die Wege nur in bestimmten Schritten gehen darf oder nur in bestimmte Richtungen. Oder dadurch, dass man bestimmte Messergebnisse auf Zetteln miteinander austauschen darf, oder dadurch, dass man allein auf den mündlichen Austausch angewiesen ist.

Man kann die Korrespondenz verschieden rahmen, etwa so, dass beide Partner nur ihre eigenen Karten sehen dürfen, oder aber so, dass der Lotse auch auf die Karte des Kapitäns schauen darf, der Kapitän aber nicht auf die Karte des Lotsen.

Diese Lernumgebung ist mit geeigneter Gestaltung der Lagepläne und der Kommunikationshilfen in allen Grundschuljahren und für ganz verschiedenes Leistungsvermögen differenziert einsetzbar.



Lageplan Karte des Lotsen Karte des Kapitän

Bei dieser Aufgabe kann man als Lehrerin entscheiden, wie viel *Instruktion* man gibt und wie viel *Konstruktion* man zulässt:

- Bei einem eher instruktiven Ansatz gibt man gemeinsam mit der Aufgabenstellung von Beginn an Hinweise an die Kinder, wie und mit welchen Hilfsmitteln man Richtungen und Entfernungen bei den Wegen beschreiben kann. Das ermöglicht ein zügiges zielgerichtetes Arbeiten.
- Bei einem eher konstruktiven Ansatz gibt man derartige Hilfen nicht oder nur in sehr geringem Umfang und lässt die Kinder die Aufgabe mit mehreren Lageplänen oder mit demselben Lageplan mehrfach angehen. Das dauert zwar länger, aber die Kinder erkennen selbst die Notwendigkeit genauer Vereinbarungen. Nach unseren Erfahrungen finden sie auch von sich aus den Unterschied zwischen bewegungsgebundenen und kartengebundenen Richtungssystemen, auch wenn ihr Sprachschatz dafür knapp ist oder sie meinen, es könne nur ein solches System geben. Der konstruktive Ansatz kostet Zeit. Aber der Zeiteinsatz lohnt sich, weil die Kinder an dieser Stelle exemplarisch den Sinn und den Nutzen vereinbarter Bezeichnungen lernen können.

Wie früh soll man exakte Fachbezeichnungen einführen? Das frühe Einführen hat den Vorteil, dass von Beginn an Klarheit herrscht, es hat aber den Nachteil, dass manche Bezeichnungen und Worte von den Kindern als unschön, rätselhaft und fremd empfunden werden. Man kann provisorisch mit eigenen Bezeichnungen der Kinder für die Gegenstände und Zusammenhänge arbeiten, muss allerdings von diesen Bezeichnungen verlangen, dass Arbeitspartner sie verstehen, wenn es darauf ankommt, ein Objekt zu beschreiben, zu konstruieren oder zu rekonstruieren. Diese *„Belastbarkeit bei Kommunikation“* ist typisch für mathematische Begriffe. Fordert man dann, dass nicht nur die Arbeitspartner in der Klasse, sondern auch noch viele Menschen mehr diese Bezeichnungen verstehen sollen, dann mag auch den Kindern deutlich werden, wo und mit welcher Genauigkeit in der Mathematik einheitliche Bezeichnungen notwendig sind.

Die Lehrerin muss bei der Entwicklung der Verständigung Unterstützungen anbieten können. Eine erste Unterstützung ist die, dass man auf den Karten Start und Ziel bezeichnet, etwa mit „A“ und „Z“ oder mit „Start“ und „Ziel“. Mit mehreren Zielen kann man die Aufgabe effizient differenzieren. In den Lageplänen oder in den Karten kann man Stützpunkte angeben, etwa eine Tonne im Fahrwasser oder einen Leuchtturm auf einer Insel.

Die Wege sind stückweise durch Richtungen und Entfernungen gekennzeichnet. Für die Entfernungen kann man etwa ein Kästchengitter auf den Karten vorsehen oder die Längen mit einem Lineal messen. Das Angeben der Richtungen ist schwieriger; es entsteht das Problem, an welchem System man sich orientiert. Hier sind unter anderem diese zwei Systeme denkbar:

Bewegungsgebundenes Richtungs-System
Man benutzt die Richtungen „Vor“, „Zurück“, „Links“ und „Rechts“ und bezieht sie auf die Person, die sich bewegt. Dieses System läuft gewissermaßen mit dem Schiff und seinem Kapitän mit. So beschreiben wir einem Ortsfremden den Weg, nach dem er uns gefragt hat.

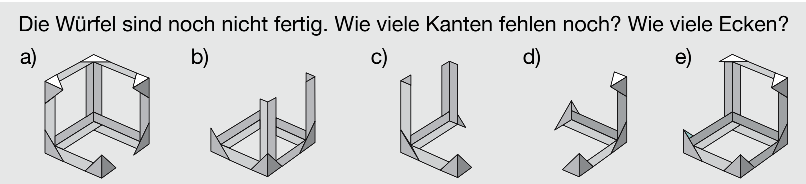
Kartengebundenes Richtungs-System
Das zweite System – und das empfehlen wir zum Einstieg – ist fest mit der Karte verbunden und benutzt „nach oben“, „nach unten“, „nach rechts“ und „nach links“ als Richtungen auf der Karte. Man kann dazu am Kartenrand die Markierungen „Oben“, „Unten“, „Links“ und „Rechts“ eintragen. Das bereitet die Orientierung an Himmelsrichtungen vor.

Eine natürliche Fortsetzung findet diese Lernumgebung, wenn man aus der Ebene in den Raum geht. Aus dem Lageplan kann etwa ein Kantenmodell des Würfels oder eines anderen Körpers oder ein Würfelbauwerk werden.

Lernumgebung „Würfel und Würfelgebäude herstellen“
Würfel lassen sich in *„Ecken-Kanten-Technik“* herstellen: Die Kanten entstehen aus rechtwinklig gefalteten Kartonstreifen. Die Ecken entstehen, indem man ein Kartonstück mit rechtwinklig gekreuzten Achsen passend einschneidet, zu einer rechtwinkligen Raumecke faltet und fixiert. Wenn man das Fixieren nicht durch Kleben realisiert, sondern durch Clipsen mit einem Hefter, ist das Verfahren sehr schnell, und die Verheftungen sind zudem korrigierbar. Aus den Raumecken und den Kanten-Streifen lassen sich bequem Würfel und Quader herstellen.

Aufgabe 15: Ecken-Kanten-Modell bauen

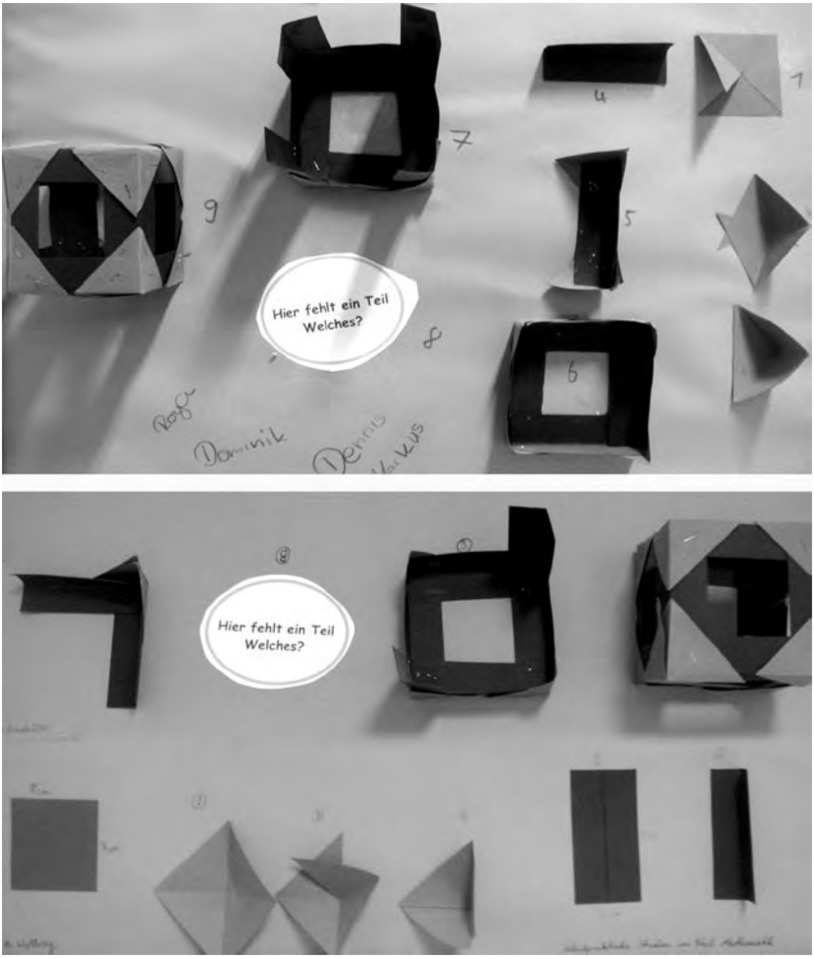
1. Baue einen Würfel in Ecken-Kanten-Technik. Wie viele Stücke benötigst du für die Ecken und wie viele für die Kanten?
2. Hier siehst du Bauteile des Würfels. Welche Teile fehlen noch?



Diese Lernumgebung bietet Möglichkeiten, ebene und räumliche Konstruktionsprozesse zu *dokumentieren*. Das geht mit einem „3D-Bauplakat“ (50 cm × 70 cm), auf dem Bauteile und verschiedene Bauzustände so dargestellt sind, dass eine materiell-ikonische Beschreibung der Konstruktion entsteht. Ein 3-D-Bauplakat stellt den doch recht komplexen Bauvorgang ohne Worte nur mit ebenen und räumlichen Gestalten dar und ist von Kindern in der Regel leicht zu lesen. Der entscheidende Vorteil aber besteht darin, dass Kinder einen solchen *materiell-ikonischen Text* nicht nur lesen, sondern auch herstellen können.

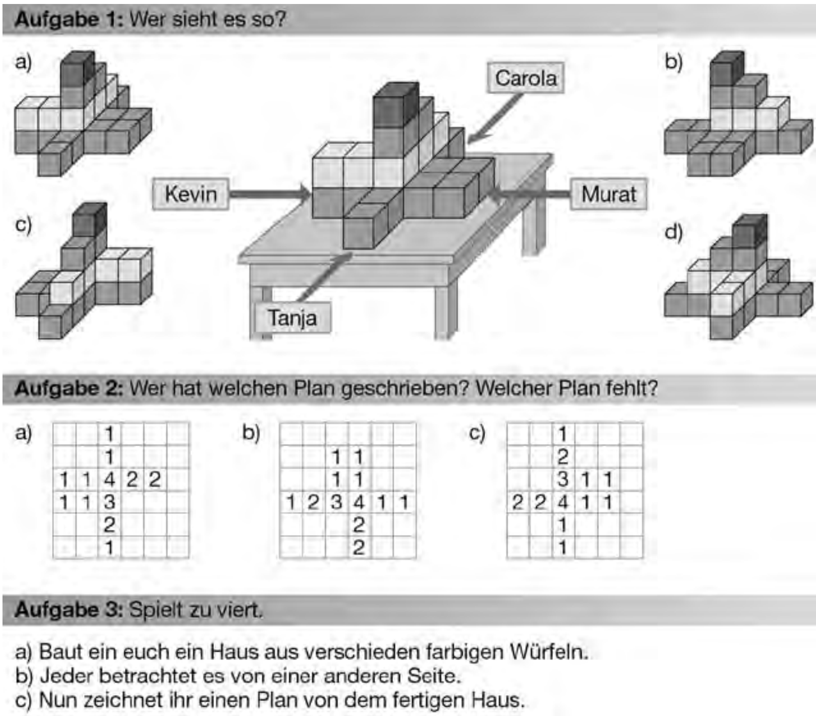
Aufgabe 16: Bauen nach Dokument

1. Hier ist ein 3D-Bauplakat zu einem Würfel. Baue einen solchen Würfel.
2. Beschreibe, ob das Bauplakat deutlich ist oder nicht und wo und wie man es verbessern kann.



Eine Fortführung dieses Themenkreises ist das Bauen von Würfelgebäuden. Auch hier besteht der wesentliche Teil der mathematischen Kompetenz in der *Dokumentation*, sodass das Ergebnis der Handlung *kommunizierbar* ist. Eine Möglichkeit zur Dokumentation ist ein Bauplan, der auf einem Gitternetz notiert, wie viele Würfel jeweils übereinander liegen („Turm-Plan“). Beim „Bauen mit Plan“ in der folgenden Aufgabe kommt es zudem auf die Sicht des Baumeisters an. *Sich im Raum orientieren* kommt hier in zweifacher Hinsicht zum Tragen, zum einen bei der Analyse oder Konstruktion des Bauwerks, zum anderen beim Perspektivwechsel in der Sicht auf das Bauwerk.

Aufgabe 17: Bauen mit Plan



Aufgabe 1: Wer sieht es so?

Aufgabe 2: Wer hat welchen Plan geschrieben? Welcher Plan fehlt?

a)

		1			
		1			
1	1	4	2	2	
1	1	3			
		2			
		1			

b)

		1	1		
		1	1		
1	2	3	4	1	1
			2		
			2		

c)

		1			
		2			
		3	1	1	
2	2	4	1	1	
		1			
		1			

Aufgabe 3: Spielt zu viert.

a) Baut ein euch ein Haus aus verschieden farbigen Würfeln.
b) Jeder betrachtet es von einer anderen Seite.
c) Nun zeichnet ihr einen Plan von dem fertigen Haus.

Lernumgebung „Würfelnetze finden und ordnen“

Würfelnetze bilden einen Gegenstand, der räumliche und ebene Gestalten zueinander in Beziehung setzt und ein klassisches Aufgabenfeld im Inhaltsbereich *Raum und Form* darstellt. Würfelnetze sind Gestalten aus sechs kantenweise aneinanderhängenden Quadraten, die sich zur Oberfläche eines Würfels räumlich falten lassen. Unterscheidet man zueinander achsensymmetrische Würfelnetze nicht, so gibt es 11 verschiedene Würfelnetze. Sieht man sie als verschieden an, so gibt es 20 verschiedene Würfelnetze. Das Untersuchen von Würfelnetzen stiftet verschiedene ergiebige Lernumgebungen, bei denen nahezu alle Kompetenzen aus dem Inhaltsbereich *Raum und Form* anzusprechen sind.

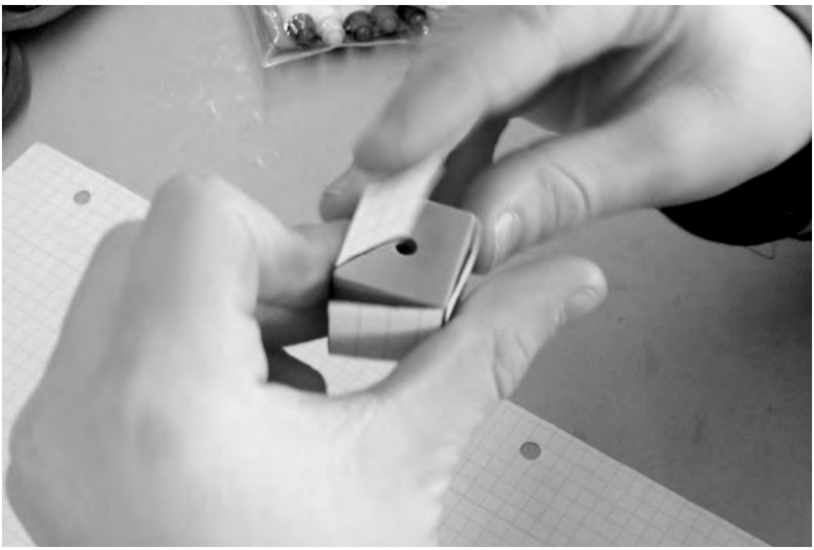
So muss man etwa entscheiden, ob die Würfelnetze aus gegebenen Quadraten zusammensetzt werden oder ob sie aus einem Angebot von Quadratfiguren auszuwählen sind. Ferner ist zu entscheiden, ob man das Verräumlichen der Würfelnetze materiell konkret zulässt, etwa indem man sie um Würfel wickelt, oder ob man dieses Verräumlichen nur in der Vorstellung einfordert.

In den folgenden drei Aufgaben (s. S. 138–140) werden die Würfelnetze hergestellt, konkret räumlich gefaltet und dann systematisch geordnet. Angenommen ist, dass jeweils zwei bis vier Kinder kooperieren.

Die Aufgaben sind auch für Einzelarbeit denkbar, nur sind sie dann wesentlich umfangreicher.

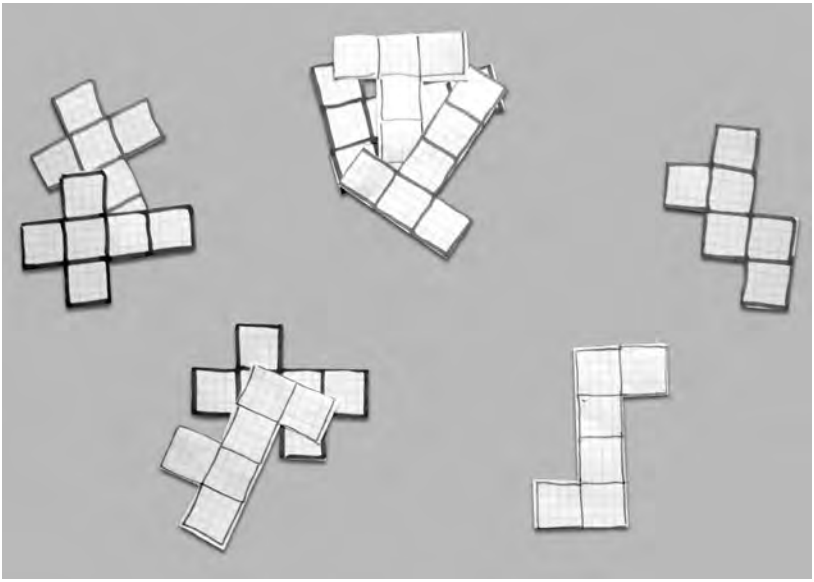
Aufgabe 18: Würfelnetze herstellen und testen

a) Hier ist ein Würfel mit 2 cm Kantenlänge und eine Figur aus 6 Quadraten auf Kästchenpapier. Prüfe durch Überlegen und durch Ausschneiden und Falten, ob du die Figur so um den Würfel herumfalten kannst, dass er ganz abgedeckt ist. Wenn das geht, dann nennt man das ein „Würfelnetz“.
b) Zeichne andere Würfelnetze zu deinem Würfel und teste sie.



Aufgabe 19: Würfelnetze klassifizieren

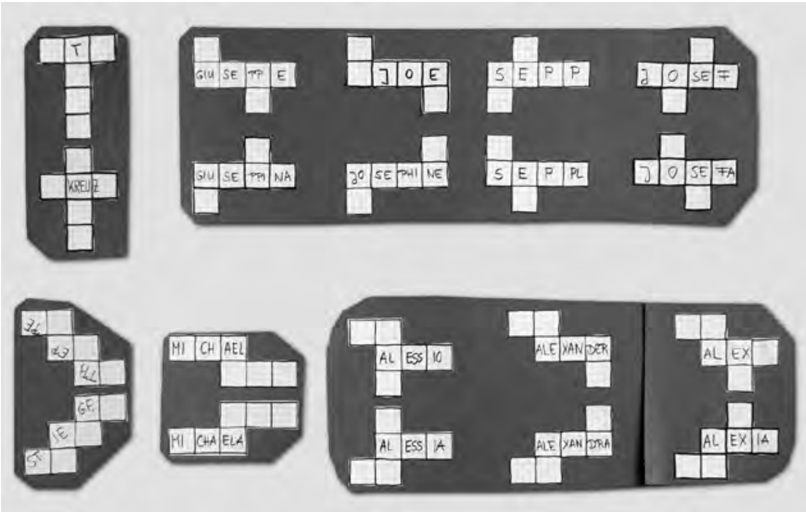
a) Findet so viele Würfelnetze wie möglich und sammelt gleiche Würfelnetze auf dem Tisch in Stapeln. Wie stellt ihr fest, ob zwei Würfelnetze auf den gleichen Stapel gehören? Wie viele Stapel findet ihr?
b) Nehmt aus jedem Stapel ein Würfelnetz und ordnet diese auf einem Plakat passend an. Könnt ihr sie so anordnen, dass man sieht, ob ihr alle möglichen Würfelnetze gefunden habt?



Die Aufgaben beschreiben die Auseinandersetzung mit der Vielfalt der Würfelnetze und zielen auf das Erschließen des Zusammenhangs zwischen diesen Objekten. Es ist nicht notwendig, dass alle Kinder oder Gruppen gleich sämtliche Würfelnetze finden. Auch Teilergebnisse sind anerkennenswert. Möglicherweise gelingt es beim Vergleich verschiedener Plakate alle Würfelnetze zu finden.

Entscheidend ist hier vielmehr, dass die Kinder ein Konzept entwickeln, wann zwei Würfelnetze als gleich anzusehen sind. Genauer gesagt, sie müssen ein *Konzept zur Kongruenz* entwickeln. Nach unseren Erfahrungen ist diese Aufgabe schwierig, wenn man nur das Zeichnen der Netze zulässt, nicht aber das Ausschneiden und die Option, die Würfelnetze zu bewegen, aufeinanderzulegen und in Stapeln zu sortieren. Bei dieser Lernumgebung bilden auf einer Gegenstandsebene Würfel und Würfelnetze die Arbeitsgegenstände, auf einer darunter liegenden Gegenstandsebene sind es Kongruenz und Symmetrie.

Aufgabe 20: Würfelnetze benennen
Ordnet die Würfelnetze auf einem Plakat nach „Familien“ und sucht für die Würfelnetze passende Namen.



Wieder zeigen sich Plakate als ein starkes Werkzeug zur Darstellung geometrischer Zusammenhänge und Begriffe, als eine Form von Darstellungen, die Kinder selbst lesen und selbst schreiben können. Sie erlauben und fordern eine intensive Kommunikation.

7.5 Zum Schluss

Mit Aufgaben wird auch das Erreichen von Kompetenzen geprüft. Im Inhaltsbereich Raum und Form ist das Formulieren schriftlicher Aufgaben oft ein Problem, es führt zum Reduzieren von Ansprüchen und zum Verlagern von Schwierigkeiten. Sinnvoll sind Aufgaben, zu deren Bearbeitung man ebene oder räumliche Gestalten oder Dokumente einbringen kann, die im Unterricht entstanden sind. Sie sollten mit hochwertigen Bildern unterstützt sein. Das ist heute mit digitaler Technik möglich. Eine positive Perspektive für den Inhaltsbereich *Raum und Form* bildet daher ein angemessenes Nutzen neuer Medien.

8 Daten, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit

Klaus Hasemann/Elke Mirwald/unter Mitarbeit von Antje Hoffmann

8.1 Überblick/Orientierung

Beim Inhalt *Daten, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit* denken viele vielleicht an altbekannte Arbeitsaufträge wie Verkehrszählungen: Wie viele Fahrzeuge sind in einer bestimmten Zeit an der Schule vorbeigekommen? Dazu müssen Kategorien gebildet – Radfahrer, PKW, LKW usw. – und es muss die Zählung organisiert werden, z. B. mit Strichlisten; schließlich muss man das Ergebnis übersichtlich darstellen. Es gibt auch weiterführende Fragen, z. B.: Was können wir mit diesen Daten anfangen, wie sie mit anderen vergleichen, welche Folgerungen sind möglich? Oder: Kann man den Verkehrsfluss simulieren oder modellieren? Und wie können wir prüfen, ob das Modell wirklich passt?

Beim Sammeln von Daten, Feststellen von Häufigkeiten und Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten lösen wir unsere Aufmerksamkeit vom zufälligen Einzelfall und richten sie auf die Gesamtheit; diese Gesamtheit und ihre Eigenschaften mit mathematischen Mitteln zu beschreiben, ist das Ziel. Bezogen auf die Grundschule heißt dies: Die Schülerinnen und Schüler sollen von Klasse 1 an die Chance haben, Kenntnisse über den Zufall zu erwerben und damit langfristig zu der Überzeugung kommen, dass der Zufall kalkulierbar ist und dass zufällige Ereignisse mit mathematischen Mitteln modelliert werden können. Dazu sollen die Kinder lernen, was mit „Daten“ gemeint ist und wie man sie erfassen und darstellen kann. An einfachen Beispielen sollen sie lernen, was „Häufigkeiten“ und „Wahrscheinlichkeiten“ von Ereignissen sind und wie man mit Ereignissen experimentiert.

8.2 Die Standards zur Kompetenz *Daten erfassen und darstellen*

Was ist mit diesen Standards gemeint?

Zur Klärung dieser Frage betrachten wir zunächst die zugehörige Kompetenz *Daten erfassen und darstellen* und vergleichen sie mit der Kompetenz *Zahldarstellungen verstehen* aus dem Bereich *Zahlen und Operationen*.

Bei *Zahldarstellungen* wird üblicherweise das dezimale Stellenwertsystem (Zehnersystem) verwendet. Bei der Zahl 2007 steht z.B. die Zwei für 2 Tausender, die Nullen für 0 Hunderter bzw. 0 Zehner und die Sieben für 7 Einer: „zweitausend und sieben“. Eine andere Darstellungsform, bei der ebenfalls Zahlzeichen verwendet werden, ist die römische: MMVII. Römische Zahlzeichen finden wir zwar gelegentlich noch in alten Inschriften, für das Rechnen sind sie jedoch weniger brauchbar. Sollen Zahlen verglichen werden, können der Zahlenstrahl oder andere grafische Mittel der Zahldarstellung – wie z.B. Strecken unterschiedlicher Länge – von großem Vorteil sein.

Beim *Erfassen und Darstellen von Daten* werden Zahldarstellungen benötigt, es stehen aber andere Aspekte im Vordergrund. Stellen wir uns z.B. vor, die Kinder wollten ihre Klassensprecher wählen. Es gibt vier Bewerber: Anton, Bertha, Cecilie und Dieter; außerdem hat jedes Kind aus der Klasse eine Stimme. Werden Stimmzettel verwendet, so kann man die mit dem Namen einer bestimmten Kandidatin oder eines Kandidaten versehenen Zettel auf einen Stapel legen und die Zettel zählen. Dann repräsentieren die Zettel die Stimmen, und die Gesamtzahl kann in eine Tabelle eingetragen werden. Eine andere Möglichkeit ist es, die Namen der Kandidaten an die Tafel zu schreiben und für jede abgegebene Stimme einen Strich hinter dem Namen zu machen.

In einer Tabelle aufgeschrieben, könnte das Ergebnis der Klassensprecherwahl so aussehen:

Anton	Bertha	Cecilie	Dieter
4	5	7	8

und mit Strichlisten so:

Anton  **Bertha**  **Cecilie**  **Dieter** 

Die Daten – im Beispiel: die Anzahl der Stimmen für die Kandidaten – zu erfassen ist das Eine, ihre Darstellung – in der Tabelle oder in der Strichliste – ist das Andere.

Daten begegnen uns in vielfältigen Formen, so z.B. als

- Ergebnisse von Wahlen oder Befragungen,
- Anzahlen wie Einwohnerzahlen von Städten und Ländern,
- Größen wie Längen oder Gewichte,
- Ergebnisse von Experimenten,
- technische Angaben (wie z.B. Hubraum oder Benzinverbrauch bei Autos).

Meist werden Daten durch Zahlen gekennzeichnet, doch z.B. bei „persönlichen Daten“ meinen wir Angaben wie Adresse, Beruf, Telefonnummer usw.; bei solchen Daten spielen die Zahlen nur eine untergeordnete Rolle.

Welcher Art die zu erfassenden Daten auch sind, klar ist, dass *vor* jedem Erfassen das *Festlegen von Merkmalen* erfolgen muss: Wodurch sind die Objekte, deren Anzahl oder deren Eigenschaften erfasst werden sollen, gekennzeichnet bzw. wodurch unterscheiden sie sich? Bei der Klassensprecherwahl muss feststehen, welche Kandidaten gewählt werden können; beim Benzinverbrauch, unter welchen Bedingungen er gemessen wird; bei Verkehrszählungen muss vor der Zählung entschieden werden, welche Kategorien von Fahrzeugen gebildet werden sollen. Diese Art von Entscheidungen zu treffen, ist oft schwieriger als die Durchführung der Zählung oder Messung selbst.

Bleiben wir beim Beispiel Klassensprecherwahl: Wird eine Strichliste geführt, so ist diese zunächst nichts weiter als ein Protokoll der Stimmenauszählung. Ein Protokoll ist immer dann erforderlich, wenn die zu erfassenden Daten nicht als konkrete Objekte vorliegen, sondern in irgendeiner Weise „flüchtig“ sind. Z. B. bei der mündlichen Stimmabgabe repräsentiert und dokumentiert jeder Strich eine Stimme. Um das Ergebnis der Wahl (und damit die eigentlich interessierenden Daten) zu bekommen, müssen die Striche gezählt werden; dieser Prozess wiederum wird durch Bündelungen erleichtert (z. B. durch Zusammenfassen von je 5 Strichen zu einem Bündel; die Analogie zwischen diesen Bündeln und den fünf Fingern an einer Hand – wie auch zu den Zehnerbündeln bei der Darstellung der Zahlen im Zehnersystem – ist natürlich unübersehbar). In vielen Fällen genügt dann bereits ein grober Überblick über die Bündel, um das Ergebnis zu erkennen.

Strichlisten und Tabellen eignen sich besonders dann zur Darstellung der Daten, wenn es um die Ermittlung von Anzahlen, also um Häufigkeiten geht. Dagegen eignen sich andere Formen wie z.B. Kreis- oder Blockdiagramme besser, wenn *Unterschiede* bei den Anzahlen deutlich gemacht werden sollen[1].

Die Tabelle ermöglicht einen schnellen Überblick über das *zahlenmäßige* Ergebnis. Die Darstellung in einem Blockdiagramm erleichtert dagegen den *Vergleich* der Ergebnisse durch direkte, visuelle Wahrnehmung: Zwar ist aus dieser Darstellung nicht unmittelbar abzulesen, wie viele Stimmen jeder Kandidat genau bekommen hat, dafür wird aber durch Hinsehen sofort klar, wer die meisten Stimmen hat und wie groß die Abstände sind. Das Blockdiagramm (die Blöcke können auch durch Balken oder Strecken ersetzt werden) hat damit einen anderen Informationswert als die Tabelle.

[1] Die auf S. 144 folgenden Diagramme wurden mit einem Computerprogramm erzeugt; nicht etwa, weil ein solches Programm bereits Schülerinnen und Schülern der Grundschule zur Verfügung stünde, sondern um zu demonstrieren, wie solche Darstellungen, die heute für uns selbstverständlich sind, entstehen. Sie richtig zu lesen und zu verstehen setzt voraus, dass man vergleichbare Diagramme auch selbst herstellen kann, und zwar durch eigenes Handeln und ohne Computer.

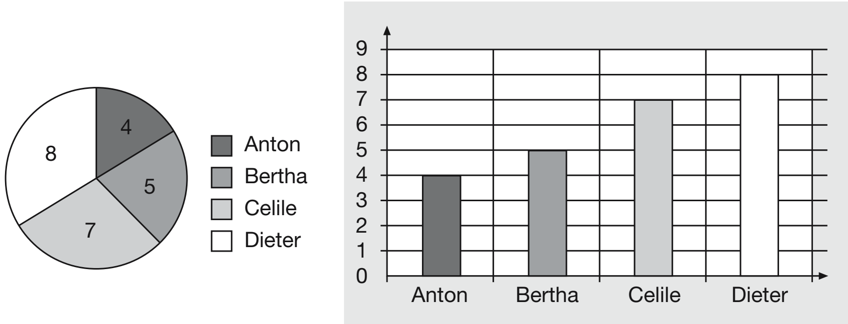


Abb. 1: Kreis- und Blockdiagramm

Dies gilt noch stärker für Kreisdiagramme, bei denen die Einzelergebnisse mit der *Gesamtzahl* der abgegebenen Stimmen in Beziehung gesetzt werden: Neben der absoluten wird auch die *relative* Häufigkeit erkennbar. Meist werden deshalb die Segmente des Kreises durch Prozentwerte gekennzeichnet und nicht wie im Beispiel oben durch absolute Zahlen.

Natürlich können wir auch weniger sinnvolle Darstellungen des Wahlergebnisses herstellen (bzw. – weil es so schön einfach geht – am Computer erzeugen), wie z. B. dieses Diagramm:

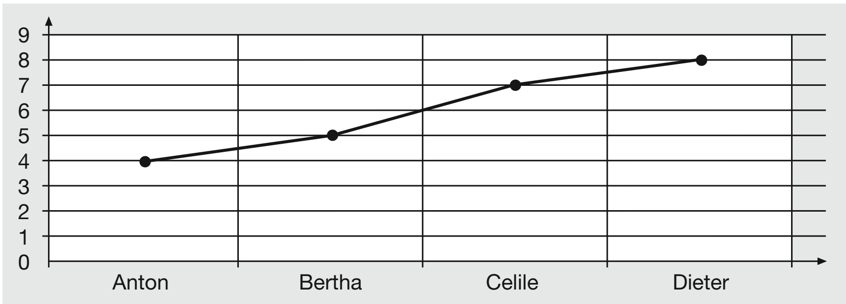


Abb. 2: Ein Diagramm mit (bei diesem Beispiel) zweifelhaftem Informationswert

Jede Darstellung von Daten hat einen bestimmten Informationswert (er kann gering oder irrelevant, die Darstellung kann sogar irreführend sein. Beim Diagramm in Abb. 2 etwa ist das Zeichnen eines Funktionsgraphen unsinnig, da es sich bei Wahlergebnissen um die Ergebnisse für jede(n) einzelne(n) Kandidatin(en) handelt. Anders wäre es, wenn die Wahlergebnisse für die gleichen Kandidat(inn)en bei mehreren, aufeinander folgenden Wahlen dargestellt werden. Damit die Daten ihren Informationswert bekommen, müssen sie so strukturiert werden, dass die zu vermittelnde Information vom Leser aus der Darstellung entnommen werden kann. Bei der Auswahl der Darstellungsform muss man sich folglich überlegen, welche Informationen bzw. welche Aspekte, die in den Daten enthalten sind, verdeutlicht werden soll. Entsprechend erfordert das Lesen und Verstehen von Diagrammen Kenntnisse darüber, was mit dem jeweiligen Diagramm ausgedrückt werden kann, welche Informationen also in einer bestimmten Darstellungsform enthalten sein können und welche nicht.

Die Standards *In Beobachtungen, Untersuchungen und einfachen Experimenten Daten sammeln, strukturieren und in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen darstellen* sowie *Aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen Informationen entnehmen* berücksichtigen diese beiden Aspekte; sie sind ganz offensichtlich komplementär zueinander: Zum einen sollen die Schülerinnen und Schüler lernen, selbst Daten zu sammeln und sinnvoll darzustellen, zum anderen sollen sie solche Darstellungen lesen und verstehen können. Wenn man über das eine spricht, sollte man stets auch das andere im Blick haben. Die Schülerinnen und Schüler sollen also lernen,

- wie man Daten über Objekte oder Ereignisse erfasst,
- wie man sie dokumentiert, insbesondere dann, wenn sie flüchtig (vergänglich) sind,
- dass es erforderlich ist, vor der Datenerhebung Kriterien oder Merkmale festzulegen, nach denen die beobachteten Objekte oder Ereignisse unterschieden werden sollen,
- wie man die so erfassten Daten für andere Personen übersichtlich in Tabellen und Diagrammen darstellt,
- dass es hilfreich oder sogar notwendig sein kann, die Daten noch weiter zu bearbeiten um ihren Informationswert zu erhöhen,
- wie man solchen Darstellungen Informationen entnimmt und diese dann benutzt.

Zur Bedeutung und Entwicklung dieser Kompetenzen

Schülerinnen und Schüler befassen sich in der Regel nicht mit fingierten Daten, sondern sammeln und bereiten realistische und möglichst selbst ermittelte Daten auf. So kann man sich vorstellen, dass Kinder aus eigenem Interesse beispielsweise Daten sammeln über

- Tageshöchst- und Tiefsttemperaturen,
- das Wachstum von Tieren oder Pflanzen,
- Entfernungen (lokal und regional, auf der Erde, aber auch im Weltraum),
- Leistungen im Sport (eigene und fremde),
- Experimente (wie z. B. die Flugweite oder -dauer von selbst gebastelten Papierschwalben oder mit Würfeln),
- Preise zum Vergleich bei „interessanten“ Waren.

In der Schule werden vielfach Anregungen gegeben zum Sammeln von Daten über die eigene Familie, über Hobbys, über Haustiere, über Augen- und Haarfarben, über Fernsehgewohnheiten der Kinder, zum Zahnausfall in den einzelnen Monaten des ersten Schuljahres, zu Wetterbeobachtungen usw. Das Darstellen der Daten ist dabei auf der enaktiven und der ikonischen Repräsentationsebene möglich. So können einzelne Merkmale (z. B.: Wer gehört alles zu deiner Familie? oder: Wie viele Kinder haben blaue/grüne/braune Augen?) in einfachen Schaubildern durch Säulen dargestellt werden. Über diese Zugangsweise ist dann ein weiteres Darstellen auf Karopapier durch das Ausmalen von Rechenkästchen möglich. Das ist eine erste Form zur Darstellung der Daten in Block- (oder Streifen- bzw. Säulen-)diagrammen.

Aufgabenformate wie im folgenden Beispiel eignen sich für den Einstieg, weil solche Daten bereits Schulanfänger in ihrem Umfeld ermitteln können:

Abb. 3: Unsere Familien (Käpnick 2004a, Rechenwege, Klasse 1, S. 130)

Bei der in Abb. 3 angesprochenen Sammlung von Daten liegt das Augenmerk hauptsächlich auf dem Erkennen und Unterscheiden der Merkmale (Benennung der Personen bzw. der Haustiere, Unterscheidung in „Erwachsene“ und „Kinder“, „Hunde“ und „Vögel“). Die Art der Darstellung (Repräsentation der Personen durch Namen und Bilder, in Strichlisten und auf Karopapier) wird den Kindern noch vorgegeben.

Im Zusammenhang mit der Behandlung des Themenfeldes *Größen und Messen* sind ähnliche Vorgehensweisen möglich. Dabei können z. B. Daten wie die Körperlängen der Kinder gesammelt, in Tabellen erfasst und über entsprechende Papierstreifen, Ketten oder Fäden in Schaubildern dargestellt und für ein späteres Darstellen in Blockdiagrammengenutzt werden.

Günstig sind Aufgabenformate, mit denen die Kinder animiert werden, eigene Darstellungsformen zu nutzen und in analytischen Betrachtungen Vor- und Nachteile verschiedener Lösungswege zu diskutieren. Beim folgenden Experiment haben Kinder dieses Angebot genutzt und unterschiedliche Lösungswege entwickelt:

Aufgabe

In einem Eimer sind eine rote, eine blaue und eine grüne Kugel. Nimm ohne hinzusehen nacheinander je ein Kugeln heraus, bis du zwei Kugeln hast.
Welche Farben können die beiden Kugeln haben?
a) Du kannst die Lösung legen, malen oder schreiben.
b) Überprüfe deine Lösung durch Probieren!

Darstellungen der Ergebnisse von Kindern des 2. Schuljahres bei diesem Experiment:

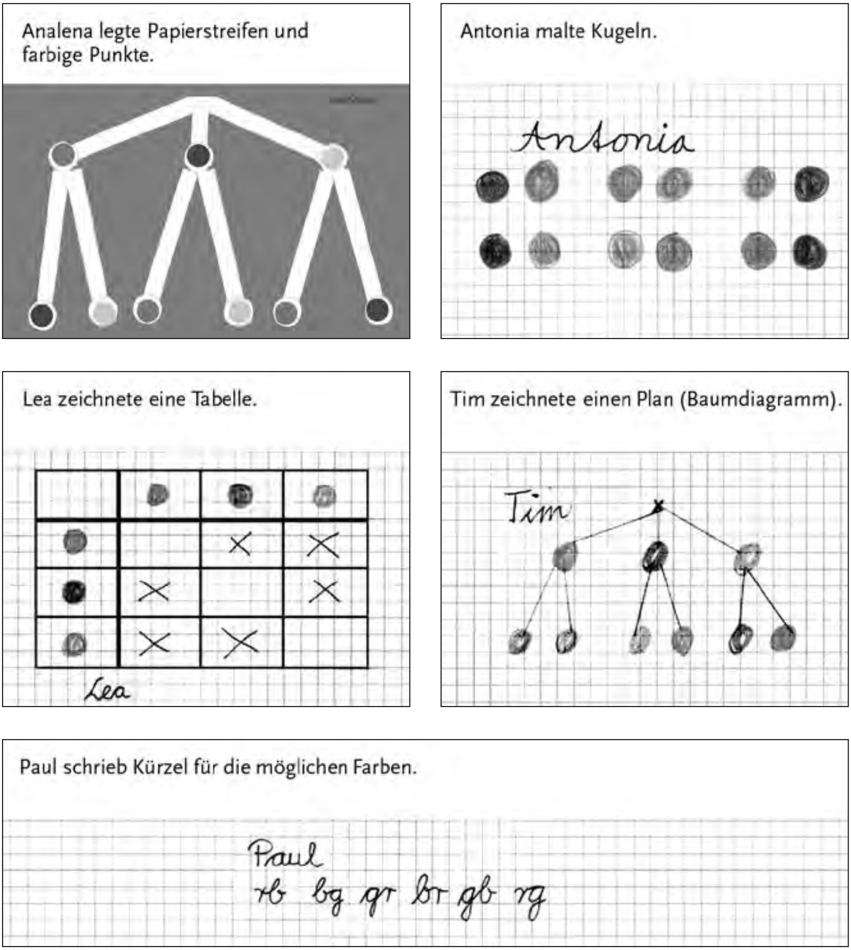


Abb. 4: Darstellungen für Möglichkeiten beim Ziehen zweier Kugeln

Alle diese Darstellungsformen sind zunächst als Dokumentationen möglicher Farbkombinationen bei zwei Kugeln zu verstehen. Vor möglichen kombinatorischen Betrachtungen und anderen weiterführenden Fragen steht das *Festhalten der Möglichkeiten* (bzw. beim realen Ziehen der Kugeln: das Festhalten der Ergebnisse des Experimentes). Ein zweiter Schritt ist dann die Diskussion der Vor- und Nachteile der jeweiligen Darstellungsform. Insbesondere das Baumdiagramm ermöglicht es, das Ziehen der beiden Kugeln auch als Abfolge von zwei Ziehungen jeweils einer Kugel (ohne Zurücklegen) zu interpretieren und verweist damit auf die mögliche Betrachtung der Situation aus kombinatorischer Sicht (vgl. *einfache kombinatorische Aufgaben lösen*).

Für die Schulung der Fähigkeit zum *Entnehmen von Informationen* aus Diagrammen bieten sich solche in Zeitungen, Zeitschriften oder Büchern an, die inhaltlich für Grundschulkinder relevant sind.

Durch Aufgaben wie im folgenden Beispiel (aus einer Orientierungsarbeit für Berliner Grundschulkinder, 2004, Jahrgangsstufe 2, Mathematik) wird der Stand der Kompetenzentwicklung deutlich:

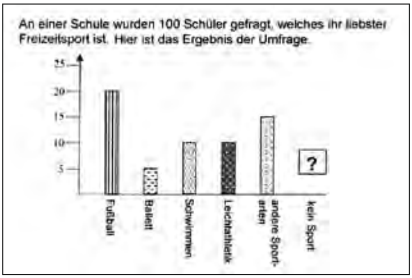


Abb. 5: Entnehmen von Informationen aus einem Blockdiagramm

Während die Aufgabe a) 86 % der Kinder richtig gelöst haben, sind es in der Aufgabe b) nur 30 % der Berliner Kinder. Hier zeigt sich, dass das einfache Entnehmen von Informationen aus einer grafischen Darstellung den Kindern wenige Probleme bereitet. Müssen die Kinder aber die Informationen einer grafischen Darstellung nicht nur entnehmen, sondern sie auch rechnerisch verarbeiten, zeigt das Ergebnis noch erhebliche Defizite in der Kompetenzentwicklung. Ursache dafür kann natürlich auch die bisher ungewohnte Form der Darstellung eines Sachverhaltes sein. Aber auf genau diese Anforderung treffen wir im täglichen Umgang mit mathematikhaltigen Darstellungen oder Sachverhalten, und um genau diese Kompetenzen geht es bei dem hier betrachteten Standard „aus Tabellen … Informationen entnehmen" und bei der Forderung, „Grundlagen für die lebenslange Auseinandersetzung mit mathematischen Anforderungen des täglichen Lebens" zu schaffen (KMK, 2004, S. 6).

Meilensteine bei der Entwicklung der Kompetenzen

Das Sammeln von Daten aller Art wird von den Kindern spontan betrieben. Sie werden dabei sehr schnell selbst bemerken, dass Daten meist „flüchtig“ sind, sie verschwinden und sind unwiderruflich verloren, wenn man sie nicht festhält: aufschreibt, aufzeichnet, ordnet, ablegt. Ein erster gedanklicher Schritt für die Kinder ist also die Erkenntnis, dass Daten gesammelt und festgehalten werden müssen: Dazu braucht man Methoden und Verfahren: Man kann Tabellen und Strichlisten anlegen oder Diagramme zeichnen.

In der Schule werden entsprechende Aufgabenformate bereitgestellt. Dabei ist es erforderlich zu klären, wozu, zu welchem Zweck die Daten benötigt werden: Sollen sie (wie z. B. Ergebnisse von Umfragen unter den Klassenkameraden, Einwohnerzahlen von Städten oder Längen von Flüssen) verglichen werden? Und: Mit welcher Genauigkeit brauchen wir dann die Daten? Muss man die Zahlen runden? Aus solchen Fragen ergibt sich die Notwendigkeit, die Daten vor der Darstellung zu strukturieren: Welche Kategorien kann man sinnvoll bilden (z. B.: Welche Merkmale sollen bei einer Umfrage unterschieden werden)? Im Hinblick auf die unterschiedlichen Darstellungsformen kann man fragen, ob die Daten einfach und durch Hinsehen („auf einen Blick“) verglichen werden sollen oder ob die genauen Zahlenwerte wichtig sind; ob Anteile (relative Häufigkeiten) verglichen oder ob Veränderungen erfasst werden sollen (wie z. B. das Längenwachstum von Pflanzen im Laufe der Zeit). Insbesondere bei Diagrammen ist es auch wichtig, sich zu überlegen, welche Skalierung (Abstände auf den Skalen) sinnvoll sind (z. B. ist der Maßstab bei der Länge des Schulweges anders als bei Entfernungen im Weltraum).

Der nächste Schritt erfordert eine weitere Abstraktion, nämlich die Einsicht, dass wir uns bei der Darstellung und Interpretation von Daten und Häufigkeiten nicht mehr für den Einzelfall interessieren, sondern für eine *Gesamtheit*: Wenn Kategorien gebildet wurden, interessiert uns die *absolute Häufigkeit* (z. B. die Anzahl der Wählerstimmen für eine Kandidatin bei der Klassensprecherwahl) oder die *relative Häufigkeit* (wie viele Stimmen sie bekommen hat bezogen auf die Gesamtheit der abgegebenen Stimmen). Häufig interessieren uns auch *Beziehungen* zwischen Daten (z. B. beim Vergleich von Länge/Größe und Gewicht bei Pflanzen oder Tieren) oder das *Verhalten von Häufigkeiten* (z. B. wenn wir in verschiedenen langen Zeitintervallen oder zu unterschiedlichen Tageszeiten den Verkehr zählen).

Schließlich muss noch die *Interpretation* der Darstellungen von Daten angesprochen werden: Wozu soll eine bestimmte Darstellung der Daten dienen, was kann aus Diagrammen abgelesen werden? Wie verändert sich für den Leser eines Diagramms der Eindruck, wenn man die Skalierung (die Abstände beim Abtragen einzelner Messpunkte) verändert?

8.3 Die Standards zur Kompetenz *Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten vergleichen*

Was ist mit diesen Standards gemeint?

Begriffe wie „wahrscheinlich“, „unmöglich“, „sicher“ oder „Zufall“ sind so sehr in unseren Sprachgebrauch eingegangen, dass sie selten bewusst verwendet werden. Noch seltener wird daran gedacht, dass auch über diese zufälligen Ereignisse mathematische Aussagen gemacht werden können.

Für ein tieferes Verständnis im mathematischen Sinne ist besonders problematisch, dass der umgangssprachliche Gebrauch des Begriffes „wahrscheinlich“ abweicht von seiner mathematischen Bedeutung: Im täglichen Leben wird der Terminus „wahrscheinlich“ häufig in dem Sinne gebraucht, dass ein Ereignis zwar nicht sicher eintritt, aber sein Eintreten doch erwartet wird. Auch ist die Einschätzung von Eintrittswahrscheinlichkeiten bestimmter Ereignisse im Alltag oftmals stark emotional geprägt: Das Erwürfeln einer „Sechs“ wird von vielen Schülerinnen und Schülern als unwahrscheinlicher angesehen als das Erwürfeln der anderen Zahlen, weil in vielen Spielen die „Sechs“ eine besondere Bedeutung hat und damit die Aufmerksamkeit auf diese Zahl gelenkt ist.

Intuitiv erfasste Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen können auf einer Rangskala angeordnet werden (vgl. Kapitel, S. 154 f.). Die Positionen auf dieser Skala haben im Mathematikunterricht der Grundschule zunächst informellen Charakter, im Laufe der Schuljahre können sie aber zunehmend zahlenmäßig präzisiert werden. Bei Einschätzungen von Wahrscheinlichkeiten wie „sicher“, „sehr wahrscheinlich“, „unwahrscheinlich“ und „unmöglich“ sollte den Schülerinnen und Schülern deutlich werden, dass diese Wörter der mathematischen Fachsprache angehören. Ziel ist es, die so benannten Wahrscheinlichkeiten in ihrer Bedeutung zu verstehen, sie also mit mathematischen Mitteln auszudrücken und damit vergleichbar zu machen. Die Kinder erfahren dabei, dass ihr subjektives Empfinden („Wenn ich ganz stark die Daumen drücke, würfele ich wahrscheinlicher eine Sechs.“) – wenn es schon nicht ganz ausgeblendet wird – zunehmend in den Hintergrund tritt. Ziel ist es also, dass die Schülerinnen und Schüler von einer mehr informellen und qualitativen zur quantitativen, von formalen Kriterien geleiteten Sichtweise geführt werden.

Fachlicher Hintergrund

Damit Wahrscheinlichkeiten bei einfachen Zufallsexperimenten auf einer Rangskala mathematisch erfasst werden können, sind Verfahren nötig. Es können zwei mathematische Modelle als Zugänge unterschieden werden:

Der geometrische Zugang

Beim klassischen Wahrscheinlichkeitsbegriff nach LAPLACE wird davon ausgegangen, dass jedes Ereignis gleich wahrscheinlich eintritt. Z.B. werden die geometrischen Eigenschaften des Zufallsgenerators[2] betrachtet: Bei (ungezinkten) Würfeln ergibt sich eine Gleichwahrscheinlichkeit für das Eintreten der sechs Augenzahlen aus der geometrischen Struktur des Würfels. Bei „fairen“ Glücksrädern (Kreisscheiben, die in farbige oder mit Zahlen versehene Segmente geteilt sind) ist es ähnlich, allerdings ist die Gewinnchance hierbei abhängig von der Fläche, die als „Gewinnbereich“ festgelegt wurde.

Die Eintrittswahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich dem Quotienten aus der Anzahl der für das Ereignis *günstigen* Fälle und der Anzahl aller *möglichen* Fälle. Beim Würfeln mit einem fairen Würfel haben wir sechs mögliche Fälle; die Wahrscheinlichkeit, dass eine „1“ gewürfelt wird, ist also 1/6, und die, dass „eine 5 oder eine 6“ gewürfelt wird, ist 1/6 + 1/6 = 1/3. Um alle möglichen bzw. alle günstigen Fälle ermitteln zu können, sind häufig Kenntnisse aus dem Bereich der Kombinatorik erforderlich (und für die genaue Berechnung der Wahrscheinlichkeiten Kenntnisse aus der Bruchrechnung). Z.B. bei den Augensummen beim zweimaligen Würfeln ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Augensummen einerseits aus der Gesamtzahl aller *möglichen* $6 \times 6 = 36$ Ausfälle beim zweimaligen Würfeln und andererseits aus der Anzahl der *günstigen* Möglichkeiten, d.h. der Anzahl der Möglichkeiten, wie eine bestimmte Augensumme entstehen kann. So gibt es jeweils eine Möglichkeit bei den Augensummen 2 und 12 (weil nur die Summen 1 + 1 bzw. 6 + 6 in Frage kommen); es gibt zwei günstige Möglichkeiten bei der 3 und bei der 11 (nämlich 1 + 2 und 2 + 1 bzw. 5 + 6 und 6 + 5), drei bei der 4 und bei der 10, vier bei der 5 und bei der 9, fünf bei der 6 und bei der 8 und schließlich sechs Möglichkeiten bei der 7. Die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten sind also 1/36, 2/36 = 1/18, 3/36 = 1/12, 4/36 = 1/9, 5/36 und 6/36 = 1/6. Die Wahrscheinlichkeit, beim zweimaligen Würfeln die Augensumme *2 oder 3 oder 4 oder 5 oder 6 oder 7 oder 8 oder ° oder 10 oder 11 oder 12* zu würfeln, ist 1/36 + 2/36 + 3/36 + 4/36 + 5/36 + 6/36 + 5/36 + 4/36 + 3/36 + 2/36 + 1/36 = 36/36 = 1. Dieses Ergebnis ist *sicher*.

Die Wahrscheinlichkeit, bei zweimaligem Würfeln die Augensumme 1 zu würfeln, ist dagegen 0: Dieses Ergebnis ist *unmöglich*.

[2] Für die Durchführung von Zufallsexperimenten benötigt man *Zufallsgeneratoren*. Es können zwei Arten von Zufallsgeneratoren unterschieden werden:

1. Symmetrische Zufallsgeneratoren, bei denen jeder Versuchsausgang mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eintritt (z.B. Würfel und Münzen).
2. Asymmetrische Zufallsgeneratoren, bei denen eine Ungleichverteilung bzgl. der verschiedenen Versuchsausgänge vorliegt (z.B. Reißzwecken oder Streichholzschachteln).

Der Zugang über relative Häufigkeiten

Die Bestimmung der relativen Häufigkeit eines Ereignisses auf experimentellem Wege (d.h. über die häufige Durchführung des Experimentes) ist eine weitere Möglichkeit, um zahlenmäßig zu erfassen, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Eintreten des Ereignisses zu erwarten ist. Mathematische Grundlage für die Ermittlung der Wahrscheinlichkeiten mithilfe von relativen Häufigkeiten ist das „Gesetz der großen Zahlen". Es besagt, dass sich mit wachsender Anzahl an Versuchen die relative Häufigkeit eines Ereignisses seiner (theoretischen) Eintrittswahrscheinlichkeit annähert. Die Festlegung der Gewinnchancen mittels relativer Häufigkeiten ist mühsam[3].
Ein Beispiel von Schülerergebnissen aus einem dritten Schuljahr:

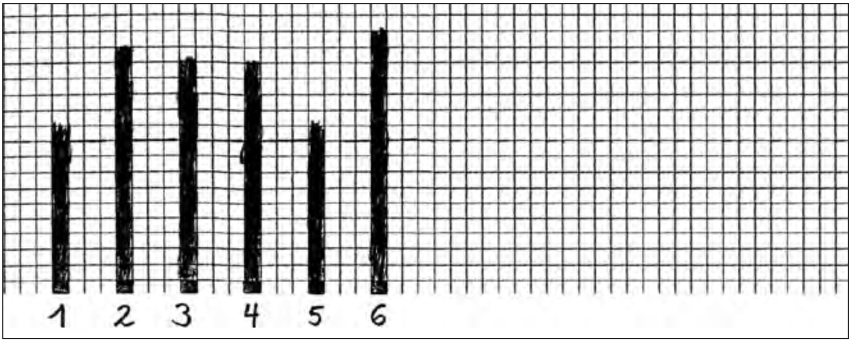


Abb. 6: Blockdiagramm mit Ergebnissen bei 85-maligem Würfeln

Bei dem auf Gitterpapier selbst hergestellten Blockdiagramm fällt durch den Vergleich der (absoluten) Häufigkeiten auf, dass nach 85 Würfen mit einem Würfel noch keineswegs eine „Gleichverteilung" der möglichen Ausfälle von 1 bis 6 auftritt. Das „Gesetz der großen Zahlen" meint also wirklich (sehr) „große Zahlen"!

Die häufige Durchführung des Experimentes ist insbesondere bei der Nutzung von asymmetrischen Zufallsgeneratoren erforderlich, weil die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse nicht durch die geometrische Struktur des Zufallsgenerators erfassbar sind. Die Schülerinnen und Schüler können über längere Versuchsreihen und durch Anlegen von Strichlisten ermitteln, wie hoch z.B. die Chance ist, dass eine geworfene Streichholzschachtel auf der schmalen Seite oder eine geworfene Reißzwecke in einer der beiden möglichen Lagen $\perp$ bzw.  liegenbleibt).

[3] Damit Schüler Gewinnchancen bei Zufallsexperimenten einschätzen lernen, ist die aktive Durchführung von Experimenten wichtig. Als Zufallsexperimente kommen vor allem das Werfen von Münzen oder Würfeln, das Ziehen von Kugeln aus einer Urne sowie das Drehen von Glücksrädern infrage.

Aufgaben zum Erlernen der Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeit (sicher, unmöglich, wahrscheinlich)

Beim Zugang zum Wahrscheinlichkeitsbegriff stehen in den ersten Schuljahren das Ermitteln, Darstellen und Analysieren absoluter Häufigkeiten im Mittelpunkt der Betrachtungen. Der geometrische Zugang bietet sich bei Kindern diesen Alters noch nicht an, weil er Kenntnisse über die *Eigenschaften* von geometrischen Figuren und Körpern voraussetzt, die zumindest in den ersten beiden Schuljahren noch nicht erwartet werden können. Dies gilt sowohl für die Symmetrie des Kreises (beim Glücksrad) als auch für die kennzeichnenden Merkmale des Würfels. Zwar zielt die im Bereich *Raum und Form* angesprochene Kompetenz *Geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen* genau auf diese Eigenschaften und Merkmale, aber die entsprechenden Einsichten müssen bei den Kindern erst noch entwickelt werden. Experimente, z. B. mit Spielwürfeln, können ein vorzügliches Mittel sein, um sowohl Einsichten über die Verteilung der Häufigkeiten von Augenzahlen beim wiederholten Würfeln zu gewinnen als auch (und gleichzeitig damit!) Erkenntnisse über die geometrische Struktur des Würfels. Durch Nachdenken z. B. über die Frage, *warum* beim Würfeln alle Augenzahlen gleich wahrscheinlich sind, fördern diese Experimente also die Kompetenzentwicklung in beiden Bereichen.

Am Anfang steht das eigene Handeln der Kinder, das Experimentieren mit Objekten wie mit dem Würfel. Auf empirischem Wege erleben die Schüler, welche Ereignisse/Ergebnisse häufiger/seltener oder gleich oft eintreten. Durch diese Erfahrungen reift die Erkenntnis, dass viele Versuche notwendig sind, um Gewissheit über das Eintreten zufälliger Ereignisse zu gewinnen. Lange Zeit spielt dabei die Subjektivität des Wahrscheinlichkeitsbegriffes bei den Schülerinnen und Schülern eine große Rolle. Das kontinuierliche Einbeziehen solcher Aufgabenstellungen in den mathematischen Grundschulunterricht bietet die Chance, die Beziehung zwischen der Anzahl der Versuche und dem Eintreten des entsprechenden Ereignisses zu erleben und zu verstehen und damit zu erkennen, dass auch der Zufall berechenbar ist – zwar nicht bei jedem einzelnen Wahrscheinlichkeitsexperiment, so doch bei der Betrachtung der Gesamtheit der Experimente.

Dazu sind u. a. Aufgabenstellungen notwendig, die den „Grad der Sicherheit“ des Eintretens eines zufälligen Ereignisses thematisieren, was von den ersten Klassenstufen an möglich ist. Angemessene Formulierungen für Grundschüler sind z. B. die Folgenden:

- Ein *sicheres Ergebnis* ist eines, das bei einem Zufallsexperiment *immer* eintritt (z. B. bekommt man beim Würfeln *sicher* eine der Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 oder 6, andere Möglichkeiten gibt es nicht),

- ein *wahrscheinliches Ergebnis* ist eines, das möglich ist, aber nicht sicher eintreten muss (z. B. *kann* man beim Würfeln eine gerade Zahl als Ergebnis bekommen, doch es gibt auch *andere mögliche* Ergebnisse),
- ein *unmögliches Ergebnis* ist eines, das in *keinem* Fall eintreten kann (wie beim Würfeln das Auftreten einer Augenzahl, die größer als 6 ist).

Beispielaufgabe für das 2. Schuljahr:

Aufgabe

Marie hat in eine Kiste zwei rote und drei blaue Kugeln gelegt.
Marie hat nacheinander drei Kugeln aus der Kiste genommen.
Die Kinder ihrer Klasse vermuten, welche Farbe Maries Kugeln haben können.

a) Welche Antworten gehören zusammen?

Maries erste Kugel ist blau.	Das ist nicht möglich.
Marie holt nur rote Kugeln heraus.	Das ist sicher.
Maries erste Kugel ist entweder blau oder rot.	Das ist möglich, aber nicht sicher.

b) Probiere aus, ob du richtig zugeordnet hast!

Beim Einsatz dieser Aufgabe zeigte sich, dass die Kinder bei a) kaum Schwierigkeiten mit der richtigen Zuordnung der Aussagen hatten; auch beim Ausprobieren in b) zeigten sie keine Verunsicherung. Bei anderen Aufgaben, in denen die Bgriffe „sicher“, „möglich“ usw. fehlten, gab es dagegen eher Schwierigkeiten beim Beschreiben der zufälligen Ereignisse. Typische Schüleräußerungen waren:

- Zu „Maries erste Kugel ist blau“:
  Das kann sein, aber es gibt nicht nur blaue, sondern auch rote.
- Zu „Marie holt nur rote Kugeln heraus“:
  Man muss ja fünfmal ziehen, aber man kann ja nicht fünf rote rausholen, wenn nur zwei drin sind. Das ist unmöglich.
- Zu „Maries erste Kugel ist entweder blau oder rot“:
  Das muss so sein, denn es sind ja nur blaue und rote drin.

Im nächsten Schritt geht es darum, die „möglichen“ Ereignisse im Hinblick auf den Begriff „wahrscheinlich“ differenzierter zu betrachten. Dabei werden zunächst qualitative Beurteilungen erfolgen, die aber zunehmend durch quantifizierte Aussagen ersetzt werden.

Auf dem Wege dahin kann eine *Wahrscheinlichkeitsskala* zur Veranschaulichung eingesetzt werden.

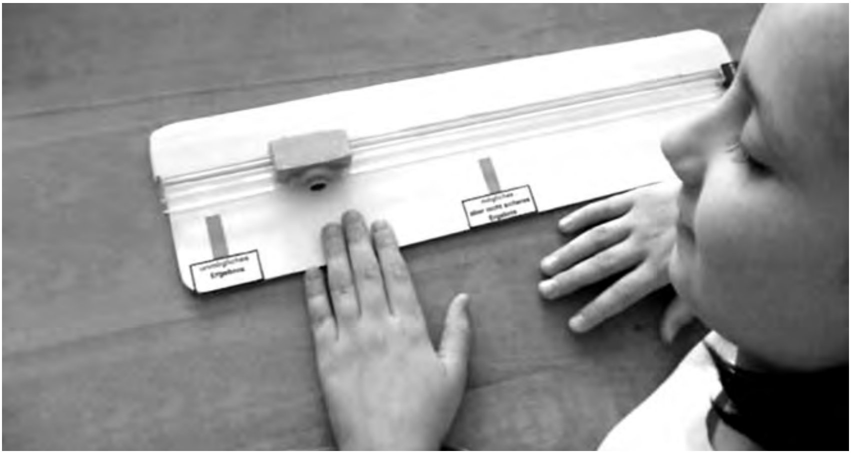


Abb 7: Wahrscheinlichkeitsskala

Mit diesem selbst gebastelten Gerät können durch Verschieben eines Läufers auf einer Rangskala Aussagen zum Eintreten zufälliger Ereignisse dargestellt werden, ohne dass zunächst Angaben von Zahlenwerten notwendig sind. Stattdessen werden Formulierungen wie „Es ist sicher (möglich, unmöglich), dass …“ genutzt. Ähnlich wie beim Rechenstrich oder am Zahlenstrahl können auch Vergleiche von Wahrscheinlichkeiten vorgenommen werden: „Es ist wahrscheinlicher (weniger wahrscheinlich), dass …“. Zur Begründung werden aber zunehmend quantitative Beschreibungen verwendet (vgl. z.B. die eben angesprochene Aufgabe „Marie hat in eine Kiste zwei rote und drei blaue Kugeln gelegt“: „Blau ist wahrscheinlicher als rot, weil mehr blaue Kugeln als rote in der Kiste sind.“ Oder: „Nur in 2 von 5 Fällen ist die erste Kugel rot“).

Welche Meilensteine beim Erwerb von Einsicht in den Begriff „Wahrscheinlichkeit“ gibt es?

1. Die Kinder können qualitative Einschätzungen von Eintrittswahrscheinlichkeiten bestimmter Ereignisse mithilfe der Fachbegriffe wie „sicher“, „unmöglich“ und „wahrscheinlich“ abgeben und ihre Vermutungen auch begründen. Sie erkennen in diesem Zusammenhang, dass das wesentliche Merkmal von zufälligen Ereignissen die Ungewissheit der einzelnen Ergebnisse ist.
2. Die Kinder erkennen, dass bei entsprechenden geometrischen Eigenschaften (wie beim Würfel) von einer Gleichwahrscheinlichkeit der Ereignisse ausgegangen werden kann.

3. Die Kinder können bei einfachen Zufallsexperimenten mithilfe von kombinatorischen Gedanken die für ein Ereignis günstigen sowie alle möglichen Fälle bestimmen. Die Einschätzung der Eintrittswahrscheinlichkeit wird auf dieser Grundlage jedoch noch eher qualitativ im Sinne des ersten Meilensteins abgegeben.
4. Die Kinder erkennen, dass durch die fortgesetzte Wiederholung eines Zufallsexperiments die qualitative Einschätzung von Eintrittswahrscheinlichkeiten immer genauer wird, da bei hinreichend langen Versuchsreihen Gesetzmäßigkeiten erkennbar sind.
5. Die Kinder können im Zusammenhang mit Ziehungen aus Urnen begründete Prognosen zur Zusammensetzung der Urnen abgeben (vgl. Abb. 9).
   Meilensteine nach der Grundschule (vgl. Biehler/Hartung, 2006)
6. Die Kinder können Eintrittswahrscheinlichkeiten bestimmter Ereignisse quantitativ errechnen.
7. Die Kinder können mithilfe der kombinatorischen Zählverfahren im Sinne des Laplace'schen Wahrscheinlichkeitsbegriffs den Quotienten aus der Anzahl der für das Ereignis günstigen Fälle und der Anzahl aller möglichen Fälle berechnen.
8. Die Kinder können Zufallsexperimenten ein gleichwertiges Urnenmodell zuordnen.
9. Die Kinder können die relativen Häufigkeiten berechnen und erkennen, dass sich die relative Häufigkeit der Wahrscheinlichkeit annähert.

Experimentieren mit Wahrscheinlichkeiten

Eine **Aufgabe** aus dem 2. Schuljahr
Marie hat in eine Kiste zwei rote und drei blaue Kugeln gelegt. a) Vermute zuerst, wie viele Kugeln Marie aus der Kiste nehmen muss, damit ganz sicher eine rote Kugel dabei ist! b) Probiere! c) Vergleiche mit den anderen Kindern! Was stellst du fest?

Beim Einsatz dieser Aufgabe in Schulklassen zeigte sich, dass die Kinder sehr wohl in der Lage waren, bei Aufgabe a) begründete Vermutungen abzugeben:

- Camille: Mit Sicherheit viermal, denn die ersten können drei blaue sein, dann muss aber eine rote kommen.
- Marielle: Erst drei blaue ziehen, dann muss die nächste unbedingt eine rote sein. Dann muss man viermal ziehen.

- Samy: Man kann das nicht mit Sicherheit sagen. Das ist doch zufällig. Denn ich könnte ja schon zweimal blau und dann schon rot ziehen.

Beim Probieren haben die Kinder immer so lange probiert, bis eine rote Kugel kam. Da häufig schon beim ersten oder zweiten Ziehen die Kugel rot war, führte dies jedoch bei einigen Kindern zur Verunsicherung und zum Anzweifeln der Vermutung, weil sich das Ergebnis des Experimentes (anscheinend) von der Vermutung unterschied. Solches Schülerverhalten macht deutlich, dass die Begriffsbildung (in diesem Fall: Was bedeutet „sicher“?) noch nicht abgeschlossen ist.

Beim Arbeiten mit Glücksrädern machen Kinder die Erfahrung, dass gleichmäßig auf die Segmente verteilte Farben alle die gleiche Chance haben. Ist aber die Verteilung der Farben nicht „fair“ (oder das Glücksrad selbst nicht „fair“), besteht keine Chancengleichheit. Eine neue Fragestellung ergibt sich, wenn Kinder selbst die Glücksräder einfärben und damit die Bedingungen von Chancengleichheit oder -ungleichheit bestimmen können.

Beispiel: Färben von Glücksrädern

Eine **Aufgabe** aus dem 2. Schuljahr

Färbe das Glücksrad mit den Farben Rot, Blau, Grün und Gelb so, dass
a) alle Farben die gleiche Chance haben zu gewinnen! Begründe dein Vorgehen!
b) die vier Farben nicht die gleiche Chance haben zu gewinnen!
Begründe dein Vorgehen!

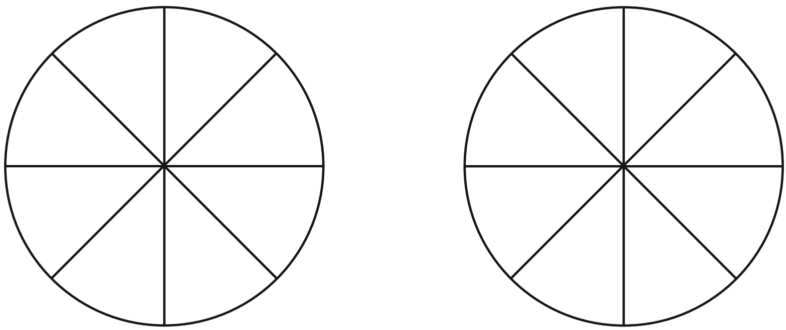


Abb. 8: Vorlagen für Glücksräder, die unterschiedlich gefärbt werden sollen

Zur Entwicklung von Einsicht in die Bedeutung von Wahrscheinlichkeitsaussagen sollten auch Experimente durchgeführt werden, bei denen der Gedankengang umgekehrt werden muss. Ein Beispiel aus dem 3. Schuljahr: In einer Urne mögen sich zehn Kugeln befinden, von denen vier gelb und sechs rot sind. Wenn wir „blind“, z.B. 100-mal ziehen (und die Kugeln stets zurücklegen), so werden wir etwa 60-mal eine rote und 40-mal eine gelbe Kugel ziehen. Nun experimentieren wir in der umgekehrten Richtung: Wir wissen nur, dass sich in der Urne zehn Kugeln befinden und dass einige gelb und andere rot sind. Können wir durch Ziehen der Kugeln ermitteln, wie viele gelb und wie viele rot sind? Die folgenden Diagramme wurden von Schülerinnen und Schülern eines 3. Schuljahres (bei unterschiedlichen Verteilungen der Kugeln) ermittelt:

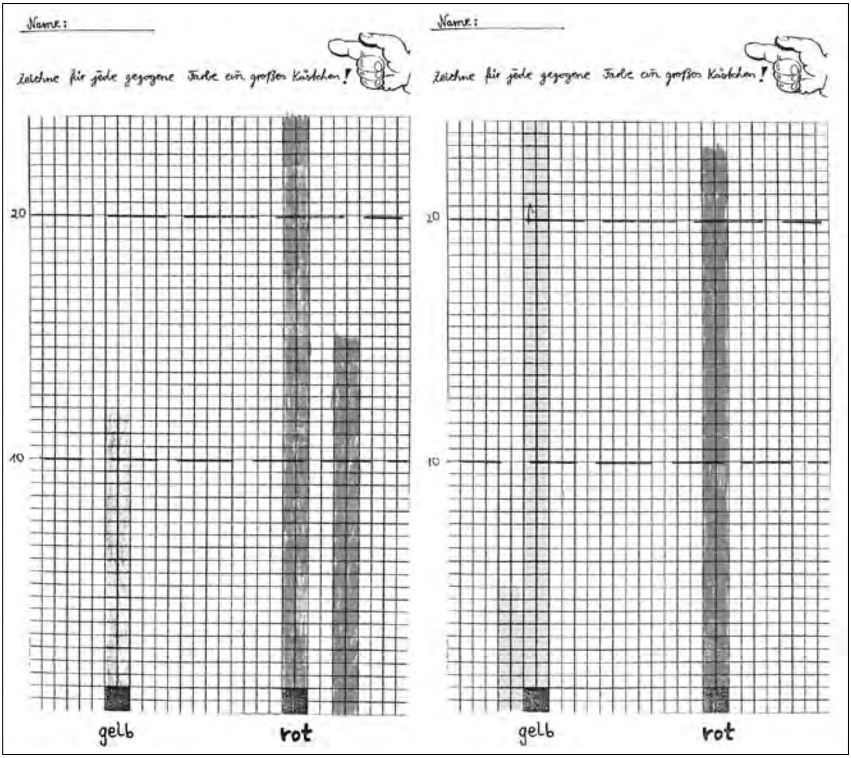


Abb. 9: Interpretation von Blockdiagrammen im Hinblick auf die Verteilung der Kugeln in einer Urne

Ein weiteres Beispiel: Bei Spielen stellt sich häufig die Frage, ob ihre Regeln gerecht sind, ob sie also gleiche Gewinnchancen bieten. Zum Darstellen von Vermutungen im Hinblick darauf kann die Wahrscheinlichkeitsskala (vgl. Abb. 7, S. 155) herangezogen werden; dabei äußern die Kinder ihre Vermutungen durch Einstellen des Läufers. Im folgenden Beispiel aus dem 3. Schuljahr sollten jedoch mathematische Modellierungen vorgenommen und die Modelle überprüft werden.

<table>
<tr><th colspan="3">Aufgabe: Experimente mit Würfeln (vgl. Käpnick 2005a, S. 134)</th></tr>
<tr><td colspan="3">a) Stell dir vor: du spielst mit einem anderen Kind ein Würfelspiel. Ihr würfelt abwechselnd mit einem Würfel. Du möchtest möglichst viele Punkte erreichen und kannst zwischen folgenden Regeln wählen:</td></tr>
<tr><td>Regel 1</td><td>Regel 2</td><td>Regel 3</td></tr>
<tr><td>Du erhältst einen Punkt, wenn deine Zahl gerade ist.
Bei einer ungeraden Zahl erhält dein Partner einen Punkt.</td><td>Du erhältst einen Punkt, wenn deine Zahl durch 3 teilbar ist.
Ansonsten erhält dein Partner den Punkt.</td><td>Du erhältst einen Punkt, wenn deine Zahl größer als 2 ist.
Wenn nicht, erhält dein Partner den Punkt.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Welche Regel würdest du wählen? Begründe deine Meinung!

b) Lena hat dreimal mit Ben gespielt und nacheinander die Regeln angewendet. Die Ergebnisse haben die Kinder auf Strichlisten notiert:</td></tr>
<tr><td>Spiel nach Regel 1</td><td>Spiel nach Regel 2</td><td>Spiel nach Regel 3</td></tr>
<tr><td>Lena ||||| ||||
Ben ||||| ||||| ||</td><td>Lena ||||| ||||| ||||
Ben ||||| |</td><td>Lena ||||| ||||| |||||
Ben ||||</td></tr>
<tr><td colspan="3">Werte aus: – Wie oft haben die Kinder jeweils gewürfelt?
– Wer hat die einzelnen Spiele gewonnen?

c) Testet nun mit einem Partner die Spielregeln.
Würfelt jeweils 20-mal und tragt eure Ergebnisse in Tabellen ein.
Vergleicht eure Ergebnisse mit euren Vermutungen und mit Lenas Ergebnissen.
Welche der drei Regeln ist gerecht?</td></tr>
</table>

Die Kinder können bei diesem Würfelexperiment die für die jeweilige Regel günstigen Ausgänge aufgrund von kombinatorischen Überlegungen bestimmen. Dabei werden sie erkennen, dass im Teil a) bei jeder Regel zur Einschätzung der Gewinnchancen jeweils sowohl die eigenen als auch die Möglichkeiten des Spielpartners eingeschätzt werden müssen. Bei der Auswertung der Teilaufgaben b) und c) sollten zum einen der tatsächliche Ausgang des Spieles und zum anderen die bei die jeweiligen Regel zu erwartende Gewinnchance diskutiert werden, z. B.: Warum hat Ben beim 1. Spiel gewonnen und im 2. Spiel verloren? Hat der Spieler mit den besseren Gewinnchancen auch tatsächlich gewonnen? Warum ist das so?

Beim Einsatz dieser Aufgaben in Schulen zeigte sich, dass die Kinder solche Aufgabenformate nur bewältigen können, wenn sie im Laufe der Schuljahre sukzessive zu ihnen hingeführt werden. Insbesondere müssen sie die Gelegenheit gehabt haben, sowohl Experimente mit Würfeln immer wieder zu beobachten und zu beschreiben als auch deren Ergebnisse vorherzusagen und zu erklären. Eine Kompetenz wie *Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten einschätzen* kann von den Kindern nicht erworben werden, wenn solche Aufgaben nur gelegentlich eingestreut werden.

8.4 Verbindungen zu anderen Standards

Mit Blick auf den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe haben Biehler /Hartung (2006, S. 51) darauf hingewiesen, dass der hier angesprochene Themenbereich verschiedene mathematische Sachgebiete miteinander verbindet. Bereits angesprochen wurden die wechselseitigen Bezüge zwischen Darstellungen von Zahlen und Größen einerseits und Daten andererseits. Aus dem Kompetenzbereich *Zahlen und Operationen* sind zudem die Standards aus dem Bereich In *Kontexten rechnen* wichtig (u. a. „Sachaufgaben lösen“, „das Ergebnis auf Plausibilität prüfen“, „Sachaufgaben systematisch variieren“). Sollen die Gewinnchancen auf der Basis des Laplace'schen Wahrscheinlichkeitsbegriffs eingeschätzt werden, so muss die Anzahl aller möglichen Fälle berechnet werden („einfache kombinatorische Aufgaben durch Probieren bzw. systematisches Vorgehen lösen“).

Von besonderem Interesse sind jedoch Fragestellungen, bei denen die Möglichkeit besteht, gleichzeitig Denkentwicklungen in unterschiedlichen inhaltlichen Bereichen anzuregen. So wurde in Kapitel 8.3, S. 153, angesprochen, wie sich Einsichten über geometrische Eigenschaften von Figuren oder Körpern und Wahrscheinlichkeitsaussagen, die sich aus der geometrischen Struktur dieser Figuren und Körper ergeben, wechselseitig ergänzen und beeinflussen können. Ein anderes Beispiel für diese wechselseitige Beeinflussung der Denkentwicklung finden wir beim *Strukturieren* der Daten, denn hier sind funktionale Beziehungen von Bedeutung (vgl. „funktionale Beziehungen in Sachsituationen erkennen, sprachlich beschreiben und entsprechende Aufgaben lösen“). So muss bei Block- und Streckendiagrammen festgelegt werden, welche Einheiten bei der Darstellung der Einzelergebnisse verwendet werden sollen. Damit ist die Frage des *Maßstabs* angesprochen. In Abb. 6 beispielsweise repräsentiert ein gefärbtes Kästchen ein Würfelergebnis, 10 Kästchen stehen für 10 solcher Ergebnisse usw.; aber es ist natürlich nicht zwingend, für das Einzelergebnis *ein* Kästchen zu färben. Wie würden sich die Diagramme ändern, wenn man zwei (oder ein halbes) Kästchen färbt? Noch deutlicher stellt sich diese Frage bei der Verwendung von Streckendiagrammen: Welche Strecke wird als Einheit gewählt? Auf der anderen Seite aber ist es gerade typisch für die Ergebnisse von Zufallsexperimenten, dass die Ausfälle eben *nicht* proportional sind, z. B. bei doppelt so häufigem Würfeln bekommt man (meist) nicht auch doppelt so oft eine bestimmte Augenzahl. Gerade bei diesen Untersuchungen mit Häufigkeiten und ihren Darstellungen in Diagrammen ergeben sich zwangsläufig Beispiele *und Gegenbeispiele* für proportionale Beziehungen; sie sind deshalb ein geeignetes Erkundungsfeld zur Entwicklung von Kompetenzen im Bereich der Teilkompetenz „funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen".

Das Umgehen mit Daten und Häufigkeiten ist ein ideales Betätigungsfeld zur Entwicklung von allgemeinen Kompetenzen im Bereich *Darstellen*. Verschiedene Darstellungsformen werden erprobt, ineinander übertragen, miteinander verglichen und bewertet; dieser Aspekt wurde insbesondere in Kapitel 8.2, S. 143 f., und im Zusammenhang mit Abb. 4 angesprochen. Des Weiteren finden wir bei allen Aufgaben zum Experimentieren mit dem Zufall Bezüge zum *Problemlösen* („systematisches Probieren", „Zusammenhänge erkennen, nutzen und auf ähnliche Sachverhalte übertragen") und zum *Modellieren* (Ergebnisse von Zufallsexperimente können nur erfasst und verstanden werden, wenn die als wesentlich angesehenen Daten und ihre Beziehungen untereinander mit mathematischen Mitteln beschrieben werden.). Dass beim Durchführen von Zufallsexperimenten und dem anschließenden Einschätzen der Gewinnchancen in ganz besonderem Maße auch Kompetenzen aus dem Bereich des *Kommunizierens* („Mathematische Fachbegriffe und Zeichen sachgerecht anwenden") und des *Argumentierens* („Mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln", „Begründungen suchen und nachvollziehen") gefordert sind, muss nicht weiter erläutert werden.

9 Computereinsatz im Mathematikunterricht

Günter Krauthausen/Jens Holger Lorenz

9.1 Vorbemerkungen

Unter welchen Rahmenbedingungen (z.B. Zeit, didaktischer Ort, organisatorischer Kontext), wie und womit lässt sich durch den Computereinsatz ein Mathematiklernen im Sinne der KMK-Bildungsstandards unterstützen, bei dem

- die Entwicklung inhaltlicher *und* allgemeiner Kompetenzen
- fachlich,
- fachdidaktisch,
- pädagogisch,
- sachgerecht und effektiv ermöglicht wird?

Dies wird unsere Fragestellung im Folgenden sein. Wir gehen dabei von gewissen Vorannahmen aus und beschreiben diese als Idealzustand. Je mehr sich die tatsächliche Situation vor Ort daran annähert, umso unpro-blematischer dürfte ein sinnvoller unterrichtlicher Einsatz des Computers sein:

a) Technisch angemessene Ausstattung
Es müssen nicht immer die neuesten Computermodelle sein, aber sie sollten, gemessen an den beabsichtigten Anwendungen insgesamt stabil laufen und auch nicht nur die Minimalerfordernisse (Speicher, Geschwindigkeit) erfüllen. Des Weiteren sollte eine funktionstüchtige und schnelle Internet-Verbindung existieren (ohne lange Wartezeiten beim Seitenaufruf und -aufbau).

b) Qualitativ gute Programme und Anwendungen
Die Qualitätsansprüche beziehen sich zu allererst auf (fach-)didaktische Gütekriterien (z.B.: Handelt es sich um mathematisch gehaltvolle Aufgaben oder Problemstellungen?). Dann sollten die Anwendungen kindgerecht in der Handhabung und Bedienung sein (was einführende kurze Erklärungen der Lehrerin nicht ausschließt).

c) Fachlich und fachdidaktisch qualifizierte Lehrpersonen
Solange die Technik in diesem Sinne robust und benutzerfreundlich ist, können sich die Lehrkräfte auf ihre spezifische Expertise als Organisatoren von

Lernprozessen konzentrieren. Um die Qualität von Anwendungen oder Programmen sowie den Gehalt von Problemstellungen sachgerecht einschätzen und die Aktivitätsphasen am Computer auch sinnvoll in den Unterricht integrieren zu können, bedarf es fachlicher und fachdidaktischer Souveränität.

Was der Computer nicht ist, und was er sein kann

- *Der Computer ist kein Zauberstab*, mit dessen Hilfe sich pädagogische Alltagsprobleme des Lehrens und Lernens gleichsam von alleine erledigen würden. Selbst der Einsatz der besten Software oder Internet-Angebote bedarf sorgfältiger didaktischer Überlegungen und Entscheidungen.
- *Der Computer ist kein Lernautomat.* Die Tatsache, dass Inhalte in elektronischer Form angeboten werden, ist kein Garant dafür, dass das Lernen einfacher, effektiver, nachhaltiger oder schneller erfolgen würde als bei einem computerfreien Lernen. Die Maschine selbst ist die sprichwörtliche Inkarnation eines logischen, algorithmischen Vorgehens. Menschliches Lernen aber geht nicht algorithmisch vor und ist auch so nicht zu kontrollieren oder zu determinieren. Der „menschliche Computer", unser Gehirn, ist viel eher eine „Assoziationsmaschine".
- *Der Computer ist kein Ersatz für kompetente Lehrerinnen.* Zwar lassen sich gewisse Dinge an ihn delegieren, aber die diesbezüglichen Möglichkeiten und Grenzen gilt es sorgsam abzuwägen.
- *Der Computer ist keine Doubletten-Maschine.* Sein didaktischer Mehrwert bleibt in engen Grenzen, wenn er lediglich als Lieferant elektronischer Arbeitsblätter dient, deren inhaltliche oder fachdidaktische Qualität u. U. nicht höher ist als ihre papierene Entsprechungen aus Schulbüchern, Arbeitsheften oder Fördermaterialien.
- *Der Computer ist kein Motivationsautomat* – auch wenn es so aussehen kann: In einem zufällig mitgehörten Gespräch zwischen einer Mutter und der Verkäuferin in einer Buchhandlung wies die Mutter alle angebotenen Printmedien zur Unterstützung ihres Sprösslings in Mathematik mit den Worten zurück: „Mit einem Buch brauche ich ihm gar nicht erst zu kommen. Es muss eine Software sein, er sitzt nur am Computer."

Natürlich kann der Computer– wie übrigens alle anderen Medien auch – kontraproduktiv benutzt werden. Ein durchgängiger Auftrag der Grundschule wäre es daher, die Lernenden bei alternativen, nämlich sachgerechten und sinnvollen Mediennutzungsmöglichkeiten zu unterstützen und entsprechend geeignete Angebote bereitzustellen. Wie könnten diese aussehen, was kann der Computer also bei sachgerechtem Einsatz durchaus (u. a.) sein?

- *Der Computer kann ein sinnvolles Ergänzungs-/Unterstützungsmedium sein.* Als solcher kann er fachdidaktisch sinnvoll fördern und fordern.
- *Der Computer kann ein Innovationsmedium sein.* Damit meinen wir nicht den Neuigkeitseffekt. Vielmehr kann der Computer zu neuartigen Aufgabenstellungen, Anforderungen oder Möglichkeiten führen, die ansonsten, also ohne den Computer kaum, nur schwer oder gar nicht zu ermöglichen wären (s. u.).
- *Der Computer kann ein Explorationsmedium sein.* Insbesondere seine Spezialität, die Verarbeitung zeitbasierter Daten, eröffnet Möglichkeiten für Was-wäre-wenn-Situationen, für Simulationen im Bereich der Arithmetik, der Geometrie und des Sachrechnens (s. u.). Hier bekommt das Postulat des „spielerischen Lernens“ einen eigenen Klang, der übrigens genau dem Charakter des Faches entspricht: Die Ermöglichung und Nutzung von „Spielräumen“ für den explorierenden Umgang mit Zahlen und Formen, Strukturen, Mustern und ganz allgemein Phänomenen – all dies kann als konstituierend für Mathematik als Wissenschaft wie auch für Mathematikunterricht verstanden werden (vgl. Kap. 4: Muster und Strukturen).
- *Der Computer kann ein Dokumentationsmedium sein.* Wenn der Prozesscharakter der Mathematik und des Mathematiktreibens im Unterricht ernst genommen wird, dann reicht es nicht aus, die als solche flüchtigen Prozesse auf ihre jeweils hervor gebrachten Produkte (z. B. Rechenergebnisse) zu reduzieren. Vielmehr bedarf es einer Dokumentation der (Irr-)Wege, denn *diese* sind wertvolles Material für wünschenswertes Lernen, insbesondere für die Förderung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen (s. u.).

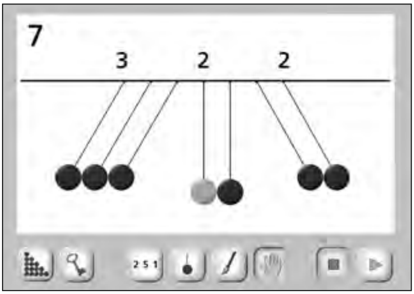
Artenvielfalt

Wir geben zunächst einen allgemeinen Überblick, um zu zeigen, dass „Computereinsatz“ mehr sein kann als nur die Nutzung von klassischen Übeprogrammen. Danach folgen konkrete Beispiele aus dieser Auflistung.

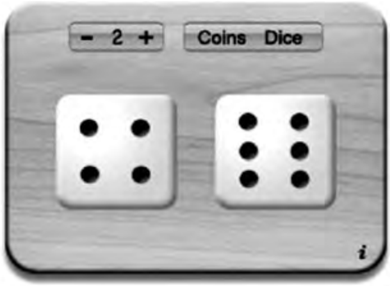
- **Lern- und Übungsprogramme: „Lernprogramme“** meint meist Übungsprogramme. Hier besteht ein deutlicher Trend der „CD zum Buch“. Gehörte bislang zu jedem Schulbuch auch standardmäßig ein Arbeits- oder Übungsheft mit zusätzlichen Übungsangeboten, so ist es nun die CD-ROM (vgl. die Nöte der oben erwähnten Mutter in der Buchhandlung). Die Anbieter entsprechen dieser Nachfrage, und so finden analoge Seiten aus Schulbuch und Arbeitsheft Eingang in diese elektronischen Angebote. Sie dienen im Wesentlichen einer quantitativen Ausweitung des Angebots. Mehr sollte man aber auch nicht hineinprojizieren. Als Lieferant für zusätzliches Material zur Übung oder Wiederholung (von zumindest in Ansätzen Verstandenem) mag es hier und da nützlich sein.

Leider bleibt aber festzustellen, dass die Aussage, mit der Radatz et al. (1999) den Zustand der Übungsprogramme beschrieben haben, auch heute noch nicht überholt ist: „Noch immer sind über 97 % aller angebotenen Softwareprodukte nichts anderes als elektronische Arbeitsblätter, die „graue Päckchen“ und „bunte Hunde“ in überquellenden Animationen verstecken und so das angeblich so leidige Geschäft des Übens interessanter gestalten wollen.“ (Radatz et al. 1999, S. 32; vgl. auch Krauthausen/Scherer 2007, S. 273–298).

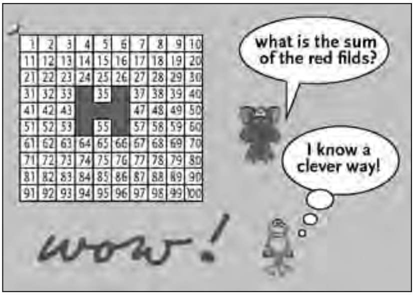
- **Werkzeugprogramme:** Texteditoren, Grafik- oder Tabellenkalkulationsprogramme können als Werkzeuge zur Durchführung oder Darstellung mathematischer Aktivitäten genutzt werden und dadurch die Kommunikation sowie weitere Aktivitäten anregen.
- **Mathematische Spiele:** Nahezu alles, was man aus Kaufhäusern und Spielwarengeschäften im weitesten Sinne als „Denkspiele“ kennt, ist inzwischen auch für den Computer erhältlich. Im Internet finden sich zahlreiche Angebote (z. B. unter den Suchbegriffen: Denkspiele, Knobeleien, Streichholzspiele u. Ä.).
- **Simulationen:** Simulationen ermöglichen die Auseinandersetzung mit sogenannten „Was-wäre-wenn“-Situationen. Obwohl der Computer vielleicht gerade an dieser Stelle, aufgrund medienspezifischer Vorteile, besonders hilfreich sein kann, werden Simulationen im Mathematikunterricht der Grundschule noch vergleichsweise selten genutzt. Dabei können bereits sehr einfache Situationen, wie z. B. das bekannte Newton-Pendel, eine Fülle mathematischer Strukturen enthalten und zu gehaltvollen Aktivitäten führen (vgl. Krauthausen 1995). Möglichkeiten bestehen grundsätzlich sowohl in arithmetischen, geometrischen und sachrechnerischen Kontexten.



- **Konstruktionswerkzeuge:** Mit dem Computer lassen sich mathematische Objekte konstruieren. Im Geometrie-Curriculum wird traditionell mit Würfelgebäuden gearbeitet. Da es dabei u. a. auch sehr stark um den Umgang mit zeitbasierten Daten geht sowie um Aktivitäten, die im konkreten Vollzug schnell aufwendig oder schwer handhabbar werden (man denke an die Stabilität und den Materialbedarf größerer Konfigurationen), kann hier eine computergestützte Darstellung und Manipulation die technische Handhabung stark vereinfachen und damit den Blick auf die zentralen Inhaltsaspekte fokussieren.



- **Hilfsprogramme:** Hierunter fassen wir kleine Applikationen, die sich vor allem im Internet finden lassen, z. B. zur Generierung umfangreicher Würfel- oder Münzwurfergebnisse, die bei der Thematisierung von Häufigkeitsverteilungen und im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen vonnöten sind. Bei der Thematisierung von Größen muss nicht nur ausgiebig gemessen werden; die Zusammenhänge zwischen Größen zu betrachten, ist ebenfalls eine wesentliche Aktivität, um Muster zu erkennen (z. B. Proportionalität/Antiproportionalität). Dabei können Größen-Konverter die (in diesem Zusammenhang weniger zentrale) Rechenarbeit übernehmen, um den Blick auf die Muster und Phänomene konzentrieren zu können. Auch das in manchen Schulbüchern praktizierte „Kalenderrechnen“ kann durch elektronische und vielfältig anzupassende Online-Kalender unterstützt werden.
- **Suchmaschinen:** *Google* & Co. bzw. speziell für Grundschulkinder *Blinde-Kuh.de* können die gezielte Suche nach Sachinformationen unterstützen, die für Sachtexte oder Projekte im Rahmen des Sachrechnens erforderlich sind.



- **Smartboards:** Diese „elektronische Wandtafel“ gehört, anders als in anderen Ländern, noch nicht zum Alltag in deutschen Grundschulen. Aber hin und wieder ist sie doch schon anzutreffen. Smartboards (mit der entsprechenden Software) eröffnen nicht nur für die Präsentation vor der Klasse (als Demonstrationsmittel für die Lehrerin, die Kinder, oder bei einer Rechenkonferenz) innovative Möglichkeiten: Mit einem Spezialstift kann an dieser Wandtafel wie auf einem riesigen Computerbildschirm geschrieben und gezeichnet werden. Der Clou sind aber Werkzeugleisten, über die sich Standarddarstellungen wie Zahlenstrahl, Rechenstrich, Hundertertafel/-feld, Ziffernkärtchen, diverse Punktfelder usw. sehr flexibel auf die Arbeitsfläche ziehen und frei skalieren lassen. Ferner gibt es zahlreiche Möglichkeiten des Färbens, Drehens, Kennzeichnens, sodass sich eine höchst flexible, immer übersichtlich saubere und flugs zu verändernde Arbeitsfläche ergibt.

9.2 Möglichkeiten zur Unterstützung bei der Kompetenzförderung

Im Folgenden wollen wir *exemplarisch* andeuten, wie der Computer die unterrichtliche Förderung sowohl der inhaltsbezogenen wie auch der allgemeinen mathematischen Kompetenzen konkret unterstützen kann. Ein bestimmtes Beispiel kann durchaus im Hinblick auf mehrere Kompetenzen förderlich sein – auch wenn es hier nur an einer Stelle genannt wird. In allen Fällen ist zu berücksichtigen, dass nicht der Computer *per se* schon die erwünschten Wirkungen liefert. Wie bei allen anderen unterrichtlichen Angeboten kommt es stets auch auf den jeweiligen Verwendungszusammenhang, die konkrete Lerngruppe und Lehrkraft (mit ihren jeweiligen Voraussetzungen und Rahmenbedingungen), die Lernziele usw. an, ob ein Einsatz des Computers sachgerecht und zielführend oder auch nur vom Aufwand her zu rechtfertigen ist. Die Verantwortlichkeit der Lehrkräfte als Organisatoren von Lernprozessen ist also nach wie vor vorhanden – und sogar noch eine größere.

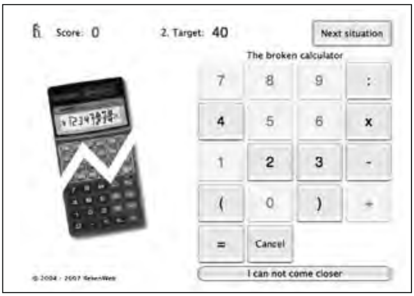
Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen

■ Zahlen und Operationen

Hier drängt sich als Erstes das übergroße Angebot der sogenannten Lern- und Übungsprogramme (s. o.) auf. Vorausgesetzt, es liegt eine Passung zwischen einer Software und den im Unterricht kennengelernten Darstellungsformen und Aufgabenarten vor, dann kann eine (didaktisch gute) Übungssequenz ausgewählte Ziele erfüllen helfen. Zu prüfen wäre bei solchen Programmen aber, ob sie die *inhaltlichen* Strukturen in den Vordergrund stellen (was keine Absage an ein grafisch ästhetisches Layout bedeutet) und weniger die allzu oft dominierende „Rahmenhandlung“. Außerdem wäre zu prüfen, ob die jeweilige Software auch den erforderlichen oder gewünschten Übungstypen (vgl. Wittmann 1992) entspricht: Hat ein Kind noch systematische Verstehensprobleme bzgl. der Rechenoperationen (mithin in der Grundlegungsphase), dann ist eine Software wie das *Blitzrechnen* (Krauthausen 1998a) nur bedingt sinnvoll, da hier erklärtermaßen der Schwerpunkt in der Automatisierung liegt. Geht es hingegen um die Steigerung der Fertigkeit, Sicherheit und Schnelligkeit beim Kopfrechnen, dann ist das erwähnte Trainingsprogramm eines, das auf einem ausgewiesenen und anerkannten fachdidaktischen Konzept beruht. Insgesamt gelten aber beim derzeitigen Marktangebot aus der Kategorie „Lern- und Übungssoftware“ die o.g. Einschränkungen, dass das Gros trotz aufwändiger Aufmachung immer noch ein stark reduktionistisches und oftmals überholtes Lern- und Übungsverständnis repräsentiert.

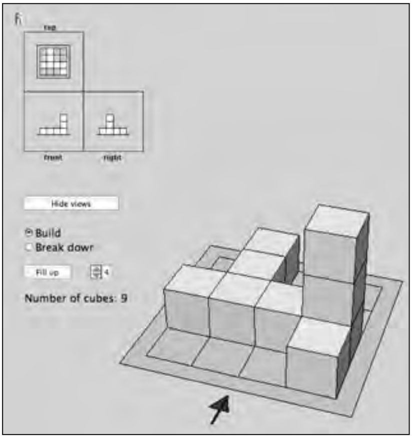
Daher sollte man sich eher nach anderen Optionen umschauen, die im Bereich der Zahlen und Operationen sinnvoll sein können. SPIEGEL (1988) hat in seinem Aufsatz über einen sinnvollen Taschenrechnereinsatz u. a. die Übungsform eines „defekten Taschenrechners“ vorgeschlagen. Bei den hier mög-lichen Fragestellungen geht es darum, unter geschickter Kombination der Ziffern- und Operationstasten vorgegebene Zielzahlen herzustellen; allerdings stehen dazu nicht alle Ziffern- oder Operationstasten zur Verfügung, was die Sache erheblich erschweren, zumindest aber die offensichtlichsten Wege verwehren kann (vgl. auch HOFFMANN/SPIEGEL 2006a/b). Zwar kann man sich bei einem konkreten Taschenrechner gewisse Tasten *defekt vorstellen*, schöner und realistischer ist es aber, wenn sie tatsächlich *defekt sind*. Hierzu gibt es eine Realisierung im Rahmen des *Rekenweb* (FREUDENTHAL instituut 1999-2007). Hier finden sich zahlreiche kleine Applikationen zu allen möglichen Inhaltskontexten (am wenigsten auf der deutschen Sprachversion, deutlich mehr auf der englischen und noch mehr auf der niederländischen Sprachversion). Da die Angebote meistens für sich selbst sprechen oder sich dem Benutzer durch Ausprobieren schnell erschließen, ist die sprachliche Hürde eher nebensächlich (ggf. kann die Lehrerin den Kindern die Funktionsweise kurz erklären).

Broken Calculator simuliert einen defekten Taschenrechner: Im Beispiel der Abbildung geht es darum, die Zielzahl 40 herzustellen, wobei aber neben der Ergebnistaste (Gleichheitszeichen) nur die Zifferntasten 2, 3 und 4, die Operationstasten für die Division, die Multiplikation und die Subtraktion sowie die Klammerntasten funktionstüchtig sind. So lassen sich beispielsweise das Verständnis der Grundrechenarten und ihre Zusammenhänge in den Blick nehmen sowie Grundaufgaben des Kopfrechnens üben (vgl. KMK 2005, S. 9). Nicht nur die Frage, wer am nächsten an die Zielzahl gelangt oder sie genau trifft, ist schon eine spannende Aktivität. Es lässt sich auch untersuchen, ob und welche alternativen Wege es zur Zielzahl gibt. Wer findet noch einen kürzeren oder einen längeren Weg?

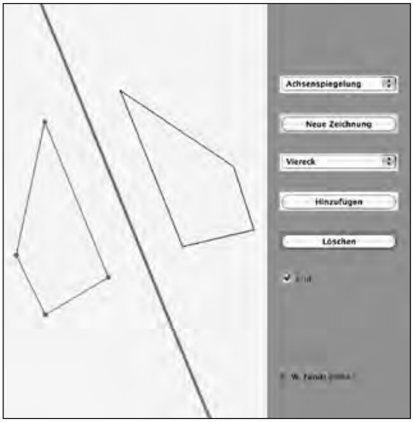


■ **Raum und Form**

Die Bildungsstandards (KMK 2005, S. 10) beschreiben zur Orientierung im Raum u. a. Aktivitäten mit zwei- und dreidimensionalen Darstellungen von Würfelgebäuden. Selbstverständlich sollte dabei sein, dass die Kinder ausgiebig *reale* Holzwürfel in die Hand nehmen und dabei Erfahrungen zum Bauen und Betrachten machen. Eine *virtuelle* Variante dieser Lernumgebung kann aber als sinnvolle Ergänzung verstanden werden, zumal sich hier die spezifischen Stärken des Computers nutzen lassen. Ein Beispiel sind die acht *Applets* im bereits erwähnten *Rekenweb* (s. Abb.): Mit einfachen Mausklicks lassen sich kleine Einheitswürfel zu komplexen Gebäuden zusammenfügen, z. B. beim freien Bauen oder beim Bauen nach Vorlage, wobei unterschiedliche Vorgaben (Grundriss, Aufriss, Seitenriss, Anzahl erlaubter Würfel) in unterschiedlichen Kombinationen und Aufgabenstellungen genutzt werden können. Die Würfelgebäude lassen sich mit der Maus um alle drei Raumachsen frei drehen und so von allen gewünschten Seiten betrachten. Im Zusammenwirken mit den drei Riss-Darstellungen (s. u.) lassen sich damit sehr schöne Untersuchungen anstellen und z. B. das Lesen von zwei- und dreidimensionalen Darstellungen üben. Auch mit der Software *Bauwas* konnten in der Vergangenheit gute Erfahrungen auch in der Grundschule gewonnen werden.

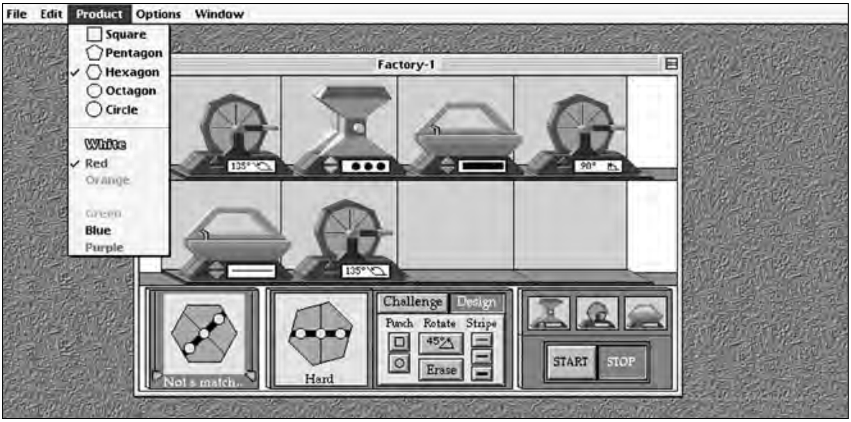


Ein weiteres Beispiel ist das Falten mit Papier, seien es die klassischen Würfelnetze oder freie Figuren wie Papierflieger oder die ganze Palette des Origami. Unter den entsprechenden Suchbegriffen findet man Internetseiten mit Faltanleitungen, die das Lesen solcher Pläne fördern, zum Nachbauen ermuntern und auch anregen können, eigene Faltanleitungen zu zeichnen. Beim Nachdenken über die nötigen Zwischenstadien und beim Zu-Papier-bringen der Schritte werden geometrische Kompetenzen in hohem Maße gefördert und gefordert. Das Internet hält auch animierte Faltanleitungen bereit, bei denen alle Faltschritte entweder mittels Video oder Grafik-Animation dokumentiert sind. Und oft lassen sich die Faltobjekte auch wieder zur besseren Betrachtung im Raum drehen.



Digitale Technik erlaubt es heute auch bereits Grundschulkindern, (animierte) Faltanleitungen selbst herzustellen, wobei geometrisches Denken, Reflexions- und Planungsfähigkeit sowie strategisches Vorgehen gefordert sind: Man kann die einzelnen Faltzustände mit einem digitalen Fotoapparat aufnehmen. Programme wie *iStopMotion* oder vergleichbare einfache, schon von Kindern zu bedienende Animationsprogramme, machen es möglich, „dynamische Faltplakate" (vgl. Wollring 2000) zu entwickeln, die den Faltvorgang in seinem Ablauf beliebig auflösend und als Animationsfilm dokumentieren (vgl. 9.2, Argumentieren, S. 178 f.). Die Frage der zu wählenden „Auflösung" ist selbst bereits wieder Reflektieren über Geometrie und geometrische Konstruktionsabläufe.

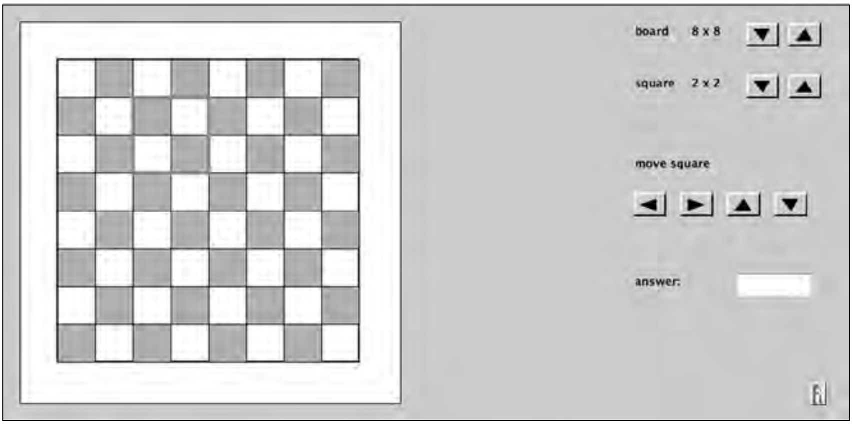
Klassische Zeichenprogramme, die es auch in einfacher Form für jüngere Kinder gibt, lassen sich nutzen um beispielsweise Symmetrien zu thematisieren. Die Option des Spiegelns (meistens jedoch nur an vertikalen und horizontalen Achsen) enthält nahezu jedes dieser Programme, ebenso das Drehen (um bestimmte Werte oder frei). Damit lassen sich bereits einfache Betrachtungen zu Kongruenzabbildungen durchführen, ohne dass die noch nicht hinreichend ausgebildete Zeichen- und Konstruktionsfähigkeit behindert wird. Mit einfach herzustellenden Grundfiguren lassen sich des Weiteren Muster entwickeln und fortsetzen. Im Internet findet man auch kleine Applikationen, mit denen sich Drehungen, Punktspiegelungen, Achsenspiegelungen und Verschiebungen durchführen lassen. Ohne dass bereits die Voraussetzungen der formalen Konstruktion vorhanden sein müssen, können hier bereits einfache, dynamisch zu handhabende Phänomene qualitativ untersucht werden.
Ein weiteres Beispiel bietet die Software *Factory* (Sunburst/USA; vgl. Krauthausen 2003): Sie basiert auf der Grundidee einer Fertigungsstraße, die mit hintereinander zu schaltenden Maschinen bestückt ist (vgl. Abb. S. 171). Diese Maschinen können vorgegebene Grundformen (Quadrat, Fünfeck, Sechseck, Achteck, Kreis) bearbeiten. Drei verschiedene Maschinen stehen zur Verfügung, die sich jeweils unterschiedlich konfigurieren lassen: Die Drehmaschine dreht die Form um ihren Mittelpunkt um einstellbare Gradzahlen; die Stanzmaschine stanzt mittig/waagerecht Löcher in die Grundform: runde oder quadratische, wahlweise eines, zwei oder drei; die Strichmaschine zeichnet mittig einen waagerechten Strich (dünn, mittel oder dick).



Eine der prinzipiellen Aufgabentypen, die sich mit *Factory* bearbeiten lassen, besteht nun darin, für eine vorgegebene Form (s. unterer Teil der Abb. im Bereich „Hard") eine adäquate Fertigungsstraße zu bauen, sprich: die notwendigen Maschinen a) in der korrekten Reihenfolge und b) mit der richtigen Detaileinstellung (Drehwinkel, Strichstärke, Stanzvorgabe) zu konfigurieren. Die hier gestellten Anforderungen sind eine hervorragende Schulung der Raumanschauung, insbesondere des mentalen Operierens. Die Software erlaubt sehr vielfältige und gehaltvolle Problemstellungen auf allen Anspruchsniveaus. Dies wäre ohne den Computer kaum oder nur mit relativ großem Aufwand zu realisieren (vgl. CARNIEL et al. 2002).

■ Muster und Strukturen

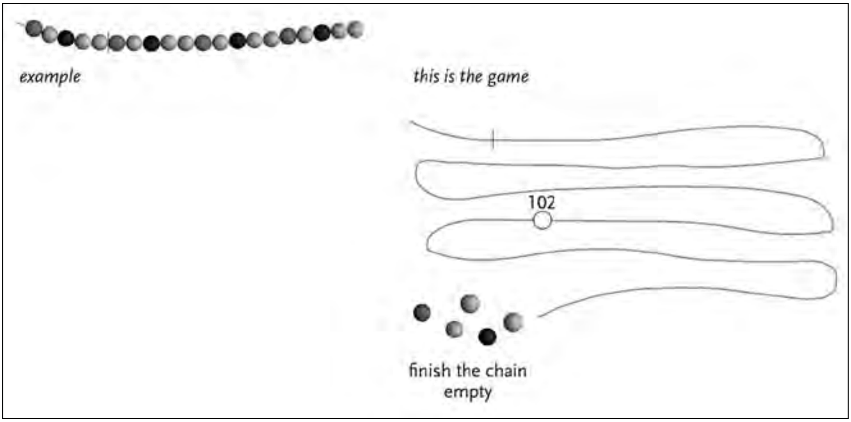
Das Identifizieren, Beschreiben und Darstellen von Regelhaftigkeiten, Mustern und Strukturen, lässt sich in nahezu allen thematischen Zusammenhängen fördern, seien sie arithmetischer, geometrischer oder sachrechnerischer Art. Ein experimentelles Vorgehen ist dazu naheliegend, denn zunächst einmal muss eine gewisse Anzahl von „Fällen" produziert werden, an denen sich Muster entdecken lassen. Die Herstellung als solche, sei es das Ausrechnen gleichartiger Aufgaben oder das Zeichnen diverser Kombinationsmöglichkeiten, kann für die Kinder zu einer zeitraubenden und anstrengenden Angelegenheit werden. Die Anstrengungsbereitschaft und Ausdauer sollte aber wenn möglich auf den Kern des Interesses, ein zu entdeckendes Muster, gerichtet werden und sich nicht bereits in der Vorbereitungsphase erschöpfen. Die *in solchen Fällen* dann sekundäre Tätigkeit des Ausrechnens, Zeichnens oder allgemein Herstellens von Untersuchungsmaterial kann sinnvollerweise an den Computer delegiert werden. Langsamer lernende Kinder würden ansonsten vor lauter Vorarbeit erst gar nicht zur eigentlich interessierenden



Problemstellung vordringen. Wer aber bei den Grundfertigkeiten noch nicht so sicher ist, muss keineswegs auch ein schwacher Problemlöser oder „Muster"-Schüler sein!

Wie viele Quadrate (beliebiger Größe) kann man insgesamt auf dem Schachbrett sehen? Wie sieht das bei kleineren oder größeren Brettern aus? (vgl. KRAUTHAUSEN 1998b, S. 143 f.) Die einfache Bildschirmanimation (aus: *Rekenweb*) ermöglicht eine experimentelle Annäherung an die zugrundeliegende Struktur: Über intuitiv zu bedienende Schalter lassen sich die Größe des Bretts *(board)* sowie der quadratischen Schablonen zum Auslegen *(square)* einstellen. Jede Schablone lässt sich in vier Richtungen bewegen *(move square)*. Für jede ihrer Größen wird die zugehörige Anzahl ermittelt. Dabei können durch verschiedene Strategien des Auslegens strukturelle Eigenschaften des Systems erkannt werden. Diese sind später hilfreich, wenn der Weg der Generalisierung beschritten werden soll ($n \times n$-Brett). Erst wenn für verschiedene Schablonengrößen die Summenwerte vorliegen und zueinander in Beziehung gesetzt sind, werden auch arithmetische Muster augenfällig.

Ein weiteres Beispiel – die „Perlenkette" (*Rekenweb*) – soll zeigen, wie unaufwändig eine Lernumgebung gestaltet sein kann, ohne dadurch an Substanz- oder Strukturmangel zu leiden: Bunte Perlen sollen zu einer Kette aufgefädelt werden. Im Beispiel auf S. 173 ist zu sehen, dass sich die Farbgebung der ersten fünf Perlen (links auf der Schnur, bis vor der Startmarkierung) in der weiteren Kette stets wiederholt: Zuerst wurden zwei grüne Perlen aufgefädelt, dann die blaue, dann die letzte grüne und zum Schluss die rote. Die Aufgabenstellung lautet wie folgt: Die 102. Perle der Kette soll eine blaue sein. Welches Muster für die fünf Perlen wählst du? Durch Anklicken der fünf bunten Perlen werden diese in der entsprechenden Reihenfolge vor der Startposition aufgefädelt. Ein Klick auf *finish the chain* bewirkt, dass die Kette nun



Perle für Perle mit dem vorgegebenen Muster flugs aufgefüllt wird (hier ist der Computer ganz offensichtlich überlegen). Wurde die 102. Perle blau? Wie hast du dein Muster herausgefunden? Wie muss man ggf. das Ausgangsmuster verändern? (Ein Klick auf *empty* bietet eine neue leere Kette für weitere Versuche an.) Gibt es noch andere Möglichkeiten, um eine blaue 102. Perle zu erhalten? Wie viele insgesamt? Kannst du erklären, warum es nicht mehr geben kann?

■ Größen und Messen

Rechnen rund um den Kalender kann nicht nur spannend sein, sondern enthält zudem substanzielle Mathematik, bedingt durch die spezielle Struktur unseres Kalenders (7er-Gliederung der Woche, Tagesanzahl der Monate, Schaltjahre usw.). An welchem Wochentag wurde ich geboren? An welchem Wochentag kann ich meinen 10. Geburtstag feiern? Wann habe ich das nächste Mal an einem Sonntag Geburtstag? Wann bin ich 3333 (5555, 10 000) Tage alt? Kann man auch 100 000 Tage alt werden? Wie viele Tage lebt bislang der (zurzeit) älteste Mensch der Welt? Wann ist man 1 Million Minuten alt? Wie viel Zeit (Jahre, Monate, Tage) gehen wir (bis heute, insgesamt) in die Grundschule?

Grundlage für derartige Berechnungen ist zunächst einmal der Jahreskalender. Für das jeweils aktuelle Jahr wird er leicht zu beschaffen sein, schwieriger hingegen für zurückliegende oder noch bevorstehende Jahre. In solchen

Fällen helfen elektronische Kalender, die man vielfach im Internet finden kann. Dort lässt sich z. B. jede gewünschte Jahreszahl eingeben. Über den so möglichen Vergleich verschiedener Jahre offenbaren sich zahlreiche Muster.

Ferner findet man unter entsprechenden Suchbegriffen (Kalenderrechner, Datumsrechner o. Ä.) auch kleinere (meist kostenlose, Webbasierte oder Download-)Programme, die für spezielle Fragen hilfreiche (Kontroll-)Werkzeuge sein können, z. B.: Wie viele Tage (Werktage, Wochenendtage, insgesamt) sind zwischen zwei einzugebenden Daten vergangen?

Etwas differenzierter bei der Berechnung von Zeitspannen zwischen zwei vorgegebenen Daten (inkl. Uhrzeit) geht der Datumsrechner des ARD-Morgenmagazins vor (s. o. Abb.). Zudem rechnet er den Ergebniszeitraum jeweils noch um in die Einheiten Tage oder Stunden oder Minuten oder Sekunden. Ebenso gibt es Datumsrechner, welche die Addition/Subtraktion von Tagesanzahlen zu/von einem vorgegebenen Datum erlauben.

Innovative Möglichkeiten bietet auch die kostenlose Version von *Google Earth*, was die Thematisierung des Größebereichs Längen betrifft. Entfernungen, z. B. zwischen dem eigenen Zuhause und der Schule (Schulweg) lassen sich durch konkretes Abschreiten ermitteln. Welchen Schulweg schlägt *Google Earth* vor? Wie groß ist die hier angegebene Entfernung? Wie genau sind eigentlich unsere Messungen beim Abschreiten, und wie genau (bzw. wie überhaupt?) misst *Google Earth*? Hier wird nicht nur mathematisches Wissen (z. B. über Messgenauigkeit, Messfehler und Toleranzbereiche) aktiviert, sondern zudem sachunterrichtliches Wissen gefördert.

Für Grundschulkinder hat stets auch das besonders Kleine und das besonders Große einen speziellen Reiz. Große Entfernungen (vgl. auch Fermi-Aufgaben) lassen sich schätzen und dann mit *Google Earth* überprüfen. Wie viele Kilometer hat unsere Fahrt in den Urlaub? Wie weit ist es von A nach B – irgendwo auf der Welt? Wie oft passt mein Schulweg (entfernungsmäßig) in die letzte Urlaubsfahrt? usw. Start und Ziel solcher Berechnungen lassen sich in *Google Earth* leicht festlegen und das Ergebnis entweder als Satellitenbild oder als Karte anzeigen/ausdrucken.

■ Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit

Situationen zur Sammlung, Strukturierung, Interpretation und Darstellung von Daten können sich u.a. im Rahmen von Projekten ergeben. Ob es selbst durchgeführte kleine Untersuchungen sind (Wie viele Autos fahren an unserer Schule vorbei?) oder ob vorgefundene Tabellen, Schaubilder und Diagramme ausgewertet und interpretiert werden sollen: In diesen oder ähnlichen Fällen kann eine Tabellenkalkulation wertvolle Dienste tun. Denn oft geht es vorrangig um die sachgerechte Interpretation, um experimentelle „Was-wäre-wenn"-Situationen, aus denen Handlungen oder Schlussfolgerungen abgeleitet werden sollen. (Eine wertvolle Gelegenheit, auch die Grenzen des Computers bewusst zu machen!) Das Rechnen selbst kann in solchen Fällen eher sekundär sein und daher an den Rechner delegiert werden. Für die Planung einer Klassenfahrt beispielsweise müssen stets mehrere Parameter, Interessen und Rahmenbedingungen berücksichtigt werden. Die Finanzierung des Ganzen wird dann rasch unübersichtlich und vor allem auch sehr aufwändig, wenn alle in Erwägung gezogenen Fälle jedes Mal aufs Neue durchkalkuliert werden müssen. Mithilfe von Excel oder einer speziell für jüngere Kinder adaptierten Tabellenkalkulation können die Abhängigkeiten verschiedener Daten überlegt, Zellen mit entsprechenden Rechenvorschriften (Funktionen) belegt und übersichtliche Darstellungen erzielt werden. Sodann lassen sich Planspiele durchführen und mit ihren jeweiligen Konsequenzen durchdenken: Welches Transportmittel soll benutzt werden? Welche Rabatte können in Anspruch genommen werden? Wie korrespondiert das mit der Zeitplanung? Wie sieht es mit der Verpflegung aus? Was kosten Eintritte? Wo gibt es Alternativen oder Einsparmöglichkeiten? Usw.

Allgemeine mathematische Kompetenzen

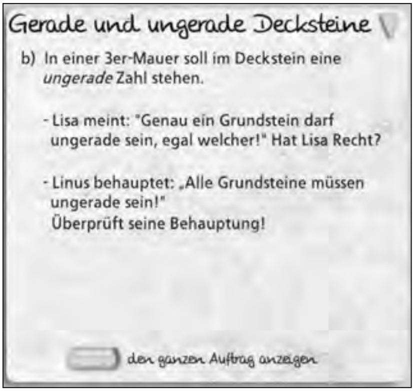
■ Problemlösen

Mathematikunterricht besteht nicht nur aus einer Abfolge geschlossener Unterrichtsreihen. Immer wieder gibt es Freiräume und Gelegenheiten, in denen sich einzelne Kinder oder Kleingruppen mit kleineren Aktivitäten befassen. In die Kategorie solcher Phasen fallen z.B. jene Aktivitäten, die auch aus der Unterhaltungs-Mathematik bekannt sind.

Man denke nur an die zahlreichen Varianten des Sudoku. Sowohl als eigenständige Software (von der kostenpflichtigen Version über Shareware bis Freeware) wie auch als Online-Variante im Internet ist das beliebte Zahlenspiel mannigfach und in den verschiedensten Ausführungen zu finden. Es gibt Programme, die den Kindern durch editierbare Werte ein Experimentieren erlauben oder die in allen Zellen die jeweils noch verfügbaren Werte anzeigen und diese Hilfen kontextsensitiv aktualisieren.

Unter Suchbegriffen wie *Denkspiele*, *Knobelecke* o. Ä. wird man schnell eine ganze Reihe von Online-Aktivitäten googeln können. Man findet Aufgabensammlungen zu Münz-, Streichholz-, Schnur-, Würfel- und Papierspielen. Allesamt kleine, intuitiv zu erfassende Aktivitäten zur Förderung der Problemlösefähigkeit. Natürlich muss man im Einzelfall prüfen, welches der Angebote besonders sinnvoll ist. Die meisten dieser Denkspiele können vom kleinen „Gehirnjoggen für zwischendurch“ bis hin zu einer ausdrücklichen Integration in eine Unterrichtsreihe ausgestaltet werden. Ein besonderer Vorteil dieser kleinen Web-Applikationen ist ihre niedrige Zugangsschwelle und vor allem die Möglichkeit für die Kinder, ohne Furcht vor Fehlern selbstständig experimentieren zu können, Lösungsstrategien zu entwickeln, Zusammenhänge zu erkennen, zu nutzen und auf ähnliche Probleme (z. B. auf andere Streichholzspiele) zu übertragen.

Zwar können viele dieser Denkspiele auch mit Bleistift/Papier oder den jeweiligen Materialien konkret bearbeitet werden, gleichwohl lassen sich auch spezifische Vorteile des Computers nutzen. So kann beobachtet werden, dass die einfache Möglichkeit des „Probehandelns“ und des einfachen Wiederherstellens von Ausgangszuständen (ähnlich wie bei der Editierfunktion einer Textverarbeitung) eher zu einem *experimentellen* Vorgehen anregt als beispielsweise eine unmittelbare Fixierung auf dem Papier. Besonders deutlich wird das bei der Aktivität „Alle Lichter an!“: Hier geht es darum, auf einem 5 × 5-Feld *alle* Lichter (Kästchen) anzuschalten. Klickt man auf ein Kästchen, geht sein Licht an (gelb) oder aus (grau) – und *ebenso* die Lichter des jeweils benachbarten rechten, linken, oberen und unteren Kästchens. Das Spiel ist prinzipiell auf Papier möglich, erfordert dann aber einen unvergleichlich hohen Zeichen- und Dokumentationsaufwand. Auf dem Bildschirm hingegen lassen sich die Zustände per Mausklick variieren und Lösungsstrategien erproben.



Problemlösen oder Mathematiktreiben hat sich auch eine in der Herstellung sehr viel aufwändigere Software auf die Fahnen (den Programm-Namen) geschrieben: Der *Zahlenforscher* (Krauthausen 2006a/b). Die erste CD dieser Reihe rankt sich um das weithin bekannte Aufgabenformat der Zahlenmauern, die weitaus mehr sein können, als ein Träger schlichter Rechenübungen oder ein nur lokales Übungsangebot. Die im Modus *Forschen* bereitgestellten Forschungsaufträge (für Kl. 2–6) waren in umfangreichen Erprobungen Gegenstand der Problemlöseprozesse von Grundschulkindern (ab 1. Kl.) bis zu Lehramtsstudierenden. Dabei hat sich immer wieder gezeigt, wie das Problemlösen auf allen Alters- und Niveaustufen gefördert werden kann. Die Vergleiche von verschiedenen Altersstufen bei der Auseinandersetzung mit ein und demselben Forschungsauftrag oder der Vergleich der Strategien über die Altersstufen deuten auf eine Reihe aufschlussreicher Erkenntnisse hin, die auch für das Problemlösen im Unterricht relevant sein könnten. Und im kleineren Rahmen können genau solche Fragen auch im Unterricht bereits thematisiert werden (Wie ist diese oder jene Gruppe vorgegangen? Können wir von den Erfahrungen einer anderen Gruppe profitieren?). Hier müssen dann Zusammenhänge erkannt, genutzt und übertragen sowie mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten angewandt werden (vgl. KMK 2005, S. 7).

Die Philosophie der *Zahlenforscher*-Software ist so gestaltet, dass nicht das „Abarbeiten" der Fragestellungen und eine schnelle Ergebnisermittlung im Vordergrund stehen, sondern durch spezifische Werkzeuge das strategische Vorgehen beim Problemlösen (inkl. der gebotenen Ausdauer) selbst zum Gegenstand bewusster Lernprozesse gemacht wird. Zum Beispiel werden die Lernenden angehalten, ein digitales Forscherheft zu führen. Dieses hat gegenüber der Papier/Bleistift-Variante den Vorteil hat, dass sich – wie in einer Textverarbeitung – das Vorgehen, die Auffälligkeiten, die Vermutungen usw. während des Forschungsprozesses *verschriftlichen* und vor allem leicht überarbeiten lassen (Hier liegen Chancen zum Im- und Export von Zielen und Kompetenzen des Sprachunterrichts!). Ein weiteres medien-spezifisches Merkmal dieses Forscherheftes besteht in der Möglichkeit, beliebige zuvor berechnete Zahlenmauern mit einem einzigen Mausklick als Illustration und Beleg an beliebige, auch nachträglich noch editierbare Stellen des Textes zu platzieren.

Kommunizieren

Solche Texte können natürlich auch mit einem handelsüblichen Text-Editor erstellt und bearbeitet werden. Entscheidend ist die, verglichen mit Papier, leichtere Möglichkeit der Textbearbeitung. Umstellungen, Einfügungen oder Streichungen sind einfach per Mausklick zu erledigen, sodass die Aufmerksamkeit primär der infrage stehenden *Sache* zugute kommen kann. Gleichzeitig ist aber auch ein ästhetisch ansprechendes Ergebnis zu erwarten. Dieses ist als solches vorzeigbar – sei es in einer Rechenkonferenz, bei einer Projektpräsentation – oder ggf. auch mit E-Mail versendbar.

Kleingruppen zu zweit oder zu dritt *vor* dem Computer erwecken zwar leicht den Anschein, dass hier sach- und zielorientierte Kommunikation stattfindet. Allzu häufig jedoch sind hier starke Einseitigkeiten festzustellen (Wer die Maus führt, hat das Sagen.) oder eine eher technik-orientierte Ausrichtung der Kommunikationsinhalte (Wie kann man hier noch mal ...?). Unterschiedliche Kompetenzen in der technischen Handhabung verstärken i. d. R. eine einseitige Rollenzuweisung noch zusätzlich. So gesehen ist der Computer also eher ein Werkzeug zur Herstellung von Produkten (Texten, Grafiken, Tabellen, …) *über* die danach kommuniziert werden kann und soll.

Gemeinsame Aufgabenbearbeitung in einer Kleingruppe ist gleichwohl möglich: Es müssen Verabredungen getroffen, evtl. Teilaufgaben übernommen werden (manche lassen sich gut oder besser mit dem Computer erledigen, andere besser ohne). Das Schreiben mathematischer Texte erfordert die sachgerechte Verwendung mathematischer Fachbegriffe und Zeichen, damit hernach im Plenum oder mit anderen Adressaten die gefundenen Lösungswege beschrieben, verstanden und reflektiert werden können (vgl. KMK 2005, S. 8).

Argumentieren

Diese allgemeine mathematische Kompetenz unterliegt – ebenso wie das Kommunizieren – leicht der Gefahr, zu „allgemein“ verstanden zu werden. Ist es nicht so, dass sich die Kinder im Unterricht ständig untereinander austauschen und sich wechselseitig ihre Lösungswege erläutern oder begründen? Gewiss, aber wird dadurch bereits der Förderung der allgemeinen Kompetenzen Kommunizieren und Argumentieren hinreichend entsprochen? Wohl kaum, wenn man darunter eine bewusste und gezielte Förderung versteht. Und dazu bedarf es ausdrücklicher Werkzeuge bzw. methodischer Arrangements der Unterrichtsorganisation.

Genau so, wie es auch bei computerfreien Problemlöseprozessen sinnvolle und notwendige Phasen der Einzelarbeit gibt (bevor dann der Austausch mit anderen gesucht wird), so kann man auch bei der Arbeit am Computer solche unterschiedlichen Phasen identifizieren. Haben beispielsweise erste Explorationen Einzelner stattgefunden und zu ersten Vermutungen über Muster oder Lösungswege geführt, dann kann der kommunikative Austausch und die argumentative „Verteidigung" der eigenen Hypothesen gegenüber Mitlernenden helfen, die eigenen Argumente zu schärfen oder auf neue Ideen zu kommen. In solchen Kontexten kann auch der Computer genutzt werden.

Es gibt inzwischen eine Fülle interessanter Foren oder Mathematikwettbewerbe im deutschsprachigen oder internationalen Raum, und dies auch für die Grundschule. Stellvertretend wollen wir auf den Känguruwettbewerb verweisen (Mathe-Känguru 2007). Auf der Internet-Seite finden sich auch Links auf diverse vergleichbare Angebote. Gegründet 1995, erfreut sich dieser jährlich am 3. Donnerstag im März stattfindende Wettbewerb zunehmender Beliebtheit (weit über 500 000 Meldungen aus Deutschland für 2007) in ganz Europa und inzwischen auch Amerika und Asien. Für die 3. und 4. Klassen geht es um die Lösung von 21 mathematischen Aufgaben.

Die gestellten Aufgaben mit jeweils fünf Antwortalternativen bieten zahlreiche Anlässe für das Kommunizieren und Argumentieren: Lösungswege, Darstellungsweisen oder Argumente der eigenen Klasse können mit jenen anderer verglichen werden – auch überregional per E-Mail gibt es einen Austausch. Den Organisatoren wurden auch zahlreiche Fotos aus Projekten mit *CreaSticks* zugeschickt und sogar digitale Filmsequenzen im Stile animierter Fotosequenzen (vgl. *iStopMotion* in 9.2, Raum und Form, S. 170).

Der Computer eröffnet hier also Möglichkeiten für die *Konstruktion*, die *Bearbeitung* und die *Veröffentlichung* von Objekten. Dabei sollte der authentische Adressatenbezug nicht unterschätzt werden. Gewiss und als Erstes sollte man den kommunikativen und argumentativen Austausch auf direktem Wege innerhalb der eigenen Klasse oder Schule realisieren. Aber externe Adressaten bieten als solche zusätzliche Anforderungen: Ein direktes „Zeigen", ein wiederholtes Vormachen einer Handlung entfällt. Gemeintes muss sprachlich oder durch geeignete Repräsentationsweisen dargestellt werden. (Wie drücken wir es aus? Welche Darstellungen sind wofür und warum am besten geeignet?) Es muss auch für jene nachvollziehbar sein, die nicht am eigentlichen Prozess beteiligt waren. (Welche Informationen sind dazu unerlässlich? Welche sind eher überflüssig? Wie „hochauflösend" muss das Dokument sein?). Und nicht zuletzt: Wie können wir das Dokument auch ansprechend gestalten? (Schließlich gibt es auch so etwas wie eine ästhetische Motivation! Was aber bedeutet „ansprechend", und wo beginnt sich das Design zu verselbstständigen – bis hin zum Layout-GAU?)

■ Darstellen

Die Auswahl und sachgerechte Nutzung geeigneter Darstellungen ist nichts, was durch die darzustellende Sache bereits präfiguriert wäre. Vielmehr handelt es sich um bewusste Entscheidungen, die damit auch Gegenstand bewusster Lernprozesse sein müssen. Welche verschiedenen Möglichkeiten gibt es, unseren Lösungsweg (für verschiedene denkbare Adressaten oder Anlässe) darzustellen (Tabellen, Diagramme, Texte, …)? Welche sind warum und für welchen Zweck in diesem oder jenem Fall geeignet? Ist das „Anschaulichste" auch immer gleich das Beste? Wenn eine 4. Klasse Erfahrungen mit dem Ausmessen von Flächen hat (beispielsweise die Größe eines Raums mit Einheitsfliesen ausmessen/berechnen), dann sind die mathematischen Voraussetzungen gegeben, um auch für (bewusst oder unbewusst) suggestive und irreführende Praktiken zu sensibilisieren, die uns in unserem Alltag begegnen. Gerade durch zunehmende Computernutzung wird vor allem im Bereich der Statistik der Bogen hin und wieder überspannt (vgl. KRÄMER 1992):

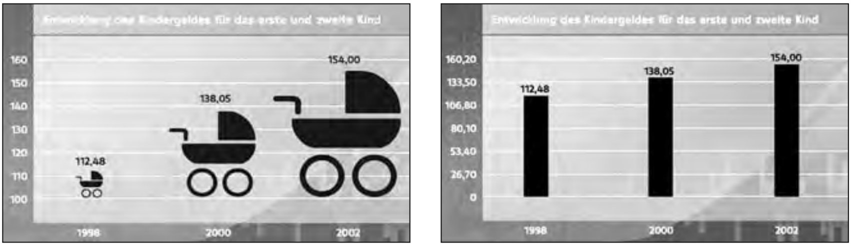
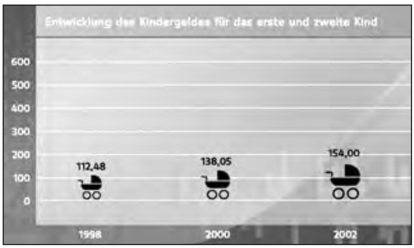


Abb. 1 Quelle: Presse- und Informationsdienst der Bundesregierung (2003), zit. von Quarks & Co.: http://www.quarks.de/dyn/31275.phtml

Die linke Darstellung mit den so „anschaulichen" Kinderwagen suggeriert völlig falsche Relationen, weil der Bereich unter 100 € abgeschnitten wurde. Im „nüchternen" Balkendiagramm hingegen sind die Relationen korrekt abgebildet, und sie vermitteln einen gänzlich anderen Eindruck. Übersetzt man die korrekten Relationen in die Kinderwagen-Darstellung (siehe folgende Abb.), dann wird der Unterschied im Vergleich zum 1. Kinderwagen-Diagramm offenkundig. Denken Sie sich den Kinderwagen durch ein schlichtes Rechteck umrahmt, dann wird deutlich – und diese Erfahrungen machen die Kinder bereits beim Auslegen von Flächen mit Einheitsquadraten –, dass eine Verdopplung einer Quadratkante, zu einer Vervierfachung der Fläche führt.



Ähnliche Effekte können entstehen, wenn speziell für Kinder gedachte elektronische Rechenblatt-Programme (Tabellenkalkulationen) oder Programme zur statistischen Darstellung von Daten benutzt werden, in denen „kindgerecht“ mit gegenständlichen Darstellungen wie oben bei den Kinderwagen gearbeitet wird. Bei räumlichen Abbildungen (3-D-Balken oder konkrete Gegenstände wie z. B. Eiskugeln) verstärkt sich der Effekt, da sich eine Vergrößerung der Kantenlänge gleich um das Achtfache niederschlägt und dadurch ein völlig verzerrter Eindruck der tatsächlichen Relationen entsteht.

■ Modellieren

Seit einiger Zeit gibt es zunehmend fachdidaktische Veröffentlichungen zu sogenannten Fermi-Aufgaben in der Grundschule. Diese „werden bewusst so formuliert, dass sie keine Zahlen enthalten, um die Kinder nicht zur vorschnellen operationalen Verknüpfung der vorgegebenen Zahlen zu verleiten. Vielmehr müssen sie die, ihren Berechnungen zugrundeliegenden, Daten selbst erheben, erfragen oder schätzen. Dieser nach seinem Erfinder Fermi-Probleme genannte Aufgabentyp ist dadurch charakterisiert, dass die Lösung von Informationen abhängig ist, die im Kopf der lösenden Person verfügbar sind. Fermi-Aufgaben müssen in der Regel mit einem geschätzten bzw. durch Überschlagsrechung gewonnenen Ergebnis beantwortet werden, da eine exakte Antwort nur schwer zugänglich oder prinzipiell nicht möglich ist“ (Peter-Koop 1999, S. 12). Beispiele sind etwa: Wie viele Klavierstimmer gibt es in Chicago? Wie viele Autos stehen in einem 3 km langen Stau? Wie viel Blatt Papier verbraucht unsere Schule in einem Schuljahr? (vgl. Büchter et al. 2007)

Da man sich die für Berechnungen, Näherungskalkulationen oder plausible Abschätzungen notwendigen Daten zunächst besorgen muss, stellen sich mindestens zwei Fragen: Welche Informationen oder Daten werden benötigt? Und welche Quellen könnten zu ihrer Beschaffung hilfreich sein? Neben den Lexika und Sachbüchern der Klassenbibliothek stellt inzwischen das Internet mit seinen Suchmaschinen eine gute Ergänzung dar – vorausgesetzt, man beachtet jene Einschränkungen, die mit Google, Wikipedia & Co. zwangsläufig verbunden sind (Zuverlässigkeit der Information usw.; vgl. Fiebig 2006), die man aber auch bereits in der Grundschule thematisieren kann. Dass die Stichwortsuche sehr schnell zu fragwürdigen Anbietern führen kann und welche Gefahren darüber hinaus im Internet lauern, ist ja nicht zuletzt Gegenstand einer medien-pädagogischen Unterrichtsarbeit. Außerdem gibt es Suchmaschinen speziell für Kinder (Blindekuh.de), die einer entsprechenden Kontrolle unterliegen und ohne Bedenken genutzt werden können.

Gewiss lässt sich die durchschnittliche Länge eines PKW, für die o. g. Fermi-Aufgabe relevant, naheliegenderweise dadurch erheben, dass man auf den Schulparkplatz geht und einige Autos abmisst (welche Messgeräte sind dazu sinnvoll, welche Messgenauigkeit?). Oder man befragt die Kfz-Papiere von Lehrern und Eltern. Aber allzu leicht, und gerade bei Fermi-Aufgaben, entziehen sich auch Situationen einer solchen direkten Überprüfbarkeit. Vor allem, wenn es um ganz Großes oder ganz Kleines geht: Wie viele Lego-Steine gibt es auf der Welt? So, wie der Taschenrechner behilflich sein kann, wenn es um realistische statt zurecht-didaktisierte Zahlenwerte im Sachrechnen geht, so kann eine Suchmaschine authentisches Datenmaterial bereitstellen. Dabei ist dann der Suchprozess als solcher bereits ein Unterrichtsthema: Was sind günstige Suchbegriffe? Wie funktioniert die Suchsystematik? Aber dann vor allem die Frage: Was machen wir mit diesen Informationen? Wie gehen wir mit ihnen um? Wie verlässlich sind sie? Wie genau? Welche Genauigkeit benötigen wir überhaupt und warum? Hier müssen Sachtexten, Tabellen oder anderen Daten der Lebenswirklichkeit die jeweils für eine Fragestellung relevanten Informationen entnommen, einer Bearbeitung mit mathematischen Mitteln zugeführt und im Ergebnis wieder auf die Sache zurückbezogen werden (= Modellieren).

9.3 Zusammenfassende Bemerkungen

Was kann (potenziell, nicht als Automatismus) durch den Einsatz des Computers leichter oder innovativ möglich werden? Zunächst einmal jene Dinge, die auf seinen *medien-spezifischen* Fähigkeiten beruhen: die Handhabung zeitbasierter Daten, das Probehandeln bzw. der experimentelle Zugang zu Phänomenen sowie Anforderungen im Rahmen von „Formatierungen“ (Textgestaltung, Darstellungsformen aller Art).

Wichtig ist eine *sachgerechte Integration* in den Unterricht, die sinnvolle Vernetzung des Medieneinsatzes mit anderen Aktivitäten des Unterrichts – mit Betonung auf „sinnvoll“, und nicht zum Selbstzweck oder weil es „modern“ wirkt. Entscheidend ist immer, sich Klarheit über die Ziele des konkreten Unterrichts zu verschaffen. Für eine Aktivität, die sowohl mit als auch ohne PC möglich wäre, kann durchaus unterschiedlich entschieden werden: Ist mir v. a. die „handgreifliche“ Auseinandersetzung mit der Sache wichtig(er), dann lasse ich den Computer beiseite; liegt mir aber daran, dass die Kinder an einer intuitiv zu bedienenden Anwendung in naheliegender- weise den Umgang mit dem Medium Computer erfahren oder üben können, dann werde ich ihn aus diesen Gründen an dieser Stelle nutzen wollen.

Bei Kosten-Nutzen-Relationen zwischen technischem Aufwand und Effekten für das Lernen wird immer wieder davor gewarnt, nicht „mit Kanonen auf Spatzen zu schießen“. Dem stimmen wir zu. Andererseits sollte man aber auch gelassen bedenken, wie hoch realistischerweise der zeitliche Anteil der Computernutzung für das einzelne Kind im Unterricht *gemessen an der computerfreien Unterrichtszeit* und den dort stattfindenden Aktivitäten ist.

Aktivitäten mit dem Computer müssen vom Tun auf das Reflektieren orientiert sein. Das Abarbeiten von elektronischen Aufgabenplantagen unter dem Paradigma des „Fertig-Machens“, das zufallsgesteuerte Surfen im Sinne eines kognitiven Zurücklehnens, bringt keinen didaktischen Zugewinn – was nicht ausschließt, dass man diese Erholungsfunktion zu gegebener Zeit und im vernünftigen Maß gewiss auch einmal nutzen kann.

Wie ohne Computer auch, benötigt die Kompetenzentwicklung Zeit. Mal kann es sich um relativ kurzfristige Phasen handeln (z.B. bei den meisten Fähigkeiten im technischen Umgang mit den Medien, also ihre Handhabung), mal um längere, auch mehrjährige Phasen bei komplexeren Anforderungen oder dort, wo Haltungen und Einstellungen betroffen sind. Der Computer ist jedenfalls kein „Beschleunigungs-Medium“ in dem Sinne, dass durch ihn all das schneller und einfacher und selbstverständlicher gelernt werden könnte, was zuvor ohne ihn erfolgte. Die Frage, ab wann der Einsatz des Computers in der Grundschule Sinn macht, ist so facettenreich und auch in der Literatur mit teilweise sehr gegensätzlichen Positionen diskutiert, dass wir hier keine abschließende Antwort geben können. Aus fachdidaktischer Sicht scheint uns aber bei jeder zu entscheidenden Einzelfrage der *Primat der Didaktik* ein unumgängliches Gütekriterium zu sein, ebenso wie das stets zu prüfende Verhältnis von Aufwand und Effekt.

10 Bildungsmonitoring und Lernstandsbestimmung

Marja van den Heuvel-Panhuizen/Olaf Köller/Dietlinde Granzer

In den vorherigen Kapiteln wurden die Bildungsstandards anhand von kompetenzorientierten Aufgaben illustriert und Hinweise und Anregungen gegeben, wie auf der Basis der Bildungsstandards ein handlungsorientierter, kognitiv-aktivierender Unterricht realisiert werden kann, wie er nicht zuletzt infolge von PISA gefordert wurde (vgl. BAUMERT u. a. 2004).

In diesem Kapitel wird aufgezeigt, in welcher Beziehung Testaufgaben zu den Standards stehen und wie Schulleistungsmessungen im Kontext der Strategie der Kultusministerkonferenz zu sehen sind. Darüber hinaus wird das diagnostische Potenzial von Standards und Testaufgaben gezeigt und an Beispielen erläutert, wie es sich für die Weiterentwicklung von Unterricht nutzen lässt[1].

10.1 Die Rolle von Testaufgaben im Kontext der Qualitätssicherung im Bildungswesen

Testaufgaben im Rahmen von Schulleistungsmessungen

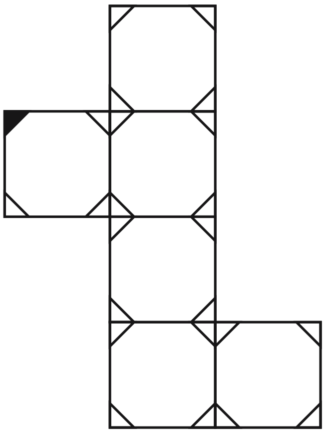
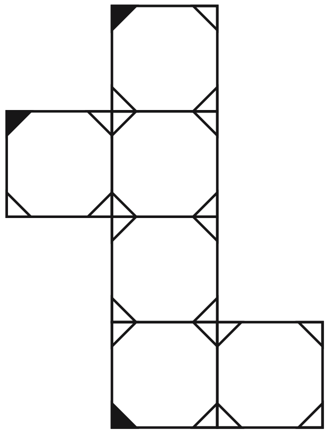
Testaufgaben werden eingesetzt, um Daten auf Systemebene zu erhalten. Sie sind Teil des Bildungsmonitorings, das als ein wichtiges Instrument zur Qualitätssicherung und -entwicklung im Bildungswesen betrachtet werden kann und Informationen zur Steuerung des Bildungswesens liefert.

Präsentiert werden im Folgenden drei Testaufgaben, die das Niveauspektrum von schwierig bis leicht abdecken.

Die erste Aufgabe *Würfelnetz* wird in der 4. Jahrgangsstufe eingesetzt. Mit ihr werden im inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzbereich die Erreichung des Standards „zwei- und dreidimensionale Darstellungen von Bauwerken (z. B. Würfelgebäuden) zueinander in Beziehung setzen (nach Vorlage bauen, zu Bauten Baupläne erstellen, Kantenmodelle und Netze untersuchen)“ sowie das *Problemlösen* im Bereich allgemeine mathematische Kompetenzen erhoben.

[1] Die Erstellung von Klassenarbeiten auf der Basis von Standards wird in einer gesonderten Publikation behandelt.

Die Aufgabe ist mit einer Lösungswahrscheinlichkeit von 30 Prozent relativ schwierig, was u. a. damit zusammenhängt, dass die Kinder innerlich ein komplexes mentales Modell bilden müssen, mit dem sie anschließend handelnd in der Vorstellung umzugehen haben. Hinzu kommt noch, dass das Falten des Würfelnetzes unterschiedlich erfolgen kann und es folglich kürzere und längere Lösungswege gibt.

<table>
<tr><th>Aufgabe: Würfelnetz</th><th>Aufgabe: Würfelnetz (Lösung)</th></tr>
<tr><td colspan="2">In dem Würfelnetz ist eine Ecke schwarz gekennzeichnet.
Welche beiden Ecken treffen beim Zusammenfalten mit dieser Ecke aufeinander?
Kennzeichne diese ebenfalls schwarz.</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

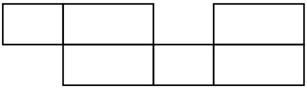
Die Kinder erkennen in der Regel relativ schnell, dass die links liegende Fläche mit der schwarzen Ecke und die Fläche darüber beim Hochklappen aufeinanderstoßen und somit die Ecke links in der obersten Fläche die richtige Lösung ist. Schwieriger wird es dagegen, wenn mental mindestens zwei Faltvorgänge durchgeführt werden müssen, um die richtige Ecke zu bestimmen. Dies ist für die Bestimmung der zweiten Ecke links unten notwendig.

Deutlich leichter ist dagegen die folgende Aufgabe, die ebenfalls dem Bereich *Raum und Form* entnommen ist und auch in der 4. Jahrgangsstufe eingesetzt wird. Gelöst wird diese bereits von jedem zweiten Schüler, was durchaus plausibel ist, weil das mentale Modell des Körpers „Quader" anhand von konkreten Lösungsoptionen abgeglichen und verworfen oder akzeptiert werden kann. So können Kinder, die wissen, dass ein Quader sechs Flächen hat, sofort erkennen, dass die Antwortalternativen b) und c) ausgeschlossen werden können.

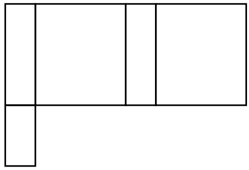
Aufgabe: Quader falten

Aus welchem Netz kannst du einen Quader falten?

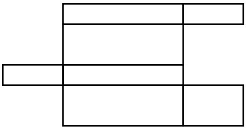
a)



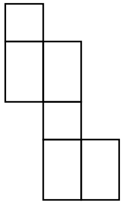
b)



c)



d)



Eine dritte Beispielaufgabe entstammt dem Bereich *Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit*. Üblicherweise sind Testaufgaben aus diesem Bereich schwerer zu lösen. Das hängt u. a. damit zusammen, dass dieser Kompetenzbereich bislang in den Bildungsplänen der Länder für den Primarbereich nicht zu finden war und deshalb im Unterricht auch nur selten thematisiert wurde. Eine Ausnahme bilden die folgenden beiden Teilaufgaben, die von annähernd 90 Prozent der Kinder der 3. und 4. Jahrgangsstufe gelöst wurden.

Aufgabe: Vogeleier-Diagramm

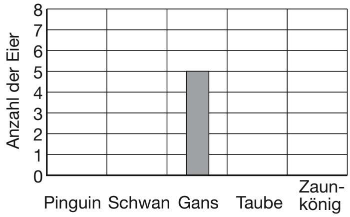
Diese Tabelle zeigt, wie viele Eier folgende Vögel legen:

a) Zeichne das Diagramm fertig!

b) Kreuze an, was richtig ist.

- ☐ Ein Pinguin legt die meisten Eier.
- ☐ Eine Gans legt die wenigsten Eier.
- ☐ Eine Taube legt mehr Eier als ein Zaunkönig.
- ☐ Ein Schwan legt mehr Eier als eine Taube.

Vogel	Eier
Schwan	6
Zaunkönig	6
Pinguin	1
Gans	5
Taube	2



Die Kinder kennen offensichtlich solche Darstellungen aus unterschiedlichen Quellen wie Fernsehen, Zeitungen, Unterricht und man darf sicherlich auch davon ausgehen, dass hier Lerninhalte aus dem Sachunterricht zum Tragen kommen, in dessen Rahmen häufiger Beobachtungsergebnisse von Kindern in Tabellen festgehalten und als Diagramm aufbereitet werden.

Bildungsstandards als Grundlage der Qualitätssicherung in einer Gesamtstrategie aller Bundesländer

Die oben vorgestellten Testaufgaben sind einem Testheft entnommen, das im Rahmen eines Feldtests im Jahr 2006 eingesetzt wurde. Mit Aufgaben dieses Typs kann die Erreichung der Bildungsstandards erhoben, aber auch der „Könnensstand" der Kinder in den verschiedenen inhaltlichen und allgemeinen Kompetenzen diagnostiziert werden. Dies ist deshalb möglich, weil die länderübergreifenden Bildungsstandards für das Fach Mathematik in der Grundschule konkret beschreiben, welche Erwartungen an die gezeigten Leistungen der Schülerinnen und Schüler gestellt werden. Auf dieser Grundlage können große Aufgabenpools generiert werden, welche die Überprüfung der Erreichung der Standards erlauben, m. a. W.: die Standards bzw. die in ihnen formulierten Kompetenzen (Leistungsziele) werden messbar!

Die Messbarkeit und damit verbunden die Überprüfbarkeit stand bei der Einführung der Standards in den Jahren 2003 und 2004 im Vordergrund (vgl. hierzu auch Kapitel 3), um mittelfristig ein System der Qualitätssicherung im allgemein bildenden Schulsystem zu etablieren. Dabei ist allerdings die genaue operationale Definition, bei welchem konkreten Leistungsstand man davon sprechen kann, dass die Vorgaben in den Standards erreicht wurden, noch offen. Die prinzipielle Messbarkeit der Erreichung der Standards hat die KMK im Juni 2006 zum Anlass genommen, eine Gesamtstrategie der Qualitätssicherung zu verabschieden, die auf den verschiedenen Ebenen in der folgenden Tabelle dargestellt ist.

Tabelle	**Fach**	
	Mathematik	Deutsch
Internationaler Vergleich	Beteiligung an der Trends in Mathematics and Science Study (TIMSS) in der 4. Jahrgangsstufe; erstmalig 2007, dann alle vier Jahre; national repräsentative Stichproben; ca. 4500 Schülerinnen und Schüler	Beteiligung an der Internationalen Grundschul-Lese-Untersuchung (IGLU/PIRLS) in der 4. Jahrgangsstufe; seit 2001, zukünftig alle fünf Jahre; national repräsentative Stichproben; ca. 4500 Schülerinnen und Schüler

	Fächer Mathematik und Deutsch
Nationaler Vergleich	Ländervergleich auf der Basis der Bildungsstandards in der 3. Jahrgangsstufe; zukünftig alle 5 Jahre, gekoppelt an IGLU/PIRLS, erstmalig 2011; länderrepräsentative Stichproben; ca. 20 000 Schülerinnen und Schüler
Regionaler/ lokaler Vergleich	Flächendeckende Vergleichsarbeiten (VERA) in allen Ländern (in der Regel) in der 3. Jahrgangsstufe; jährlich; Vollerhebungen in den 16 Ländern

Zukünftige Qualitätssicherung in der Grundschule auf internationaler, nationaler und regionaler/lokaler Ebene

- **Die erste Säule:** Beteiligung an internationalen Studien
  Die Beteiligung Deutschlands an den internationalen Studien IGLU/PIRLS und TIMSS findet zukünftig auf der Basis national repräsentativer Stichproben gegen Ende der 4. Jahrgangsstufe statt. Deutschland erhält so die Möglichkeit, sich in der Grundschule in den Bereichen Lesen, Mathematik und Naturwissenschaften international zu verorten, allerdings immer mit der Beschränkung, dass die verwendeten Leistungstests explizit nicht mit den Zielen der deutschen Grundschulen abgestimmt sind.
- **Die zweite Säule:** Ländervergleiche auf der Basis der Bildungsstandards
  Zukünftige Ländervergleiche in der Grundschule werden auf der Basis der Bildungsstandards am Ende der 3. Jahrgangsstufe durchgeführt. Auf der empirischen Grundlage von landesweit repräsentativen Stichproben soll in allen 16 Ländern festgestellt werden, welche Leistungsstände die Schülerinnen und Schüler mit Bezug zu den Standards erreichen. Der Rhythmus dieser Vergleiche wird für Deutsch und Mathematik an IGLU/PIRLS angepasst, sodass sie lediglich alle fünf Jahre stattfinden. Damit wird eine Strategie realisiert, welche das nationale Bildungsmonitoring explizit an die vorgegebenen Lernziele koppelt und Schulpolitik, Schuladministration, Lehrkräfte und Eltern über die Erträge in den verschiedenen Länder der Bundesrepublik Deutschland regelmäßig informiert.
- **Die dritte Säule:** Flächendeckende Vergleichsarbeiten angelehnt an die Standards
  Schließlich haben alle Bundesländer vereinbart, flächendeckende Vergleichsarbeiten am Ende der 3. Jahrgangsstufe zu schreiben, deren Aufgaben an die Bildungsstandards angelehnt sind. Die Einzelschule kann damit Erkenntnisse sammeln, ob und wie weit die Schülerinnen und Schüler von der Erreichung der Standards am Ende der 4. Jahrgangsstufe entfernt sind und auf dieser Basis passgenau individuelle Förderpläne für Schüler der kommenden vierten Klasse erstellen.

10.2 Potenzial der Testaufgaben für den Unterricht

Was Lehrer von der Auswertung der Bildungsstandards lernen können

Die vom IQB durchgeführte Evaluierung auf der Basis der länderübergreifenden Bildungsstandards spielt eine Schlüsselrolle bei der Implementation der Standards in den Unterrichtsalltag. Dies bedeutet, dass die Erhebung, ob die deutschen Schüler die Standards erreicht haben, selbst einen Beitrag dazu leistet, dass die unterrichtlichen Prozesse stärker an den Standards ausgerichtet werden und den Lehrern dabei hilft, zunehmend standardorientiert zu unterrichten.

Es sind im Wesentlichen zwei Gründe, weshalb die Erhebung der Standards ihre Umsetzung im Unterricht unterstützen kann:
a) die Testaufgaben konkretisieren die Standards;
b) die Auswertung der Testergebnisse informiert über die Schülerleistungen.

■ **Testaufgaben konkretisieren die Standards**

Die Stärke der KMK-Standards beruht darauf, dass sie das gesamte Mathematikcurriculum der Grundschule abdecken, ohne ins Detail zu gehen. Stattdessen beschreiben sie allgemein, welche Kompetenzen Kinder erwerben sollen und machen transparent, welche Intentionen in den ersten Jahren im Mathematikunterricht verfolgt werden sollen. Auf der anderen Seite ist offensichtlich, dass die kurze, prägnante Beschreibung des Curriculums nicht unmittelbar praxiswirksam ist. Die Standards müssen vielmehr in konkrete Unterrichtshandlungen übersetzt werden.

Die Testaufgaben, die zur Evaluierung der Standards entwickelt wurden, erlauben eine erste Interpretation dessen, was Standards bedeuten. In den Test-aufgaben sind die Standards in ein messbares Verhalten der Schüler „übersetzt“ worden. In anderen Worten: Lehrer können an der einzelnen Testaufgabe erkennen, auf welches Wissen und Verstehen der jeweilige Standard zielt.

Als Beispiel kann ein Standard aus dem inhaltsbezogenen Bereich *Raum und Form* dienen: „geometrische Figuren erkennen, benennen und darstellen.“ Der untergeordnete Standard heißt „Modelle von Körpern und ebenen Figuren herstellen und untersuchen (Bauen, Legen, Zerlegen, Zusammenfügen, Ausschneiden, Falten ...)“. Als Beispiel soll wieder die Aufgabe „Quader falten“ (s. S. 184 oben) verwendet werden. Der Fokus dieser Aufgabe liegt auf Untersuchen.

Um diese Aufgabe zu lösen – und um den entsprechenden Standard zu erreichen – ist es notwendig, dass Schüler Methoden entwickelt haben, mit denen sie systematisch überprüfen können, ob ein Netz mit einer spezifischen Form übereinstimmt. Dabei ist das Wissen über die Eigenschaften von Formen eine wichtige Voraussetzung, weil dadurch die Zahl der potentiell richtigen Lösungen eingeschränkt werden kann. Im nächsten Schritt werden bei der Suche nach der korrekten Antwort mental die verbleibenden Netze in Quader gefaltet. Deutlich wird an dieser Aufgabe, dass der mentale Umgang mit komplexen Gebilden eine wichtige Kompetenz darstellt, die im Mathematikunterricht aktiviert und ausgebildet werden muss. Indirekt weist diese Aufgabe also Lehrkräfte darauf hin, dass sie Schülern vielfältige Gelegenheiten bieten müssen, um Erfahrungen im mentalen Umgang mit komplexen Gebilden sammeln zu können, z.B. indem sie Schüler konkret handeln lassen und sie gleichzeitig auffordern, das Resultat ihrer Handlungen vorherzusagen und zu beschreiben. Darüber hinaus sollten die Schüler auch angehalten werden, Mittel und Wege zu nutzen, die ihre mentale Vorstellungen unterstützen, z.B., indem die Visualisierung „fixiert" wird (vgl. Abb. 1). Beim Falten des Netzes „a" liegen drei Kanten aufeinander. Deshalb kann dieses Netz nicht das richtige sein. Beim Netz „d" trifft jede Kante nur auf eine weitere Kante. Deswegen ist „d" die richtige Antwort.

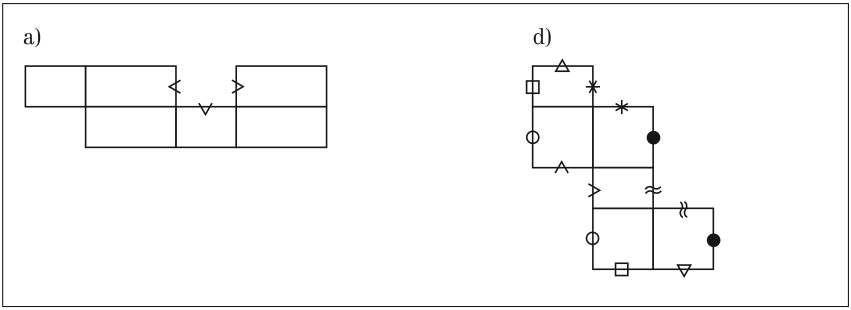


Abb. 1: Die Verwendung von Zeichen zur Fixierung eines mentalen Bildes

Die Testaufgaben, die für die Erhebung der Standards entwickelt worden sind, verdeutlichen auch, was mit den allgemeinen Kompetenzen gemeint ist, die in den KMK-Standards neu aufgenommen worden sind. Wenn etwa Schüler gefragt werden, herauszufinden, ob eine Rechenkette immer mit ihrer Startzahl endet und auch angehalten werden, ihre Aussage zu begründen, so rückt damit der allgemeine Standard für Argumentieren, „mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen", in den Vordergrund.

Die Erreichung dieses allgemeinen Standards erfordert mehr als nur zu schreiben: „Weil ich es gerade probiert habe", oder: „Weil es immer so ist." Welches Tiefenverständnis bereits vorliegen kann, zeigt der mathematische Beweis eines Schülers der vierten Klasse:

Aufgabe: Rechenketten

Hier siehst du eine Rechenkette

Startzahl Zielzahl

$$\boxed{8} \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{16} \xrightarrow{\cdot 5} \boxed{80} \xrightarrow{:10} \boxed{8}$$

$$\boxed{} \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{} \xrightarrow{\cdot 5} \boxed{} \xrightarrow{:10} \boxed{}$$

Die Startzahl ist genauso groß wie die Zielzahl.

a) Ist dies bei dieser Rechenkette immer so?

☐ Ja

☐ Nein

b) Begründe deine Antwort.

„Weil die Zahl erst mal 2, dann mal 5 genommen wird. Deshalb kann man die Zahl mal 10 und :10 nehmen." Schüler, die ihren Beweis darauf stützen, dass es auch mit einer anderen Zahl als der Startzahl funktioniert, und die (zum Beispiel) die folgende Antwort geben:

Aufgabe: Rechenketten (Schülerlösung)

$$\boxed{4} \xrightarrow{\cdot 2} \boxed{8} \xrightarrow{\cdot 5} \boxed{40} \xrightarrow{:10} \boxed{4}$$

müssen lernen, dass der Verweis auf ein neues Beispiel, bei dem die Startzahl und Zielzahl identisch sind, nicht für das Argumentieren ausreicht. Der ausführliche „Beweis" ist nur dann abgeschlossen, wenn alle Möglichkeiten aufgelistet sind. Ziel muss es stattdessen sein, dass die Schüler eine überzeugendere Begründung geben, die darauf basiert, dass sich die drei Rechenoperationen gegenseitig aufheben.

■ Testergebnisse informieren über die Schülerleistung

Außer der Konkretisierung der Standards informiert die Erhebung der Standards darüber, in welcher Ausprägung deutsche Grundschüler die standardbasierten Testaufgaben lösen können.

Bei stichprobenbasierten Studien liegt es in der Natur der Sache, dass die Testergebnisse ausschließlich Aussagen über die Leistungen der Gesamtpopulation zulassen. Deshalb sind solche Studien insbesondere für Schulaufsicht und Bildungspolitik wichtig. Beispielsweise können schwache Ergebnisse bei einzelnen inhaltsbezogenen und allgemeinen Kompetenzen oder unerwünschte Geschlechterunterschiede auf blinde Flecken im Bildungswesen hinweisen. Diese Information ist aber auch für Lehrer interessant. Die Testergebnisse der Evaluation der Standards bilden für Lehrer einen Referenzrahmen, mit dem sie die Leistung ihrer Kinder vergleichen können.

Als Beispiel kann wieder die Testaufgabe *Quader falten* (s. S. 186) dienen. In der durchgeführten Pilotstudie haben ca. 50 % der Kinder die Aufgabe richtig gelöst. Wenn Lehrer diese Testergebnisse aus großen Studien kennen, können sie adäquater auf Beobachtungen in ihren Lerngruppen reagieren. Sollten die Ergebnisse der Klasse bei ähnlichen Aufgaben niedriger ausfallen, würde dies sicherlich die Lehrer dazu anregen, nachzuforschen, warum ihre Schüler mit diesen Arten von Rechenaufgaben Schwierigkeiten haben.

Gelernt werden kann auch, dass es nicht immer die Antwort ist, die allein zählt. Bei manchen Aufgaben ist die Strategie, die bei der Lösung der Aufgabe angewandt wird, gleich bedeutend oder auch sogar wichtiger. So zielt z. B. die folgende Aufgabe, aus dem Bereich *Muster und Strukturen* insbesondere auf den Standard, „Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen" ab. Die Art und Weise, wie der Schüler die Summe 505 errechnet, ist ein stärkerer Indikator für das Leistungsniveau des Schülers, als die Tatsache, dass sie oder er die richtige Summe 505 zusammengezählt hat.

Testaufgabe: Zahlen auf der Linie

Schau dir die Zahlen auf dieser Linie an.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

a) Wie groß ist die Summe der Zahlen auf der Linie?

b) Schreibe auf, wie du rechnest.

Natürlich handelt es sich um eine gute Leistung, wenn Schüler der vierten Klasse die Addition schriftlich oder halbschriftlich (s. Abb. 2a und 2b) fehlerlos durchführen können (nur 32 % der Schüler in der 4. Klasse lösten diese Aufgabe richtig), aber herausragend wird die Leistung dann, wenn die Antwort durch vorteilhaftes Rechnen – auch wenn das nicht explizit gefragt worden ist – gefunden wird (s. Abb. 2c). Dies geht deutlich über die Fähigkeit hinaus, die bei einer schriftlichen Addition gefordert ist.

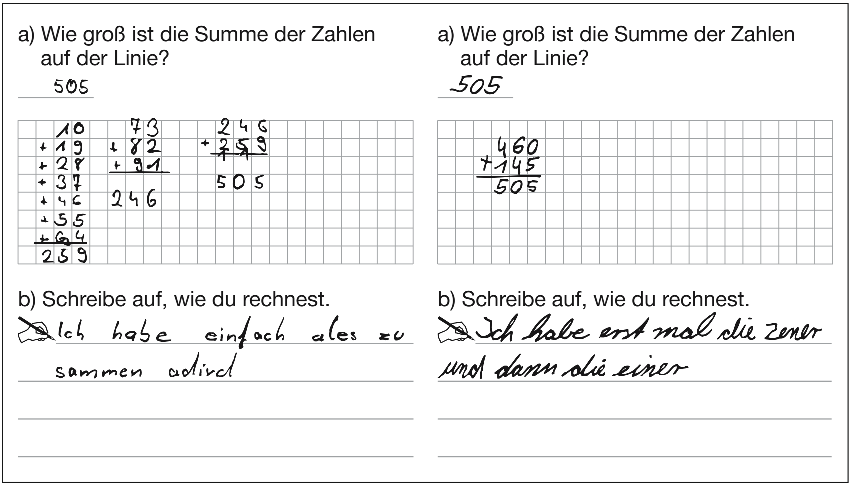


Abb. 2a: Schriftliches Rechnen **Abb. 2b:** Halbschriftliches Rechnen

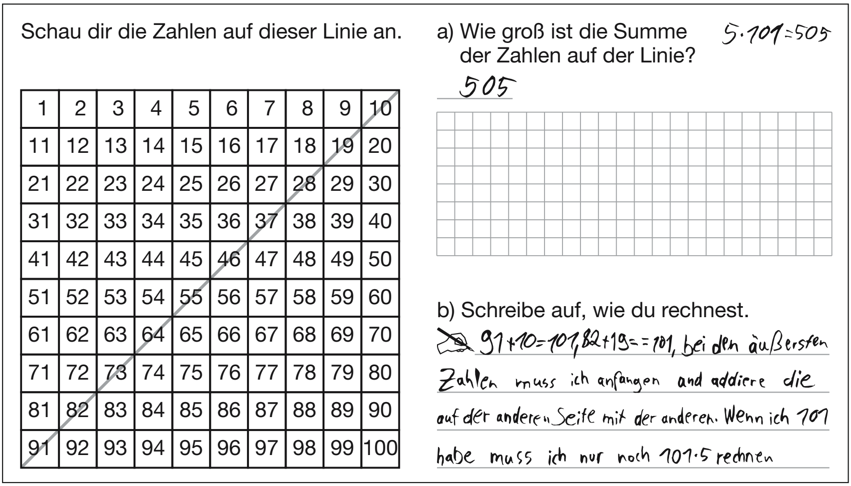


Abb. 2c: Vorteilhaftes Rechnen

Nur acht von 75 Schülern der vierten Klasse haben diese Aufgabe geschickt gelöst. Klar ist es, dass diese Schüler – wegen ihrer Strategie, das besondere Muster der Zahlen in der Aufgabe zu nutzen – über ein breiteres Kompetenzspektrum und höheres Kompetenzniveau verfügen als diejenigen Schüler, die die Zahlen nacheinander summiert haben. Die Schüler, die geschickt vorgegangen sind, können in der Tat leichter mit vielen und größeren Zahlen umgehen als diejenigen, welche die Zahlen in herkömmlicher Weise addiert haben. Darüber hinaus haben nur diese Schüler ihre Kompetenzen beim Erkennen und Nutzen von Gesetzmäßigkeiten bei Zahlenfolgen aktiviert und gezeigt.

Bundesweite Leistungsmessung und Leistungsbeurteilung im Rahmen des Unterrichts

Von der bundesweiten Erhebung der Standards können Lehrkräfte, wie gezeigt, viel lernen: Sie sehen, wie Standards gemessen werden können und sie erhalten Informationen über die generellen Fähigkeiten der Schüler in den 3. und 4. Klassen der Grundschule. Natürlich entlässt eine solche Erhebung die Lehrer nicht aus der Verantwortung, die Leistung ihrer Schüler festzustellen, zu beurteilen und Rückmeldung zu geben. Unterrichten erfordert eine laufende Beurteilung von Schülerleistungen durch die Lehrerin. In der Tat basiert jede Entscheidung im Unterrichtsprozess auf der Kenntnis des Lehrers über die Lernfortschritte der Kinder. Dieses Wissen kann nur über laufende Lernstandserhebungen sichergestellt werden.

Um Missverständnisse zu vermeiden, fügen wir sofort hinzu, dass wir hier Leistungsmessung im weitesten Sinne verstehen. In Übereinstimmung mit Pophams (2000) Definition sind wir der Auffassung, dass die Leistungsmessung alle diejenigen Prozesse umfasst, in denen die Antworten der Schüler auf gezielte oder spontan entstehende Stimuli genutzt werden, um Schlüsse über deren Kenntnisse und Fähigkeiten zu ziehen. Damit bleibt die Leistungsmessung nicht nur auf die schriftliche Leistungsfeststellung beschränkt, sondern kann auch die Verwendung von Computern sowie mündliche Befragung oder „nur“ die Beobachtung von Schülern während der Problemlösung umfassen.

Wenn solche Leistungsbeurteilungen von Lehrern vorgenommen werden, um wissensbasierte Entscheidungen für Lehrlernprozesse zu treffen, wird dies als Lernstandserhebung im Rahmen von Unterricht bezeichnet. Häufig findet man für diese Art der Leistungsfeststellung Bezeichnungen wie „formatives Assessment“ oder „internes Assessment“. Bei dieser Art der Leistungserhebung werden die Aufgaben meist von den Lehrern selbst erstellt und stammen nicht aus externen Quellen. Häufig wird die Lernstandserhebung vor oder während einer Lerneinheit durchgeführt und dient der Information der Lehrer über den Lernprozess der einzelnen Schüler. Üblicherweise sind die

Ergebnisse dafür gedacht, die Unterrichtsgestaltung an dem individuellen Lernstand der Schüler auszurichten und Lernangebote für Schüler zu entwickeln.

In dieser Hinsicht gibt es einen klaren Unterschied zwischen der Lernstandserhebung im Rahmen des Unterrichts und einer bundesweiten Schulleistungserhebung, die zur Evaluierung der Standards durchgeführt wird. Die letztgenannte Erhebung kann auch als ein „externes" oder „summatives Assessment" bezeichnet werden. Die Testaufgaben werden von einer externen Gruppe von Experten (inklusive Lehrern) erstellt und die Erhebung wird im Gegensatz zu einer Lernstandsbeurteilung im Unterricht am Ende eines bestimmten Lernprogrammes oder Schulabschnittes durchgeführt. Üblicherweise werden die Ergebnisse einer summativen Erhebung zur Rechenschaftslegung und für ggf. eine Zertifizierung herangezogen und sind als Information für Externe gedacht.

Der Unterschied zwischen summativer und formativer Lernstandsfeststellung wird durch die Begriffe „Erhebung des Leistungsstandes" *(assessment of learning)* und „Erhebung der Lernausgangslage" *(assessment for learning)* gut artikuliert. Der erste Begriff bezieht sich auf das Lernen und Unterrichten, das bereits statt gefunden hat. Der zweite Begriff ziehlt darauf ab, aufzudecken, wo sich die Schüler in ihrer Entwicklung befinden und welches der nächste Entwicklungsschritt sein könnte (Assessment Reform Group 2002).

Beide Formen der Leistungsermittlung liefern einen eigenen Beitrag, wenn es darum geht, alle Betroffenen im Bildungsbereich mit relevanter Information zu versorgen. Seitdem jedoch die zwei Bildungsforscher Paul Black und Dylan Wiliam (1998a, 1998b) ihre Studie zu den Auswirkungen der „formativen Lernstandsfeststellung" – d.h., einer Leistungsfeststellung, die lernprozessbegleitend durch den Lehrer oder die Lehrerin vorgenommen wird, mit dem Ziel, die Lehrprozesse besser an die Lernprozesse der Schüler anzupassen – veröffentlicht haben, ist belegt, wie wichtig die Leistungsfeststellung im Lernprozess ist. Black und Wiliam analysierten 250 Studien zur Leistungsbeurteilung im Unterricht, die in mehreren Ländern durchgeführt worden waren. Sie fanden heraus, dass eine formative Leistungsfeststellung zu einem deutlichen und wesentlichen Lerngewinn bei Schülern führt. Im Vergleich zu anderen Maßnahmen der Unterrichtsentwicklung wies zudem die formative Leistungsfestellung deutlich höhere Effektstärken in Bezug auf den Lernzuwachs auf.

Das Wissen, dass eine intelligente Leistungsbeurteilung im Unterricht das Leistungsniveau von Schülern erhöhen kann, zieht sofort die Frage nach sich, wie die Evaluation der Standards (die eine großangelegte externe Erhebung darstellt) für die Lernstandserhebung im Klassenzimmer verwendet werden kann.

Wie die mit den Standards verbundenen Testaufgaben für die Schulpraxis nützlich gemacht werden können

Obwohl die zur Erhebung der Standards entwickelten Testaufgaben die Standards konkretisieren, ist es kaum verwunderlich, dass die bloße Vermittlung – oder das Training – der Lösung von Testaufgaben nicht zu mathematischem Wissen und Verstehen führen, wie es von den Standards intendiert ist. Wenn Kinder mit denselben Aufgaben geprüft werden, mit denen sie trainiert worden sind, kann dieses „item-teaching“ (Popham 2001) höchstens zu einer besseren Note führen. Es bedeutet allerdings nicht, dass die Kinder ein höheres kognitives Niveau erreicht haben.

Das Trainieren von Testaufgaben, d. h. das„teaching-to-the-test“, wird dann zu Recht hinterfragt, wenn Unterricht ausschließlich darauf reduziert wird, wie in großangelegten Studien mathematische Fähigkeiten erhoben werden. Üblicherweise liegt der Fokus bei solchen Studien auf der Reproduktion von Wissen und oftmals werden diejenigen Fragestellungen ausgeklammert, die komplexeres Denken erfordern.

Wie bereits erwähnt, werden bei der groß angelegten Evaluation der Standards durch das IQB soweit als möglich auch offene Aufgaben präsentiert, bei denen die Kinder ihr mathematisches Denken zeigen können. Die Mehrzahl der Testaufgaben muss aber aus Kosten- und Auswertungsgründen im Multiple-Choice-Format dargeboten werden. Entgegen der häufig geäußerten Annahme, dass dieses Format nur bedingt mathematisches Denken erfassen könne, meinen wir, dass es ein großes Potenzial aufweist, den Unterricht zu verbessern und die Denkleistung der Schüler zu erhöhen. Aufgaben dieser Art können so eine Bereicherung für Leistungsbeurteilung im Unterricht sein.

Dies erfordert, dass das didaktische Potenzial von Testaufgaben erkannt und Testaufgaben wieder in einen didaktischen Kontext rückgebunden werden. Testaufgaben müssen folglich ähnlich wie die Standards zuerst „übersetzt“ werden. Zunächst müssen die Testaufgaben aus der Perspektive der Standards betrachtet werden. Sie sollten dann mit einer Unterrichts- und Lernumwelt verknüpft werden, in der die Schüler die Chance haben, selbst Lösungen zu finden. Durch diese didaktische Rückbindung können dann solche Aufgaben aufzeigen, wo sich die Schüler im mathematischen Lernprozess gerade befinden.

Es gibt verschiedene Wege, das Potenzial von (Multiple-Choice-)Testaufgaben im Unterricht zu entfalten:

a) die Antwortoptionen werden bei einer Testaufgabe gestrichen und die Schüler gefragt, welche Antwortalternativen denkbar sind;
b) die Schüler werden aufgefordert eine Testaufgabe sowohl einfacher als auch schwieriger zu gestalten;

c) den Schülern wird die Testaufgabe als offene Aufgabe vorgelegt;
d) eine Hilfsaufgabe wird mit einer Testaufgabe verknüpft.

Die ersten drei Maßnahmen zielen unmittelbar auf die Eigenproduktion der Kinder. Diese Schülerantworten und -aufgaben haben dann die Funktion, die Kompetenzausprägung zu identifizieren (Leahy et al. 2005). Indem Schüler die Freiheit haben, eigene Ideen zu entwickeln, zeigt sich, was sie über die mathematischen Konzepte oder Objekte wissen, die in den Testaufgaben problematisiert werden. Diese Eigenproduktionen machen deutlich, wo in der Wahrnehmung der Schüler die Grenzen des Wissens und Verstehens erreicht werden.

Wir werden zunächst auf die Transformation von Testaufgaben in offene Formate eingehen und schließen dann den Abschnitt ab, indem wir kurz auf Verwendung von Hilfsaufgaben eingehen, die eine Leistungsbeurteilung informativer machen können (van den Heuvel-Panhuizen 1996). Mit dieser Aufgabentransformation erhält man die Möglichkeit, die sogenannte Zone der nächsten Entwicklung (Vygotsky 1978) beim Schüler sichtbar zu machen und zu erheben, welche Maßnahmen man ergreifen kann, um die Entwicklung des Kindes zu stimulieren. Testaufgaben mit Hilfsaufgaben zu verbinden oder weiterführende Tipps zu geben, bedeutet, dass der Abstand zwischen dem aktuellen Entwicklungsstand des Kindes und seinem potenziellen und zukünftigen Entwicklungsniveau präzisiert werden kann. Die Hilfsaufgaben geben den Lehrern Hinweise darauf, wo und wie Lernzuwächse erzielt werden können.

■ Offene Version einer Testaufgabe

Die geschlossene Form eines Multiple-Choice-Formats wird oft als Hauptgrund dafür genannt, dass ein schriftlicher Test nicht die ganze Breite der mathematischen Fähigkeiten eines Schülers richtig messen kann. Allerdings sind diese Einwände gegen das Testformat nicht immer berechtigt. Nehmen wir z. B. den Bereich des Schätzens. In diesem Bereich bietet sich ein Multiple-Choice-Format deshalb sehr gut an, weil Schülern durch die Antwortoptionen ein überschaubarer Rahmen geboten wird, in dem sie eine Schätzung vornehmen können!

Abb. 3a (S. 198) ist ein gutes Beispiel für eine solche Aufgabe. Ein Schüler kann damit beginnen, über die Antwortalternativen nachzudenken – dies ist durchaus ein legitimer mathematischer Zugang zur Problemlösung. Zunächst schließt er die Antwortalternativen aus, die nicht korrekt sein können einschließlich 1 €, 2 €, und 30 €, weil der Verkaufspreis circa 1 € beträgt und Kevin insgesamt 8 Gläser kauft. Deswegen lautet die Antwort „ungefähr 8 €". Eine sehr gute Schülerin erkennt auch sofort, dass ein Gesamtpreis von ungefähr 12 € bedeuten würde, dass jedes Glas ungefähr 1,50 € und damit zu viel kostet.

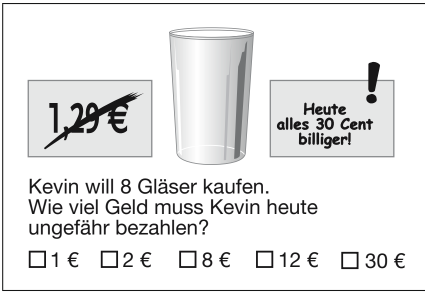


Abb. 3a: Testaufgabe im Multiple-Chice-Format

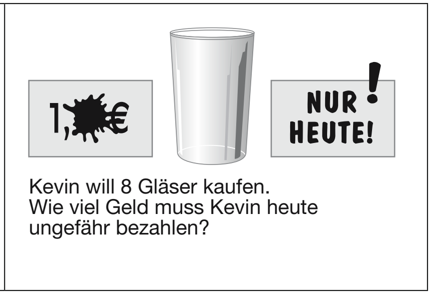


Abb. 3b: Offene Version der Testaufgabe

Die Beantwortung von Alternativen im geschlossenen Multiple-Choice-Format regen zum Nachdenken an, welche wohl die richtige Antwortoption ist. Eine in ein offenes Format überführte Aufgabe, bei der die Schüler selbst schätzen müssen, ist ebenfalls sehr informativ, weil sie zeigt, ob Schüler schätzen können. Kinder, die als Antwort 7,92 € geben, haben die Kompetenz für Schätzen (noch) nicht ausgebildet und erreichen folglich den Standard („*Zahlen und Operationen*: in Kontexten rechnen; das Ergebnis auf Plausibilität prüfen (d) und bei Sachaufgaben entscheiden, ob eine Überschlagsrechnung ausreicht (c)“) noch nicht.

Wenn eine geschlossene Aufgabe in eine offene umgewandelt wird, bedeutet dies üblicherweise, dass die Öffnung auf der Antwortseite erfolgt. Eine grundlegendere Änderung findet dann statt, wenn die Frage selbst offen gehalten wird. Dies kann dadurch erfolgen, dass die Frage unspezifisch formuliert ist oder eine zur Lösung der Aufgabe notwendige Information weggelassen wird. Ein Beispiel dafür ist die Abb. 3b. Ein Tintenfleck auf dem Preisschild führt dazu, dass der Preis nicht mehr vollständig zu sehen ist. Wegen dieser fehlenden Information können die Schüler den Gesamtpreis von 8 Gläsern nur schätzen – genau wie der Lehrer, der den genauen Preis ebenfalls nicht kennt und daher schätzen muss!

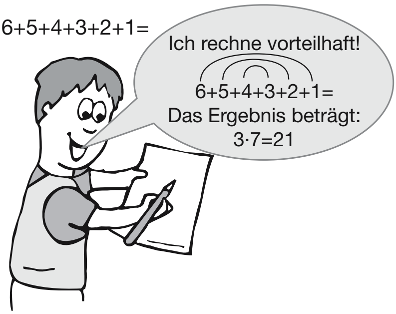
Der offene Charakter der Aufgabe in Abb. 3b macht die Aufgabe für den Lehrer sehr informativ. Auch hier wird den Schülern Freiraum bei der Beantwortung der Aufgabe eingeräumt. Jede Antwort spiegelt in der einen oder anderen Weise den Kompetenzumfang wider. Denkbar ist z.B., dass Schüler einen Preis wählen, den sie subjektiv für akzeptabel halten. Andere Schüler argumentieren: „Ich glaube, ein Glas kostet (ungefähr) 1,25 €, also wird der Gesamtpreis auf (ungefähr) 10 € kommen“, und wiederum andere stellen die Behauptung auf: „Ein Glas kostet bestimmt 1,80 €; also muss Kevin ungefähr 15 € bezahlen.“ Über den „ungefähren Preis“ hinaus können Schüler auch die Spannbreite des Preises angeben und dann z.B. antworten: „Die Gesamtpreise sind mindestens 8 € und maximal 15,95 € (oder 15,92 €)“, eine Antwort, die ein vertieftes Verständnis für die dahinter liegende Problematik belegt.

■ Verbindung einer Hilfsaufgabe mit einer Testaufgabe

Beim Einsatz einer Hilfsaufgabe im Zusammenhang mit einer Testaufgabe handelt es sich faktisch um die verschriftlichte Version eines mündlichen Hinweises. Ein Beispiel einer solchen Aufgabe zeigt Abb. 4.

Schau dir die Zahlen in der Aufgabe an:

6+5+4+3+2+1=



a) Berechne folgende Aufgabe auch vorteilhaft.

20+19+18+17+16+15+14+13+12+11=

Das Ergebnis ist ____________

b) Wie bist du auf die Lösung gekommen?

✍ ____________

____

____

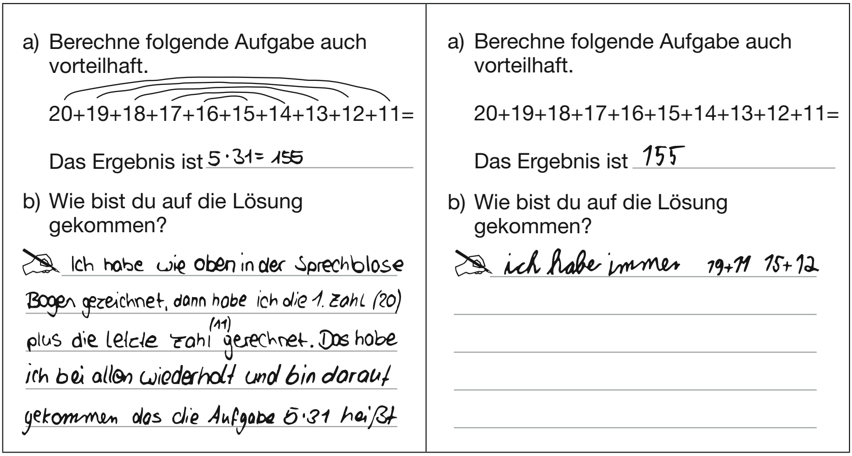
Abb. 4: Testaufgabe mit Hilfsaufgabe

In diesem Falle dient die Hilfsaufgabe dazu, die Kinder auf die Spur des vorteilhaften Rechnens zu bringen. In dieser Aufgabe müssen aufeinander folgende Zahlen addiert werden. Die im Bild angebotene Hilfe zeigt einen geschickten Lösungsweg für die Aufgabe „6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 =“. Die Hilfsaufgabe soll die Lösung der nächsten Aufgabe „20 + 19 + 18 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 + 12 + 11“ erleichtern. Die in der Hilfsaufgabe gezeigte Strategie kann die Schüler dazu anregen, selbige noch einmal anzuwenden, weil die zweite Aufgabe die gleiche Struktur aufweist wie die Beispielaufgabe.

In einer Pilotstudie wurde diese Testaufgabe 35 Schülern einer vierten Klasse vorgelegt. Acht Kinder griffen auf die Strategie des vorteilhaften Rechnens bei der zweiten Aufgabe zurück. Vier Schüler lösten mit dieser Strategie die Aufgabe. Die meisten der acht Schüler imitierten dabei die vorgegebene Strategie (s. z.B. die Arbeit eines Schülers in Abb. 5a, S. 198), aber es gab auch Schüler, welche die Strategie verändert haben. Anstatt 20 und 11, 19 und 12 usw. zu addieren, bildeten sie die Summe von 19 und 11, 18 und 12 usw. und bearbeiteten die Rechnung mit der Zahl 20 getrennt (s. z.B. die Arbeit eines Schülers in Abb. 5b).

Insgesamt lösten 12 von 35 Schülern die zweite Aufgabe richtig. Trotz der unterstützenden Hinweise in der Hilfsaufgabe bestand die von den Schülern bevorzugte Strategie darin, die Dezimalzahlen zu splitten und die Zehner und

Einer getrennt zu addieren. Diese Strategie wurde von 13 Schülern angewandt, von denen allerdings nur 5 die richtige Lösung errechnet haben. Daran kann man erkennen, dass die Strategie, vorteilhaft zu rechnen, die Lösungswahrscheinlichkeit deutlich erhöht. Dies gilt umso mehr, wenn Zahlen größer werden.


a) Berechne folgende Aufgabe auch vorteilhaft.

20+19+18+17+16+15+14+13+12+11=

Das Ergebnis ist 5 · 31 = 155

b) Wie bist du auf die Lösung gekommen?

Ich habe wie oben in der Sprechblose Bogen gezeichnet, dann habe ich die 1. Zahl (20) plus die letcle Zahl (11) gerechnet. Das habe ich bei allen wiederholt und bin darauf gekommen das die Aufgabe 5·31 heißt

a) Berechne folgende Aufgabe auch vorteilhaft.

20+19+18+17+16+15+14+13+12+11=

Das Ergebnis ist 155

b) Wie bist du auf die Lösung gekommen?

ich habe immer 19+11 15+12

Abb. 5a: Beispiel für vorteilhaftes Rechnen

Abb: 5b: Beispiel für vorteilhaftes Rechnen

Natürlich reicht eine Hilfsaufgabe nicht aus, um Schüler zu gewieften Aufgabenlösern zu machen, aber der erste Schritt, um sie auf dieses Leistungsniveau zu bringen, ist, dass Lehrer erkennen und wissen, welche Strategien von den Schülern angewandt werden. Es reicht nicht aus, lediglich die Zahl der richtigen Antworten zu erheben. Um erkennen zu können, was Kindern dabei hilft, eine mathematisch komplexere Strategie anzuwenden, ist es sinnvoll, im Rahmen von Leistungsbeurteilungen Hilfsaufgaben mit Testaufgaben zu verknüpfen. Die dadurch gewonnenen Informationen sind aussagekräftiger und zeigen, dass Testaufgaben den Unterricht beleben können.

10.3 Konsequenzen der Qualitätssicherung für die Einzelschulen und die Möglichkeiten für Qualitätsentwicklung

Die vorausgegangenen Abschnitte haben deutlich gemacht, dass Testaufgaben einen wichtigen Beitrag zur Qualitätssicherung und -entwicklung des Bildungswesens und damit zur Weiterentwicklung des Unterrichts liefern können. Standards und Lernstandsbestimmung – sei es auf Länderebene oder Klassenebene – bilden die beiden Seiten einer Medaille. Die Umsetzung der Standards im Unterricht und deren Erhebung während des Unterrichts oder in groß angelegten Studien gehören also zusammen.

Künftig sollen Schulen regelmäßig an Schulleistungsmessungen teilnehmen, weshalb abschließend die Chancen und Herausforderungen aufgezeigt werden sollen, die sich für die Schule und die einzelnen Lehrkräfte aus einer Teilnahme ergeben.

- **Herausforderungen in Folge der internationalen Studien**
  Im Rahmen von IGLU/PIRLS werden alle fünf Jahre 4. Klassen aus ca. 200 deutschen Grundschulen bundesweit betroffen sein, in denen die Leseleistungen getestet werden. In TIMSS werden die Leistungen in Mathematik und den Naturwissenschaften alle vier Jahre überprüft. Für die Schulen bedeutet dies, dass Kinder der 4. Jahrgangsstufen an der Testung teilnehmen und Lehrkräfte und Schulleitungen Fragebögen zu schulrelevanten Themen ausfüllen. Die Schulen erhalten auf Anfrage eine Rückmeldung darüber, wie die Schule im Vergleich zu Schulen mit einem ähnlichen Umfeld abgeschnitten hat. Die im Rahmen dieser Studien gewonnenen Ergebnisse bilden die Basis für neue Impulssetzungen im Primarbereich.
- **Herausforderungen in Folge der Ländervergleiche**
  Ländervergleiche werden nur alle 5 Jahre auf der Basis von länderrepräsentativen Stichproben stattfinden. Pro Land betrifft dies zwischen 25 und 40 Schulen, in denen eine dritte Klasse getestet wird. Da diese Untersuchungen wie bei TIMSS und IGLU mithilfe von Testleitern realisiert werden, gelten dieselben Herausforderungen für die Einzelschule, wie oben für die internationalen Vergleiche beschrieben wurde.
- **Herausforderungen in Folge der flächendeckenden Vergleichsarbeiten**
  Flächendeckende Vergleichsarbeiten, die zukünftig im Rahmen des VERA3-Programms (vgl. KMK) in 3. Jahrgangsstufen durchgeführt werden, sind deutlich stärker auf die Kooperation mit der Schule und den Lehrkräften angewiesen. Zu festen Zeitpunkten im Jahr werden in jeder 3. Klasse Vergleichsarbeiten in den Fächern Deutsch und Mathematik geschrieben, die von den Lehrkräften administriert und ausgewertet werden sollen. Mit der VERA-Erhebung in 2009 wird es voraussichtlich das erste Mal möglich sein, die Rückmeldungen an die Schulen in Anbindung an die Bildungsstandards zu geben. Schülerleistungen können dann auf dem mit den Bildungsstandards verbundenen Kompetenzmodell abgebildet werden. Somit erhalten Schulen Rückmeldung über die Verteilung der Schülerinnen und Schüler auf die verschiedenen Kompetenzstufen und den Anteil derer, die die mit den Standards verbundenen Leistungen bereits erreichen.

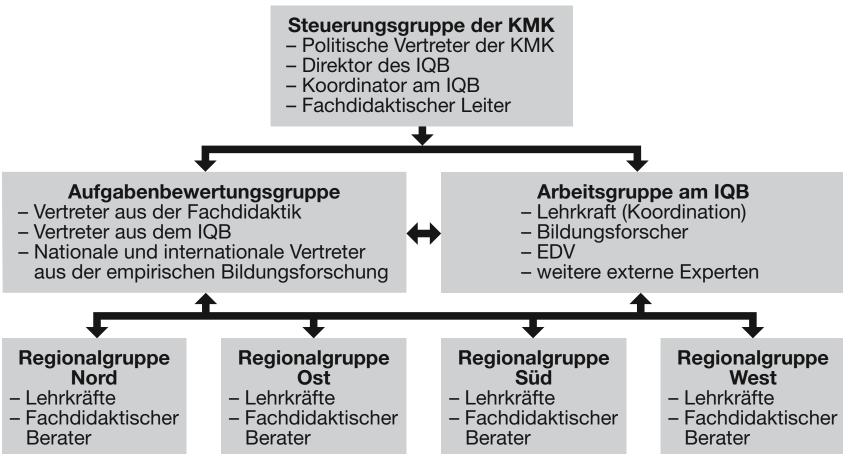
- **Chancen für die interne Evaluation**
  In Ergänzung zu den flächendeckenden Vergleichsarbeiten ist es sinnvoll, Instrumente für Schulen bereitzustellen, mit denen vor Ort festgestellt werden kann, auf welchem Leistungsniveau die Schülerinnen und Schüler bezogen auf den durch die Standards vorgegebenen Referenzrahmen stehen. Geplant ist hier, im Internet Testinstrumente bereitzustellen, die von Lehrkräften zur Feststellung der Schülerkompetenzen verwendet werden können. Dies bedeutet, dass eine Lehrkraft selbst entscheiden kann, wann ein günstiger Zeitpunkt im Schuljahr ist, um die Lernstände seiner Schülerinnen und Schüler festzustellen. Solche Internet-Tools werden aktuell im IQB entwickelt und sollen 2008 mit der Veröffentlichung der nationalen Skalen bereitgestellt werden. Der Nutzen für die Schule und die Lehrkräfte ist hier offensichtlich, weil es in der Hand der Schule liegt, mit diesen Instrumenten eine von der Schule gesteuerte Qualitätssicherung und -entwicklung zu betreiben.
  Die Chancen, die sich aus der Umsetzung und Erhebung der Bildungsstandards für die Agierenden vor Ort ergeben, sind erheblich, andererseits muss aber auch bedacht werden, dass die Bereitstellung von Testinstrumenten und Rückmeldeformaten durch zusätzliche Maßnahmen der Lehrerprofessionalisierung flankiert werden müssen.

11 Zur Entstehung der Aufgaben in diesem Buch

Dietlinde Granzer

Alle in diesem Buch veröffentlichten Aufgaben sind das Ergebnis eines Entwicklungsprozesses, in den Aufgabenentwicklerinnen und Aufgabenentwickler aus allen Bundesländern eingebunden waren. Um gemeinsame Diskussionen über Aufgaben zu ermöglichen, wurden die Aufgabenentwickler in vier Regionalgruppen eingeteilt. Bei ihrer Arbeit erhielten sie fachdidaktische Unterstützung durch wissenschaftliche Berater bzw. Beraterinnen. Die Aufgaben wurden größtenteils erprobt und anschließend einer Bewertergruppe vorgelegt, die sich aus Vertretern der Fachdidaktiker, der Bildungsforschung und der Schulpraxis zusammensetzt; die Aufgaben wurden begutachtet und ggf. überarbeitet. Die auf diese Weise mehrfach bearbeiteten und weiterentwickelten Aufgaben wurden den Autoren dieses Buches zur Verfügung gestellt, die diese durch eigene Aufgaben ergänzt haben.

Der gesamte Prozess der Aufgabenentwicklung wurde gemeinsam von der Kultusministerkonferenz (KMK), dem wissenschaftlichen Leiter der Fachdidaktik (Prof. Dr. Gerd Walther) und vom Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen an der Humboldt-Universität zu Berlin (IQB) gesteuert. Die Architektur der Aufgabengenerierung lässt sich aus der folgenden Grafik entnehmen:



Beteiligte Regionalgruppenmitglieder

Ute Alsdorf, Staatliche Grundschule Gotha-Siebenleben Gotha
Ute Baumann, Kelzin OT Falkenrhede
Thomas Bongartz, Viersen
Brigitte Dedekind, Kiel
Rita Dürr, Grundschule Rommelsbach
Ilse Eckhardt, Grundschule Niederkaufungen
Gerda Frommeyer, Bremen
Hedwig Gasteiger, Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München
Astrid Gebert, Paul-Klee-Grundschule 07G22 Berlin
Dr. Hanna Haubold, PRI Rostock Grundschulbereich Rostock
Dr. Antje Hoffmann, VHTS Edewechter Damm Friesoythe
Barbara Meyer-Wirth, Grundschule Bexbach
Kirsten Räthling, Hamburg
Charlotte Rechtsteiner-Merz, Grundschule Leimbach-Markdorf
Sabine Schmidt, Grundschule „Am Saalehang“ Merseburg
Charlotte Schorr-Brill,Landesinstitut für Pädagogik und Medien Saarbrücken-Dudweiler
Christian Schuster, Grundschule Selztalschule

Federführende Regionalgruppenmitglieder

Wolfram Kriegelstein, Staatl. Schulamt im Landkreis Ansbach
Gudrun Matz, Grundschule „Am Rosenweg“ Delitzsch
Elisabeth Sänger-Feindt, Bezirksregierung Düsseldorf
Mike Schlöder, Hamburg

Wissenschaftliche Beraterin und Berater der Regionalgruppen

Prof. Dr. Peter Bardy, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Prof. Dr. Klaus Hasemann, Universität Hannover
Prof. Dr. Christoph Selter, Universität Dortmund
Prof. Dr. Anna Susanne Steinweg, Otto-Friedrich-Universität Bamberg

Mitglieder der Bewertungsgruppe

Dr. Ingmar Hosenfeld, Universität Koblenz-Landau
Prof. Dr. Eva-Maria Lankes, Universität Lüneburg
Prof. Dr. Jens-Holger Lorenz-Reiß, Pädagogische Hochschule Heidelberg
Dr. Paul Olbrich, Staatl. Schulamt Dillingen
Prof. Dr. Andrea Peter-Koop, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg
Prof. Dr. Kristina Reiss, Ludwig-Maximilian-Universität München
Prof. Dr. Marja van den Heuvel-Panhuizen, Universität Utrecht
Prof. Dr. Gerd Walther, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
Dr. Mareike Kunter, Max-Planck-Institut für Bildungsforschung

12 Pilotierung und Normierung der Testaufgaben im Primarbereich

Olaf Köller/Dietlinde Granzer

Ländervergleiche setzen eine Vielzahl von Testaufgaben voraus, die nach den Regeln der Kunst konstruiert wurden. Als Folge der Festlegung von sechs allgemeinen und fünf inhaltlichen Kompetenzen sowie der drei Anforderungsbereiche ergab sich für die Überprüfung der Erreichung der Bildungsstandards, dass ein Quader mit 90 Zellen (6 allgemeine Kompetenzen x 5 inhaltliche Kompetenzen x 3 Anforderungsbereiche) mit Testaufgaben gefüllt werden musste. Vor diesem Hintergrund wurden für die Entwicklung der Testaufgaben im Fach Mathematik in der Grundschule Strukturen aufgebaut, wie sie in Abb. auf S. 203 zu sehen sind. Diese Organisation des Aufgabenentwicklungsprozesses am IQB wird im Übrigen für alle Fächer realisiert.

In Mathematik wurden rund 900 Teilaufgaben erstellt, die jeweils den allgemeinen und inhaltlichen Kompetenzen sowie den Anforderungsniveaus zugeordnet wurden. Die Aufgaben wurden im Frühjahr 2006 im Rahmen der Internationalen Grundschul-Lese-Untersuchung (IGLU) in einer national repräsentativen Stichprobe in 3. und 4. Klassen erprobt. Das Ziel dieser Pilotstudie bestand darin, solche Teilaufgaben zu identifizieren, die für die Testung geeignet sind und ungeeignete auszuscheiden. Ungeeignet heißt hier:

- Die Aufgabe ist zu leicht (fast alle Schülerinnen und Schüler lösen sie).
- Die Aufgabe ist zu schwer (kaum ein Schüler bzw. eine Schülerin löst sie).
- Die Aufgabe ist nicht trennscharf (gute Schülerinnen und Schüler lösen sie nicht häufiger als schwache Schüler).
- Die Aufgabe erfasst nicht die Kompetenz, die sie erfassen sollte.
- Die Aufgabe benachteiligt spezifische Schülergruppen (z. B. die Mädchen).

Insgesamt bearbeiteten rund 12 000 Schülerinnen und Schüler aus allen 16 Ländern die rund 900 Teilaufgaben. Die Schülerinnen und Schüler kamen aus den 3. und 4. Jahrgangstufen. Dabei wurde ein Untersuchungsplan umgesetzt, bei dem jedem Schüler/jeder Schülerin nur eine Teilmenge der Aufgaben vorgelegt wurde. Die Testung dauerte 2 x 40 Minuten (zwei Schulstunden). Nach den gerade genannten Kriterien wurden 370 Teilaufgaben ausgeschlossen. Die übrigen Aufgaben kamen in die Normierung. Die Normierungsstudie mit rund 12000 Schülern wurde im Jahr 2007 durchgeführt mit der Zielsetzung, nationale Skalen, wie sie seit IGLU oder PISA bekannt sind, im Jahr 2008 bereitzustellen.

13 Übersicht über die Aufgaben

Dietlinde Granzer/Sebastian Waack

Lfd. Nr.	Name der Aufgabe	Buch-seite	CD-ROM	Klasse			
				1	2	3	4
3 Allgemeiner Teil							
1	Aufgabenpärchen berechnen	16	×			×	×
2	Aufgabenpärchen – Muster erkennen	16	×			×	×
3	Zahlengitter – Einführung	27	×		×	×	×
4	Zahlengitter mit Zielzahl 20 – Finden	27	×		×	×	×
5	Zahlengitter mit Zielzahl 20 – Finden und beschreiben	29	×		×	×	×
6	Zahlengitter mit Zielzahl 20 – Erklären		×			×	×
7	Zahlengitter mit Zielzahl 64 – Finden		×		(×)	×	×
8	Zahlengitter mit Zielzahl 64 – Finden und beschreiben		×			×	×
9	Zahlengitter mit Zielzahl 64 – Erklären		×			×	×
10	Zahlengitter mit Zielzahl 2222 – Finden		×			(×)	×
11	Zahlengitter mit Zielzahl 2222 –Finden und beschreiben		×				×
12	Zahlengitter mit Zielzahl 2222 – Erklären		×				×
13	Zahlengitter mit Zielzahl 9998 – Finden		×			(×)	×
14	Zahlengitter mit Zielzahl 9998 – Finden und beschreiben		×				×
15	Zahlengitter mit Zielzahl 9998 – Erklären		×				×
16	Alle Zahlengitter mit Zielzahl 22	29	×				×
17	Multigitter a)		×				×
	Multigitter b)		×				×

Inhaltliche Kompetenzen					**Allgemeine Kompetenzen**						**Anforderunds-bereiche**		
Zahlen und Operationen	Raum und Form	Muster und Strukturen	Größen und Messen	Daten, Häufigkeit, und Wahrschein-lichkeit	Grundfertigkeiten	Problemlösen	Kommunizieren	Argumentieren	Modellieren	Darstellen	Reproduzieren	Zusammenhänge herstellen	Verallgemeinern, Reflektieren
I-1	I-2	I-3	I-4	I-5	A-0	A-1	A-2	A-3	A-4	A-5	AB I	AB II	AB III
×					×			×			×		
×		×				×						×	
×					×		×				×		
×						×					×		
×		×					×					×	
×		×						×					×
×						×					×		
×		×					×					×	
×		×						×					×
×						×					×		
×		×					×					×	
×		×						×					×
×						×					×		
×		×					×					×	
×		×						×					×
×		×						×				×	
×		×						×				×	
×		×			×			×				×	

Lfd. Nr.	Name der Aufgabe	Buch-seite	CD-ROM	Klasse			
				1	2	3	4
3 Allgemeiner Teil							
17	Multigitter c)		×				×
	Multigitter d)		×				×
18	956 : 4	30-32	×			×	
19	Aufgabenpäckchen	32/33	×			×	×
20	Zahlenmauer – größte Zielzahl	34	×		×		
21	Zahlenmauer – kleinste Zielzahl		×		×		
22	Zeitungsmeldung	35	×				×
23	Große und kleine Hunde	36/37	×			×	×
24	Rechengeschichten	38	×		×		
4 Muster und Strukturen							
25	Zahlenmauer	44, 51	×			×	×
26	Zehnerübergang a)	44, 51/52	×			×	×
26	Zehnerübergang b)		×			×	×
27	Sachaufgabe „Brötchen“	45, 52	×			×	×
28	Sachaufgabe „Milchpreis“	45, 52	×			×	×
29	Hunderterfeld – Einmaleins	54–57	×		×	×	
30	Rechenpäckchen – Berechnen und Muster finden	57/58	×			×	×
31	Folienkreuz	59	×			×	×
32	Rechenkette 1	60-62	×			×	
33	Rechenkette 2	60-62	×			×	
34	Rechenkette 3	60-62	×			×	
35	Löwen im Zoo	62/63	×				×
5 Zahlen und Operationen							
36	Zahlvorstellungen	66/67	×	×	×		

Inhaltliche Kompetenzen					**Allgemeine Kompetenzen**						**Anforderunds-bereiche**		
Zahlen und Operationen	Raum und Form	Muster und Strukturen	Größen und Messen	Daten, Häufigkeit, und Wahrschein-lichkeit	Grundfertigkeiten	Problemlösen	Kommunizieren	Argumentieren	Modellieren	Darstellen	Reproduzieren	Zusammenhänge herstellen	Verallgemeinern, Reflektieren
I-1	I-2	I-3	I-4	I-5	A-0	A-1	A-2	A-3	A-4	A-5	AB I	AB II	AB III
×		×						×					×
×		×						×					×
×							×					×	
×						×		×				×	
×								×				×	
×								×				×	
×						×			×			×	
				×						×		×	
×									×	×		×	
×		×				×						×	
×					×						×		
×		×			×			×				×	
×								×	×			×	
×								×	×			×	
×		×				×	×					×	
×		×			×	×	×				×	×	
×		×			×		×				×	×	
×		×				×		×			×	×	
×		×			×		×				×	×	
×		×				×		×			×	×	
×		×				×				×		×	
×					×	×					×	×	

Lfd. Nr.	**Name der Aufgabe**	**Buch-seite**	**CD-ROM**	**Klasse**			
				1	2	3	4
5 Zahlen und Operationen							
37	Drei gleiche Teile – Finden	68	×	×	×		
38	Drei gleiche Teile – Erklären	68	×		×	×	
39	Drei gleiche Teile – Dreierreihe	68	×		×	×	
40	Zueinander passende Zahlen	68	×			×	×
41	Eine Million	69	×				×
42	Hausnummer	69	×	×			
43	Ungerade Zahlen	69	×	×			
44	Große Zahlen darstellen	69	×	×	×		
45	Nach den Millionen	69	×	×	×		
46	Lernpakete schnüren 1	70	×	×			
47	Lernpakete schnüren 2	70	×	×			
48	Rechenpakete	70	×			×	
49	Rechenreihenfolge	70	×			×	×
50	Malaufgaben 1	70	×			×	×
51	Malaufgaben 2	70	×			×	×
52	Glatte Hunderter	71	×			×	×
53	Schriftlich oder mündlich?	71	×			×	×
54	Im Kopf rechnen?	71	×			×	×
55	Sieben Zwerge	71	×	×			
56	Gerecht teilen	72	×		×		
57	Legosteine	72	×			×	×
58	Sammelbilder	73	×	×			
59	Zielzahl 1000	74	×			×	
60	Zahlen kennenlernen a)	75	×	×			

Inhaltliche Kompetenzen					Allgemeine Kompetenzen						Anforderunds-bereiche		
Zahlen und Operationen	Raum und Form	Muster und Strukturen	Größen und Messen	Daten, Häufigkeit, und Wahrschein-lichkeit	Grundfertigkeiten	Problemlösen	Kommunizieren	Argumentieren	Modellieren	Darstellen	Reproduzieren	Zusammenhänge herstellen	Verallgemeinern, Reflektieren
I-1	I-2	I-3	I-4	I-5	A-0	A-1	A-2	A-3	A-4	A-5	AB I	AB II	AB III
×						×					×	×	
×						×						×	
×							×					×	
×						×		×				×	
×							×	×				×	
×						×	×					×	
×							×				×	×	
×										×		×	
×							×					×	×
×					×	×						×	
×					×			×				×	
×						×	×				×	×	
×							×	×			×	×	
×						×						×	×
×							×	×				×	×
×						×					×	×	
×						×		×				×	×
×						×		×				×	×
×						×			×		×	×	
×						×			×			×	
×						×			×			×	×
×						×			×			×	×
×					×	×					×	×	
×					×		×				×		

Lfd. Nr.	Name der Aufgabe	Buch-seite	CD-ROM	Klasse			
				1	2	3	4
5 Zahlen und Operationen							
60	Zahlen kennenlernen b)	75	×	×			
	Zahlen kennenlernen c)	75	×	×			
61	Kartenspiel	75	×	×			
62	Stäbchen	75	×	×			
63	Das kann ich schon rechnen	75	×	(×)			
64	Multiplizieren	77	×			×	
65	Zahlenhäuser bauen	77	×			×	×
66	Zahlenhäuser vergleichen	77	×			×	×
67	Paare im Zahlenhaus	77	×			×	×
68	Zahlenwaage	80	×		×	×	×
69	Zahlenhaus	81	×			×	×
70	Muster in Rechenpäckchen	81	×			×	
71	Magisches Quadrat erklären	82	×	×	×	×	×
72	Magisches Quadrat ergänzen	82	×	×	×	×	×
73	Magisches Quadrat ausfüllen	82	×	×	×	×	×
74	Magische Quadrate konstruieren	82	×		×	×	×
75	Klassentabelle interpretieren 1	83	×		×	×	
76	Klassentabelle interpretieren 2		×		×	×	
77	Klassentabelle interpretieren und erstellen		×		×	×	
78	Wasserverbrauch	83	×				×
79	Geschickt rechnen	85	×			×	
80	Rechenkonferenz	85	×		×	×	
81	Forscheraufgaben	85/86	×			×	×
82	Denkfehler	86	×		×		

	Inhaltliche Kompetenzen					Allgemeine Kompetenzen						Anforderunds-bereiche		
	Zahlen und Operationen	Raum und Form	Muster und Strukturen	Größen und Messen	Daten, Häufigkeit, und Wahrschein-lichkeit	Grundfertigkeiten	Problemlösen	Kommunizieren	Argumentieren	Modellieren	Darstellen	Reproduzieren	Zusammenhänge herstellen	Verallgemeinern, Reflektieren
	I-1	I-2	I-3	I-4	I-5	A-0	A-1	A-2	A-3	A-4	A-5	AB I	AB II	AB III
	×					×		×				×		
	×					×		×				×		
	×					×		×				×		
	×					×		×				×		
	×					×		×				×		
	×					×		×				×		
	×					×	×						×	
	×					×			×				×	
	×					×		×					×	
	×					×	×					×	×	
	×					×	×					×	×	
	×						×		×			×	×	
	×		×			×			×				×	
	×					×	×					×	×	×
	×		×				×		×				×	×
	×		×				×		×				×	×
	×				×		×				×		×	
	×				×		×				×		×	
	×				×		×				×		×	
	×				×			×		×				×
	×					×	×						×	
	×							×				×		
	×								×					×
	×							×	×				×	

Lfd. Nr.	Name der Aufgabe	Buchseite	CD-ROM	Klasse			
				1	2	3	4
5 Zahlen und Operationen							
83	Ortsentfernungen	87	×			×	
84	Orte und Straßen	87	×			×	
85	Rechenstrich	87	×	×	×		
6 Größen und Messen							
86	In welcher Einheit misst du …? a)	102	×		×		
	In welcher Einheit misst du …? b)	102	×		×		
	In welcher Einheit misst du …? c)	102	×		×		
	In welcher Einheit misst du …? d)	102	×		×		
	In welcher Einheit misst du …? e)	102	×		×		
	In welcher Einheit misst du …? f)	102	×		×		
	In welcher Einheit misst du …? g)	102	×		×		
	In welcher Einheit misst du …? h)	102	×		×		
	In welcher Einheit misst du …? i)	102	×		×		
	In welcher Einheit misst du …? j)	102	×		×		
	In welcher Einheit misst du …? k)	102	×		×		
	In welcher Einheit misst du …? l)	102	×		×		
	In welcher Einheit misst du …? m)	102	×		×		
	In welcher Einheit misst du …? n)	102	×		×		
	In welcher Einheit misst du …? o)	102	×		×		
	In welcher Einheit misst du …? p)	102	×		×		
87	Geld im Portemonnaie a)	102	×		×		
	Geld im Portemonnaie b)	102	×		×		
	Geld im Portemonnaie c)	102	×		×		
88	Spielgeld	102	×		×		

	Inhaltliche Kompetenzen					Allgemeine Kompetenzen						Anforderunds-bereiche		
	Zahlen und Operationen	Raum und Form	Muster und Strukturen	Größen und Messen	Daten, Häufigkeit, und Wahrscheinlichkeit	Grundfertigkeiten	Problemlösen	Kommunizieren	Argumentieren	Modellieren	Darstellen	Reproduzieren	Zusammenhänge herstellen	Verallgemeinern, Reflektieren
	I-1	I-2	I-3	I-4	I-5	A-0	A-1	A-2	A-3	A-4	A-5	AB I	AB II	AB III
	×	×								×		×		
	×	×								×	×		×	
	×			×		×					×	×		
				×			×	×				×	×	
				×			×	×				×	×	
				×			×	×				×	×	
				×			×	×				×	×	
				×			×	×				×	×	
				×			×	×				×	×	
				×			×	×				×	×	
				×			×	×				×	×	
				×			×	×				×	×	
				×			×	×				×	×	
				×			×	×				×	×	
				×			×	×				×	×	
				×			×	×				×	×	
				×			×	×				×	×	
				×			×	×				×	×	
				×			×	×				×	×	
				×			×	×				×	×	
				×			×	×				×	×	
				×			×	×					×	×
				×			×	×				×	×	

Lfd. Nr.	Name der Aufgabe	Buch-seite	CD-ROM	Klasse			
				1	2	3	4
6 Größen und Messen							
89	Lernumgebung: Messstrategien a)	104	×	×	×		
	Lernumgebung: Messstrategien b)	104	×	×	×		
	Lernumgebung: Messstrategien c)	104	×	×	×		
	Lernumgebung: Messstrategien d)	104	×	×	×		
	Lernumgebung: Messstrategien e)	104	×	×	×		
90	Zeitplakate	105	×		×	×	
91	Meine 1-Meter-Seite a)	105	×		×	×	
	Meine 1-Meter-Seite b)	105	×		×	×	
92	Wie alt bin ich?	106	×			×	
93	Stützpunktvorstellungen	107	×			×	
94	Kassenzettel	109	×				×
95	Preistabelle ergänzen		×				×
96	Meterquadrate	111	×				×
97	Geldscheine 1	113	×			×	
98	Geldscheine 2 a)	113	×			×	
	Geldscheine 2 b)	113	×			×	
	Geldscheine 2 c)	113	×			×	
99	Kilometerzähler a)	115	×			×	
	Kilometerzähler b)	115	×			×	
100	Zeichnerische Lösung	115/116	×			×	
101	Fermiaufgabe – Wasserverbrauch	117	×			×	
102	Fermiaufgabe – Eisbär	117	×			×	
103	Fermiaufgabe – Stau	117	×			×	
7 Raum und Form							

	Inhaltliche Kompetenzen					**Allgemeine Kompetenzen**						**Anforderunds-bereiche**		
	Zahlen und Operationen	Raum und Form	Muster und Strukturen	Größen und Messen	Daten, Häufigkeit, und Wahrschein-lichkeit	Grundfertigkeiten	Problemlösen	Kommunizieren	Argumentieren	Modellieren	Darstellen	Reproduzieren	Zusammenhänge herstellen	Verallgemeinern, Reflektieren
	I-1	I-2	I-3	I-4	I-5	A-0	A-1	A-2	A-3	A-4	A-5	AB I	AB II	AB III
				×			×	×				×	×	×
				×			×	×				×	×	×
				×			×	×				×	×	×
				×			×	×				×	×	×
				×			×	×				×	×	×
				×		×		×					×	
				×		×		×					×	
				×		×		×					×	
				×				×				×	×	
				×		×		×				×		
	×			×		×	×						×	
	×		×	×		×	×						×	
		×		×		×	×						×	
	×			×			×			×			×	×
	×			×			×			×			×	×
	×			×						×	×			×
	×			×		×	×							×
				×			×			×			×	
				×			×			×			×	
				×			×				×			×
	×			×			×		×				×	
	×			×			×		×				×	
	×			×			×		×				×	

Lfd. Nr.	Name der Aufgabe	Buch-seite	CD-ROM	Klasse			
				1	2	3	4
7 Raum und Form							
104	Parkettieren mit Dreiecken a)	119	×	×	×		
	Parkettieren mit Dreiecken b)	119	×	×	×		
105	Vom Kinder-Muster zum Plan	121	×		×		
106	Vom Plan zum Kinder-Muster	121	×		×		
107	Stau-Aufgabe ohne Anleitung	122	×			×	×
108	Stau-Aufgabe mit Anleitung	122	×		×	×	
109	Das verrückte Zimmer	124	×		×		
110	Muster in Zeichenuhren a)	125	×		×	×	×
	Muster in Zeichenuhren b)	125	×		×	×	×
111	Zahlenmuster und Bildmuster a)	126	×		×	×	×
	Zahlenmuster und Bildmuster b)	126	×		×	×	×
112	Transparentkopieren: Herz a)	127	×		×	×	
	Transparentkopieren: Herz b)	127	×		×	×	
113	Paraden, Schilde und Kränze	127	×			×	×
114	Verkleinern über Papiergröße und Gitter	129	×		×	×	
115	Kostbare Häuser	130	×		×	×	
116	5-Euro-Haus	130	×		×	×	
117	5-cm-Würfel	130	×		×	×	
118	Zentimeterwürfel	130	×		×	×	
119	10-cm-Würfel	130	×		×	×	
120	Wege führen: Lotse und Kapitän a)	132–134	×		×	×	
	Wege führen: Lotse und Kapitän b)	132–134	×		×	×	
	Wege führen: Lotse und Kapitän c)	132–134	×		×	×	
	Wege führen: Lotse und Kapitän d)	132–134	×		×	×	

Inhaltliche Kompetenzen					**Allgemeine Kompetenzen**						**Anforderunds-bereiche**		
Zahlen und Operationen	Raum und Form	Muster und Strukturen	Größen und Messen	Daten, Häufigkeit, und Wahrschein-lichkeit	Grundfertigkeiten	Problemlösen	Kommunizieren	Argumentieren	Modellieren	Darstellen	Reproduzieren	Zusammenhänge herstellen	Verallgemeinern, Reflektieren
I-1	I-2	I-3	I-4	I-5	A-0	A-1	A-2	A-3	A-4	A-5	AB I	AB II	AB III
	×						×	×				×	
	×						×	×				×	
	×								×	×	×		
	×						×				×		
	×								×				×
	×								×			×	
	×				×		×				×		
	×				×					×	×		
	×								×	×		×	
	×								×	×		×	
	×								×	×		×	
	×				×	×				×	×		
	×				×	×				×	×		
	×				×					×		×	
	×					×				×	×	×	
	×		×						×		×	×	
	×		×						×			×	
	×					×		×				×	
	×					×		×				×	
	×					×		×				×	
	×						×			×		×	
	×						×					×	
	×						×			×		×	
	×						×			×		×	

Lfd. Nr.	Name der Aufgabe	Buch-seite	CD-ROM	Klasse			
				1	2	3	4
7 Raum und Form							
121	Ecken-Kanten-Modelle bauen	135	×			×	
122	Ecken-Kanten-Modelle mental ergänzen	135	×			×	
123	Bauen nach Dokument a)	136	×			×	
	Bauen nach Dokument b)	136	×			×	
	Bauen nach Dokument c)	136	×			×	
124	Bauen nach Plan	137	×			×	
125	Würfelnetze herstellen und testen a)	138	×			×	
	Würfelnetze herstellen und testen b)	138	×			×	
126	Würfelnetze klassifizieren a)	139	×			×	
	Würfelnetze klassifizieren b)	139	×			×	
	Würfelnetze klassifizieren c)	139	×			×	
127	Würfelnetze benennen	140	×			×	
8 Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit							
128	Daten sammeln a)	142	×		×	×	×
	Daten sammeln b)	142	×		×	×	×
	Daten sammeln c)	142	×		×	×	×
	Daten sammeln d)	142	×		×	×	×
	Daten sammeln e)	142	×		×	×	×
	Daten sammeln f)	142	×		×	×	×
	Daten sammeln g)	142	×		×	×	×
129	Unsere Familien a)	146	×	×			
	Unsere Familien b)	146	×	×			
130	Experiment – Kugeln ziehen a)	147	×		×	×	×
	Experiment – Kugeln ziehen b)	147	×		×	×	×

Inhaltliche Kompetenzen					**Allgemeine Kompetenzen**						**Anforderunds-bereiche**		
Zahlen und Operationen	Raum und Form	Muster und Strukturen	Größen und Messen	Daten, Häufigkeit, und Wahrschein-lichkeit	Grundfertigkeiten	Problemlösen	Kommunizieren	Argumentieren	Modellieren	Darstellen	Reproduzieren	Zusammenhänge herstellen	Verallgemeinern, Reflektieren
I-1	I-2	I-3	I-4	I-5	A-0	A-1	A-2	A-3	A-4	A-5	AB I	AB II	AB III
	×						×			×		×	
	×						×			×		×	
	×						×			×		×	
	×						×			×			×
	×						×			×			×
	×						×			×		×	
	×					×		×			×		
	×					×		×				×	
	×					×	×			×		×	
	×					×	×			×		×	
	×					×	×			×		×	
	×					×	×			×		×	
				×			×			×	×	×	
				×			×			×	×	×	
				×			×			×	×	×	
				×			×			×	×	×	
				×			×			×	×	×	
				×			×			×	×	×	
				×			×			×	×	×	
				×			×			×	×		
				×			×			×	×		
×				×						×		×	×
×				×		×				×		×	

Lfd. Nr.	Name der Aufgabe	Buchseite	CD-ROM	Klasse			
				1	2	3	4
8 Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit							
131	Umfrage zum Freizeitsport a)	148	×		×	×	
	Umfrage zum Freizeitsport b)	148	×		×	×	
132	Kugeln in der Kiste 1 a)	154	×		×		
	Kugeln in der Kiste 1 b)	154	×		×		
133	Kugeln in der Kiste 2 a)	156	×		×		
	Kugeln in der Kiste 2 b)	156	×		×		
	Kugeln in der Kiste 2 c)	156	×		×		
134	Färben von Glücksrädern a)	157	×		×	×	
	Färben von Glücksrädern b)	157	×		×	×	
135	Blockdiagramme zum Kugel-Ziehen	158	×			×	
136	Gerechte Spielregeln 1	159	×			×	
137	Gerechte Spielregeln 2	159	×			×	
138	Gerechte Spielregeln 3	159	×			×	
9 Computereinsatz im Mathematikunterricht							
139	Kaputter Taschenrechner	168			×	×	×
140	Würfelgebäude	169		×	×	×	×
141	Faltanleitungen	169/170		×	×	×	×
142	Zeichenprogramme	170			×	×	×
143	Perlenkette	173		×	×	×	×
144	Google Earth	174		×	×	×	×
145	Alle Lichter an!	176		×	×	×	×
10 Bildungsmonitoring und Lernstandsbestimmung							
146	Würfelnetz mit schwarzer Ecke	185	×				×
147	Quader falten	186	×				×

	Inhaltliche Kompetenzen					Allgemeine Kompetenzen						Anforderunds-bereiche		
	Zahlen und Operationen	Raum und Form	Muster und Strukturen	Größen und Messen	Daten, Häufigkeit, und Wahrschein-lichkeit	Grundfertigkeiten	Problemlösen	Kommunizieren	Argumentieren	Modellieren	Darstellen	Reproduzieren	Zusammenhänge herstellen	Verallgemeinern, Reflektieren
	I-1	I-2	I-3	I-4	I-5	A-0	A-1	A-2	A-3	A-4	A-5	AB I	AB II	AB III
					×			×		×			×	
					×			×		×			×	
					×			×	×				×	
					×			×	×				×	
					×			×	×				×	
					×			×	×				×	
					×			×	×				×	
					×				×				×	
					×				×				×	×
					×				×		×		×	×
					×				×			×	×	
					×				×			×	×	
					×			×	×				×	×
	×					×	×						×	
		×					×	×	×		×		×	
		×						×					×	
		×				×							×	
		×	×				×		×				×	
		×		×			×			×			×	
	×						×						×	
		×					×						×	
		×					×						×	

Lfd. Nr.	Name der Aufgabe	Buch-seite	CD-ROM	Klasse			
				1	2	3	4
10 Bildungsmonitoring und Lernstandsbestimmung							
148	Vogeleier-Diagramm a)	186	×			×	×
	Vogeleier-Diagramm b)	186	×			×	×
149	Rechenketten a)	191	×			×	×
	Rechenketten b) „Beweis“	191	×			×	×
150	Geschicktes Rechnen	192/193	×				×
151	Geschlossene Testaufgabe	198	×				×
152	Offene Testaufgabe	200	×				×
153	Hilfsaufgabe und Testaufgabe a)	201/202	×				×
	Hilfsaufgabe und Testaufgabe b)	201/202	×				×
Anhang: Weitere Aufgaben der Aufgabenentwickler und der wissenschaftlichen Berater/innen							
154	Summanden vertauschen		×			×	×
155	Lösungswege beschreiben		×			×	×
156	Schriftlich oder mündlich?		×			×	×
157	Im Kopf rechnen?		×			×	×
158	Stau-Aufgabe		×				×
159	Aufgabenfolgen – Mal a)		×				×
	Aufgabenfolgen – Mal b)		×				×
	Aufgabenfolgen – Mal c)		×				×
160	Aufgabenfolgen – Minus		×			×	
161	Kugelbahnaufgaben		×			×	×
162	Rechenrätsel		×	×	×	×	×
163	Zahlenketten		×	×	×	×	×
164	Zahlenketten – Zielzahl treffen		×		×	×	×
165	Zielzahlrechnen		×	×			

Inhaltliche Kompetenzen					Allgemeine Kompetenzen						Anforderunds-bereiche		
Zahlen und Operationen	Raum und Form	Muster und Strukturen	Größen und Messen	Daten, Häufigkeit, und Wahrschein-lichkeit	Grundfertigkeiten	Problemlösen	Kommunizieren	Argumentieren	Modellieren	Darstellen	Reproduzieren	Zusammenhänge herstellen	Verallgemeinern, Reflektieren
I-1	I-2	I-3	I-4	I-5	A-0	A-1	A-2	A-3	A-4	A-5	AB I	AB II	AB III
				×		×				×		×	
				×		×				×		×	
×		×				×		×				×	
×		×				×		×				×	×
×		×				×	×						×
×			×			×			×			×	
×			×			×			×			×	
×							×	×				×	
×							×	×				×	
×							×				×	×	
×							×					×	
×							×					×	
×							×					×	
×			×				×		×			×	
		×						×			×		
		×						×				×	
		×						×				×	×
		×				×	×					×	
		×			×	×					×	×	
×						×				×		×	
×		×				×	×					×	
×		×					×					×	
×						×						×	

Lfd. Nr.	Name der Aufgabe	Buchseite	CD-ROM	Klasse			
				1	2	3	4
Anhang: Weitere Aufgaben der Aufgabenentwickler und der wissenschaftlichen Berater/innen							
166	Lernumgebung: Klassenzimmer – Plan a)		×	×	×	×	×
	Lernumgebung: Klassenzimmer – Plan b)		×	×	×	×	×
	Lernumgebung: Klassenzimmer – Plan c)		×	×	×	×	×
	Lernumgebung: Klassenzimmer – Plan d)		×	×	×	×	×
167	Streichholzschachtel kippen a)		×		×	×	×
	Streichholzschachtel kippen b)		×		×	×	×
	Streichholzschachtel kippen c)		×		×	×	×
	Streichholzschachtel kippen d)		×		×	×	×
	Streichholzschachtel kippen e)		×		×	×	×
	Streichholzschachtel kippen f)		×		×	×	×
	Streichholzschachtel kippen g)		×		×	×	×
	Streichholzschachtel kippen h)		×		×	×	×
	Streichholzschachtel kippen i)		×		×	×	×
	Streichholzschachtel kippen j)		×		×	×	×
	Streichholzschachtel kippen k)		×		×	×	×
	Streichholzschachtel kippen l)		×		×	×	×
	Streichholzschachtel kippen m)		×		×	×	×
	Streichholzschachtel kippen n)		×		×	×	×
	Streichholzschachtel kippen o)		×		×	×	×
	Streichholzschachtel kippen p)		×		×	×	×
	Streichholzschachtel kippen q)		×		×	×	×
	Streichholzschachtel kippen r)		×		×	×	×
168	Motorräder und Autos		×				×
169	Musterfolge fortsetzen a)		×			×	×

	Inhaltliche Kompetenzen					**Allgemeine Kompetenzen**						**Anforderunds-bereiche**		
	Zahlen und Operationen	Raum und Form	Muster und Strukturen	Größen und Messen	Daten, Häufigkeit, und Wahrschein-lichkeit	Grundfertigkeiten	Problemlösen	Kommunizieren	Argumentieren	Modellieren	Darstellen	Reproduzieren	Zusammenhänge herstellen	Verallgemeinern, Reflektieren
	I-1	I-2	I-3	I-4	I-5	A-0	A-1	A-2	A-3	A-4	A-5	AB I	AB II	AB III
		×						×			×	×	×	
		×									×		×	
		×						×			×		×	×
		×						×			×		×	×
		×						×			×	×		
		×						×			×	×		
		×						×			×	×		
		×						×			×	×	×	
		×						×			×		×	
		×						×			×	×		
		×						×			×	×		
		×						×			×		×	
		×						×			×		×	×
		×						×			×		×	×
		×						×			×		×	×
		×						×			×		×	×
		×						×			×		×	×
		×						×			×		×	×
		×						×			×		×	×
		×						×			×		×	×
		×						×			×		×	×
		×						×			×		×	×
	×									×			×	
			×				×	×				×		

Lfd. Nr.	Name der Aufgabe	Buch-seite	CD-ROM	Klasse			
				1	2	3	4
Anhang: Weitere Aufgaben der Aufgabenentwickler und der wissenschaftlichen Berater/innen							
169	Musterfolge fortsetzen b)		×			×	×
170	Musterfolge erklären a)		×			×	×
	Musterfolge erklären b)		×			×	×
	Musterfolge erklären c)		×			×	×
	Musterfolge erklären d)		×			×	×
	Musterfolge erklären e)		×			×	×
171	Musterfolge weiterführende Ideen a)		×			×	×
	Musterfolge weiterführende Ideen b)		×			×	×
	Musterfolge weiterführende Ideen c)		×			×	×
	Musterfolge weiterführende Ideen d)		×			×	×
	Musterfolge weiterführende Ideen e)		×			×	×
	Musterfolge weiterführende Ideen f)		×			×	×
	Musterfolge weiterführende Ideen g)		×			×	×
	Musterfolge weiterführende Ideen h)		×			×	×
172	Pentominos		×				×
173	Zahlenketten a)		×			×	
	Zahlenketten b)		×			×	
	Zahlenketten c)		×			×	
	Zahlenketten d)		×			×	
	Zahlenketten e)		×			×	
174	Buchstaben auf der Hundertertafel 1 a)		×			×	×
	Buchstaben auf der Hundertertafel 1 b)		×			×	×
175	Buchstaben auf der Hundertertafel 2 a)		×			×	×
	Buchstaben auf der Hundertertafel 2 b)		×			×	×

Inhaltliche Kompetenzen					**Allgemeine Kompetenzen**						**Anforderunds-bereiche**		
Zahlen und Operationen	Raum und Form	Muster und Strukturen	Größen und Messen	Daten, Häufigkeit, und Wahrschein-lichkeit	Grundfertigkeiten	Problemlösen	Kommunizieren	Argumentieren	Modellieren	Darstellen	Reproduzieren	Zusammenhänge herstellen	Verallgemeinern, Reflektieren
I-1	I-2	I-3	I-4	I-5	A-0	A-1	A-2	A-3	A-4	A-5	AB I	AB II	AB III
		×				×	×				×		
		×				×	×					×	
		×				×	×					×	
		×				×	×	×				×	
		×				×	×	×				×	
		×				×	×	×				×	
		×				×		×				×	
		×				×		×				×	
		×				×		×				×	
		×				×		×				×	
		×				×		×				×	
		×				×		×				×	
		×				×		×					×
		×				×		×					×
	×						×					×	
		×				×		×				×	
		×				×		×				×	
		×				×		×				×	
		×				×		×				×	
		×				×		×				×	
	×	×					×					×	
	×	×				×						×	
	×	×					×	×					×
	×	×					×	×					×

Lfd. Nr.	Name der Aufgabe	Buch-seite	CD-ROM	Klasse			
				1	2	3	4
Anhang: Weitere Aufgaben der Aufgabenentwickler und der wissenschaftlichen Berater/innen							
175	Buchstaben auf der Hundertertafel 2 c)		×			×	×
176	Gemüse wiegen a)		×			×	
	Gemüse wiegen b)		×			×	
	Gemüse wiegen c)		×			×	
	Gemüse wiegen d)		×			×	
177	Schüttelkugel		×			×	×
178	Ziehen ohne Hinzugucken		×			×	×
179	Ziffernkreisel		×			×	×
180	Würfeln mit zwei Würfeln a)		×			×	×
	Würfeln mit zwei Würfeln b)		×			×	×
	Würfeln mit zwei Würfeln c)		×			×	×
181	27 kleine Holzwürfel		×			×	×
182	STRUMI a)		×			×	×
	STRUMI b)		×			×	×
183	Was ist am wahrscheinlichsten? – Körpergröße		×			×	×
184	Was ist am wahrscheinlichsten? – Geschwisterkinder		×			×	×
185	Was ist am wahrscheinlichsten? – Haustiere		×			×	×
186	Gemustertes Tablett		×			×	×
187	Bunte Malstifte a)		×			×	×
	Bunte Malstifte b)		×			×	×
	Bunte Malstifte c)		×			×	×
	Bunte Malstifte d)		×			×	×
188	Buchstaben ziehen		×			×	×
189	Stein, Schere, Papier und Brunnen		×			×	×

	Inhaltliche Kompetenzen					**Allgemeine Kompetenzen**						**Anforderunds-bereiche**		
	Zahlen und Operationen	Raum und Form	Muster und Strukturen	Größen und Messen	Daten, Häufigkeit, und Wahrschein-lichkeit	Grundfertigkeiten	Problemlösen	Kommunizieren	Argumentieren	Modellieren	Darstellen	Reproduzieren	Zusammenhänge herstellen	Verallgemeinern, Reflektieren
	I-1	I-2	I-3	I-4	I-5	A-0	A-1	A-2	A-3	A-4	A-5	AB I	AB II	AB III
		×	×					×	×					×
				×				×					×	
				×				×					×	
				×				×					×	
				×				×					×	
					×				×				×	
					×				×				×	
					×				×				×	
					×				×				×	
					×				×				×	
					×				×				×	
					×				×				×	
					×				×				×	
					×				×				×	
					×				×				×	
					×				×				×	
					×				×				×	
					×				×				×	
					×				×				×	
					×				×				×	
					×				×				×	
					×				×				×	×
					×				×				×	
					×				×				×	

Literaturverzeichnis

Abels, M. (1996): Comparing quantities – A didactical practicum. Manuskript zum Vortrag beim ICME-8, Sevilla/Spain.

Ahmed, A. /Williams, H. (1997): Number & Measures. Oxfordshire: Philip Allan Publishers.

Assessment Reform Group (1999): Assessment for Learning: Beyond the Black Box. Cambridge: School of Education, Cambridge University.

Assessment Reform Group (2002): Assessment for Learning: Research-based principles to guide classroom practice. Internetseite: www.qca.org.uk/downloads/afl_principles.pdf.

Backe-Neuwald, D. (1999): Bedeutsame Geometrie in der Grundschule – aus Sicht der Lehrerinnen und Lehrer, des Faches, des Bildungsauftrags und des Kindes. Dissertation, Universität Paderborn.

Baumert, J./Artelt, C./Klieme, E./Neubrand, M./Prenzel, M./Schiefele, U. /Schneider, W./ Tillmann, K.-J./Weiss, M. (Hrsg.) (2002): PISA 2000 – Die Länder der Bundesrepublik Deutschland im Vergleich. Opladen: Leske und Budrich.

Biehler, R./Hartung, R. (2006): Die Leitidee Daten und Zufall. In: Blum, W./Drüke-Noe, C./ Hartung, R./Köller, O. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I. Berlin: Cornelsen Scriptor, S. 51–80.

Black, P./Wiliam, D. (1998a): Inside the black box. Raising standards through classroom assessment. Phi Delta Kappan, H. 2, S. 139–148.

Black, P./Wiliam, D. (1998b): Assessment and classroom learning. In: Assessment in Education, H. 1, S. 7-74.

Büchter, A./Herget, W./Leuders, T./Müller, J. H. (2007): Die Fermi-Box. Seelze/Velber: Friedrich Verlag.

Carniel, D./Knapstein, K./Spiegel, H. (2002): Räumliches Denken fördern. Erprobte Unterrichtseinheiten und Werkstätten zur Symmetrie und Raumgeometrie. Donauwörth: Auer.

Dehn, C./Mayer, S./Weisbach, D./Neubert, B. (2007): Was ist wahrscheinlicher? Glücksrad- und Urnenaufgaben für die Grundschule. In: Grundschulunterricht, H. 2, S. 33–36.

Deutsches PISA-Konsortium (Hrsg.) (2001): PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen: Leske und Budrich.

Devlin, K. (1998): Muster der Mathematik. Heidelberg: Spektrum.

Dewey, J. (1976): The Child and the Curriculum. In: Dewey, J.: The Middle Works 1899–1924. Teil 2 (Hrsg. von Jo Ann Boydston), Carbondale: SIU Press, S. 272-291.

Engbert, J. (2006): Fördern der Gesprächskompetenz im Mathematikunterricht am Beispiel von Rechenketten. Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Zweiten Staatsprüfung. Studienseminar Vettweiß (unveröff.).

Fiebig, H. (2006): Wikipedia – schöner Schein und nichts dahinter? In: LOG IN, H. 141/142, S. 83–86.

Freudenthal instituut (1999-2007): Het RekenWeb. Internetseite: www.fi.uu.nl/rekenweb/en/

Freudenthal, H. (1973): Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 1. Stuttgart: Klett.

Gerster, H.-D./Schultz, R. (2000): Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht: Bericht zum Forschungsprojekt „Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen“. Freiburg, Pädagogische Hochschule.

Grünwald, R. (1991): Stochastik in den ersten Schuljahren oder „Was Hänschen nicht lernt, lernt Hans nimmermehr.“ In: Mathematik in der Schule, Jg. 29, H. 9, S. 607–623.

Hameyer, U./Heckt, D. H. (2005): Standards – kontrovers. In: Grundschule, H. 3, S. 8–9.

Hasemann, K. (2003): Anfangsunterricht Mathematik. Heidelberg: Spektrum.

Hengartner, E./Hirt, U./Wälti, B. (2006): Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht. Zug: Klett und Balmer.

Heymann, H. W. (1996): Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim: Beltz.

Hoffmann, S./Spiegel, H. (2006a): Ein „defekter“ Taschenrechner. In: Grundschule, H. 1, S. 44–46.

Hoffmann, S./Spiegel, H. (2006b): „Defekte“ Tasten am Taschenrechner. Lösungswege von Kindern. In: Praxis Grundschule, H. 1, S. 10–14.

Hofsäss, G. (1997): Lernen durch gelenktes Entdecken – Beispiele aus dem Arithmetikunterricht im dritten Schuljahr. In: Schönbeck, J. (Hrsg.): Facetten der Mathematikdidaktik. Weinheim: Dt. Studien-Verlag, S. 105–114.

Käpnick, F. (Hrsg.) (2004/5): Rechenwege, 1.–3. Schuljahr. Berlin: Cornelsen Verlag.

Klieme, E./Avenarius, H./Blum, W./Döbrich, P./Gruber, H./Prenzel, M./Reiss, K./Riåuarts, K./Rost, J./Tenorth, H.-E./Vollmer, H. J. (Hrsg.) (2003): Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. Eine Expertise. Bonn: BMBF.

KMK (2004): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004. München, Neuwied: Wolters-Kluwer, Luchterhand Verlag.

KMK (2005): Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz. Erläuterungen zur Konzeption und Entwicklung. München: Luchterhand.

Krämer, W. (1992): So lügt man mit Statistik. Frankfurt/Main: Campus.

Krauthausen, G. (1995a): „A pendulum is to swing …“ – Ein Beitrag zu einem „anderen“ Software-Design für die Grundschule. In: Journal für Mathematik-Didaktik, H. 3/4, S. 263–298.

Krauthausen, G. (1995b): Zahlenmauern im 2. Schuljahr – ein substantielles Übungsformat. In: Grundschulunterricht, H. 10, S. 5–9.

Krauthausen, G. (1998a): Blitzrechnen. Kopfrechnen im 1. und 2. Schuljahr. CD-ROM (dt./engl.). Leipzig: Klett.

Krauthausen, G. (1998b): Lernen – Lehren – Lehren lernen. Zur mathematik-didaktischen Lehrerbildung am Beispiel der Primarstufe. Leipzig: Klett.

Krauthausen, G. (2003): Gute Aufgaben für den Computereinsatz im Mathematikunterricht. In: Ruwisch, S./Peter-Koop, A. (Hrsg.): Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule, S. 144–156. Offenburg: Mildenberger, S. 144–156.

Krauthausen, G. (2006a): Zahlenforscher 1: Zahlenmauern (CD-ROM). Donauwörth: Auer.

Krauthausen, G. (2006b): Zahlenforscher – eine innovative Software-Reihe (Kl. 2-6). In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2006, S. 323–326. Hildesheim: Franzbecker, S. 323–326.

Krauthausen, G./Scherer, P. (2007): Einführung in die Mathematikdidaktik. (3. erw. Aufl.). München: Elsevier.

Leahy, S./Lyon, C./Thompson, M./Wiliam, D. (2005): Classroom Assessment: Minute by minute, day by day. In: Educational Leadership, H.3, S. 19–24.

Martignon, L./Wassner, C. (2005): Schulung frühen stochastischen Denkens von Kindern. In: Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 8. Jg., H. 2, S.202–222.

Mathe-Känguru (2007): Mathematikwettbewerb Känguru e.V. Internetseite: www.mathe-kaenguru.de.

NCLB (2002): No Child Left Behind Act of 2001. Public Law 107-110. 107th Cong., 1st sess. 8 Jan. 2002.

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics (2000): Principles and Standards for School Mathematics. NCTM: Reston, VA.

Nührenbörger, M. (2004): Das Mess-Denken von Kindern. Herausforderung und Anreiz für den Unterricht. In: Scherer, P./Bönig, D. (Hrsg.): Mathematik für Kinder. Mathematik von Kindern (S. 39–49). Hemsbach: Beltz, S. 39–49.

Nührenbörger, M. (2005): Das Vorwissen von Kindern zum Umgang mit Längen. In: Grundschule Mathematik, H. 5, 18–23.

Nührenbörger, M./Pust, S. (2006): Mit Unterschieden rechnen. Lernumgebungen und Materialien im differenzierten Anfangsunterricht Mathematik. Seelze: Kallmeyer.

OECD - Organisation for Economic Co-operation and Development (1999): Measuring student knowledge and skills: A new framework for assessment. Paris: OECD. [In deutscher Sprache: Deutsches PISA-Konsortium (2000): Schülerleistungen im internationalen Vergleich. Eine neue Rahmenkonzeption für die Erfassung von Wissen und Fähigkeiten. Max-Planck-Institut für Bildungsforschung: Berlin].

Padberg, F. (2005a): Didaktik der Arithmetik. München: Elsevier.

Peter-Koop, A. (1999): „Das sind so ungefähr 30000." Schätzen und Überschlagen „aus der Sache heraus". In: Die Grundschulzeitschrift, H. 125, S. 12–15.

Peter-Koop, A. (2001): Authentische Zugänge zum Umgang mit Größen. In: Grundschulzeitschrift, H. 141, S. 6–11.

Peter-Koop, A. (2003). „Wie viele Autos stehen in einem 3-km-Stau?" Modellbildungsprozesse beim Bearbeiten von Fermi-Problemen in Kleingruppen. In: Ruwisch, S./Peter-Koop, A. (Hrsg.): Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Offenburg: Mildenberger, S. 111–130.

Peter-Koop, A./Grüssing, M. (2006): Mathematische Bilderbücher – Kooperation zwischen Elternhaus, Kindergarten und Grundschule. In: Grüßing, M./Peter-Koop, A. (Hrsg.): Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule. Offenburg: Mildenberger, S. 150–169.

Popham, W. J. (2000): Modern educational measurement: Practical guidelines for educational leaders. Needham, MA: Allyn and Bacon.

Popham, W. J. (2001): Teaching to the test. In: Educational Leadership, H. 6, S. 16–20.

Radatz, H./Rickmeyer, K. (1991): Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen. Hannover: Schroedel.

Radatz, H./Schipper, W./Ebeling, A./Dröge, R. (1999): Handbuch für den Mathematikunterricht – 3. Schuljahr. Hannover: Schroedel.

Rasch, R. (2003): 42 Denk- und Sachaufgaben. Seelze: Kallmeyer.

Rasch, R. (2007): Offene Aufgaben für individuelles Lernen im Mathematikunterricht der Grundschule. Seelze: Lernbuchverlag Kallmeyer.

Rathgeb-Schnierer, E. (2004): Was passiert eigentlich, wenn …? Lernangebote zum Erforschen von Additions- und Subtraktionsaufgaben, In: Die Grundschulzeitschrift, H. 177, S. 12–15.

RÑnyi, A. (1967): Dialoge über Mathematik. Berlin: DVW.

Rinkens, H.-D./Hönisch, K. (Hrsg.) (2003a): Welt der Zahl 2, Ausgabe für Bayern. Braunschweig: Schroedel.

Rinkens, H.-D./Hönisch, K. (Hrsg.) (2003b): Welt der Zahl 3. Braunschweig: Schroedel.

Rinkens, H.-D./Hönisch, K. (Hrsg.) (2004): Welt der Zahl 4. Braunschweig: Schroedel.

Rüdell, E. (2005): Standards at work. Beauchamp College in Leicestershire. In: Becker, G. et al. (Hrsg.): Standards. Friedrich Jahresheft ææIII, Seelze: Friedrich Verlag, S. 54–56.

Sawyer, W. W. (1964): Vision in Elementary Mathematics. London: Penguin Books.

Sawyer, W. W. (1982): Prelude to Mathematics. New çork: Dover Publications.

Schor, B. J. (2002): PISA – Herausforderung und Chance zu schulischer Selbsterneuerung. Donauwörth: Auer.

Schütte, S. (Hrsg.) (2004-2006): Die Matheprofis, Schulbücher Kl. 1–4. München: Oldenbourg.

Schütte, S. (i. Vorb.): Qualität im Mathematikunterricht der Grundschule sichern. Ein Arbeitsbuch für Lehrer/-innen und Studierende. München: Oldenbourg.

Selter, Ch./Scherer, P. (1996): Zahlenketten - Ein Unterrichtsbeispiel für Grundschüler und Lehrerstudenten. In: mathematica didactica, H. 1, S. 54–66.

Selter, Ch. (2004a): Zahlengitter – eine Ausgangsaufgabe, viele Variationen. In: Die Grundschulzeitschrift, H. 177, S. 42–45.

Selter, Ch. (2004b): Mehr als Kenntnisse und Fertigkeiten. Erforschen, entdecken und erklären im Mathematikunterricht der Grundschule. Beschreibung des Moduls 2 für das Projekt Sinus-Transfer Grundschule. Internetseite: www.sinus-grundschule.de.

Selter, Ch. (2007): ‚Ich mark Mateè Leitideen und Beispiele für interesseförderlichen Unterricht. Beschreibung des Moduls 7 für das Projekt Sinus-Transfer Grundschule. Internetseite: www.sinus-grundschule.de.

SPIEGEL, H. (1988): Vom Nutzen des Taschenrechners im Arithmetikunterricht der Grundschule. In: Bender, P. (Hrsg.): Mathematikdidaktik. Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter. Berlin: Cornelsen, S. 177–189.

SPIEGEL, H./SELTER, CH. (2003): Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten. Seelze: Kallmeyer.

SPINDELER, B./WOLLRING, B. (2007): Regular Polygons. A Didactic Unit for the Primary Grades. In Initiating Innovative Approaches in the Mathematics Classroom (IIATM) Socrates Comenius Project 112218-CP-1-2003-1.COMENIUS-2.1.

Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung/SenBJS I D/MBJS 35: Orientierungsarbeiten 2004, Jahrgangsstufe 2, Mathematik (Test, Lösungen und Lösungsverteilung).

STEINWEG, A. S. (2001): Zur Entwicklung von Zahlenmusterverständnissen bei Kindern. Epistemologisch pädagogische Grundlegung. Münster: LIT.

SUNDERMANN, B./SELTER, CH. (2006a): Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Scriptor.

SUNDERMANN, B./SELTER, CH. (2006b): Mathematik. H. 4. In: Bartnitzky, Horst u. a. (Hrsg.): Pädagogische Leistungskultur. Materialien für die Klassen 3 und 4. Frankfurt/Main: Grundschulverband, Beiträge zur Reform der Grundschule, Bd. 121.

TILLMANN, K. J. (2007): Standards – ein Instrument zur Steuerung des Schulsystems? SchulVerwaltung NRW, H. 2, S. 34-37.

v. BARAVALLE, H. (1963). Geometrie als Sprache der Formen. Stuttgart: Verlag Freies Geistesleben.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (1996): Assessment and Realistic Mathematics Education. Utrecht: CD-B Press, Utrecht University.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (2001): Estimation. In: Dies. (Hrsg.): Children Learn Mathematics. Utrecht: Freudenthal Institute, S. 173–201.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M./BUYS, K. (Hrsg.) (2005): çoung Children learn measurement and Geometry. Utrecht: Freudenthal Institute.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (2006a): Wie groß muss der Teppich sein? Erfahrungen mit Bildungsstandards und Leistungsmessung aus den Niederlanden. In: Grundschule, 38(5), S. 14–17.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (2006b): Leistungsmessung Paradox? Mit Kindern Multiple-Choice-Aufgaben entwickeln. Internetseite: www.die-grundschule.de/unterricht/downloads_artikel_und_arbeitsblaetter.

VAN LUIT, J. E. H./VAN DE RIJT, B. A. M./HASEMANN, K. (2001): Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung (OTZ). Göttingen: Hogrefe.

VARGA, T./ENGEL, A./WALSER, W. (1974): Zufall oder Strategie? Stuttgart: Klett.

VYGOTSKY, L. S. (1978): Mind and society: The development of higher mental processes. Cambridge, MA: Harvard University Press.

WALTHER, G./GEISER, H./LANGEHEINE, R./LOBEMEIER, K. (2003): Mathematische Kompetenzen am Ende der vierten Jahrgangsstufe. In: Bos, Wilfried et al. (Hrsg.): Erste Ergebnisse aus IGLU. Schülerleistungen am Ende der vierten Jahrgangsstufe im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann, S. 189–226.

WALTHER, G. (2004a): Gute und andere Aufgaben. Beschreibung des Moduls 1 für das Projekt Sinus-Transfer Grundschule. Internetseite: www.sinus-grundschule.de.

WALTHER, G./GEISER, H./LANGEHEINE, R./LOBEMEIER, K. (2004b): Mathematische Kompetenzen am Ende der vierten Jahrgangsstufe in einigen Ländern der Bundesrepublik Deutschland. In: Bos, Wilfried et al. (Hrsg.). IGLU - Einige Länder der Bundesrepublik Deutschland im nationalen und internationalen Vergleich. Waxmann: Münster, S. 117–140.

WERNER, B./PETERS, A. (2007): Lineare Gleichungen – in der Förderschule?! Substanzielle Aufgabenformate im Unterricht der Förderschule – exemplarische Erprobung anhand des Themas „Partnerzahlen“. In: Zeitschrift für Heilpädagogik, H. 4, S. 122-129.

WINTER, H. (1975): Allgemeine Lernziele im Mathematikunterricht? In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, H. 3, S. 106–116.

Winter, H. (1984): Begriff und Bedeutung des Übens. In: mathematik lehren, H. 2/1984, S. 4–11.

Winter, H. (1992): Sachrechnen in der Grundschule. Frankfurt/Main: Cornelsen Scriptor.

Winter, H. (1994): Modelle als Konstrukte zwischen lebensweltlichen Situationen und arithmetischen Begriffen. In: Grundschule, H. 3, S. 10–13.

Winter, H. (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, H. 61, S. 37–46.

Winter, H./Walther, G. (2006): SINUS-Transfer Grundschule Mathematik Modul G 6: Fächerübergreifend und fächerverbindend unterrichten. Internetseite: www.sinus-grundschule.de.

Wittmann, E. Ch./Müller, G. N. (1990): Handbuch produktiver Rechenübungen Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. Ch. (1992): Üben im Lernprozeß. In: Wittmann, E. Ch./ Müller, G. N. (Hrsg.): Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen, Stuttgart: Klett, S. 175–186.

Wittmann, E. Ch./Müller, G. N. (1994): Handbuch produktiver Rechenübungen Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins. Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. Ch. (2003): Was ist Mathematik und welche Bedeutung hat das wohlverstandene Fach für den Mathematikunterricht auch in der Grundschule? In: Baum, M./Wielpütz, H.: Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch. Seelze: Kallmeyer, S. 18–46.

Wittmann, E. Ch./Gerhard N. Müller (2007): Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept des Mathematikunterrichts der Grundschule. In diesem Band.

Wollring, B. (1994): Animistische Vorstellungen von Vor- und Grundschulkindern in stochastischen Siuationen. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 15. H. 1/2, S. 3–34.

Wollring, B. (1997),: Zwergen-Rennen: Würfeln mit Entscheidungen. In: mathematik lehren, H. 85 S. 9–11.

Wollring, B. (2000): Faltbilderbücher, Faltgeschichten und Faltbildkalender. Arbeitsumgebungen zur ebenen Papierfaltgeometrie für die Grundschule. In: Die Grundschulzeitschrift, H. 138, S. 26 u. 43–47.

Wollring, B. (2006a). Kinder-Muster und Pläne dazu – Lernumgebungen zur frühen geometrischen Förderung. In: Peter-Koop, A./Grüßing, M. (Hrsg.): Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule – Beobachten, Fördern, Dokumentieren. Offenburg: Mildenberger.

Wollring, B. (2006b): Transparentkopieren – Lernumgebungen für die Grundschule an der Schnittstelle von Mathematik und Kunst. In: Rathgeb-Schnierer, E./Roos, U. (Hrsg.): Wie rechnen Matheprofis? Ideen und Erfahrungen zum offenen Mathematikunterricht. München: Oldenbourg.

Wollring, B. (2006c): Raumerfahrungen im Mathematikunterricht der Grundschule – Erwerben, Korrespondieren, Festhalten. In: Grundschulmagazin, H. 5, S. 8–12.

Wollring, B. (2007): Zur Kennzeichnung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule. Erscheint in der Schriftenreihe der „Arbeitsgruppe Empirische Bildungsforschung“ an der Universität Kassel.

Stichwortverzeichnis