

Gudrun Häring

Dreiecke des MacMahon

Spielend kombinatorisch denken

Die hier vorgestellte Unterrichtsidee rückt ein kombinatorisches Legespiel ins Zentrum des Mathematikunterrichts. Das Spiel besteht aus 24 bunten Dreiecken und bietet eine Vielfalt an Spielvarianten, bei denen Geduld und kombinatorische Denkweisen gefragt sind. Die Kindern werden im Unterricht zu Spielerfindern und erfahren auf diese Weise, in welchen Lebenskontexten kombinatorische Denkweisen angewendet werden.

Mathematische Spiele begegnen uns auch im Alltag in unzähligen Variationen und faszinieren früher wie heute Kinder und Erwachsene. Manche Spiele sind in hohem Maße von Zufallsereignissen abhängig, für andere bedarf es geeigneter Gewinnstrategien. Die hier vorgestellte Unterrichtsidee verarbeitet die schon sehr alte Spielidee „Die 24 Dreiecke des Mac Mahon“ (siehe Kasten „Kombinatorische Spiele – ein Blick zurück“), die der besonderen Gruppe der kombinatorischen Solitaire-Spiele zuzuordnen ist.

Das Spiel und die Steine

Die 24 Spielsteine (Abb. 1) zeigen alle Möglichkeiten, die drei Felder des Dreiecks mit vier Farben zu färben,

KOMBINATORISCHE SPIELE – EIN BLICK ZURÜCK

Die 24 Dreiecke des MacMahon gehören zu der allgemeinen Gruppe kombinatorischer Problemstellungen, in denen reguläre Polygone bzw. Polyeder durch farbige Kanten, Flächen, durch Zahlen oder andere Symbole unterschiedlich gestaltet und nach festgelegten Bedingungen zusammengefügt werden müssen. Das bekannteste Spiel dieser Art ist wohl das uralte Dominospiel, das aus 28 rechteckigen Legesteinen besteht. Die Steine des Spiels sind mit 0–6 Punkten so versehen, dass sie alle möglichen Kombinationen zeigen. Analog dazu lassen sich allerlei weitere Spiele entwerfen, wie z. B. das hier vorgestellte Spiel der „24 Dreiecke“ (siehe Abb. 1).

P. A. MacMahon (1854–1929), der als einer der bedeutendsten Mathematiker auf dem Gebiet der kombinatorischen Analyse gilt, hat sich umfassend mit zahlreichen solcher sogenannten „Superdominos“ beschäftigt und seine Spielanalysen u. a. in der umfassenden Veröffentlichung „New mathematical Pastimes“ (1929) dokumentiert. Diese Veröffentlichung liegt der im Folgenden dargestellten Unterrichtsidee zugrunde und sei dem Leser als faszinierende Lektüre empfohlen (siehe Literatur).

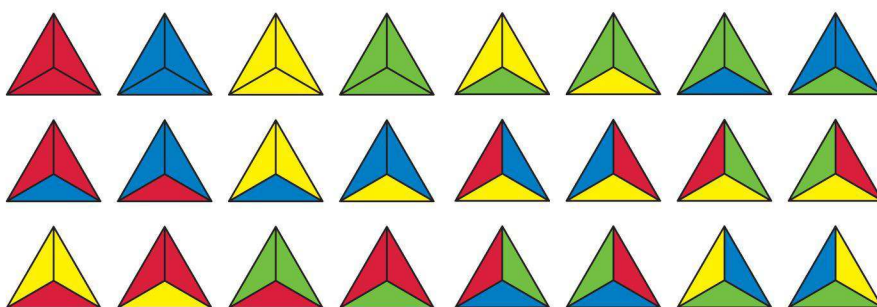


Abb. 1: Alle möglichen Färbungen des Spielsteins

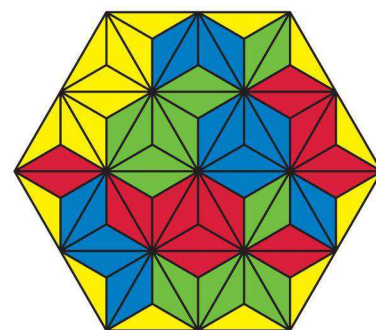


Abb. 2: Alle 24 Dreiecke können z. B. zu einem Sechseck zusammengefügt werden.

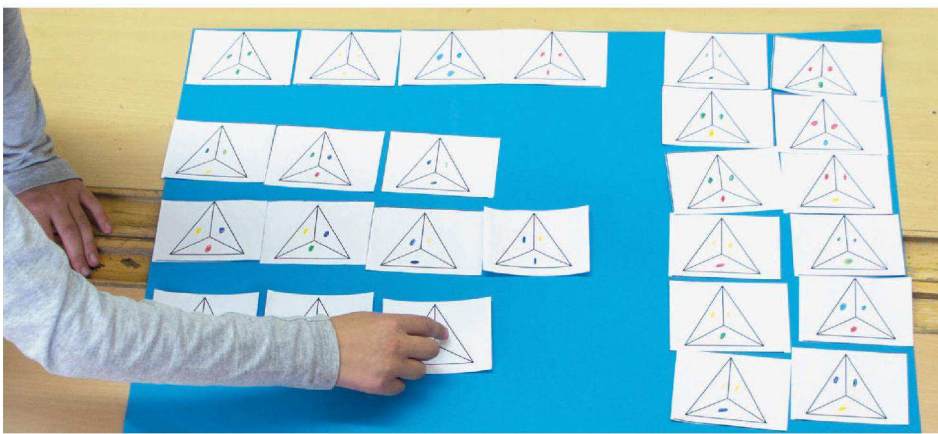


Abb. 3: Schon bald nehmen die Kinder im Sinne eine systematischen Suche Gruppierungen vor, um die Übersicht über alle Möglichkeiten zu behalten.

wobei sich die Farben wiederholen dürfen (siehe Abb. 1).

Die Dreiecke müssen im Spiel zu vorgegebenen komplexeren Figuren zusammengefügt werden, die nebeneinander liegenden Dreiecksseiten müssen dabei die gleiche Farbe besitzen (Abb. 2).

Bei diesem Spiel erweisen sich insbesondere kombinatorische Denkweisen als hilfreich, um der jeweils gesuchten Lösung auf die Spur zu kommen. Die Mathematik hilft maßgeblich, gute oder sogar optimale Gewinn- bzw. Legestrategien zu entwickeln und anzuwenden.

So entstand die Idee, im Mathematikunterricht nicht nur ausgewählte kombinatorische Problemstellungen bis zum Finden und geordneten Darstellen aller Möglichkeiten zu verfolgen, sondern diese Arbeit mit der spielerischen Erprobung und Vertiefung der entdeckten kombinatorischen Denkweisen zu verknüpfen. Die Kinder werden in der vorgestellten Unterrichtseinheit zu „Spiele-Erfindern“. Sie gestalten und erproben das kombinatorische Legespiel.

In den beiden Erprobungsklassen bot es sich an, im Sinne des fächervernetzenden Arbeitens, die Unterrichtsidee mit einer Aufgabe im Fach Werken zu verknüpfen. Es entwickelte sich ein kleines Unterrichtsprojekt, bei dem die Lernenden zunächst, ausgehend von der kombinatorischen Problemstellung, Dreiecke mit vier möglichen Farben unterschiedlich zu färben, Spielsteine für ein Knobelspiel entwerfen sollen. Anschließend sollen sie im Werkunterricht für das entstandene Spiel eine Holzkiste zur Aufbewahrung gestalten.

Der Einstieg ins Projekt – die geheimnisvolle Kiste

In der Mitte des Stuhlkreises steht eine geheimnisvolle Holzkiste. Alle Kinder sind gespannt auf den Inhalt und können es kaum erwarten, die Kiste zu öffnen. Die Lehrkraft erzählt von dem Projekt, im Mathematikunterricht ein kniffliges Spiel zu entwickeln und im Werkunterricht dafür eine schöne Holzkiste zu gestalten.

Ein Kind darf nun die Kiste öffnen, in der sich eine zunächst unbekannte Anzahl an weißen Papdreiecken befindet. Die Enttäuschung ist in den Augen der Kinder sichtbar. Jana bemerkt kritisch: „Das Spiel ist aber nicht besonders spannend, oder?“

Schnell finden die Kinder heraus, dass die dreieckigen Spielsteine noch nicht fertig sind und nennen Ideen für eine mögliche Gestaltung, um daraus zumindest ein hübsches Puzzle-Bild zu erzeugen. Die Lehrkraft greift die Idee der Kinder zur Bemalung der Dreiecke auf und konkretisiert die mathematische Spielidee. Insbesondere erläutert sie, dass die Spielsteine des Spiels nach festgelegten kombinatorischen Regeln bemalt werden, damit das daraus entstehende „Puzzle“ besonders knifflig wird. Die ersten beiden Regeln werden auf einem Plakat präsentiert:

- Färbe jedes der drei Felder eines Spielsteins mit einer Farbe.
 - Verwende nur rot, blau, gelb oder grün.
 - Finde alle möglichen Spielsteine.
- Nun werden exemplarisch einige Spielsteine erzeugt, um zu gewährleisten, dass alle Kinder die Färberegeln verstanden haben. Schnell

KURZ GESAGT Mac Mahons Dreiecke

KLASSENSTUFE

3–6

ZEITBEDARF

2–3 Unterrichtsstunden Mathematik und
2 Doppelstunden Gestaltendes Werken

KOMPETENZEN INHALTSBEZOGEN

- ausgewählte kombinatorische Aufgaben durch systematisches Vorgehen lösen

KOMPETENZEN PROZESSBEZOGEN

- eigene Lösungswege/Vorgehensweisen beschreiben und begründen sowie darüber reflektieren
- Lösungsstrategien nutzen und anwenden

MATERIALPAKET



Material

M01 3 Ausstanzbögen (3 x 8 Dreiecke)

M02 48 Arbeitskärtchen (je Aufgabe ein Kärtchen)



Material auf der CD-ROM

14 Kopiervorlagen für Blanko-Dreiecke zum Ausschneiden

15 Kopiervorlage mit allen 24 farbigen Dreiecke als Übersicht auf einer DIN-A4-Seite

16 Kopiervorlage mit allen 24 farbigen Dreiecke in der Größe der Ausstanzbögen

17 Kopiervorlage für die 48 Arbeitskärtchen

wird den Kindern deutlich, dass die ersten beiden Regeln noch durch weitere Regeln zu präzisieren sind:

- Du darfst Farben auf einem Stein mehrfach benutzen.
- „Gedrehte Spielsteine“ sind keine neuen Möglichkeiten.
- „Gespiegelte Spielsteine“ gelten als neue Möglichkeiten.

Außerdem wird durch das exemplarische Erzeugen erster Möglichkeiten gewährleistet, dass die Kinder bei der sich anschließenden Gruppenarbeit die Dreiecke nur mit Farbpunkten markieren, statt die Felder zeitaufwändig anzumalen, da die Spielsteine zunächst nur skizzenhaft entworfen werden (Abb. 3).



Abb. 4: Pia erklärt allen die systematische Vorgehensweise der Gruppe, kleine selbst angefertigte Moderationskarten rechts am Plakatrand unterstützen die Präsentation.

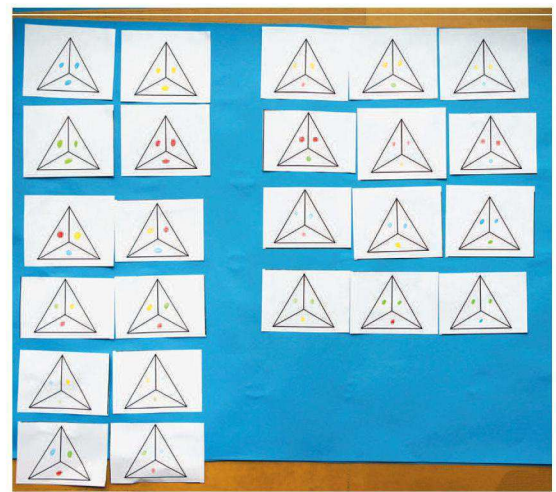


Abb. 5: Schülerergebnis zur Gruppierung der einzelnen Dreiecke

Wir suchen nach allen möglichen Dreiecken

Nur erhalten die Kinder in homogen zusammengesetzten Vierergruppen einen großen Bogen Tonkarton und kleine Blanko-Papierdreiecke und machen sich an die Arbeit (S. 14).

Die Lehrkraft erinnert die Kinder daran, dass sie bei ihrer Suche geschickt vorgehen sollen, um sicher zu sein, alle Möglichkeiten zu erfassen.

Da die Erprobungsklassen über Vorerfahrungen im Bereich der Kombinatorik verfügen, reicht hier ein kurzer Hinweis auf systematisches Vorgehen. Kinder mit besonderen Schwierigkeiten versammeln sich mit der Lehrkraft um einen Tisch, um dort die Färberegeln noch einmal in Ruhe zu wiederholen, bevor sie mit der Gruppenarbeit beginnen. Eifrig beginnt in den Gruppen die Suche nach möglichen Spielsteinen, mehr oder weniger systematisch. Die einzelnen Blankodreiecke ermöglichen auch probierendes Vorgehen, das durch nachträgliches Umordnen der gefundenen Dreiecke auf dem Plakat verfeinert werden kann. Auch Dopplungen können so nachträglich noch korrigiert werden.

Gefundene Möglichkeiten ordnen und gruppieren

Einige Arbeitsgruppen nutzen beim Färben der Spielsteine von Anfang an systematische Vorgehensweisen, die im Verlauf der Arbeitsphase durchgängig verfolgt werden, wie folgende Schüleräußerungen belegen:

Emma: „Lass uns erstmal die Einfarbigsten zeichnen!“

Lasse: „Bei dem Kärtchen können wir doch auch noch den Spiegelstein nehmen.“

Elias: „Es gibt drei Kärtchen mit zweimal gelb, für das dritte Feld gibt es ja nur noch drei Möglichkeiten.“

Andere beginnen zunächst probierend und stoßen schnell auf das Problem, dass sie die Übersicht verlieren. Sie gruppieren nachträglich die gefundenen Spielsteine auf dem Plakat.

Diejenigen Kinder, die erhebliche Schwierigkeiten haben, eine strukturierte Suche zu verfolgen, unterstützt die Lehrkraft durch behutsame Impulse (z.B. Welche Steine findet ihr mit zwei gleichfarbigen Feldern?)

Zusätzlich kann die Arbeit auf enaktiver Ebene (z.B. Dreiecke mit farbigen Knöpfen belegen) die

Schwierigkeit vorentlasten, gedrehte Möglichkeiten als gleich wahrzunehmen. Nach ca. 20 Minuten haben einige Gruppen schon alle Möglichkeiten gefunden, die meisten Gruppen fast alle Dreiecke entdeckt oder sogar mehr als 24, da sie einige Doppelungen übersehen haben.

Vorstellung der Gruppenergebnisse

Im nächsten Schritt wechseln die Gruppen an einen jeweils anderen Gruppentisch. Dort betrachten sie das Plakat einer „fremden“ Gruppe unter folgenden Aspekten:

- Wie viele Möglichkeiten hat die Gruppe gefunden?
- Findet ihr weitere Steine?
- Gibt es „doppelte Steine“, die noch aussortiert werden müssen?
- Erkennt ihr eine geordnete Aufstellung der Möglichkeiten?
- Erklärt die Vorgehensweise.

Die Kinder beantworten die Fragen und bereiten sich auf eine Präsentation ihrer Beobachtungen vor.

Kinder mit Lernschwierigkeiten können hierbei eventuell ihr eigenes Ergebnis betrachten und unterstützt

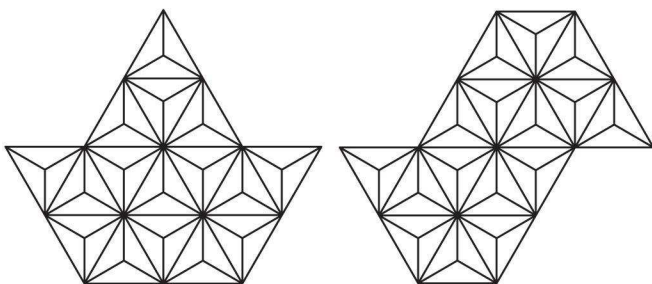


Abb. 6: Beispiele für Legeaufgaben

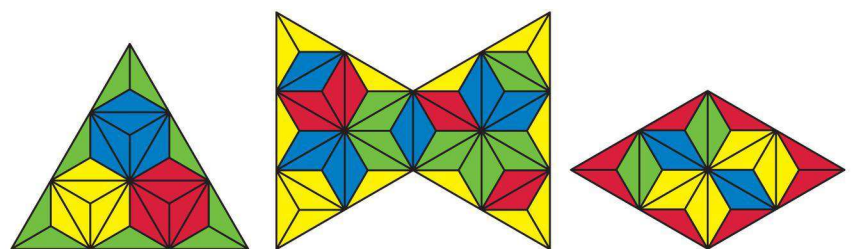


Abb. 7: Beispiele für gelöste Aufgabenstellungen

von der Lehrkraft die Vorstellung des Gruppenergebnisses vorbereiten.

Die Präsentation erfolgt als Museumsrundgang von Tisch zu Tisch (Abb. 4). Die Kinder erklären jeweils die sichtbaren Ordnungsstrategien. Gemeinsam werden doppelte Spielsteine aussortiert und notwendigen Umordnungen vorgenommen.

Erst die Diskussion über die betrachteten Ergebnisse und die Einsicht in mögliche Ordnungssysteme für die erfundenen Spielsteine lässt allmählich die Überzeugung wachsen, dass es genau 24 unterschiedliche Spielsteine geben muss, die den vereinbarten Regeln entsprechen.

Dabei ist es immer wieder überraschend und faszinierend zugleich, wie unterschiedlich die Vorgehensweisen der Kinder sind. Eine mögliche Gruppierung zeigt Abbildung 5:

- 4 einfarbige Dreiecke
- 4 mal 3 Dreiecke mit zwei Farben
- 8 dreifarbige Dreiecke (je zwei sind spiegelgleich)

Zur Kontrolle für die einzelnen Gruppen heftet die Lehrerin am Ende der Stunde alle 24 farbigen Dreiecke an die Tafel (M01, 16).

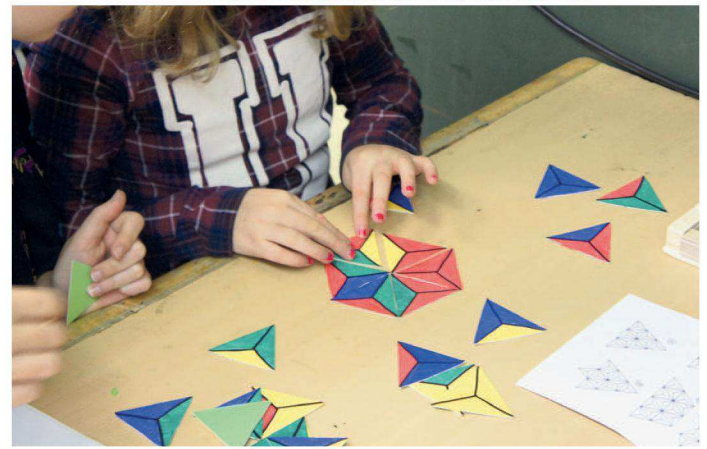
drucksvoll deutlich. Außerdem kann der individuelle Plan für das Färben der Spielsteine genutzt werden, um die Spielsteine korrekt anzufertigen.

Nun können im Werkunterricht je nach Fähigkeiten der Kinder die 24 Spielsteine aus Sperrholz gesägt oder aus Pappe (z. B. aus Blanko-Kärtchen, die es im Handel recht günstig zu erwerben gibt) angefertigt und eine dazu passende Aufbewahrungskiste gestaltet werden.

Weiterarbeit mit dem fertigen Spiel

Nach Fertigstellung des Spiels erhalten die Kinder das gestufte Aufgabenmaterial (siehe Abb. 6 und 7, M02, 17), um ihr Spiel ausgiebig zu erproben.

Das Spiel bietet eine unglaublich große Vielfalt an Legeaufgaben, die durch Rückgriff auf kombinatorische Denkweisen besonders erfolgreich gelöst werden können. Die ausgewählten Legeaufgaben können nur einen Ausschnitt aus der möglichen Aufgabenvielfalt anbieten. Sie bieten zudem



gute Möglichkeiten zur Differenzierung (siehe auch Förderhinweise).

Das erworbene Wissen über das Konstruktionsprinzip der 24 Legekärtchen und die zugrundeliegenden Ordnungskategorien einzelner Gruppen von Steinen wird auf diese Weise in einem sinnvollen Kontext noch einmal vertiefend angewendet.

Die Kinder konnten es schließlich kaum erwarten, ihre Spiele mit nach Hause zu nehmen, und freuten sich schon darauf, ihre Eltern mit der ein oder anderen Legeaufgabe herauszufordern.

Abb. 8: Emma und Lena legen aus den selbst angefertigten Dreiecken schöne Figuren.

Literatur

Major P. A. MacMahon: New mathematical pastimes. University Press, Cambridge, 1921.

Individuelle Vorgehensweisen analysieren

In der darauffolgenden Stunde erfolgt noch einmal eine individuelle Auseinandersetzung mit der Suche nach allen möglichen Spielsteinen.

Jedes Kind erhält ein Arbeitsblatt mit 24 Blanko-Dreiecken (14) und soll nun seinen individuellen Färbeplan für das Bemalen der Spielsteine im Werkunterricht anfertigen.

Dieser Schritt erfolgt aus zwei Gründen. Zum einen kann sich die Lehrkraft auf diese Weise noch einmal vergewissern, welche Kinder nach der vorangegangenen Doppelstunde in der Lage sind, alle 24 Möglichkeiten systematisch zu finden. Individuelle Präferenzen für bestimmte Suchstrategien werden dabei ein-

LERNEN BEGLEITEN

Beobachtungshinweise

- Wer findet alle 24 Dreiecke selbstständig und verwendet für die Suche bewusst systematische Vorgehensweisen?
- Wer kann sinnvolle Gruppierungen innerhalb der 24 möglichen Dreiecke vornehmen, beschreiben und begründen?
- Wer hat Schwierigkeiten, gedrehte Dreiecke als „gleiche Dreiecke“ wahrzunehmen?
- Wer benötigt bei der Suche nach allen möglichen Dreiecken unterstützende Strategiehilfen?
- Wer nutzt beim Bearbeiten der Legeaufgaben systematische Vorgehensweisen?
- Wer zeigt sich besonders geduldig bei der Bearbeitung auch anspruchsvoller Legeaufgaben?

Förderhinweise

Das Aufgabenangebot im Material (Karte 1 bis 24) bietet folgende Differenzierungsmöglichkeiten:

- Als Vorübung für die Legeaufgaben können zunächst freie Figuren regelgemäß erzeugt werden.
- Die Anzahl der notwendigen Dreiecke für die jeweilige Legefigur variiert von 5 bis 24 Dreiecken.
- Die Vorgabe ausgewählter Dreiecke kann als „Starthilfe“ genutzt werden.
- Auf die Zusatzregel (Umrisslinie der Legefigur einfarbig) kann verzichtet werden.
- Die Legeaufgaben können vergrößert werden, sodass direktes Auslegen zur Lösung führt.
- Durch Partnerarbeit kann mathematisches Kommunizieren zusätzlich angeregt werden.