

„Hier muss die 1 und die 3 hin, denn 2 und 2 geht nicht!“

Rechnen und kombinieren mit Kakuros

VON DOROTHEA DOSCHKO

Japanische Zahlen- und Logikrätsel erfreuen sich in den letzten Jahren zunehmender Beliebtheit. Einige dieser Rätselformen lassen sich im Grundschulunterricht gut einsetzen – sowohl zur Schulung der Rechenfertigkeiten als auch zur Förderung des logischen Denkens. Das Format des Sudokus ist mittlerweile vielen Grundschulkindern bekannt. Während beim Sudoku die Ziffern jedoch keine numerische Bedeutung haben, muss beim Kakuro (auch) gerechnet werden.

FOTOS: DOROTHEA DOSCHKO



Abb. 1: Die Arbeit an Kakuros ist für die Kinder sehr motivierend.

Nachdem die Drittklässler sich innerhalb der Wochenplanarbeit bereits begeistert mit Sudokus beschäftigt hatten, sollte das Kakuro als weitere Rätselform eingeführt werden.

Aus „kasan“ (japanisch für Summe) und „kurosu“ (schräg bzw. quer) entsteht der Begriff „Kakuro“. Man kennt dieses Rätselformat

auch unter den Namen „Kreuzzahlenrätsel“ oder „Kreuzsumme“.

REGELN FINDEN

Zu Stundenbeginn hängt ein bereits teilweise gelöstes Kakuro an der Tafel (siehe Abb. 2, oben links). Die Kinder erkennen graue und weiße Felder mit Zahlen und stel-

len Vermutungen über deren Beziehung zueinander an.

Aufgrund des für einen Drittklässler doch recht überschaubaren Zahlenraums vermutet Tom sofort, dass es sich bei den grauen Kästchen um Summen handeln könnte. Er zeigt es an der Tafel und markiert farbig: „Eins und zwei gleich drei, von links nach rechts, und eins und drei gleich vier, von oben nach unten!“ (siehe Abb. 2, oben rechts)

Die Schülerinnen und Schüler färben nun an der Tafel zusammengehörige Felder entsprechend ein und berechnen die Zahlen noch fehlender Kästchen. „3 plus 2 sind 5; 6 soll es ergeben, also muss hier eine 1 hin!“, beschreibt Justin sein Handeln an der Tafel und färbt die Zeile gelb (siehe Abb. 2, unten links).

Nach und nach wird das Kakuro vollständig gelöst (siehe Abb. 2, unten rechts). Den Blick auf die Zahlen in den grauen und weißen Feldern gerichtet, fällt David auf, dass in den grau unterlegten Feldern ein- und zweistellige Zahlen stehen, in den weißen Kästchen nur einstellige Zahlen. Dies könnte zwar auch zufällig so sein, ist aber in der Tat eine Regel des Kakuros.

AUF EINEN BLICK

Klassenstufe: 2-4

Zeit: 3-4 Schulstunden

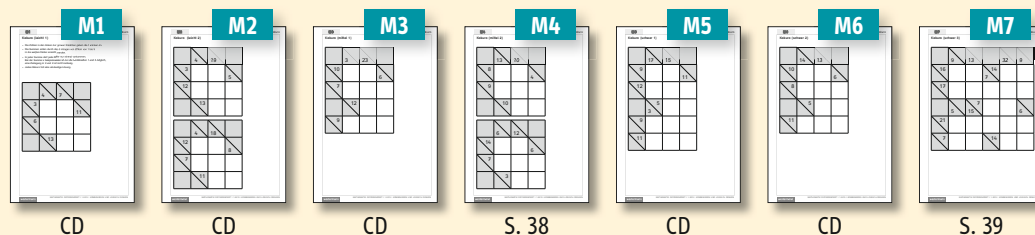
Lerngelegenheiten:

- Regeln erkennen und anwenden
- Zahlen in mehrere Summanden zerlegen
- eigene Kakuros erstellen, indem die Erkenntnisse aus dem Lösen von Kakuros reflektiert und angewendet werden
- Argumentieren und Kommunizieren beim gemeinsamen Lösen und Vergleichen von Kakuros

	Kommunizieren	Argumentieren	Darstellen	Modellieren	Problemlösen
Zahlen und Operationen	X	X			X
Raum und Form					
Muster und Strukturen					
Größen und Messen					
Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit					

Copys:

- M1: Kakuro (leicht 1)
M2: Kakuro (leicht 2)
M3: Kakuro (mittel 1)
M4: Kakuro (mittel 2)
M5: Kakuro (schwer 1)
M6: Kakuro (schwer 2)
M7: Kakuro (schwer 3)



Die Entdeckungen der Kinder werden als Regeln beim Lösen eines Kakuros an die Tafel gehängt und durch weitere Vorgaben ergänzt:

- Jedes Kakuro hat eine eindeutige Lösung.
- Graue Felder: Zahlen geben Summen an.
- „Richtung“ der Summe: von oben nach unten, von links nach rechts
- Weiße Felder: Zahlen geben Summanden an.
- Nur Zahlen von 1 bis 9 sind als Summanden erlaubt.
- In jeder Summe darf jede Zahl nur einmal vorkommen.

Die letzte Regel wird am Kakuro an der Tafel erläutert:

Die Zerlegung der 4 in 2 und 2 würde gegen die Kakuro-Regel verstoßen, dass keine zwei gleichen Zahlen innerhalb einer Summe verwendet werden dürfen. Deshalb kann die 4 nur in 1 und 3 bzw. 3 und 1 zerlegt werden. Da die Summe 4 und die Summe 3 einen Summanden in ihrer „Schnittmenge“ gemeinsam haben, das Feld also sowohl hellblau als auch braun gefärbt ist, muss dieses mit der 1 gefüllt werden.

Hier ist ein geeigneter Zeitpunkt, die Kinder an die Vorschrift

zu erinnern, dass die Null nicht als Summand eingesetzt werden darf, da nur die Zahlen von 1 bis 9 vorkommen dürfen.

LÖSEN EINES KAKUROS

An der Tafel wird zunächst gemeinsam ein komplexeres Kakuro gelöst (siehe Abb. 3).

Folgende Hinweise werden gegeben:

- Es ist hilfreich, alle Zahlenkombinationen, die zu der vorgegebenen Summe möglich sind, in die weißen Felder einzutragen. Ein Kakuro wird nicht durch unsystematisches Probieren, sondern durch logisches Überlegen gelöst. Trägt

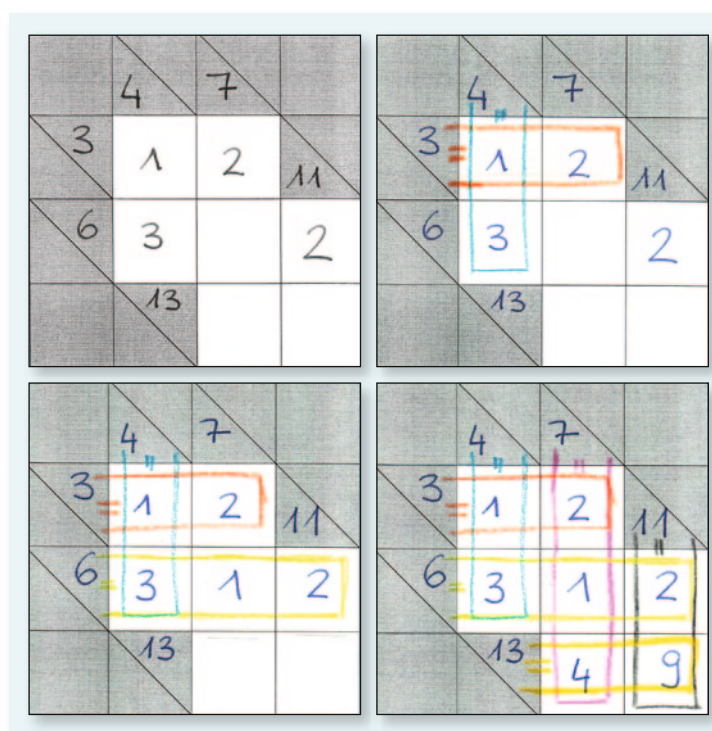
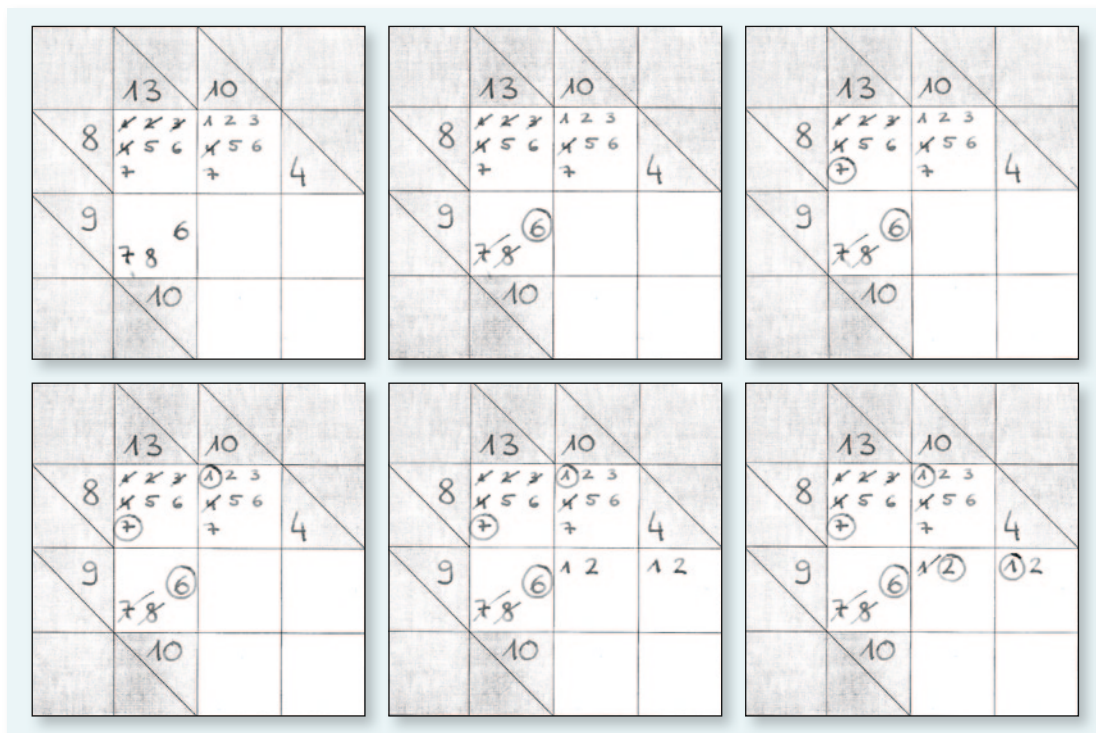


Abb. 2: Anhand eines relativ einfachen Kakuros wird mit der gesamten Klasse erarbeitet, welche Felder es gibt und welche Regeln gelten.

Abb. 3: Gemeinsam löst die Klasse ein Kakuro und lernt die Wegstreich-Methode kennen.



man alle Zahlenkombinationen senkrechter und waagerechter Summen in die Felder ein, entsteht irgendwann eine Konstellation, die eine bestimmte Zahl in einem Feld erzwingt. Davon ausgehend können die Zahlen weiterer Felder bestimmt werden.

- Beim Eintragen passender Zerlegungen in die weißen Felder sollte auf das Radieren verzichtet werden. Stattdessen sollten die Zahlen, die als „nicht möglich“ verworfen werden, bewusst durchgestrichen werden. Dies verhindert, dass eine Zahl mehrfach überprüft wird, weil vergessen wurde, dass sie bereits ausgeschlossen worden war.
- Bei schwierigeren Kakuros führt es meist rascher zum

Ziel, wenn man mit der Zerlegung einer Summe beginnt, deren Anzahl an Zerlegungsmöglichkeiten nicht allzu hoch ist, da dies die zu überprüfenden Kombinationen stark einschränkt.

Im Klassengespräch wird von den Schülerinnen und Schülern diskutiert und nachvollzogen, warum welche Zahl an welcher Stelle stehen muss:

Luise notiert zunächst alle Zerlegungsmöglichkeiten der Zahl 8. „Die 8 lässt sich in 1 und 7, 2 und 6, 3 und 5, 4 und 4 zerlegen – und natürlich in 5 und 3, 2 und 7, 1 und 8.“ „Nein!“, unterbricht Leni, „die 4 und 4 geht nicht, weil keine zwei gleichen Zahlen erlaubt sind!“ Die 4 und 4 als Zerlegungsmöglichkeit wird durchgestrichen.

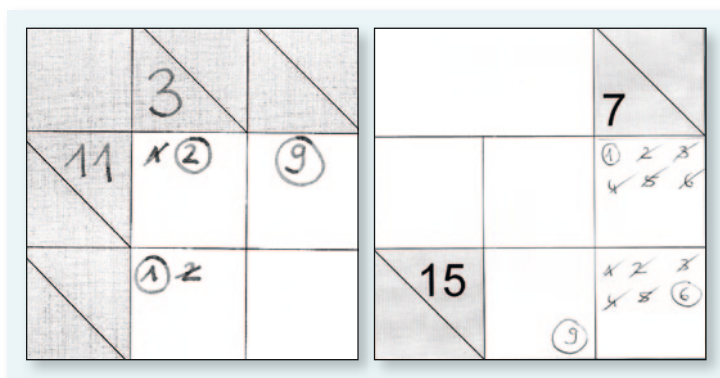
Saskia zerlegt anschließend die 13: Da beim Einsatz der Zahlen 1, 2, 3 als ersten Summanden der zweite Summand jeweils größer als 9 wäre ($1 + 12$; $2 + 11$; $3 + 10$) und dies damit gegen die Kakuro-Regeln, nur Zahlen von 1 bis 9 zu verwenden, verstößt, werden die Zahlen 1, 2, 3 im oberen Feld (erster Summand der Summe 13) gestrichen. Als zweiter Summand kommen nur noch die 6, die 7 und die 8 in Betracht (siehe Abb. 3, oben links).

Lasse sieht nun sofort, in dem unteren Feld muss die 6 stehen, „denn die 9 besteht aus drei Teilen (= Summanden) und dann geht das nur mit der 6, weil 8 plus zwei andere Zahlen kann nicht 9 sein und bei 7 geht es auch nicht, weil zweimal die 1 nicht zulässig ist!“ Lasse kreist die 6 als Lösung ein (siehe Abb. 3, oben Mitte).

Die Festlegung auf die 6 in diesem Feld erzwingt im darüber liegenden Feld als zweiten Summanden die 7 (siehe Abb. 3, oben rechts). Dies hat wiederum Auswirkungen auf die gesuchte Zerlegung der Summe 8. Diese setzt sich aus 7 und 1 zusammen (siehe Abb. 3, unten links).

Philipp ergänzt an der Tafel mögliche Summanden zur Summe 9. „Die 6 steht da schon, bis zur 9 fehlen noch 3. Da schreib’ ich hier die 1 und da die 2 hin – und um-

Abb. 4: Anhand ausgewählter Zahlenkombinationen wird gezeigt, wie man ein Kakuro selbst erstellen kann.



	15	17	
14	9	5	7
10	6	3	1
	15	9	6

	15	17	
14	8	6	7
10	7	2	7
	15	9	6

	15	17	
14			7
10	7		
	15		

Abb. 5: Die Lösungen links und Mitte sind beide korrekt – das widerspricht den Regeln eines Kakuros. Samira findet die Lösung und macht das Kakuro durch Einfügen der 7 eindeutig.

gekehrt!“ (siehe Abb. 3, unten Mitte). „Das geht nicht“, widerspricht Samantha, „die 1 darfst du in der Mitte nicht mehr nehmen, weil die schon darüber steht, als erster Summand der 10! Dann muss da eine 2 hin, und als dritter Summand der 9 die 1!“ (siehe Abb. 3, unten rechts). Nun lässt sich über Ergänzungen das gesamte Kakuro lösen.

Die Schülerinnen und Schüler wählen anschließend aus Kakuros unterschiedlicher Schwierigkeitsgrade (siehe M1 bis M7). Die meisten Kinder beginnen zunächst allein, finden sich jedoch dann in Zweier- oder Dreiergruppen zusammen, um über ihre Überlegungen und Lösungswege zu sprechen.

ERSTELLEN EINES KAKUROS

Leistungsstarke und besonders motivierte Schülerinnen und Schüler erhalten als zusätzliche Herausforderung die Möglichkeit, selbst Kakuros zu erstellen.

Um ein eindeutig lösbares Kakuro zu entwickeln, sind folgende Überlegungen im Vorfeld hilfreich:

- Kreuzt man eine Summe mit nur zwei Zerlegungsmöglichkeiten mit einer Summe mit mehreren Zerlegungsmöglichkeiten geschickt, so ergibt sich für das sich schneidende Feld eine eindeutige Lösung (siehe bei Abb. 4, links die 2)
- Eine eindeutige Zahlzuweisung ist auch möglich, indem man die sich kreuzenden Zahlensummen so wählt, dass sie nur eine Zahl gemeinsam haben können (siehe Abb. 4, rechts).

Einige Kinder hatten bereits beim Lösen der Kakuros festgestellt, dass

es Zahlen mit nur einer Zerlegungsmöglichkeit in zwei oder drei Summanden gibt. Nun sind alle Schülerinnen und Schüler aufgefordert, diese Zahlen zu finden. Systematisch werden die Zahlen geprüft und an der Tafel notiert.

Für die sich kreuzende Summe „11“ erklärt Clara: „Die 11 lässt sich nur in 2 und 9 zerlegen, weil man 1 und 10 nicht nehmen darf“ (siehe Abb. 4, links).

Für die 7 gibt es sechs verschiedene Zerlegungsmöglichkeiten. Dadurch, dass sich die Summen von 7 und 15 kreuzen, reduzieren sich die möglichen Summanden in der Schnittmenge auf die Zahl 6 (siehe Abb. 4, rechts). Denn jede Zahl kleiner als 6 kann aufgrund der Regeln, dass nur die Zahlen von 1 bis 9 als Summanden erlaubt sind, nicht zur 15 ergänzt werden.

Mit diesen Überlegungen im Vorfeld, die nicht von allen auf dieser theoretischen Ebene nachvollzogen werden konnten, versuchen die Schülerinnen und Schüler ihr eigenes Kakuro zu entwickeln.

Als Amalia das von Friederike erstellte Kakuro löst, zeigt sich, dass die eingetragenen Summanden nicht übereinstimmen (siehe Abb. 5, links und Mitte), obwohl beide Kakuros rechnerisch korrekt gelöst wurden.

Die verschiedenen Lösungen von Friederike und von Amalia werden exemplarisch im Klassenverband besprochen. Schnell erkennt Peter, warum das Kakuro nicht eindeutig ist: „Amalia hat die 14 in 9 und 5 zerlegt, Friederike aber in 8 und 6. Beide haben beim gleichen Kakuro richtig gerechnet, aber verschiedene Lösungen.“

Gemeinsam wird überlegt, wie man unter Beibehaltung der ge-

wählten Summen doch eine eindeutige Lösung und damit ein richtiges Kakuro erreichen kann. Die Kinder probieren, ob dies durch Festlegen eines Summanden an einer bestimmten Stelle möglich gemacht werden kann.

Samira entdeckt eine Lösung: „Trägt man hier die 7 ein, erhält man immer Friederikes Kakuro.“ (siehe Abb. 5, rechts)

FAZIT

Das Lösen einfacher Kakuros ist im zweiten Schuljahr und sogar bereits für leistungsstärkere Erstklässler möglich. Komplexere Kakuros, die neben den Rechenfertigkeiten auch höhere Ansprüche an das logische Denken stellen, sind für die meisten Kinder erst ab Klasse 3 lösbar. Die Materialseiten zu diesem Beitrag bieten neun Kakuros in differenzierter Aufbereitung (siehe M1 bis M7).

Beim Erstellen von Kakuros bereitet vor allem die Eindeutigkeit häufig Probleme. Hierfür kann es hilfreich sein, zunächst Listen mit Zahlzerlegungen zu erarbeiten oder diese zur Verfügung zu stellen (z. B. unter: http://www.kakuroknacker.de/pdf/summen_kombinationen.pdf).

DIE AUTORIN

Dr. Dorothea Doschko ist abgeordnete Grundschullehrerin an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg.

Kakuro (leicht)

- Die Zahlen in den Ecken der grauen Kästchen geben die Summen an.
- Die Summen sollen durch das Eintragen von Ziffern von 1 bis 9 in die weißen Felder erreicht werden.
- In jeder Summe darf jede Ziffer nur einmal vorkommen.
Bei der Summe 4 beispielsweise ist nur die Kombination 1 und 3 möglich, eine Zerlegung in 2 und 2 ist nicht zulässig.
- Jedes Kakuro hat eine eindeutige Lösung.

	4	7	
3			11
6			
	13		

Kakuro (leicht)

	4	19	
3			5
12			
	13		

	4	18	
12			8
7			
	11		

Kakuro (mittel)

	3	23	
10			6
7			
	12		
9			

Kakuro (mittel)

	13	10	
8			4
9			
	10		

	6	12	
14			6
7			
	3		

Kakuro (schwer)

	17	15	
9			11
12			
	5 3		
9			
11			

Kakuro (schwer)

	14	13	
10			6
8			
	5		
11			

Kakuro (schwer)

	9	13		32	9
16			14 7		
17					
	5	7 15			6
21					
7			14		