

Concept Maps und Plakat-Verfahren

Herstellen kombinatorischer Muster in der Grundschule

VON BERND WOLLRING

Schüleraktivitäten zur Kombinatorik können durch materielle Aktivitäten artikuliert werden, etwa durch Zusammensetzen von Bausteinen oder durch Legen von Material. Um die Aktivität des Problemlösens zu unterstützen, sollte diese Arbeitssituation so gestaltet sein, dass sie das Probieren unterstützt und die Möglichkeit bietet, vom weniger systematischen Probieren zum zunehmend systematischen und schließlich zum strategiebestimmten Probieren zu führen.

FOTOS: BERND WOLLRING



Abb. 1: Material zur Darstellung kombinatorischer Muster in Concept Maps

Wir vertreten die Auffassung, dass erste Versuche oder Situationen, in denen möglicherweise ein längeres Probieren abzusehen ist, nicht darin bestehen sollten, Dinge schriftlich, etwa durch Malen oder Schreiben, zu fixieren. Denn diese Artikulation ist nicht sehr korrekturfreundlich und kann Diskussionsverläufe in kleinen Gruppen nicht hinreichend flexibel folgen.

Wir schlagen daher eine Concept-Map-Technik vor. Bisweilen werden Concept Maps auch als

Mind Maps bezeichnet, aber diese zweite Bezeichnung wird auch in weiteren Kontexten und zudem uneinheitlich verwendet, sodass wir sie hier vermeiden. Die Technik besteht prinzipiell darin, die kombinatorischen Objekte, die herzustellen oder zu ordnen sind, auf einer Arbeitsfläche zu arrangieren und die Herstellungsstrategie und die Zusammenhänge zwischen den Objekten im Arrangement der Teile deutlich zu machen. Dabei besteht auch die Möglichkeit, Objekte, die von verschiedenen Beteiligten

mehrfach eingebracht werden, zu identifizieren und nicht mehrfach im weiteren Arrangement mitzunehmen.

CONCEPT MAPS ZEIGEN STRATEGIEN

In einer Concept Map werden die verschiedenen zu vergleichenden kombinatorischen Objekte nicht nacheinander (zeitlich sequenziell), sondern nebeneinander (räumlich simultan) dargestellt. Erst dadurch gewinnt man eine Übersicht über die Strategie derjenigen, die das Arrangement herstellen.

Unsere Erfahrungen zeigen, dass diese Strategien keineswegs eindeutig bestimmt sind, wenn verschiedene Teams dasselbe Problem bearbeiten. Keine Concept Map gleicht der anderen in allen Details. So besteht die Möglichkeit, auch Strategien zwischen den Teams diskutierend zu vergleichen.

Nun zeigt sich aber bei kombinatorischen Fragestellungen, die man mit dieser Technik angeht oder angehen möchte, dass der Materialbedarf teilweise erheblich ist. Man betrachte etwa die Aufgabe Türmchen der Höhe 4, also aus vier Steinen, wobei jeder aus vier Farben ausgewählt sein darf und die Reihenfolge zu beachten ist. Wenn man von zehn Teams ausgeht, benötigt man

AUF EINEN BLICK

Klassenstufe: 2–4

Zeit: 2–3 Stunden

Lerngelegenheiten:

- Erfassen von Sachverhalten zu kombinatorischen Aufgabenstellungen
- Darstellen von kombinatorischen Problemen und ihren Lösungen
- Kennenlernen von Referenzmodellen zum Lösen von kombinatorischen Aufgaben

Copys:

M1: Türme mit farbigen Steinen

M2: Tüten mit farbigen Steinen



S. 16



S. 17

	Kommunizieren	Argumentieren	Darstellen	Modellieren	Problemlösen
Zahlen und Operationen	X	X	X	X	X
Raum und Form					
Muster und Strukturen	X	X	X	X	X
Größen und Messen					
Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	X	X	X		

eine erhebliche Anzahl von vorsortierten Bausteinen, insgesamt rund 1000 Stück. In diesem Umfang ist geeignetes Material oft nicht verfügbar.

Wir haben daher in vielen Versuchen einen einfachen Materialtyp entwickelt, mit dem auch dieses Problem zu lösen ist: Die einzelnen Stücke schneiden wir als kleine Quadrate aus farbigem Papier. Günstig ist das Herstellen von Papierquadraten der Seitenlänge 2,5 cm aus quadratischem Faltpapier mit der Seitenlänge 15 cm. Schneidet man dann das Papier in Schichten zu je 10 oder 15 Blatt, so ist der gesamte Herstellungsprozess nicht besonders aufwendig (siehe Abb. 1).

Unsere Concept Maps haben die Form von Plakaten. Praktisch ist die übliche Größe von 50 x 70 cm. Um die Objekte, die aus mehreren solchen Quadraten bestehen, ganzheitlich darzustellen, lohnt es sich, zusätzliche Papierstücke in der Größe des gesamten Objektes vorzuhalten. Dies ist nicht notwendig, aber hilfreich, etwa dann, wenn man im Laufe der Diskussion und des Probierens die Objekte als Ganzes bewegen möchte. Den Kleber für die Plakate sollte man erst vergleichsweise spät zur Verfügung stellen, nämlich erst dann, wenn die Diskussion bereits zu

einem einigermaßen geordneten Ergebnis geführt hat. Ansonsten wird die Diskussion in der Gruppe durch ein vorzeitiges Fixieren einzelner Objekte gebremst oder schlimmstenfalls gestoppt. Sind die arrangierten Dinge fixiert, etwa durch Festkleben, so wird aus dem Spielraum ein Dokument, das vorerst nicht mehr durch weitere Diskussion zu ändern ist.

TÜRME AUS BUNTEN SYSTEM-BAUSTEINEN

Wir schlagen „Türme aus farbigen System-Bausteinen“ als Referenzmodell für Permutationen vor (siehe den Beitrag auf S. 6–9). Türme haben ein „Oben“ und ein „Unten“, damit ist die Reihenfolge der Bausteine auf natürliche Weise als bedeutsam ausgewiesen. Dieses Referenz-

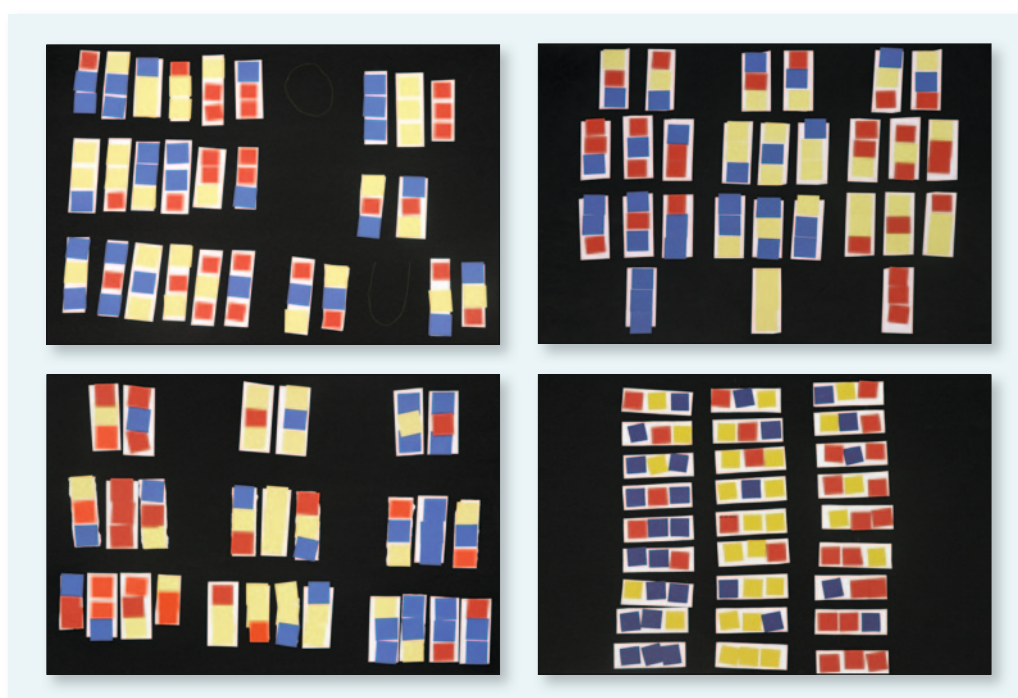


Abb. 2: Vier Concept Maps zu den 27 Türmen mit drei Stücken aus drei Farben, erstellt von Zweitklässlern; im selben Turm dürfen die Farben mehrfach auftreten (Permutationen mit Wiederholung – 3S3F).

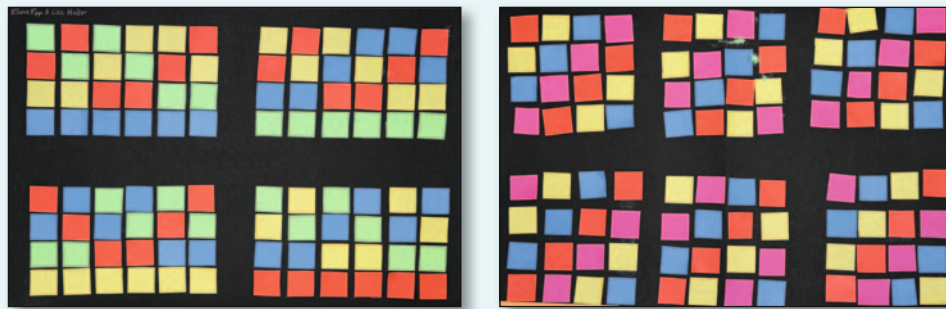


Abb. 3: Zwei Concept Maps zu den 24 Türmen mit vier Stücken aus vier Farben, erstellt von Studierenden; im selben Turm dürfen die Farben NICHT mehrfach auftreten (Permutationen ohne Wiederholung – 4S4F).

renzmodell unterstützt gezielt das konstruktionsbegleitende Zählen.

Die Aufgabe zu den Plakaten in Abb. 2 lautete: „Finde alle Türme aus drei Stücken. Die Stücke dürfen eine von drei Farben tragen. Die Farben dürfen in den Türmen mehrfach vorkommen. Ordne die Türme so an, dass man sieht, dass es alle sind.“

Abb. 2 zeigt vier Lösungen von Kindern aus dem zweiten Schuljahr. Sie sind in Gruppenarbeit entstanden, beteiligt waren jeweils vier Kinder. Die Plakate stellen sämtlich korrekte Lösungen dar, alle Teams haben 27 Türme dargestellt. Aber die Türme sind bei allen Plakaten unterschiedlich arrangiert, das deutet auf verschiedene individuelle Strategien beim Suchen und Finden der Türme hin (vgl. Bönig 2010). Die Plakate sind Ergebnis längerer Diskussionen. Um diese zu unterstützen, wurde der Hinweis gegeben, die jeweils drei farbigen Stücke für einen Turm zunächst auf einem „Trägerzettel“ zu fixieren, so konnten die Türme als Ganzes bewegt werden, bis die Kinder sich auf das endgültige Arrangement geeinigt hatten.

Die Aufgabe zu den Plakaten in Abb. 3 lautete: „Finde alle Türme aus vier Stücken. Die Stücke dürfen eine von vier Farben tragen. Die Farben dürfen in den Tür-

men NICHT mehrfach vorkommen. Ordne die Türme so an, dass man sieht, dass es alle sind.“ Zu sehen sind zwei unterschiedliche korrekte Lösungen von Studierenden des Grundschullehrantes, bei denen alle 24 Türme ausgewiesen sind. Sie basieren auf verschiedenen Strategien, wie die Arrangements belegen. In dem einen Plakat sind die Lösungen in Clustern zu je sechs Türmen arrangiert, in dem anderen in Clustern zu je vier Türmen. Die Diskussion verlief deutlich langsamer als bei den Kindern, was auch daran gelegen haben mag, dass diese Studierenden keine Trägerzettel verwendet haben.

TÜTEN UND NESTER

Wir schlagen „Tüten aus farbigen System-Bausteinen“ als Referenzmodell für Kombinationen vor. Man kann sie sich entstanden denken, indem man Türme in ihre Bausteine zerlegt und damit die Reihenfolge der Bausteine „vernichtet“. Auch dieses Referenzmodell unterstützt gezielt das konstruktionsbegleitende Zählen.

Wir benutzen zudem und parallel dazu das Referenzmodell von Nestern mit farbigen Eiern, bei denen es wohl auf die Sorten, nicht aber auf die Anordnung ankommt: In den Nestern liegen die

Eier durcheinander (vgl. Müller/Wittmann 1994).

Allgemein hat man im Unterricht das Problem, für Kombinationen eine tragfähige Referenzvorstellung zu bilden. Wir glauben, dass es mit den Tüten und den Nestern gehen kann. Aber es ist im Unterricht darauf zu achten, ob die Vorstellung eines Nestes mit farbigen Eiern tatsächlich die in diesem Fall gemeinte Vorstellung der Kombinationen, also eines Arrangements ohne Beachten der Anordnung, aufruft.

Leider tritt bei dieser Vorstellung, die am Anfang so nutzbar wirkt, ein störender Effekt auf: Betrachten wir eine Tüte mit Steinen, von denen einige gleichfarbig sind, daneben eine Tüte mit gleich vielen Steinen, die sämtlich verschiedenfarbig sind. Dann sind die Anzahlen der Türme, die man aus den beiden Tüten als Bausätzen bilden kann, im Allgemeinen unterschiedlich, man muss diese Zahlen für verschiedene Bausatztypen getrennt einzeln bestimmen.

Für kleine Zahlen von Stücken und Farben lässt sich das „zu Fuß“ durchführen. Bei größeren Zahlen erweist sich dieses Verfahren für Bausätze, in denen gleichfarbige Steine auftreten, leider als schwer praktikabel. Man braucht eine andere Zählstrategie, mit der man die Anzahl dieser Bausätze direkt bestimmt. Da bieten sich zwei Verfahren an: Das eine beruht auf der „Trennwand-Idee“, das andere auf der Zerlegung gegebener Zahlen als Summen, der zweite Weg ist im Zahlenbuch für das erste Schuljahr entfaltet; wir halten ihn in dieser Situation für den besten (siehe Müller/Wittmann 1994).

Die Aufgabe zu den Plakaten in Abb. 4 lautete: „Finde alle Tüten (Nester) aus drei Stücken. Die Stücke dürfen eine von drei Farben tragen. Die Farben dürfen in den Tüten mehrfach vorkommen. Ordne die Tüten (Nester) so an, dass man sieht, dass es alle sind.“

Abb. 4 zeigt drei unterschiedliche korrekte Lösungen von Lehrkräften aus Grundschulen, bei denen alle zehn Tüten ausgewiesen sind. Sie basieren wie bei den vorhergehenden Beispielen auf verschiedenen Strategien, wie die Ar-

Abb. 4: Drei Concept Maps zu den zehn Tüten mit drei Stücken aus drei Farben, erstellt von Lehrkräften; in derselben Tüte dürfen die Farben mehrfach auftreten (Kombinationen mit Wiederholung – 3S3F).



rangements belegen. Hier sind die Trägerzettel besonders hilfreich – sie markieren die Tüten oder Nester, die mit Stücken zu füllen sind. Auffallend ist das Bestreben, die Vollständigkeit der Lösungen durch spezifische Symmetrien und lokale Analogien in den Arrangements darzustellen. Diese Aufgabe ist sehr überschaubar, sie eignet sich sogar für Erstklässler.

Bei Müller und Wittmann (1994) ist zu diesen Mustern ein arithmetisches Modell angegeben: Jeder Tüte entspricht eine bestimmten Zerlegung der Zahl der Stücke in verschiedene Summanden, wobei die Zahl der Summanden gleich der Zahl der möglichen Farben ist und Null als Summand vorkommen darf. Diese Kennzeichnung wurde in den Plakaten nachträglich eingefügt.

Die Aufgabe zu den Plakaten in Abb. 5 lautete: „Finde alle Tüten (Nester) aus drei Stücken. Die Stücke dürfen eine von vier Farben tragen. Die Farben dürfen in den Tüten mehrfach vorkommen. Ordne die Tüten (Nester) so an, dass man sieht, dass es alle sind.“

Und die Aufgabe zu den Plakaten in Abb. 6 lautete: „Finde alle Tüten (Nester) aus vier Stücken. Die Stücke dürfen eine von drei Farben tragen. Die Farben dürfen in den Tüten mehrfach vorkommen. Ordne die Tüten (Nester) so an, dass man sieht, dass es alle sind.“

Der Vergleich belegt, dass verschiedene Probleme vorliegen, wenn man die Zahl der Stück mit der Zahl der Farben vertauscht. Dies belegen die unterschiedlichen korrekten Lösungen in den Abbildungen 5 und 6. Die beteiligten Studierenden haben jeweils beide Probleme bearbeitet und konnten so diese Asymmetrie wahrnehmen. Die Plakate zeigen wieder ganz individuelle Strategien, um zu belegen, dass die Zahl der gefundenen Tüten (Nester) korrekt ist. Auch hier werden symmetrische Arrangements als wesentliche Darstellungsmittel genutzt, es liegt jeweils eine „Argumentation in bildlicher Darstellung“ vor.

Nicht nur symmetrische Arrangements kennzeichnen die Plakate in Abb. 5, es finden sich auch Strukturen, die denen von „Bäumen“ ähnlich sind, wie sie bei mehrstu-

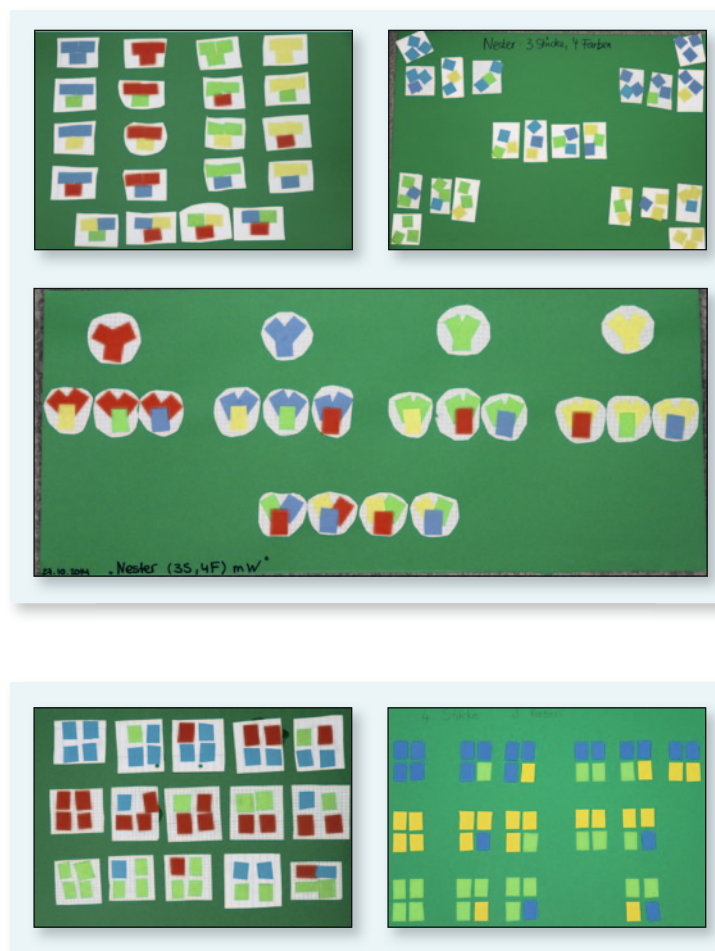


Abb. 5: Drei Concept Maps zu den 20 Tüten mit drei Stücken aus vier Farben, erstellt von Studierenden; in derselben Tüte dürfen die Farben mehrfach auftreten (Kombinationen mit Wiederholung – 3S4F).

figen Zufallsexperimenten auftreten. Eine Aufgabenstellung, welche die Abbildungen 4, 5, und 6 in einen Zusammenhang stellt, besteht darin, die Objekte aus den Plakaten in Abb. 4 in den Arrangements der Plakate von 5 und 6 wiederzufinden und Argumente anzubringen, wie die Arrangements zusammenhängen.

Die Plakate regen dazu an, Aufgaben zu konzipieren, mit denen die jeweiligen Strategien der Teams systematisch zu vergleichen sind.

KOMMUNIZIEREN UND ARGUMENTIEREN

Die Plakate sind „ikonische Texte“. Obgleich sie von Grundschulkindern ohne große Schwierigkeiten zu erstellen sind, auch im Team, ist doch ihr Beschreiben in gesprochenen oder gar geschriebenen Texten eine Anforderung, die viele Grundschulkinde überfordert.

Zur Erkundung und zum Vergleich solcher Plakate schlagen wir daher einen Weg vor, der dem Bearbeiten von „Lückentexten“ im

Sprachunterricht ähnelt: Nicht nur Lehrkräfte, auch Grundschulkinde können aus den Plakaten „ikonische Lückentexte“ erstellen, etwa durch Markieren bestimmter Bereiche. Durch die Art der Masken ist der Schwierigkeitsgrad solcher ikonischer Lückentexte in weiten Bereichen zu differenzieren (siehe [M1](#) und [M2](#)). Abb. 6 zeigt im rechten Bild das Entstehen eines solchen Lückentextes aus einem Plakat. Das Bild links in Abb. 6 wiederum zeigt dazu den Lösungsvorschlag eines anderen Teams (vgl. Wollring 2014).

Das Erstellen und das Lösen solcher ikonischer Lückentexte bietet Raum für individuelles und natürliches Differenzieren, bei dem die Lernenden den Schwierigkeitsgrad der Aufgabenstellung weitgehend oder ganz selbst bestimmen. ●

DER AUTOR

Dr. Bernd Wollring ist Professor für Didaktik der Mathematik an der Universität Kassel. Seinen Arbeitsschwerpunkt bilden Lernumgebungen.

Abb. 6: Zwei Concept Maps zu den 15 Tüten mit vier Stücken aus drei Farben, erstellt von Studierenden; in derselben Tüte dürfen die Farben mehrfach auftreten (Kombinationen mit Wiederholung – 4S3F).

LITERATUR

- Bönig, Dagmar:** Individuelle Lernwege in der Kombinatorik unterstützen. In: Grundschule Mathematik, Heft 27-2010, S. 16-19
- Müller, Gerhard/Wittmann, Erich Christian:** Das Zahlenbuch, Mathematik im 1. Schuljahr. Stuttgart 1994
- Wollring, Bernd:** Prozessbezogene Kompetenzen – illustriert durch prototypische Aufgaben mit der Werkzeug-Software BlockCAD. In: Ladel, Silke/Schreiber, Christof (Hrsg.): Von Audiopodcast bis Zahlensinn. Lernen, Lehren und Forschen mit digitalen Medien 2. Münster 2014, S. 95-124

Türme mit farbigen Steinen

1. Dieses Plakat zeigt alle Türme,
die aus vier Steinen übereingebaut sind.
Jeder Stein darf lila oder orange oder gelb oder pink sein.
In keinem Turm kommt eine Farbe mehrfach vor.

Das Plakat wurde teilweise abgedeckt.
Finde heraus, welche Teile abgedeckt sind.



2. Stelle mit einem Partner ein Plakat zusammen mit allen Türmen,
die aus drei Steinen übereingebaut sind.
Jeder Stein darf lila oder orange oder gelb oder pink sein.
In keinem Turm kommt eine Farbe mehrfach vor.

Ordnet die Türme auf dem Plakat so an,
dass man sieht, dass es alle Möglichkeiten zeigt.
Wie viele sind es?

Tüten mit farbigen Steinen

1. Dieses Plakat zeigt alle Tüten, in denen drei Steine durcheinanderliegen.

Jeder Stein darf rot oder lila oder grün sein.

In den Tüten dürfen mehrere Steine dieselbe Farbe haben.

Das Plakat wurde teilweise abgedeckt.

Finde heraus, welche Teile abgedeckt sind.

	rot	lila	grün
1	0	0	3
2	0	3	0
3	3	0	0
4	1	0	2
5	0	1	2
6	0	2	1
7	1	2	0
8	2	0	1
9	2	1	0
10	1	1	1

Was bedeutet die Tabelle mit den Zahlen?

Hilft sie dir?

2. Stelle mit einem Partner ein Plakat zusammen mit allen Tüten,

in denen vier Steine durcheinanderliegen.

Jeder Stein darf rot oder lila oder grün sein.

In den Tüten dürfen mehrere Steine dieselbe Farbe haben.

Ordnet die Tüten auf dem Plakat so an,

dass man sieht, dass es alle Möglichkeiten zeigt.

Wie viele sind es?