

Kombinieren – Kombinatorik

Logisch denken trainieren

VON SABINE KAUFMANN UND BERND WOLLRING

In diesem Heft werden verschiedene Aspekte des Kombinierens beleuchtet. Zum einen geht es um kombinatorische Aufgabenstellungen im mathematischen Sinn, zum anderen um kombinieren und logisches Denken, so wie es umgangssprachlich verstanden wird.

FOTO: LAIF, KÖLN



Abb. 1: Sherlock Holmes, hier dargestellt vom Schauspieler Benedict Cumberbatch, symbolisiert als fiktive Figur Logik und Kombinatorik – Begriffe, die in der Mathematik allerdings einen anderen Gehalt haben als in der Alltagssprache.

Die Kombinatorik ist eine Teildisziplin der Mathematik, die sich mit dem geschickten Zählen von Möglichkeiten beschäftigt. Die Gegenstände der Kombinatorik werden in der mathematischen Fachsprache als Permutationen, Variationen und Kombinationen bezeichnet.

- Permutation kommt von *permutare* (lat.). Die Vorsilbe *per* kennzeichnet eine Intensivierung, etwa im Sinne von „tiefgreifend“. Das Wort *mutare* bedeutet „verändern“ oder „verwandeln“. Dieses Wort verweist darauf, dass es im Zusammenhang mit Permutationen darum geht, gegebene Gegenstände systematisch zu ändern. In

der Kombinatorik geht es um zusammengesetzte Gegenstände, die auf bestimmte Art angeordnet sind, eine Permutation beschreibt die Art oder eine Änderung dieser Anordnung.

- Variation kommt von *variatio* (lat.), es bedeutet generell „Veränderung“ oder das „Veränderte“.

Bei Variationen ist die Anordnung von Bedeutung (geordnete Stichprobe). Man unterscheidet Variationen mit Wiederholung und Variationen ohne Wiederholung.

Typisches Beispiel für eine Variation mit Wiederholung ist das Bauen eines Steckwürfelturms aus verschiedenen Farben, bei

dem die Farben mehrmals vorkommen können, aber nicht müssen.

Bei einer Variation ohne Wiederholung ist es nicht erlaubt, eine Farbe mehrmals zu verwenden.

- Kombination kommt von *combinatio* (lat.). Dieses Wort stammt aus dem Spätlatein des 17. Jahrhunderts. Übersetzen kann man es mit „zusammenstellen“, genauer mit „paarweise zusammenstellen“. Es verweist darauf, dass Kombinationen durch einen systematischen Herstellungsprozess entstehen und aus Bauelementen zu bilden sind. In der Kombinatorik geht es auch darum, solche Zusammenstellungen systematisch zu organisieren und begleitend dazu zu zählen – zum einen für Zusammenstellungen mit bestimmten Anordnungen und zum anderen für Zusammenstellungen, die keine bestimmte Anordnung aufweisen.

Bei Kombinationen ist die Anordnung nicht von Bedeutung. Typisches Beispiel für eine Kombination sind die Lottozahlen – die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, ist dabei unerheblich. Auch hier wird unterschieden, ob Wiederholungen erlaubt sind oder nicht. Während beim Beispiel des Lottospiels keine Wiederholung möglich ist, ist dies jedoch durchaus möglich, wenn aus

einer Bonbontüte mit drei verschiedenen Sorten drei Bonbons ausgewählt werden sollen.

DIE BEGRIFFE IN DER ALLTAGSSPRACHE

Unterscheidet man die mathematische Fachsprache, die Alltagssprache Erwachsener und die situative Sprache von Lernumgebungen im Unterricht, so zeigt sich, dass im Bereich der Kombinatorik dieselben Vokabeln für unterschiedliche Gegenstände benutzt werden. Dies betrifft etwa die Vokabel „Kombination“:

- Im Bereich der Mathematik und ihrer Fachsprache versteht man unter einer Kombination ein Muster aus Teilen, deren Anordnung keine Rolle spielt.
- In der Umgangssprache dagegen bezeichnet Kombination jede Art von Zusammenstellungen aus Teilen, meist auch gerade solche, bei denen die Anordnung sehr wohl eine Rolle spielt.

Ähnliche Differenzen lassen sich auch bei anderen im Zusammenhang mit der Kombinatorik üblichen Vokabeln finden. Diese Gegensätze lassen sich leider nicht aufheben:

- Ist die Vielfalt der Einstellungsmöglichkeiten bei einem Zahlenschloss für ein Fahrrad Gegenstand eines Gesprächs unter Mathematikern, so ist man dort an die vereinbarte korrekte Vokabel Permutation oder an die Vokabel Variation gebunden.
- Spricht man aber über eben diesen Gegenstand mit dem Verkäufer in einem Fahrradgeschäft, so wird der das Wort Kombination verwenden, das Wort Permutation wird ihn irritieren.

Der Begriff „kombinieren“ wird im Alltag häufig auch als Synonym für logisches Schließen verwendet, wobei es auch beim Begriff Logik Unterschiede zwischen der mathematischen Fachsprache und der Umgangssprache zu verzeichnen gibt. Auf die mathematische Verwendung des Begriffs soll an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden.

Der mathematischen Sprache und der Umgangssprache ist jedoch gemein, dass das korrekte Folgern den Kern der Logik ausmacht.

ZU DEN BEITRÄGEN IM HEFT

Was hat Schach mit Mathematik, mit Kombinatorik und logischem Denken zu tun? Dieser Frage geht Björn Lengwenus in seinem Beitrag nach, in dem er auch zahlreiche Untersuchungsergebnisse zu den Auswirkungen des Schachspiels auf andere Leistungen darstellt. Ergänzt wird dieses Plädoyer für „Schach in der Schule“ durch einen Bericht von Volker Heinold und Isa Hauf aus dem Schachdorf Ströbeck, wo Schach in der Schule Teil der Traditionspflege ist und das Schulfach Schach seit fast 200 Jahren sogar Prüfungsfach ist (S. 10–11).

Bernd Wollring stellt in seinen Beiträgen die Kombinatorik als ein Arbeitsfeld an der Schnittstelle mehrerer Inhaltsbereiche der Bildungsstandards dar. In seinem einleitenden Beitrag geht es um grundlegende Unterscheidungen bei kombinatorischen Mustern, die Voraussetzungen für das Entwickeln und Anwenden geeigneter Zählstrategien sind (S. 6–9). Der Praxisbeitrag zeigt, wie Grundschüler solche Zählstrategien mithilfe von Concept Maps entwickeln, darstellen und analysieren können (S. 12–17).

Grit Kurtzmann stellt eine Unterrichtseinheit vor, in der nach dem Festigen des Lösen kombinatorischer Aufgabenstellungen durch systematisches Probieren und Baumdiagramme eine Schrittfolge erarbeitet wird, mit der sich verschiedene kombinatorische Aufgaben lösen lassen (S. 18–24).

Die sich anschließenden Praxisbeiträge betreffen Aufgabenformate, die auf den ersten Blick wenig mit Mathematik zu tun haben, sondern vielmehr das logische Denken – teilweise inhaltsunspezifisch – schulen sollen. Verschiedene Aufgaben- und Rätselformate, die sich hierfür vorzüglich eignen und gut im Mathematikunterricht der Grundschule einsetzbar sind, werden vorgestellt.

Im Beitrag von Sabine Kaufmann geht es um Logicals, für de-



FOTO: DOROTHEA DOSCHKO

Abb. 2: Aufgaben zum logischen Denken fordern ein hohes Engagement ein, lassen sich aber auch hervorragend differenzieren.

ren Lösungen verschiedene direkte oder indirekte Textaussagen so miteinander zu kombinieren sind, dass die einzelnen Aussagen zweifelsfrei in Beziehung zueinander gesetzt werden können (S. 26–32).

Das Format des Sudokus ist bereits vielen Grundschulkindern bekannt. Während beim Sudoku die Ziffern jedoch keine numerische Bedeutung haben, muss bei Kakuro zusätzlich gerechnet werden. Eine Unterrichtseinheit zu dieser Rätselform wird von Dorothea Doschko vorgestellt (S. 34–39).

Bei Parolenrätseln geht es darum, in unzusammenhängenden Sätzen eine verborgene Gemeinsamkeit, ein Muster, zu finden. In zahlreichen Beispielen zeigt Lars Günther, wie dabei auch das Sprachverständnis gefördert werden kann (S. 40–43).

Im letzten Beitrag von Sabine Kaufmann werden die vorgestellten Rätselformate zur Kombinatorik zusammengeführt. Im Kontext eines „Mathe-Krimis“ können die Kinder erproben, ob sie mit den zuvor eingeführten Aufgabenformaten zurechtkommen (S. 44–46). ●

DIE AUTOREN

Dr. Sabine Kaufmann ist Professorin für Mathematik und ihre Didaktik an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg. Sie ist Mitglied des Herausgeberteams von „Mathematik differenziert“ und Moderatorin dieses Heftes.

Dr. Bernd Wollring ist Professor für Didaktik der Mathematik an der Universität Kassel. Seinen Arbeitsschwerpunkt bilden Lernumgebungen.