

Händeschütteln mit dem Zahlenteufel

In dieser Unterrichtseinheit geht es um das Finden möglicher Händedrücke bei 2, 3, 4, ... Kindern. Die Aufgabenstellung lässt verschiedene Zugangswege zu und ermöglicht es, Muster zwischen der Anzahl der Kinder und der Anzahl der Händedrücke zu erkennen.

Britta Steinmetz

GEBIET:	Kombinatorik, Muster und Strukturen
LERNBEREICH:	Kombinatorische Aufgaben durch Probieren bzw. systematisches Vorgehen lösen, Gesetzmäßigkeiten erkennen und fortsetzen
SCHULJAHR:	3./4.
SOZIALFORM:	Gruppenarbeit
ZEITBEDARF:	1–2 Unterrichtsstunden

Am Ende eines Schultages verabschiedete ich die Kinder an der Klassentür mit einem Händedruck. Wie viele Händedrücke sind es? Klar, 21! Entsprechend der Anzahl der Kinder. Wie viele Händedrücke wären es jedoch, wenn sich die Kinder untereinander verabschieden würden?

Diese Kombinatorikaufgabe wird in dem Buch „Der Zahlenteufel“ von Hans Magnus Enzensberger in eine Erzählung eingebettet. Die Hauptpersonen sind der Zahlenteufel und der Junge Robert. Jede Nacht träumt der Junge, wie der Zahlenteufel ihn in die Welt der Mathematik führt. In der achten Nacht bearbeiten sie kombinatorische Aufgaben in Roberts Klasse. Am Ende der Mathematikstunde verlassen die Schulkinder das Klassenzimmer. Nur Robert und der Zahlenteufel bleiben zurück.

„– Schau doch mal aus dem Fenster, ob deine Klassenkameraden noch da sind.

– Die haben sich, glaube ich, schnell noch ein Eis gekauft, und jetzt gehen sie nach Hause.

– Ich nehme an, sie geben sich die Hand, wenn sie sich verabschieden?

– Ausgeschlossen. Die sagen höchstens ‚Hallo‘ oder ‚Bis später‘.

– Schade, sagte der Zahlenteufel. Ich möchte gern wissen, was passiert, wenn jeder jedem die Hand gibt.

– Hör bloß auf! Das dauert bestimmt ewig. Wahrscheinlich gibt es eine riesige Zahl von Händedrücken. [...]

– Irrtum!, sagte der Alte.



- **Aufgabenstellung Händeschütteln mit dem Zahlenteufel** für die Gruppenarbeit.

Händeschütteln mit dem Zahlenteufel

Robert und der Zahlenteufel stellen sich vor, dass sich die Kinder zum Abschied die Hand geben.
Wie viele Händedrücke gibt es bei 2 (3, 4, 5, ...) Kindern?

- Stellt eure Überlegungen auf einem Plakat dar.
- Begründet sie.

© Friedrich Vieweg, GmbH
Grundschule Mathematik | 27 / 2010

SACHINFORMATION

Beim Händeschüttel-Problem handelt es sich um die Auswahl von zwei Kindern aus n Kindern und damit um eine Kombination ohne Wiederholung (s. „Kombinatorisches Zählen – Kombinieren, Variieren, Permutieren“ auf S.40). Die Anzahl der Händedrücke lässt sich über die Anzahl n der beteiligten Kinder als $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ berechnen.

Beispiel:

4 Kinder geben sich zum Abschied die Hände ($n = 4$)

$$\frac{4 \cdot (4-1)}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Bei 4 Kindern gibt es also 6 mögliche Händedrücke.

Wenn es zwei sind, überlegte Robert, ist nur ein Händedruck nötig. Bei dreien ...“ (Enzensberger & Berner 1997, S. 157 f.).

► Einstieg und Erarbeitung

Die kombinatorische Aufgabe „Händeschütteln“ wird den Schülerinnen und Schülern anhand der Geschichte von dem Zahlenteufel und dem Jungen Robert nähergebracht. Dieser Einstieg weckt das Interesse und die Motivation der Kinder. Der Beginn des Lösungsweges des Jungen Robert bietet den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, seine Überlegungen aufzugreifen und weiterzudenken. Anschließend erhalten die Kinder die **Aufgabenstellung Händeschütteln mit dem Zahlenteufel** .

Robert und der Zahlenteufel stellen sich vor, dass sich die Kinder zum Abschied die Hände geben. Wie viele Händedrücke gibt es bei 2 (3, 4, 5, ...) Kindern? Stellt eure Überlegungen auf einem Plakat dar. Begründet sie.



Illustration: © 1997 Carl Hanser Verlag München

Gemeinsam wird geklärt, was zu tun ist. Einige Kinder können bereits erste Lösungsvorschläge nennen.

► Arbeitsphase

Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten die Aufgabe in Kleingruppen zu je etwa vier Kindern. Für das Entwickeln von Lösungsstrategien ist die Arbeit in Kleingruppen vorteilhaft. Leistungsschwächere und -stärkere Kinder können ihre Ideen einbringen. Zudem bietet die Gruppenarbeit die Möglichkeit, das Händeschütteln nachzuspielen.

Jede Gruppe erhält ein weißes DIN-A3-Plakat, auf dem der Lösungsweg dargestellt werden soll. Dabei kommt es nicht so sehr darauf an, dass die Lösungen vollständig und richtig sind. Viel wichtiger ist es, dass die Schülerinnen und Schüler Ideen entwickeln und ihre Lösungswege verbalisieren und gegebenenfalls auch begründen. Mögliche Lösungsstrategien sind:

Die Situation nachspielen

Für die Kinder ist es naheliegend, das Händeschütteln in der Kleingruppe nachzuspielen. Da die Anzahl der Kinder in der Gruppe begrenzt ist, müssen sich die Kinder weitere Strategien überlegen, um beispielsweise herauszufinden, wie viele Händedrücke es bei fünf Kindern gibt. Nach eigenen Beobachtungen erfinden die Schülerinnen und Schüler dann einen „imaginären Mitschüler“ (z. B. einen Schulranzen), dem sie die „Hände schütteln“.

Die Situation skizzieren

Eine übersichtliche Darstellung aller Möglichkeiten des Händeschüttelns ist zeichnerisch noch bis ca. 4–5 Kinder möglich **1**.

Anschließend wird gemeinsam mit den Kindern überlegt, wie viele Händedrücke es mehr sind, wenn zu vier Kindern ein fünftes Kind hinzukommt. Bei vier Kindern gibt es laut Zeichnung 6 Händedrücke. Das neue fünfte Kind schüttelt nun jedem der vier Kinder die Hand, das sind somit 4 Händedrücke. Insgesamt erhält man $6 + 4 = 10$ Händedrücke.

Die Überlegungen lassen sich fortsetzen: Bei fünf Kindern sind es 10 Händedrücke. Wenn ein sechstes Kind neu hinzukommt, schüttelt es jedem der fünf Kinder die Hand, also 5 Händedrücke. Rechnet man nun wieder die

Anzahl der Händedrücke der fünf Kinder dazu, erhält man $10 + 5 = 15$. Würde ein siebtes Kind hinzukommen, wären es $15 + 6 = 21$ Händedrücke.

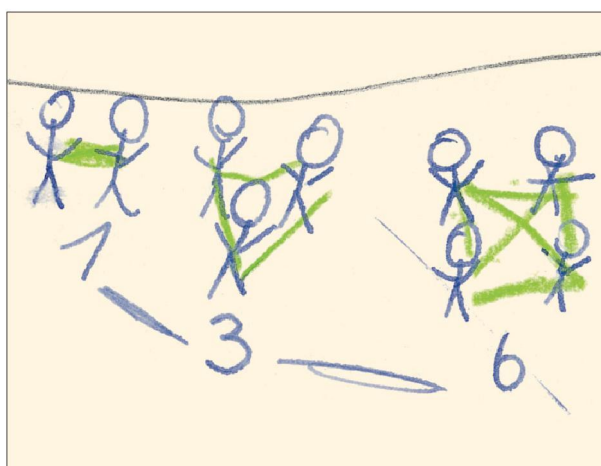
► Auswertung

Die Gruppen geben zunächst einen kurzen Einblick in ihre Vorgehensweise und ihre Lösungswege. In einem gemeinsamen Gespräch werden die verschiedenen Lösungsstrategien noch einmal aufgegriffen. In einer Tabelle werden abschließend an der Tafel die Anzahl der Kinder und die Anzahl möglicher Händedrücke aufgeführt:

Anzahl der Kinder	Anzahl möglicher Händedrücke
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15

Anhand der Tabelle können die Kinder entdecken, dass sich die Anzahl der möglichen Händedrücke um 2, 3, 4, 5, ... vergrößert. Mit dieser Gesetzmäßigkeit ist es den Kindern möglich, die Anzahl möglicher Händedrücke für eine ganze Schulklasse zu berechnen.

Zum Abschluss wäre noch folgende Fortführung der Fragestellung denkbar: Wie lange dauert das Hän-



1 Zeichnerische Darstellung des Händeschüttelns von 2, 3 und 4 Kindern

deschütteln bei 2 (3, 4, 5 ...) Kindern, wenn man davon ausgeht, dass pro Händedruck drei Sekunden benötigt werden?

Enzensberger, H.-M.; Berner, R. S.: Der Zahlenteufel. Ein Kopfkissenbuch für alle, die Angst vor der Mathematik haben. Durchgehend farbig illustriert von Rotraut Susanne Berner. Carl Hanser, München 1997.

Weitere Themen aus dem Buch, die sich für die Grundschule eignen:

AufgabemitKokosnüssen – Dreieckszahlen (Die fünfte Nacht)
Kaninchenaufgabe – Die Fibonacci-Zahlenfolge (Die sechste Nacht)

Entdeckungen am Pascalschen Dreieck (Die siebte Nacht)
Auch hierfür habe ich jeweils Auszüge aus dem Buch vorgelesen und zum Anlass für Unterrichtseinheiten gemacht.

LERNEN BEGLEITEN

Beobachtungshilfen:

- Wer hat eigene Lösungsideen?
- Wer kann seine Lösungsideen mitteilen?
- Wer kann die Lösungsideen anderer Kinder übernehmen?
- Werden die Lösungsideen auf dem Plakat übersichtlich und schlüssig dargestellt?
- Wer kann seinen Lösungsweg z. B. von vier auf fünf Kinder erweitern?
- Wer erkennt die Gesetzmäßigkeit der Zahlenfolge?

Förderhinweise:

Es ist sinnvoll, mit einigen Schülerinnen und Schülern das Händeschütteln noch einmal nachzuspielen. Alternativ oder zusätzlich kann man das Händeschütteln schrittweise anhand einer Zeichnung an der Tafel veranschaulichen. Leistungsstarke Schülerinnen und Schüler können als strukturgleiche Aufgabe die Anzahl der Diagonalen (und Seiten) im Vieleck ermitteln. (Vgl. dazu den Beitrag „Diagonalen im Vieleck“ in Grundschule Mathematik 14.)