

Kombinatorik mit Ziffernkarten

Silke Ruwisch & Susanne Schaffrath

Kombinatorische Aufgabenstellungen mit Ziffern eignen sich besonders gut, das systematische Darstellen von Lösungsmöglichkeiten herauszufordern, weil die Kinder ihre Kenntnisse über die Ordnung der natürlichen Zahlen nutzen und weiterentwickeln können.

GEBIET:	Kombinatorik, Problemlösen
LERNBEREICH:	Kombinatorische Aufgaben systematisch lösen, Zusammenhänge erkennen und übertragen
SCHULJAHR:	3./4.
SOZIALFORM:	Einzel-, Partner- und Kleingruppenarbeit; Arbeit im Klassenverband
ZEITBEDARF:	5–6 Unterrichtsstunden

MATERIALPAKET



- ▶ Arbeitsblatt **Knobeleien mit Ziffernkarten** zum Einstieg. Mit drei Ziffernkarten sollen dreistellige Zahlen gebildet werden.
- ▶ Arbeitsblatt **Vier, fünf, sechs Ziffernkarten**.
- ▶ Arbeitsblatt **Vier, fünf, sechs Ziffernkarten – Vertiefung**. Auch als Hausaufgabe geeignet.
- ▶ Arbeitsblatt **Mehr Ziffern als Stellen**.
- ▶ Arbeitsblatt **Ziffern mehrfach verwenden**.
- ▶ Arbeitsblatt **Ziffern mehrfach verwenden – Vertiefung**. Auch als Hausaufgabe geeignet.
- ▶ Arbeitsblatt **Welche Aussage stimmt?** zum Rückblick auf die Unterrichtseinheit.
- ▶ **Lösungen** zu den Arbeitsblättern.

Für die im Folgenden beschriebene Unterrichtseinheit werden keine Vorerfahrungen mit dem systematischen Lösen kombinatorischer Aufgabenstellungen vorausgesetzt.

▶ Zahlen mit drei Ziffernkarten

Als Einstieg in die Einheit dient das Arbeitsblatt **Knobeleien mit Ziffernkarten** : Mit den drei Ziffern 1, 3 und 5 sollen möglichst viele verschiedene dreistellige Zahlen gebildet werden. Zusätzlich wird den Kindern mündlich der Hinweis gegeben, dass die möglichen Zahlen systematisch aufgeschrieben werden sollen. Alle Kinder in der Erprobungsklasse bearbeiteten die Aufgaben zügig und hielten die Zahlen systematisch fest. Sie wählten eine Ziffer als Hunderter aus und tauschten jeweils Zehner und Einer. Nur ein Kind ordnete bei allen Teilaufgaben zusätzlich die Zahlen nach der Größe.

Daran schließt sich die Aufgabe an, selbst drei Ziffernkarten vorzugeben und damit Zahlen zu bilden. Die meisten Kinder gaben wieder drei verschiedene Ziffern vor und fanden wieder sechs Möglichkeiten. Einige Kinder wählten bereits hier entweder die Null als Ziffer oder verwendeten eine Ziffer mehrfach, weil es sonst zu langweilig sei: „Wenn du einfach drei andere nimmst, ist es ja trotzdem das gleiche – das sind ja wieder sechs.“ (Vgl. auch .)

In der anschließenden Reflexion werden die Schülerinnen und Schüler gebeten, ihre Systematik zu erklären. Anschließend wird gemeinsam überlegt, wie sich die Gesamtzahl der Möglichkeiten bei doppelt vorkommenden Ziffern oder bei Verwenden der Null verändert: Kommt eine Ziffer zweimal vor, gibt es nur noch drei verschiedene dreistellige Zahlen. Ist eine der Ziffern 0 und sind die beiden anderen Ziffern verschieden, gibt es vier dreistellige Zahlen.

► Zahlen mit vier, fünf, sechs Ziffernkarten

Zur Bearbeitung des Arbeitsblatts **Vier, fünf, sechs Ziffernkarten** erhalten die Kinder ca. 30 Minuten Zeit. Die erste Aufgabe lautet: „Du hast Ziffernkarten mit den Ziffern 1, 3, 5, 7. Wie viele vierstellige Zahlen kannst du damit bilden? Schreibe deinen Lösungsweg auf.“ In der zweiten Aufgabe geht es darum, fünfstellige Zahlen aus fünf verschiedenen Ziffern zu bilden. Die Gesamtzahl der Möglichkeiten soll zunächst jeweils vermutet werden.

Während der Großteil der Kinder die vierstelligen Zahlen systematisch aufschreibt – und dabei in der Regel erfolgreich ist –, greift ein Drittel der Klasse zu Verkürzungen und kann diese auch begründen: „Ich hab als erstes nur die Zahlen mit der 1 vorne genommen, dann hatte ich sechs Zahlen raus und man könnte ja die 1, 3, 5, 7 nehmen; vier Zahlen also für die 1, und so bin ich auf $6 \cdot 4$ gekommen, also 24.“

Da das Aufschreiben aller fünfstelligen Zahlen allen Kindern als zu aufwändig erscheint, versuchen alle, ihre bei vierstelligen Zahlen verwendete Systematik zu erweitern. Allen Kindern ist sofort klar, dass es fünf Spalten mit jeweils derselben Anzahl an Zahlen werden, weil jede der fünf Ziffern vorne stehen könnte, doch es gelingt nur wenigen, alle Zahlen einer Spalte zu finden, weil sie an dem Versuch des Tauschens von zwei benachbarten Ziffern festhalten. Finn allerdings erkennt seinen Fehler,

Handwritten student work on a yellow background showing four problems with digit cards and their solutions:

- Problem 1: Digit cards 1, 1, 1. Question: "Wie viel dreistellige Zahlen kannst du damit bilden?" Answer: 1.
- Problem 2: Digit cards 1, 8, 5. Question: "Wie viel dreistellige Zahlen kannst du damit bilden?" Answer: 6.
- Problem 3: Digit cards 8, 0. Question: "Wie viele dreistellige Zahlen kannst du damit bilden?" Answer: 20.
- Problem 4: Digit cards 0, 0. Question: "Wie viele dreistellige Zahlen kannst du damit bilden?" Answer: 6.

1 Anna erfindet eigene Knochelen mit Ziffernkarten

vermag ihn zu beschreiben und dann auch zu korrigieren (2, S. 24). Drei Kinder sind bereits in der Lage, selbstständig die Erweiterung von $2 \cdot 3 = 6$ (dreistellig) über $6 \cdot 4 = 24$ (vierstellig) zu $24 \cdot 5 = 120$ (fünfstellig) vorzunehmen, wenngleich die verbale Beschreibung noch schwer verständlich ist: „Hier ist es genauso wie oben, nur dass man hier zwei Malrechnungen mehr rechnen muss.“

Nach der Bearbeitungsphase wird im Unterrichtsgespräch auf die erste Aufgabe zu vierstelligen Zahlen explizit eingegangen: Die Lehrerin notiert zunächst die vermuteten Anzahlen an der Tafel: 16, 18, 12, 24, 22, 32, 20. Es fällt auf, dass alle Kinder intuitiv richtig eine gerade Anzahl vermuten, was möglicherweise auf das paarweise Vertauschen von Zehnern und Einern bei der Suche nach dreistelligen Zahlen zurückzuführen ist.

Im Anschluss werden systematisch alle vierstelligen Zahlen an der Tafel notiert. Gemeinsam wird überlegt, welche Arten der Sortierung es für Zahlen mit der führenden 1 gibt. Vielen Kindern fiel jetzt schon auf, dass ihnen bei der zweiten Aufgabe fünfstellige Zahlen fehlten und welche das waren. Es wurde deutlich, dass das Tauschen

Du hast die Ziffernkarten **1** **3** **5** **7** **9** .

Wie viele fünfstellige Zahlen kannst du damit bilden? 60 120
 Schreibe deinen Lösungsweg auf.

Wie viele sechsstellige Zahlen kannst du mit sechs verschiedenen Ziffernkarten bilden? Schreibe deinen Lösungsweg auf die Rückseite.

Handwritten solution for 5-digit numbers:

- 13579
- 13759
- 13957
- 79
- 79
- 19
- 15
- 15
- 15
- 17
- 17
- 17

Handwritten note on the right:

Ich habe mich am anfang verstanden aber jetzt hab ich gemerkt das es noch eine wechslung aufgabe gibt und das gilt für alle aufgaben

- 2 Finns Notation seines Lösungsweges ist sehr übersichtlich. Nachträglich erkennt er, dass weitere Vertauschungen („Verwechslungen“) möglich sind. Die korrekte Gesamtzahl der Möglichkeiten kann er errechnen, ohne weitere Zahlen aufzuschreiben.

von jeweils zwei Ziffern hier keine hinreichende Strategie für das weitere Vorgehen ist.

Vertiefende Überlegungen als Hausaufgabe

Als Hausaufgabe erhalten die Kinder das **Arbeitsblatt Vier, fünf, sechs Ziffernkarten – Vertiefung**. Hier geht es erneut darum, aus vier Ziffernkarten mit vier verschiedenen Ziffern (2, 5, 1, 8) vierstellige Zahlen zu bilden. Durch die Fragen „Wie viele der vierstelligen Zahlen haben eine 2 vorne/hinten?“, „Wie viele der vierstelligen Zahlen haben eine 8 an der zweiten Stelle?“, „Wie viele der vierstelligen Zahlen beginnen/enden mit 25?“, „Wie viele der vierstelligen Zahlen beginnen mit 2 und enden mit 5?“ werden die Gesetzmäßigkeiten bei der Zahlbildung noch einmal besonders deutlich.

Diese Hausaufgabe konnten alle Kinder gut bewältigen. Eigene Fragen, die zuletzt noch erfunden werden sollten, hielten sich allerdings eng an die Vorlage und ersetzten in der Regel einzelne Zahlen in den vorgegebenen Fragestellungen. Lediglich drei Fragen fallen ein wenig aus dem Rahmen: „Bei wie vielen Zahlen ist die

erste Ziffer größer als die zweite?“, „Wie viele Zahlen gibt es mit einer 8?“ und „Wie viele der vierstelligen Zahlen haben eine 2 in der Mitte?“ Mehrere Kinder fragten darüber hinaus nach Zahlen, die gar nicht beteiligt waren, so dass die Antwort „keine“ lauten musste.

► Mehr Ziffern als Stellen

Bisher waren immer genauso viele Ziffernkarten gegeben, wie die Zahl Stellen aufweisen sollte. Auf dem **Arbeitsblatt Mehr Ziffern als Stellen** sind nun mehr Ziffernkarten vorhanden, als für eine Zahl gebraucht werden. Die Fragen lauten: Wie viele drei-/zweistellige Zahlen kannst du aus den Ziffernkarten mit den Ziffern 3, 5, 7 und 9 bilden? Die vierstelligen Zahlen, die gebildet werden können, sind auf dem Blatt bereits notiert.

Fast alle Kinder konnten das Arbeitsblatt richtig bearbeiten. Im Unterrichtsgespräch zeigte sich aber, dass die Kinder zwar häufig in der Lage sind, die Möglichkeiten aufzuschreiben, jedoch nicht unbedingt über

Zusammenhänge zwischen den jeweiligen Aufgaben oder Gesetzmäßigkeiten nachdenken. (Das Unterrichtsgespräch fand mit einigem Abstand zur Bearbeitung des Arbeitsblattes statt. Das Arbeitsblatt lag den Kindern während des Gesprächs nicht vor.) Alle Kinder konnten sofort angeben, dass es 24 Möglichkeiten gibt, mit vier verschiedenen Ziffernkarten vierstellige Zahlen zu bilden. Auch das Begründen der Vollständigkeit, wozu auf eine Systematik zurückgegriffen werden muss, gelang inzwischen allen Kindern. Als Vermutung auf die Frage, ob es denn mehr, weniger oder gleich viele dreistellige Zahlen mit diesen vier Ziffernkarten gebe, äußerte aber mehr als die Hälfte der Kinder, es müsse mehr geben, weil „man ja eine Ziffer mehr habe, die man dann immer noch tauschen könne.“ (Diese Kinder hatten auf ihrem Arbeitsblatt richtig die 24 dreistelligen Zahlen aufgeschrieben.) Zwei Kinder konnten argumentieren, dass man bei den vierstelligen Zahlen doch einfach die hintere Ziffer streichen könne und es deshalb genauso viele dreistellige Zahlen seien. Zwar wurde dieser Gedankengang im Gespräch auch für einige andere Kinder nachvollziehbar, doch viele Kinder ließen sich von dieser Argumentation nicht überzeugen und hätten lieber die Zahlen noch einmal systematisch aufgeschrieben (was ihnen erst in der nochmaligen Bearbeitung des Arbeitsblatts ermöglicht wurde). Dennoch war allen Kindern deutlich, dass – wenn tatsächlich die letzte Ziffer gestrichen werden kann – genauso gut die erste Ziffer gestrichen werden könnte.

Auf die von der Lehrerin anschließend aufgeworfene Frage, wie viele zweistellige Zahlen denn mit vier Ziffernkarten gebildet werden könnten, antworteten nun einige Kinder, dass es wieder 24 geben müsse. Ein paar Kinder waren auch wieder überzeugt, dass es mehr als 24 geben müsse – vielleicht weil wieder eine Ziffer frei wird, die man tauschen kann? Erst als an der Tafel alle zweistelligen Zahlen mit der 3 an der Zehnerstelle aufgeschrieben worden waren, waren alle Kinder sicher, dass es zwölf Zahlen geben müsse. Nun waren die Kinder auch in der Lage anzugeben, welche Streichungen man denn bei den vierstelligen Zahlen auf dem Arbeitsblatt vornehmen könne, um die zweistelligen zu erhalten: erst in jeder vierstelligen Zahl die hinteren beiden Ziffern und dann jede zweite Zahl.

An diesem Beispiel zeigt sich sehr schön, dass Sicherheit in einzelnen Strategien nicht zwangsläufig dazu führt, dass die Kinder Zusammenhänge herstellen oder

Ergebnisse reflektieren. Dafür bedarf es immer wieder angeleiteter Unterrichtsgespräche. Wir empfehlen auch, die Aufgabenstellungen mit den Ziffernkarten nicht nacheinander zu bearbeiten, sondern lieber etwas Zeit vergehen zu lassen, so dass zunächst eine gewisse Sicherheit in Grundfragen und -strategien erreicht werden kann.

► Ziffern mehrfach verwenden

Auf dem **Arbeitsblatt Ziffern mehrfach verwenden**  lauten die Fragen: Wie viele dreistellige Zahlen kannst du mit Karten mit den Ziffern 2, 6, 6 (2, 3, 6, 6/2, 2, 6, 6) bilden? Bei der Bearbeitung dieses Arbeitsblatts lohnt es vor allem, die Kinder vorab Vermutungen zur Anzahl der Möglichkeiten anstellen und ihre Vermutungen begründen zu lassen. Wenn Überlegungen häufig verbalisiert werden, lassen sich auch die anderen Kinder immer öfter einbeziehen, die Richtigkeit der vorgestellten Überlegungen zu prüfen und ggf. Fehler aufzudecken.

So vermutete Christian zunächst, dass sich 18 Zahlen aus den gegebenen Ziffern 2, 6 und 6 bilden lassen. Mehr als die Hälfte der Kinder war in der Lage zu erkennen, dass Christian aus der Aussage „Mit vier verschiedenen Ziffern lassen sich viermal sechs dreistellige Zahlen bilden“ auf dreimal sechs für die vorliegende Aufgabe geschlossen hatte. Sie konnten ebenfalls verbalisieren, warum diese Übertragung nicht funktioniert. Außerdem wurde Christian dann noch darauf hingewiesen, dass er nicht berücksichtigt habe, dass zwei Ziffern gleich seien.

Im Gespräch erkannten die Kinder, dass sich durch das doppelte Vorhandensein einer Ziffer die Anzahl der dreistelligen Zahlen halbieren muss. Es war ihnen aber nicht gelungen, diese Erkenntnis in diesem Umfang in der eigenständigen Auseinandersetzung zu gewinnen.

Vertiefende Überlegungen als Hausaufgabe

Als Hausaufgabe und zur Vertiefung eignet sich das **Arbeitsblatt Ziffern mehrfach verwenden – Vertiefung** .

► Vergleichender Rückblick

Das **Arbeitsblatt Welche Aussage stimmt?**  fordert die Kinder rückblickend noch einmal auf, sich mit verschie-

LERNEN BEGLEITEN

Beobachtungshilfen:

- ▶ Wer findet vollständige Lösungen?
- ▶ Wer geht schon in der Lösungsphase systematisch vor und hält diese Systematik schriftlich fest?
- ▶ Wer kann die Vollständigkeit seiner Lösung begründen?
- ▶ Wer versucht, Lösungsstrategien geschickt zu erweitern?
- ▶ Wer hat ein Gefühl dafür, wie Veränderungen in der Aufgabenstellung sich auf die Anzahl auswirken?
- ▶ Wer versteht die Lösungsideen anderer Kinder?

Förderhinweise:

Kinder, die der Auffassung sind, alle Möglichkeiten gefunden zu haben, auch wenn dies nicht stimmt, kann man während der Bearbeitungsphasen auffordern, die Zahlen systematisch(er) aufzuschreiben und Beschreibungen der Systematik vorzunehmen. Hilfreich kann es auch sein, die Zahlen auszuschneiden und neu zu sortieren.

Insbesondere die letzten Aufgaben auf den Arbeitsblättern, die auf der Rückseite bearbeitet werden sollen, sind Differenzierungsangebote für leistungsstarke Kinder.

denen Aussagen zu den behandelten Aufgaben auseinanderzusetzen und vor allem Begründungen anzuführen. Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten das Arbeitsblatt in Kleingruppen. Es sollte ihnen bis zu einer Unterrichtsstunde dafür zur Verfügung stehen. Die Aussagen lauten:

1. Aus drei unterschiedlichen Ziffern kannst du mehr als zehn verschiedene dreistellige Zahlen bilden.
2. Aus zwei unterschiedlichen Ziffern und der Null kannst du mehr als fünf verschiedene dreistellige Zahlen bilden.
3. Aus vier verschiedenen Ziffern kannst du weniger als 20 zweistellige Zahlen bilden.
4. Aus fünf verschiedenen Ziffern kannst du mehr als 50 zweistellige Zahlen bilden.
5. Aus fünf verschiedenen Ziffern kannst du mehr fünfstellig als vierstellig Zahlen bilden.
6. Wenn man vier verschiedene Ziffern wählt, kann man mehr vierstellig Zahlen bilden, als wenn man eine Ziffer doppelt nutzt.

Auffallend war, dass – abgesehen von einer Gruppe – alle Kinder noch einmal die Zahlen aufschrieben, bevor sie eine Begründung lieferten, obwohl viele insbesondere die ersten beiden Aussagen direkt hätten beurteilen können.

Die Begründungen sind nach wie vor auf unterschiedlichem Niveau. Während eine Gruppe durchgängig „weil wir habens ausprobiert“ als Begründung angab, einige lediglich festhielten, ob die Aussage stimmt, schrieben andere ganze Begründungssätze, so z. B. Fabian und Lars zu Aussage 6: „Weil man die 1 nicht zweimal nehmen kann, ist wenn man 4 verschiedene Zahlen nimmt mehr, als wenn man eine doppelt nimmt.“ (Als Beispiel für vier unterschiedliche Zahlen wählten sie 1, 2, 3, 4, dagegen 1, 1, 2, 3 als Beispiel für eine doppelt vorkommende Ziffer.)

Wie wichtig sehr genaues Lesen ist, zeigte sich vor allem bei den Aussagen 3 und 4, bei denen die Mehrheit der Gruppen immer eine Gleichheit von Stellen- und Zifferanzahl unterstellte und die so abgewandelten Aussagen dann richtig bearbeitete.

Auch wenn in der Arbeitsphase bereits explizit Begründungen eingefordert werden, ist die anschließende gemeinsame Reflexionsphase von besonderem Gewicht. Erst durch das Vorstellen der Gruppenergebnisse zu ausgewählten Aussagen und das Vergleichen der Vorgehensweisen, der Systematik im Aufschreiben und der Begründungen können Kinder ihre Argumentationsfähigkeiten weiterentwickeln und voneinander lernen.

▶ Fazit

Insgesamt zeigte sich, dass zwar nicht alle Kinder alle Aufgabenstellungen richtig lösen konnten, doch waren bei allen enorme Lernfortschritte zu beobachten. Sowohl die Systematik in der Herangehensweise als auch insbesondere die Argumentationsfähigkeit und das Durchdringen der Überlegungen der anderen Kinder haben sich deutlich weiterentwickelt.

Trotzdem benötigen die Kinder sehr viel Zeit und Erfahrung mit diesen Aufgabenstellungen. Es ist sehr sinnvoll, dieselben Aufgaben im darauffolgenden Schuljahr erneut einzusetzen, um sie auf einem anderen Niveau bearbeiten und um vor allem die Zusammenhänge zwischen den Aufgaben noch deutlicher herausarbeiten zu können.