

Darstellungen entwickeln, vergleichen und bewerten

Karin Anders

Ziel der hier beschriebenen Unterrichtseinheit zur Kombination von Kleidungsstücken ist, dass Kinder ihre individuellen Darstellungsformen zur Lösung kombinatorischer Probleme weiterentwickeln und sich konventionellen Darstellungen annähern.

GEBIET: Kombinatorik, Darstellen

LERNBEREICH: Einfache kombinatorische Aufgaben lösen; geeignete Darstellungen entwickeln, miteinander vergleichen und bewerten

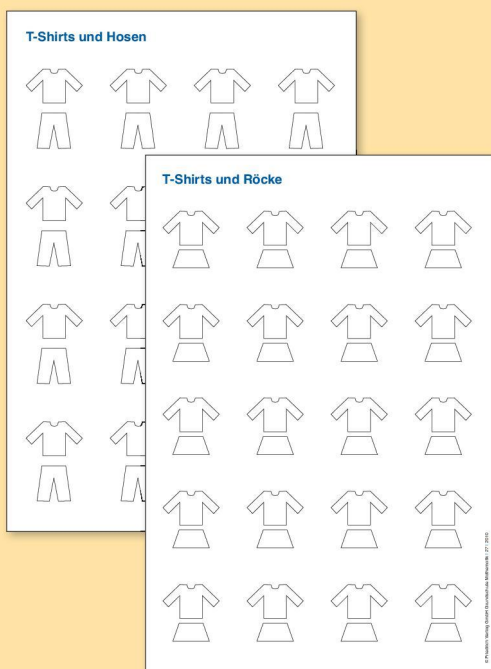
SCHULJAHR: 2.–4.

SOZIALFORM: Partnerarbeit, Klassengespräch

ZEITBEDARF: 3–4 Unterrichtsstunden



- **2 Vorlagen T-Shirts und Hosen bzw. T-Shirts und Röcke.** Das Ausschneiden der Kleidungsstücke – einzeln oder paarweise – ermöglicht leistungsschwächeren Kindern, ihre Kombinationen nachträglich zu verschieben und erleichtert damit die übersichtliche Anordnung. Die einheitliche Größe der Trikots bzw. Tanzkostüme vereinfacht das Erkennen von Strukturen.



Voraussetzung für das Gelingen der Unterrichtseinheit ist, dass den Kindern einerseits genügend Freiraum und die Chance, Fehler zu machen, zugestanden werden und andererseits durch eine fachkundige Begleitung ein Fortschritt in der Schematisierung ermöglicht wird.

► Fußballtrikots oder Tanzkostüme zusammenstellen

Im ersten Lernschritt lösen die Kinder zu zweit ein einfaches kombinatorisches Problem:

Aufgabe 1a: Kombiniere gelbe, rote und grüne T-Shirts mit schwarzen oder blauen Hosen. Welche Möglichkeiten der Zusammenstellung gibt es?

Aufgabe 1b: Kombiniere gelbe, rote und grüne T-Shirts mit schwarzen oder blauen Tanzröcken. Welche Möglichkeiten der Zusammenstellung gibt es?

Die Arbeitsanweisung lautet: „Wähle eine Aufgabe aus. Arbeite mit einem Partner. Findet und ordnet eure Kombinationen und klebt oder malt sie übersichtlich auf ein Blatt. Wenn ihr fertig seid, tauscht euch mit einer anderen Partnergruppe aus.“ Wer möchte, darf die **Vorlagen T-Shirts und Hosen** bzw. **T-Shirts und Röcke** nutzen. Weitere Vorgaben oder Anregungen für die Vorgehensweise oder die Dokumentationsform werden nicht gemacht, sodass individuelle Arbeitsergebnisse entstehen, die Anlass zum Vergleichen und Reflektieren geben.

An der Tafel hängt eine Scheibe o.Ä., an die die Kinder eine Wäscheklammer mit ihren Namen heften, sobald sie für den Austausch mit einem anderen Paar bereit sind. So finden sich immer wieder schnell zwei Partnergruppen, die sich zu einem Gespräch z.B. auf den Flur begeben. In den Gesprächen werden die individuellen Ergebnisse vorgestellt und dabei auch Fehler korrigiert.

Ausgewählte Schülerergebnisse werden von der Lehrkraft sukzessive im Klassenzimmer aufgehängt.

Individuelle Darstellungsformen der Kinder

Daniel und Tim schneiden für jede Kombination ein T-Shirt mit einer Hose aus, denken sich diese als „Spieler“, die sie auf einem Fußballfeld symmetrisch anordnen: Spieler mit derselben Hosenfarbe gehören zu einer Mannschaft. Der Spieler mit dem roten Hemd ist der Torwart, der Verteidiger trägt das gelbe Trikot und der Spieler mit dem grünen Shirt ist der Angreifer **1**. Die Symmetrie auf dem Fußballfeld ist für die beiden ein wichtiges Moment der Kontrolle auf Vollständigkeit.

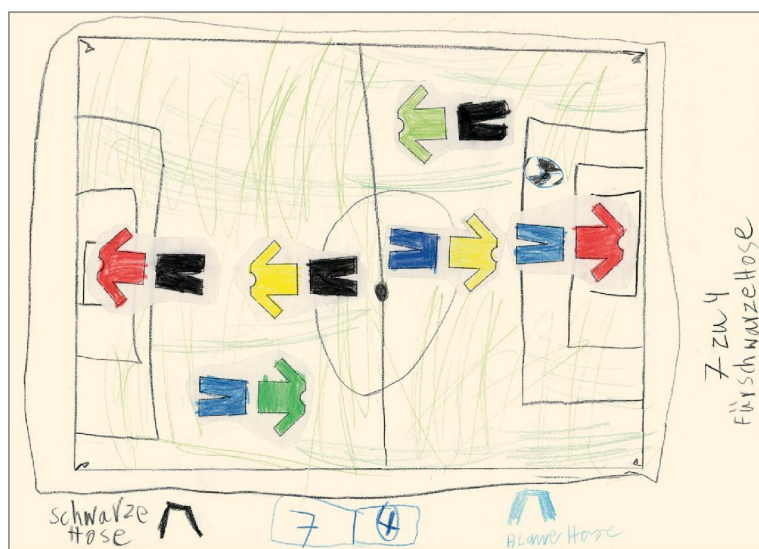
Emma und Anna drücken durch farbige Verbindungslinien die paarweise Zusammengehörigkeit von T-Shirts und Röcken aus **2**. Während der Arbeit ändern sie die Bearbeitungsrichtung: Sie zeichnen zuerst die Röcke, weil es nur zwei davon gibt, dann ziehen sie Verbindungslinien in der Farbe der T-Shirts – das ist die Reihenfolge, in der sie sich anziehen. Sie addieren die von den T-Shirts abgehenden Verbindungslinien ($2 + 2 + 2$) und ermitteln 6 verschiedene Möglichkeiten. Damit entdecken sie für sich das Multiplikationsprinzip: $3 \cdot 2$ (s. „Kombinatorisches Zählen – Kombinieren, Variieren, Permutieren“ auf S. 40).

Nina und Lea listen die Kombinationen paarweise auf und halten dabei konsequent ihre Systematik bei: gleiche T-Shirts und wechselweise blaue und schwarze Hosen **3**.

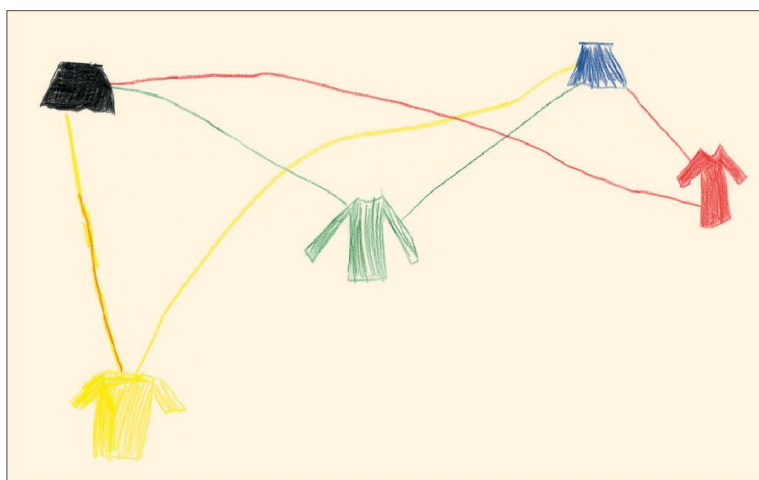
Darstellungen vergleichen

In einem gemeinsamen Gespräch am Ende der Unterrichtsstunde werden die Schülerinnen und Schüler zunächst aufgefordert, die Gemeinsamkeiten von Aufgabe 1a und Aufgabe 1b zu benennen: Die Entsprechung von Röcken und Hosen ist den Kindern in der Erprobungs-kasse sofort einsichtig.

Die verschiedenen Möglichkeiten, die sechs Kombinationen übersichtlich darzustellen, werden präsentiert. Zuletzt wird die Frage gestellt, wie eine Darstellung in eine andere übertragen werden könnte. In der Er-



1 Daniel und Tim bilden aus den gefundenen Kombinationen zwei Mannschaften, die sie auf einem Spielfeld aufstellen



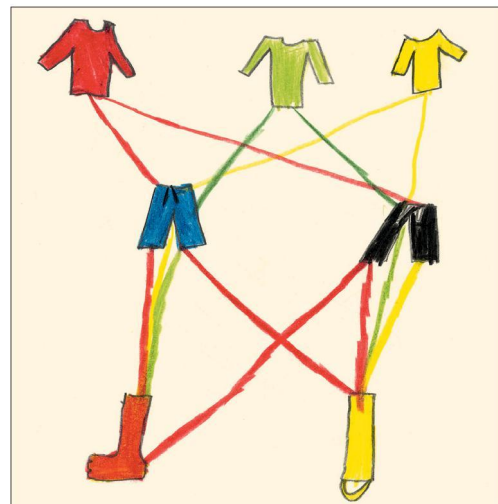
2 Emma und Anna zeichnen Verbindungslinien



3 Nina und Lea „listen“ die Kombinationen in „Päckchen“



4 Max und Tim erweitern die „Liste“



5 Emma und Sarah „verlängern“ die Verbindungslinien

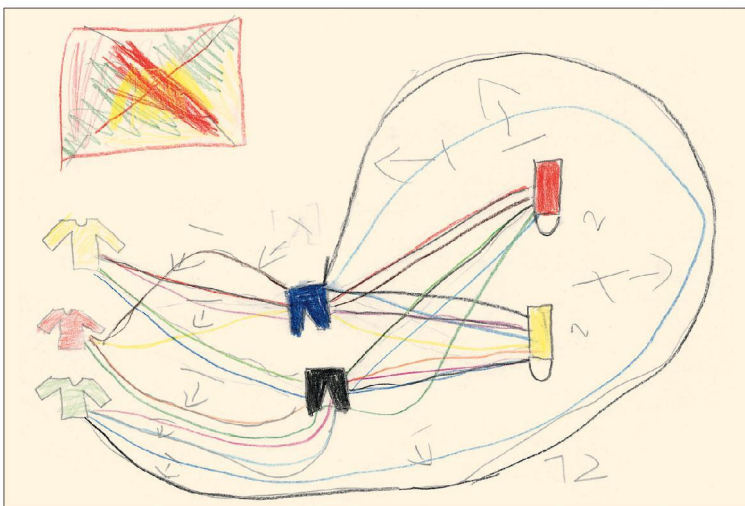
probungsklasse konnten die Kinder jeder Figur in der Liste (3, S. 19) genau eine farbige Verbindungslinie in der Arbeit von Emma und Anna (2, S. 19) zuordnen.

► Die Aufgabe erweitern

Die folgende weiterführende Aufgabenstellung bearbeiten die Kinder mit einem anderen Partner:

Aufgabe 2: Es kommen gelbe und rote Strümpfe hinzu. Welche Möglichkeiten gibt es jetzt?

Angeregt durch den Partnerwechsel knüpfen einige Kinder an ihr altes Ordnungssystem an, andere erproben neue Darstellungen.



6 Lea und Nina „verlängern“ die Verbindungslinien auf ihre Weise

Individuelle Darstellungsformen weiterentwickeln

Die von Tim (und Daniel) gefundene Anordnung von „Spielern“ auf einem Fußballfeld erweist sich als nicht ausbaufähig (1, S. 19). Tim geht mit Max deshalb zur Darstellungsform „Liste mit Päckchen“ über (3, S. 19). Sie versehen die vorhandenen Figuren abwechselnd mit gelben und roten Stutzen. Die fehlenden Figuren mit den komplementären Stutzenfarben malen sie paarweise hinzu (4).

Emma überzeugt Sarah, die von ihr für Aufgabe 1 gezeichneten Verbindungslinien (2, S. 19) um eine Stufe zu verlängern. Sie verändern die Leserichtung, verbleiben aber sonst in der Struktur: Sie zeichnen vom roten T-Shirt jeweils einen roten Strich zu einer Hose und von jeder Hose je einen weiteren roten Strich zu einem Strumpf (5). Denkt man sich die in der Zeichnung fehlenden, sich überkreuzenden grünen und gelben Linien in der untersten Stufe dazu, entspricht die Anzahl der Verbindungslinien zwischen Hosens und Strümpfen der Gesamtzahl der Kombinationen.

Lea und Nina greifen Emmas und Sarahs Idee auf, richten die Abbildung aber horizontal aus und verlängern sie nach rechts (6). Beim Ablesen der Gesamtzahl stoßen sie auf das Problem, welche Striche zu zählen sind. Es erscheint ihnen unlogisch, einige Striche doppelt zu berücksichtigen. Sie zeichnen deshalb von jedem T-Shirt je zwei Striche zu den Hosens, weil es zu jeder Hose zwei mögliche Stutzenfarben gibt. Dann zählen sie die von den T-Shirts abgehenden Striche ($3 \cdot 4$) und ermitteln die Gesamtzahl 12.

Darstellungen vergleichen

In der folgenden Gesprächsrunde vergleichen die Kinder den Herstellungsaufwand der Darstellungen sowie die Ablesbarkeit der Gesamtzahl der Kombinationen und aller zwölf verschiedenen Möglichkeiten. Die Übertragbarkeit der Darstellungform „Liste“ 4 in die Darstellungsform „Verbindungslinien“ 5 6 ist nicht mehr so einfach zu erkennen. Das zeigen auch die Schülerbeispiele, in denen die Kinder durch Streichen oder Nummerieren der Verbindungslinien versuchen, Ordnung in ihren Zählvorgang zu bringen 6.

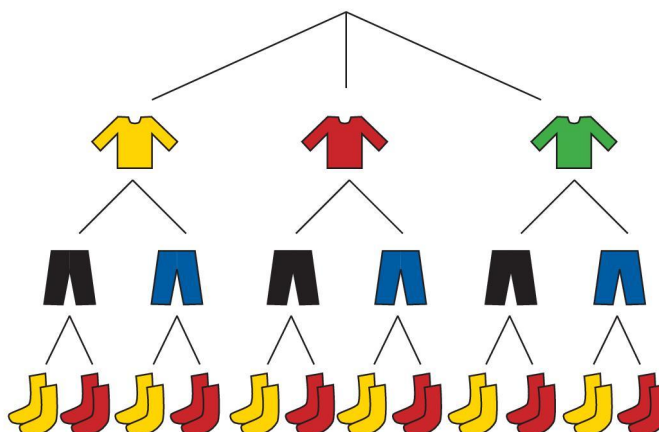
Die Unzulänglichkeiten der Abbildungen wecken bei einigen Kindern das Verlangen nach einer weiteren Darstellungsform. Eine gute Gelegenheit, das Baumdiagramm (zu Aufgabe 1) vorzustellen und es vor den Augen der Kinder um die dritte Stufe zu verlängern 7.

Anschließend drängt sich der Vergleich mit der Liste und den Verbindungslinien auf. Folgende Gemeinsamkeiten und Unterschiede können Kinder entdecken:

- ▶ In allen Darstellungen sollten die Objekte (und Linien) möglichst systematisch angeordnet werden.
- ▶ Beim Baumdiagramm und bei den Verbindungslinien ist die Anzahl der Stufen schnell zu erkennen.
- ▶ Bei den Verbindungslinien kommt jedes Objekt (T-Shirt, Hose, Strümpfe) in den verschiedenen Farben genau einmal vor. Der Zeichenaufwand ist gering. Im Baumdiagramm muss jede Hose je dreimal, jedes Strumpfpaar sechsmal gezeichnet werden – ein hoher Aufwand. Für die Liste ist der Zeichenaufwand noch höher.
- ▶ In der Liste sind die Kombinationen leicht ablesbar. Die Gesamtzahl der Möglichkeiten lässt sich abzählen.
- ▶ Im Baumdiagramm gibt es keine überkreuzten Linien, was die Übersicht erleichtert. Jeder Strang repräsentiert genau eine Kombination. Die Gesamtzahl der Möglichkeiten lässt sich abzählen oder errechnen.

▶ Ausblick

In einer weiteren Unterrichtseinheit zu einer ähnlichen kombinatorischen Aufgabenstellung sollten die Kinder erneut Gelegenheit erhalten, in neuen Partnergruppen die nun bekannten Darstellungsformen zu erproben.



7 Die Lehrkraft kann als weitere Darstellungsform das Baumdiagramm einführen

Dabei dürfen die Anforderungen des Baumdiagramms von der Lehrkraft nicht unterschätzt werden. Zwar ist das Baumdiagramm ein mächtiges Werkzeug zur Lösung stochastischer Aufgaben, vielen Kindern fällt es aber – wie bei den Verbindungslinien auch – schwer, die Pfade statt der einzelnen Objekte in den Blick zu nehmen. Die Produktion eines eigenen Baumdiagramms verlangt darüber hinaus Modellierungsfähigkeiten und zeichnerisches Geschick. Schon bei der Platzaufteilung müssen die Kinder die Anzahl der Stränge und Ebenen vorhersehen.

Die Schülerbeispiele entwickelte Frau Anna Grenz mit der Klasse 3a der Margaretenschule Münster.

LERNEN BEGLEITEN

Beobachtungshilfen

- ▶ Wer kann eine Darstellungsform auf andere oder erweiterte Aufgabenstellungen übertragen?
- ▶ Wer kann Darstellungsformen anderer Kinder nutzen?
- ▶ Wer erkennt Vor- und Nachteile verschiedener Darstellungsformen?

Förderhinweise

Kinder, die den Zusammenhang zwischen verschiedenen Darstellungsformen nicht sehen, erhalten den Auftrag, bestimmte Kombinationen in verschiedenen Darstellungsformen zu zeigen.