

„Ich steh‘ ganz vorne, dann kommt Niklas ...“

Nadja Stoye

In dieser Unterrichtseinheit bearbeiten die Schülerinnen und Schüler in Gruppenarbeit einfache Permutationsaufgaben. Zusätzliches Material wird nicht benötigt, da die Kinder für sich selbst Anordnungen in einer Reihe oder im Kreis finden sollen. Gesprächsanlässe ergeben sich dabei automatisch.

GEBIET:	Kombinatorik, Kommunizieren
LERNBEREICH:	Einfache kombinatorische Aufgaben gemeinsam bearbeiten, Vorgehensweisen anderer verstehen
SCHULJAHR:	2./3.
SOZIALFORM:	Gruppenarbeit, Gespräch im Klassenverband, Einzelarbeit
ZEITBEDARF:	3–4 Unterrichtsstunden

Kombinatorische Aufgabenstellungen lassen sich gerade in den unteren Klassen einfach handelnd und experimentell erarbeiten. Dabei ist kaum Vorarbeit durch die Lehrkraft erforderlich, auch Kopien und Material müssen nicht besorgt werden.

Im Folgenden möchte ich zwei Unterrichtssequenzen vorstellen, die in Kleingruppen einfach umzusetzen sind, Situationen aus dem Schulalltag zum Anlass haben und grundlegende mathematische Überlegungen zu Permutationen ermöglichen.

► Worauf im Vorfeld zu achten ist

Bei der Arbeit in Kleingruppen bemerke ich immer wieder, dass es Kinder gibt, die bereits einen Weg im Kopf haben. Dann kann es vorkommen, dass diese Schülerinnen und Schüler den Erarbeitungsweg in ihrer Kleingruppe vorgeben, ohne dass die anderen Schülerinnen und Schüler die Vorgehensweise verstehen. Zu Beginn einer Unterrichtseinheit „Kombinatorik“ kann es durchaus hilfreich sein, wenn man erste strategische Anregungen von seinen Mitschülern erhält. Damit aber anschließend alle Schülerinnen und Schüler gleichermaßen mitwirken können, sollte man diese Erwartung im Vorfeld besprechen und beispielsweise die Regel aufstellen, dass jedes Kind eine Anordnung nennen darf und dann das nächste Kind an der Reihe ist.

Bei anderen Gruppen habe ich festgestellt, dass sie, ohne eine Strategie zu verfolgen, loslegen und sich dann mitendrinnen vertun. Daher brauchen die Kleingruppen oft unterschiedlich viel Zeit, so dass ein weiteres Differenzierungsangebot vorliegen sollte. Zum Beispiel können Gruppen, die schon fertig sind, aufgefordert werden, andere Gegenstände anzuordnen, sich zusammensetzen und Aussagen für größere Gruppen zu treffen oder ihre Lösung zu verschriftlichen.

► Wie viele Möglichkeiten gibt es, sich an der Tür aufzustellen?

Wenn es darum geht, den Klassenraum zu wechseln, gibt es oft Streit, wer vorne steht oder wer wem einen Platz freihält. Die Lehrkraft kann die Situation nutzen und folgendes Problem formulieren: „Damit jeder mal vorne an der Tür stehen kann, möchte ich herausfinden, wie viele Möglichkeiten es gibt, sich in einer Gruppe hintereinander an die Tür zu stellen.“

Die Kinder erhalten die Möglichkeit, in Gruppen zu viert auszuprobieren, wie man sich anstellen kann **1 2**. Es ist ratsam, die Gruppen räumlich voneinander zu trennen oder im Klassenraum zu verteilen. Dadurch ergeben sich oft mehr Variationen im Vorgehen. Wegen der einfachen linearen Struktur ist diese Problemstellung gut für den Einstieg in die Kombinatorik geeignet.

Fotos: Nadja Stoye



1 Die beiden vorderen Kinder bleiben stehen, ...



2 ..., die beiden hinteren Kinder tauschen ihre Plätze

Da die Schülerinnen und Schüler nicht mit Material beschäftigt sind, sondern sich gegenseitig hin- und herschieben, ergeben sich automatisch viele Gesprächsanlässe. Jedes Kind hat eine aktive Rolle inne. Bei Bedarf dürfen die Gruppen ihre Lösungen auch schon aufzeichnen.

Im anschließenden Gesprächskreis werden zunächst die unterschiedlichen Vorgehensweisen besprochen: „Wie seid ihr vorgegangen?“, „Habt ihr auch wirklich alle Aufstellungen gefunden?“ Mit diesen Fragen kann die Lehrkraft sinnvolle Impulse geben, um zum Abschluss auf die Fragestellung „Woher wisst ihr, dass ihr auch alle Lösungen gefunden habt?“ einzugehen. Damit sind die Kinder gefordert, eine Strategie vorzustellen, mit der man systematisch alle Anordnungen erarbeiten kann.

In der Regel ist mindestens eine Kleingruppe in der Klasse dabei, die folgendermaßen vorgegangen ist: „Erst stand Lina ganz vorne und hinter ihr Celine. So gab es zwei Möglichkeiten, weil Jonas und Simon dahinter einmal tauschen konnten. Wenn sich Jonas dann an zweiter Stelle hinter Lina gestellt hat, gab es wieder zwei Möglichkeiten und auch mit Simon. Immer wenn ein Kind vorne steht, gibt es also sechs Möglichkeiten. Bei vier Kindern haben wir dann 24 Möglichkeiten!“

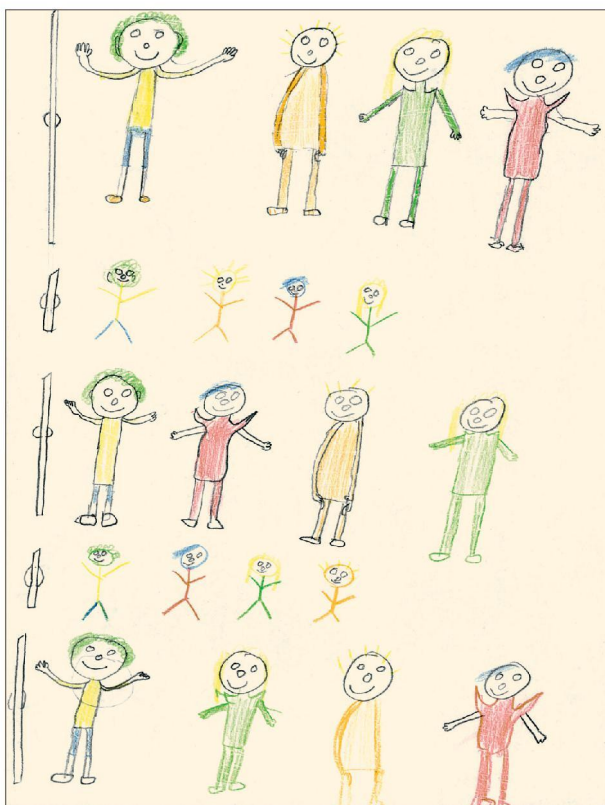
Damit alle Schülerinnen und Schüler den Strategien der anderen Kleingruppen folgen können, werden die Vorgehensweisen entweder vorgeführt oder an der Tafel skizziert.

Die Anschlussaufgabe „Wenn jetzt noch ein Kind hinzukommt, wie viele Möglichkeiten gibt es dann?“ wird im Gesprächskreis gemeinsam erarbeitet. Man wird schnell merken, welche Kinder wieder durch Ausprobieren die Lösung ermitteln wollen und wer bereits eine zuvor erarbeitete Strategie anwenden kann. (Bei fünf Kindern gibt es $5 \cdot 24 = 120$ Aufstellungen, bei sechs Kindern $6 \cdot 120 = 720$ Aufstellungen usw.)

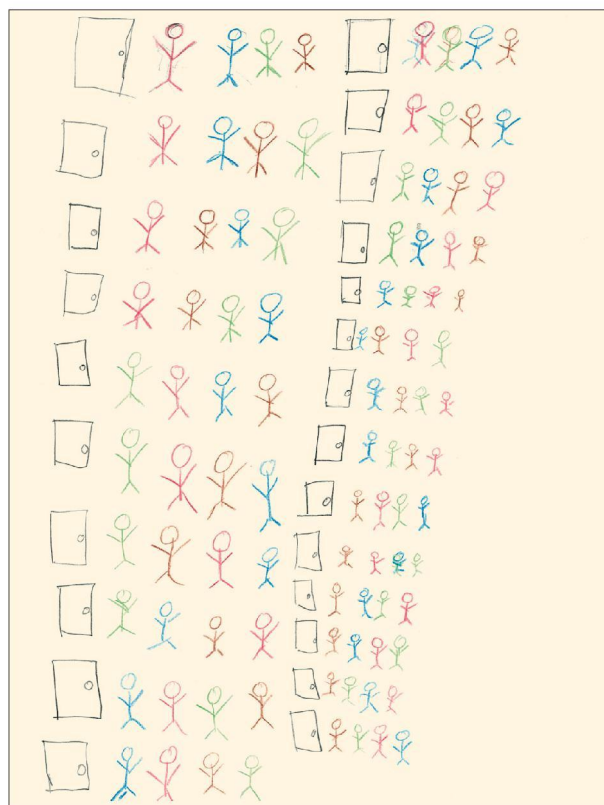
Vorgehensweisen verschriftlichen

Wenn es bisher noch nicht geschehen ist, werden die Kinder nun aufgefordert, Lösungen geordnet aufzuzeichnen oder zu verschriftlichen. Dadurch wird der Blick der Schülerinnen und Schüler noch einmal auf sinnvolle Strategien gelenkt, nachdem die Kinder in der Gruppe und im Gesprächskreis Strategien und Vorgehensweisen zunächst kennen lernen und reflektieren konnten. In Einzelarbeit kann jedes Kind sich auf seine eigene Strategie konzentrieren. Dabei steht nicht so sehr die richtige Lösung der Aufgabe im Vordergrund, sondern vielmehr die mögliche Annäherung an eine Strategie, die auch auf andere kombinatorische Aufgaben übertragbar ist.

Wenn die Schülerinnen und Schüler noch wenig Erfahrung mit kombinatorischen Aufgaben haben, empfiehlt es sich, die Kinder zunächst frei zeichnen zu lassen. Später kann man Vorteile verschiedener Darstellungen besprechen und auf Möglichkeiten hinweisen, die Darstellungen zu vereinfachen. Dabei erreichen die Schü-



3 Leonies Zeichnung bleibt noch sehr nah an der Spielsituation



4 Julia zeichnet – noch nicht durchgängig systematisch – alle 24 Anordnungen mit Strichmännchen

lerinnen und Schüler einen unterschiedlichen Abstraktionsgrad:

1. Manche Schülerinnen und Schüler bleiben noch sehr der Situation verhaftet 3. Die Kinder der Gruppe sind beispielsweise anhand ihrer Kleidungsstücke zu erkennen. Die Tür wird ebenfalls aufgezeichnet.
2. Einige Schülerinnen und Schüler nutzen erste Abstraktionen 4 (z. B. Strichmännchen statt Kinder).
3. Andere Schülerinnen und Schüler verzichten auf die Ausgestaltung der Darstellung und lösen die Aufgabe mehr oder weniger auf der symbolischen Ebene 5.

Die Lehrkraft kann diesen Zeichnungen entnehmen, inwieweit die Kinder schon in der Lage sind, ihre Vorgehensweisen zu verallgemeinern. Kinder, die den Anordnungsvorgang zeichnerisch detailliert übertragen, sind meist noch auf die Handlungssituation angewiesen, um mögliche Anordnungen zu finden. Kindern, die verstärkt auf der symbolischen Ebene arbeiten, fällt es in der Regel leichter, ihre Strategien auf andere Problemstellungen zu übertragen oder das Problem auf größere Mengen zu erweitern.

Vor Beginn der folgenden Unterrichtsstunde werden ausgewählte Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler

auf Folie kopiert, um Vorgehensweisen und Strategien erneut zu besprechen und zu reflektieren.

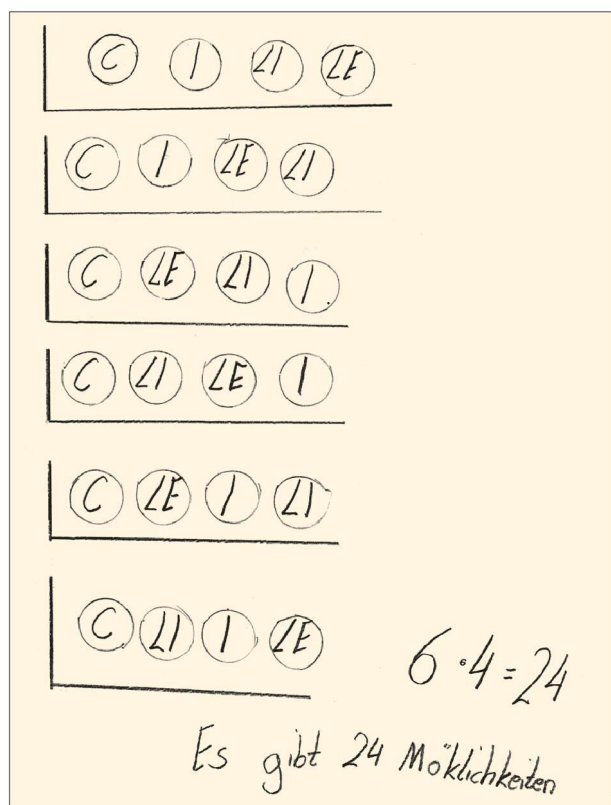
► Wie viele Möglichkeiten haben wir, an einem Gruppentisch zu sitzen?

Auch während des Schuljahrs ergibt sich immer mal wieder die Notwendigkeit, die Sitzordnung im Klassenraum zu ändern. Dabei kann die Problemstellung „Wie viele Möglichkeiten haben wir, an einem Gruppentisch (à vier Kinder) zu sitzen?“ thematisiert werden.

Damit allen klar ist, was gemeint ist, werden zwei verschiedene Anordnungen vorgeführt. Manchmal kommen Schülerinnen oder Schüler beispielsweise auch auf die Idee, dass man sich auf den Tisch setzen kann und so weitere Möglichkeiten erhält.

Vor Beginn der Experimentierphase dürfen die Kinder schätzen, wie viele Anordnungen es geben könnte. Dadurch wird ihr Interesse geweckt und die Motivation aufrechterhalten, die Lösung herauszufinden.

Anschließend erhalten die Schülerinnen und Schüler Gelegenheit, an ihrem Gruppentisch handelnd auszuprobieren, wie viele Möglichkeiten es gibt. Auch wenn es immer wieder Schülerinnen und Schüler gibt, die zu



5 In Celinas Zeichnung ist die reale Situation nicht mehr zu erkennen

diesem Zeitpunkt schon zu Papier und Stift greifen – was auch anerkannt werden sollte –, sollte das Umsetzen einmal durchgespielt werden, da dabei jedes Kind aktiviert wird.

Einige Schülerinnen und Schüler können bereits an die vorherige Unterrichtssequenz anknüpfen („Hier müssen es ja dann auch 24 Möglichkeiten sein!“). Allerdings stellt die Aufgabe für die meisten Schülerinnen und Schüler zunächst ein neues Problem da und erst beim Ausprobieren stellen sie fest, dass die Vorgehensweise genau die gleiche wie bei der linearen Anordnung ist.

Danach notieren die Kinder die gefundenen Anordnungen auf Papier.

Am Ende der Erarbeitungsphase treffen sich alle Schülerinnen und Schüler im Sitzkreis. Hier erhalten sie die Möglichkeit, ihr Vorgehen und ihre Lösungen vorzustellen und sich über günstige Strategien auszutauschen. Die Strategien werden erläutert, eigene und fremde Denkweisen verglichen, Fragen werden gestellt, weitere Anregungen diskutiert oder neue Ideen aufgenommen.

Um auch tatsächlich an die Alltagswirklichkeit anzuknüpfen, wird am Ende noch darüber diskutiert, welche Anordnungen am Gruppentisch überhaupt Sinn machen. Es sollte beispielsweise kein großes Kind vor

einem kleinen sitzen, da es die Sicht zur Tafel versperren würde. Daher streichen die Kinder am Ende noch die Ergebnisse durch, die nicht praktikabel sind.

► Wie kann es weitergehen?

Mit Gegenständen im Klassenzimmer lässt sich das Thema Permutationen weiter vertiefen: Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 (4, 5, ...) Stifte/Spielfiguren/Federmappen/Kreiden nebeneinanderzulegen?

Darüber hinaus gibt es noch eine Reihe weiterer kombinatorischer Fragestellungen, die in Kleingruppen von vier bis fünf Kindern durchgespielt werden können:

- Wie viele Möglichkeiten gibt es, uns aufzustellen, wenn wir eine Polonaise machen möchten?
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, sich an einen runden Tisch zu setzen?
- Wenn jeder jedem die Hand gibt, wie oft werden dann die Hände geschüttelt? (s. „Händeschütteln mit dem Zahlenteufel“ auf S. 27.)
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, Zweiergruppen zu bilden?

LERNEN BEGLEITEN

Beobachtungshilfen

- Wer findet auf handelnder Ebene eine Lösung?
- Wer kann seine Lösung aufzeichnen?
Welche Vereinfachungen werden genutzt?
- Wer kann seine Überlegungen der Klasse mitteilen?
- Wer kann seine Vorgehensweise auf komplexere Aufgabenstellungen übertragen?

Förderhinweise

Durch die Vorgabe der Gruppengröße ist eine qualitative Differenzierung leicht möglich. Schülerinnen und Schüler, die Schwierigkeiten haben, die Lösungswege anderer Kinder nachzuvollziehen, können diese mit Spielfiguren oder Steckwürfeln nachstellen.