

Kombinatorik im Grundschulunterricht

Fachsystematische und fachdidaktische Betrachtungen

VON BERND WOLLRING

Kombinatorische Grundmuster bilden für Lehrkräfte die Planungsgrundlage zu Aufgaben für die Grundschule: Sie werden an mehrdeutigen Beispielen unterscheidend beschrieben und mit den Referenzkontexten „Türme“ und „Tüten“ illustriert. An Stelle von Formeln werden Tabellen mit den entsprechenden Anzahlen und deren Entstehungsmuster vorgestellt.

FOTO: SHUTTERSTOCK, NEW YORK



Abb. 1: Ein einfaches Eis birgt vielfältige kombinatorische Möglichkeiten – mehr, als man im ersten Moment vermuten würde.

Kombinatorik ist ein Arbeitsfeld an der Schnittstelle mehrerer Inhaltsbereiche aus den Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich (vgl. KMK 2004). Dort ist die Kombinatorik unter „Zahlen und Operationen“ gelistet, denn es geht um das Entwickeln von Zählstrategien. Sie befasst sich mit dem Herstellen und Zählen von Mustern, das gehört zu „Muster und Strukturen“. Dazu muss man sich die zu zählenden Gegenstände materiell oder mental vergegenwärtigen, etwa durch Muster aus Figuren. Mentales oder materielles

Ändern von Figuren fällt in den Inhaltsbereich „Raum und Form“.

KENNZEICHNUNGEN ZUR KOMBINATORIK

Studierende des Grundschullehramts sollten Kombinatorik kennzeichnen und zwei Aufgaben nennen, eine für Grundschulkinder und eine für Lehrkräfte, hier typische Antworten:

- A. Kombinatorik: eine Sammlung von allgemeinen Formeln, die zum Errechnen aller möglichen Varianten von verschiedenen Kombinationen unter bestimmten Voraussetzungen dienen
- B. Kombinatorik: geschicktes, zielgerichtetes Abzählen; Kombinationsmöglichkeiten finden
- A. Aufgabe für Studierende: Am Seminar nehmen 40 Studenten teil. Es sollen 4er-Gruppen gebildet werden. Wie viele verschiedene Gruppenkombinationen sind möglich?
- B. Aufgabe für Grundschulkinder: Du willst zwei Kugeln Eis kaufen. Der Eisverkäufer hat Schoko, Vanille, Erdbeere. Wie viele verschiedene Eisbecher oder Eistüten kannst du zusammenstellen?

Solche Sichtweisen und Aufgaben sind typisch für viele Lehrkräfte. Ein engagierter Lehrer äußert sich differenzierter in konstruk-

tivistischer Sicht: „Kombinatorik als alltagsrelevante Fähigkeit von Grundschulern ist die Kunst des geschickten Abzählens“ (vgl. Petermann 2007). Er zitiert dazu Herbart: „Das Kombinieren – gemeiniglich ganz und sehr mit Unrecht vernachlässigt – gehört zu den aller-leichtesten und vieles erleichternden Übungen, recht eigentlich für Kinder. Dass zwei Dinge ihre Stellung rechts und links (hinten und vorn, oben und unten) wechseln können, ist der Anfang. Dass drei Dinge sich sechsfach (in einer Linie) versetzen lassen, ist die nächste Folge. Wie viele Paare man aus einer Menge vorliegender Dinge nehmen könne, ist eine der leichtesten Fragen. Wie weit man fortzuschreiten habe, müssen die Umstände bestimmen. Nur sind nicht Buchstaben, sondern Dinge und Kinder selbst zu versetzen, zu kombinieren und zu variieren. So etwas muss man zum Teil scheinbar spielend lehren“ (vgl. Herbart 1841).

Auf allgemeinbildender Ebene könnte man exemplarisch sagen: Elementare Kombinatorik befasst sich mit der Frage, auf wie viele Arten Vögel auf Drähten sitzen können.

Das Beispiel Vögel auf Drähten

In diesem Kontext kann man sich Situationen und deren Änderungen einigermaßen gut vorstellen. Wir

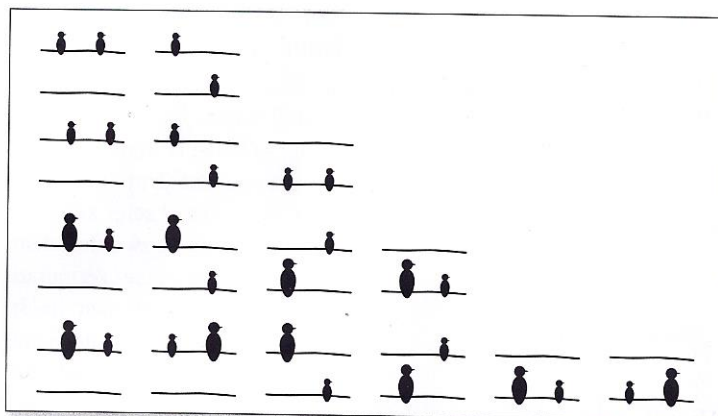


Abb. 2: Verschiedene Modelle, wie zwei Vögel auf zwei Drähten sitzen können – sie entstehen aufgrund unterschiedlicher Annahmen.

Modell	zwei Vögel auf zwei Drähten	drei Vögel auf drei Drähten
1	2	3
2	3	10
3	4	27
4	6	60

Abb. 3: Die Zunahme an Möglichkeiten bezeichnet man als „kombinatorische Explosion“.

wählen kleine Zahlen und fragen: Auf wie viele Arten können zwei Vögel auf zwei Drähten sitzen?

Es gibt verschiedene Lösungen, sie beruhen auf unterschiedlichen Annahmen und Unterscheidungen. Abb. 2 zeigt vier mögliche Modelle.

Bei weiteren Unterscheidungen wird die Lösung zunehmend komplex. Erhöht man die Zahl der Drähte und der Vögel, so werden nicht nur die Anzahlen der Muster schnell größer, sondern auch die Komplexität der Zählstrategien. Dieser Effekt heißt „kombinatorische Explosion“. Für drei Vögel auf drei Drähten etwa findet man die Werte in Abb. 3.

Was zeigt diese Aufgabe Wesentliches zur Kombinatorik? Sie erfordert über die Fragestellung hinaus eine Nachschärfung, das Unterscheiden verschiedener Deutungen und das Entwickeln von Darstellungen und Zählstrategien dazu. Sie macht Prozesse zur (elementaren) Kombinatorik deutlich: Zusammenstellen von Mustern, dabei Anordnen oder Umordnen, dann Zählen der Muster.

Wortbedeutungen und Referenzmodelle

Auf Wortbedeutungen und Sprachprobleme wurde bereits im Einführungsbeitrag eingegangen. Das dort skizzierte Problem ist jedoch im Unterricht nicht allein durch eine Entscheidung für eine der Vokabeln zu lösen. Kombinatorik erfordert vielmehr, dass man eine Vorstellung von den Mustern hat und im jeweiligen Sprachumfeld die dort anschlussfähige Bezeichnung verwendet. In der einen Welt

die Sprache der anderen Welt unbedingt verwenden zu wollen, ist nicht zielführend, es erzeugt in beiden Welten Irritationen.

Daher erscheint es uns sinnvoll, Vorstellungen zu den Gegenständen der Kombinatorik an bestimmte materielle gegenständliche Situationen zu binden, und zwar an solche, bei denen eben diese Gegenstände mit transparenten Herstellungsprozessen verbunden sind. Solche Gegenstände und Kontexte auszuwählen, ist die Kunst der Lehrkraft im Unterricht, denn zu denen sollten die Kinder Erfahrungen einbringen oder im Unterricht sammeln können, sodass ihnen die entsprechenden Konstruktionsprozesse zunächst materiell und dann mental

gelingen. Solche Kontexte nennen wir Referenzmodelle. Im vorliegenden Text schlagen wir folgende Beispiele für Referenzmodelle vor:

- Vögel auf Drähten
- Eiskugeln in Eiswaffeln
- das Beispiel Türme aus farbigen System-Bausteinen (siehe S. 13)
- das Beispiel Nester mit farbigen Eiern (siehe S. 14)

Zentrale Forderung an geeignete Referenzmodelle zur Kombinatorik ist das Unterstützen des konstruktionsbegleitenden Zählens. Nur die Beispiele und Modelle sind für Schülerinnen und Schüler der Grundschule sinnvoll, die ein Merken des Herstellungsprozesses und dessen Nachvollziehen auch nach

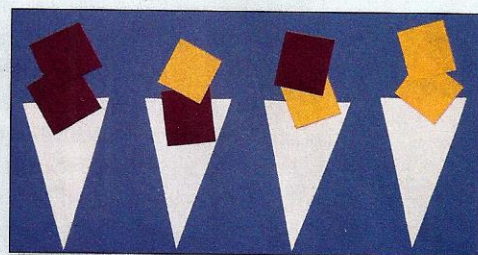
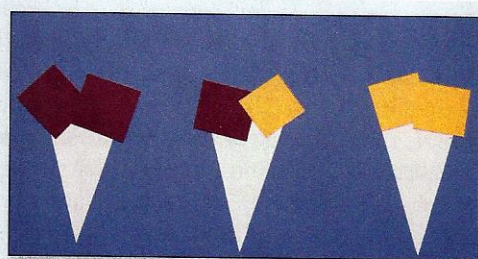


Abb. 4: Deutungen zu Anzahlen von Eiswaffeln mit zwei Kugeln, mit Wiederholung: Links ist die Reihenfolge nicht bedeutsam, rechts sehr wohl.

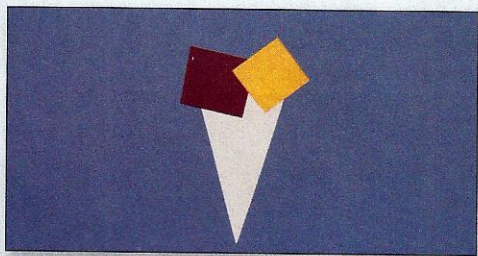
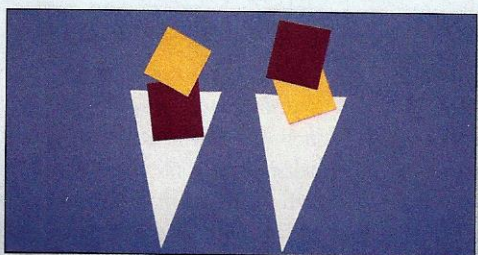


Abb. 5: Deutungen zu Anzahlen von Eiswaffeln mit zwei Kugeln, ohne Wiederholung: Links ist die Reihenfolge bedeutsam, rechts gleichgültig.

Modell 1

Anordnung der Eiskugeln ist bedeutsam,
Eissorten dürfen sich wiederholen.

Kugeln	Sorten	
	1	2
1	1	2
2	1	4

Modell 2

Anordnung der Eiskugeln ist NICHT bedeutsam,
Eissorten dürfen sich wiederholen.

Kugeln	Sorten	
	1	2
1	1	2
2	1	3

Modell 3

Anordnung der Eiskugeln ist bedeutsam,
Eissorten dürfen sich NICHT wiederholen.

Kugeln	Sorten	
	1	2
1	1	2
2		2

Modell 4

Anordnung der Eiskugeln ist NICHT bedeutsam,
Eissorten dürfen sich NICHT wiederholen.

Kugeln	Sorten	
	1	2
1	1	2
2		1

Abb. 6: Anzahlen zu Eiswaffeln

längerer Zeit ermöglichen, sodass im Herstellungsprozess auch die Unterscheidung der Muster deutlich wird.

Das ambivalente Beispiel „Eiswaffeln“

Die Aufgabe lautet: Es werden Eiswaffeln mit je zwei Eiskugeln gefüllt. Es gibt zwei Sorten Eis: Vanille und Schokolade. Wie viele verschiedene Eiswaffeln kann es dann geben?

Der Kontext unterstützt die Idee des Herstellens: Eiswaffeln werden nach Bedarf gefertigt und in der Regel nicht umgeordnet. Der Kontext unterstützt ferner die Vorstellung vieler verschiedener Objekte, die zugleich zu sehen sind (räumlich simultan) und nicht durch Umbauen auseinander hervorgehen (also eher nicht zeitlich sequenziell).

Aber: Für einige Kinder ist es bedeutsam, wie die Eiskugeln in der Waffel angeordnet sind („für mich bitte Schokolade zuerst“), anderen ist das egal. Je nach Auffas-

sung werden die Kinder daher die Eiswaffeln unterschiedlich zählen.

Bei den Eiswaffeln in Abb. 4 kommen die Eissorten teilweise in mehreren Kugeln vor, „mit Wiederholung“, genauer müsste es heißen „mehrere Kugeln gleicher Sorte sind erlaubt, aber nicht zwingend“. Dürfen keine Eiskugeln gleicher Sorte vorkommen, „ohne Wiederholung“, so kommt es wieder darauf an, ob die Anordnung der Eiskugeln in der Waffel egal ist oder nicht (siehe Abb. 5).

Dieser Kontext liefert bereits alle für die (vier) kombinatorischen Grundmuster wesentlichen Unterscheidungen; er kann im Unterricht dazu dienen, diese Unterscheidungen bewusst zu machen und anzubahnen. Die kombinatorische Leitfrage lautet entsprechend: „Was sehen wir als gleich an, was als verschieden?“

Man kann nicht davon ausgehen, dass Kinder von sich aus hier eine bestimmte Unterscheidung einheitlich präferieren und das Beispiel daher stets im Sinne eines bestimmten kombinatorischen Grundmusters zu deuten ist. Vielmehr ist diese Bedeutung in der Arbeitssituation zu vereinbaren und dadurch zu klären: Mathematisches Argumentieren erfolgt stets auf einer vereinbarten Grundlage. Die Abweichungen ohne klare Grundlage verdeutlicht Abb. 6.

Vier kombinatorische Grundmuster

Die Gegenstände der Kombinatorik sind Muster. Unseres Erachtens genügt es in der Grundschule, vier kombinatorische Grundmuster zu bearbeiten. Abb. 7 zeigt zunächst die Unterscheidung zwischen dem, was in der Fachsprache „Permutationen“ und „Kombinationen“ heißt. Wir schlagen vor, dies in der Schule mit spezifischen Referenzmodellen zu verbinden. Wir geben ein Referenzmodell an, bei dem die vier kombinatorischen Grundmuster mit demselben Material darzustellen sind: Die Muster sind „Türme“ oder „Tüten“ aus bunten Stücken, sie sind festgelegt durch die Anzahl s der Stücke und durch die Anzahl f der Farben. In Türmen sind die Stücke geordnet, in Tüten nicht. Und wir unterscheiden, ob in den Türmen oder Tüten dieselbe Farbe mehrfach („wiederholt“) auftreten darf. Diese vier kombinatorischen Grundmuster zeigt Abb. 8.

Diese Zahlen s und f heißen in mathematischen Darstellungen üblicherweise n und k . Da es aber in der Kombinatorik wesentlich darauf ankommt, sich die jeweils aktuelle Bedeutung von n und k zu vergegenwärtigen und nicht zu verwechseln, verwenden wir hier anstelle von n die Bezeichnung s , mit der man Stückzahl assoziieren kann, und statt k die Bezeichnung f , mit der die Anzahl möglicher Farben assoziiert werden kann.

Zahlen statt Formeln: Anzahl-Tabellen

Erhöht man die Zahlen s und f , so wachsen die Anzahlen teilweise sehr rapide (siehe Abb. 9). Die Faustregel lautet: Man wähle s und f höchstens bis einschließlich vier.

Unmittelbar sieht man:

- Die entsprechenden Anzahlen sind bei Permutationen stets größer als bei Kombinationen.
- Die entsprechenden Anzahlen sind bei Mustern mit Wiederholung stets größer als bei Mustern ohne Wiederholung.
- Bei den Mustern ohne Wiederholung ist die Tabelle stets unter der Diagonalen (von oben links nach unten rechts) leer, da es solche Muster nicht gibt.

Abb. 7: Erste Unterscheidung kombinatorischer Grundmuster und Referenzmodelle

Kombinatorische Muster	Permutationen	Kombinationen
Kennzeichen	Anordnung bedeutsam	Anordnung nicht bedeutsam
mögliches Referenzmodell	Türme aus Bausteinen	Tüten oder Nester mit Stücken darin

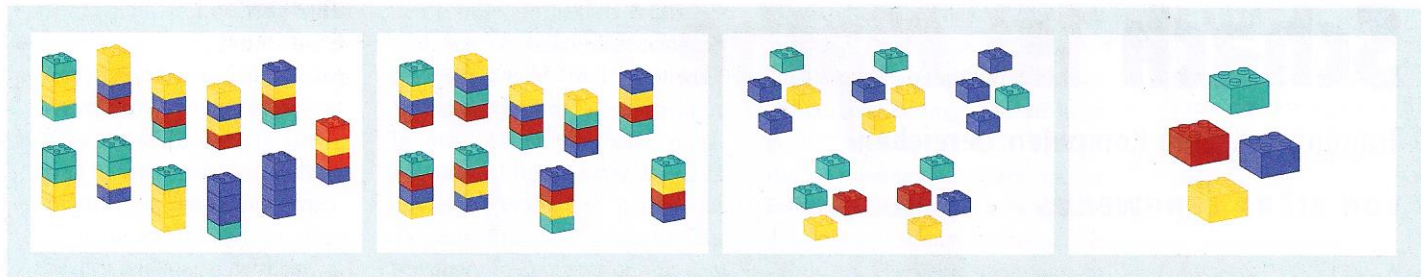


Abb. 8: Die vier kombinatorischen Grundmuster und Referenzmodelle „Türme und Tüten (Bausätze)“. Die Bilder sind mit der Werkzeug-Software Block-CAD erstellt.

Die Zahlenmuster in den beiden oberen Tabellen sind spaltenweise gut zu beschreiben: Von oben nach unten kommt zu dem Produkt jeweils ein Faktor hinzu, gleichbleibend in der linken Tabelle oder kleiner werdend in der rechten. In der rechten Tabelle ist der letzte Faktor stets 1, daher die charakteristische Dopplung der Werte am unteren Ende der Spalten. Man kann die Tabellen aus diesem Konstruktionsprinzip und aus den Werten am Rand rekonstruieren. Solche Konstruktionsprozesse bezeichnen Mathematiker als induktiv oder rekursiv.

Die Zahlenmuster in den beiden unteren Tabellen sind jeweils

verschiedene Arrangements des Pascal'schen Dreiecks, das durch gegebene Werte am Rand und eine Additionsregel im Inneren bestimmt ist: Die Zahlen innen lassen sich aus benachbarten Zahlen links und oben durch Addieren gewinnen. Damit sind auch diese Tabellen induktiv zu konstruieren. ●

DER AUTOR

Dr. Bernd Wollring ist Professor für Didaktik der Mathematik an der Universität Kassel. Seinen Arbeitsschwerpunkt bilden Lernumgebungen.

LITERATUR

Herbart, Johann Friedrich: Umriss pädagogischer Vorlesungen. Göttingen 1841 (www.uni-giessen.de/mathdidaktik/math_grundsch2/fohlen/pdf/abschnitt_9_3.pdf)

KMK: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. München 2004

Petermann, Markus: Nach dem Spiel ist vor dem Spiel. Lernumgebungen zur Kombinatorik in der Grundschule. Hausarbeit zum Weiterbildungslehrgang Mathematik Grundschule. Kassel 2007

Wollring, Bernd: Zur Kennzeichnung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule. In: Peter-Koop, Andrea/Lilitakis, Georg/Spindeler, Gitta (Hrsg.): Lernumgebungen – Ein Weg zum kompetenzorientierten Mathematikunterricht in der Grundschule. Offenburg 2008, S. 9–23

Permutationen mit Wiederholung TÜRME mit s Stücken aus f Farben Farben dürfen sich wiederholen.

s	1	2	3	4	5
f					
1	1	2	3	4	5
2	1	4	9	16	25
3	1	8	27	64	125
4	1	16	81	256	625
5	1	32	243	1024	3125

Permutationen ohne Wiederholung TÜRME mit s Stücken aus f Farben Farben dürfen sich NICHT wiederholen.

s	1	2	3	4	5
f					
1	1	2	3	4	5
2		2	6	12	20
3			6	24	60
4				24	120
5					120

Kombinationen mit Wiederholung TÜTEN mit s Stücken aus f Farben Farben dürfen sich wiederholen.

s	1	2	3	4	5
f					
1	1	2	3	4	5
2	1	3	6	10	15
3	1	4	10	20	35
4	1	5	15	35	70
5	1	6	21	56	126

Kombinationen ohne Wiederholung TÜTEN mit s Stücken aus f Farben Farben dürfen sich NICHT wiederholen.

s	1	2	3	4	5
f					
1	1	2	3	4	5
2		1	3	6	10
3			1	4	10
4				1	5
5					1

Abb. 9: Anzahlen kombinatorischer Grundmuster