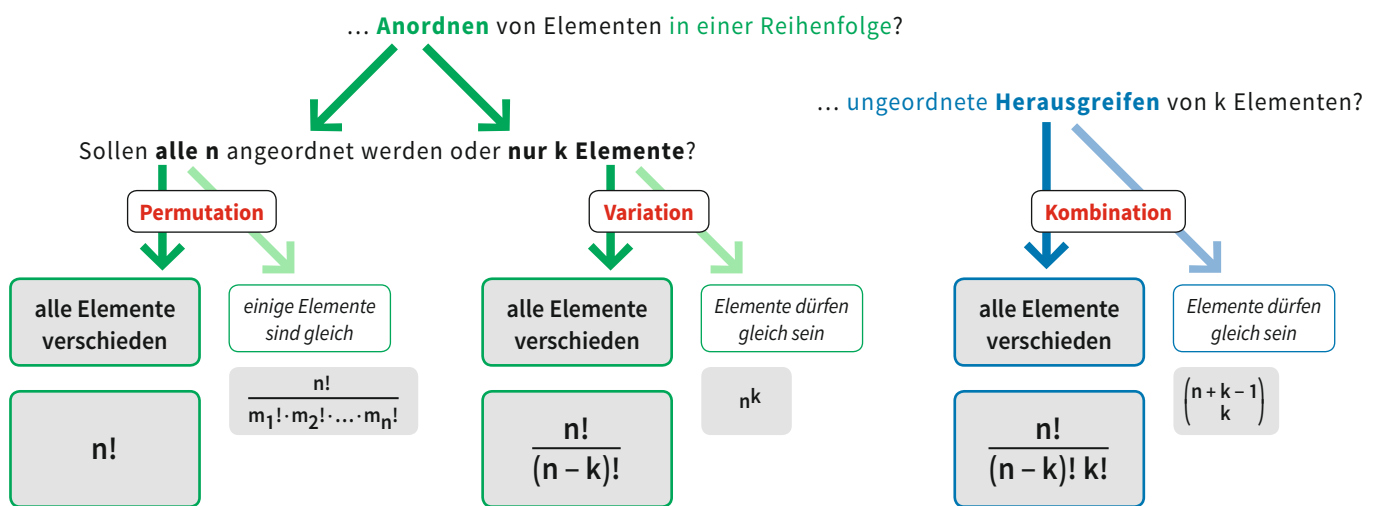


Und jetzt der Reihe nach!

Kombinatorische Grundsituationen im Überblick

„Das Stiefkind Kombinatorik“ – nicht nur im Unterricht, sondern auch in der Lehrerbildung kommt die Kombinatorik oft zu kurz. Dabei bietet die systematische Betrachtung kombinatorischer Grundsituationen eine anregende Gelegenheit zur Auseinandersetzung mit mathematischen Strukturen, die auf unterschiedlichen Anforderungsniveaus auch in der Grundschule sichtbar werden können.

Gegeben ist **eine** Menge, bestehend aus **n** Elementen. Wie viele Möglichkeiten gibt es für das ...



•• Abb. 1: Übersicht über die sechs kombinatorischen Grundsituationen

von Julia Streit-Lehmann und Julia Hacker

Die Lösung einer kombinatorischen Aufgabe besteht zumeist in der Anzahl von Möglichkeiten, bestimmte Elemente auf eine bestimmte Art und Weise zu konfigurieren. Für das Herausfinden solcher Möglichkeiten/Anzahlen werden im Mathematikunterricht der Grundschule keine Algorithmen erarbeitet, sondern die Kinder ermitteln ihre Lösungen im ersten Schritt durch eine geeignete konkrete Darstellung einiger oder aller Konfigurationsmöglichkeiten. Diese Darstellungen dienen dann wiederum als Zählobjekte, die in einem zweiten Schritt mehr oder weniger systematisch abgezählt werden.

Hieraus ergibt sich bereits eine Hürde, mit der auch Lehrkräfte häufig Schwierigkeiten haben: Die Objekte, die in kombinatorischen Darstellungen betrachtet werden, sind eben „nur“ Möglichkeiten. Diese Objekte sind, anders als Wendeplättchen auf dem Tisch oder Bonbons in Textaufgaben, nicht von Anfang an „da“, sondern diese Objekte müssen erst erdacht und visualisiert, realisiert und buchstäblich herbeigebastelt werden, ehe man mit ihnen weitermachen kann.

Handlungsmodelle und Verwendungstypen

Die grundlegende Frage in der abzählenden Kombinatorik lautet immer gleich: Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus bestimmten Elementen bestimmte Konfigurationen herzustellen?

In einer Reihenfolge oder wild durcheinander?

Hinter dem Ausdruck „Konfigurationen herstellen“ verbergen sich zwei grundsätzlich verschiedene Handlungsmodelle. Handlungsmodell 1 ist das Herausgreifen einer ungeordneten Gruppe von Elementen aus einer größeren Menge. Ein Beispiel dafür wäre: *Du hast rote und gelbe Gummibärchen in der Hosentasche. Wie viele Möglichkeiten für Farbkombinationen gibt es, wenn du drei Gummibärchen aus der Hosentasche ziehst?* Alle drei Gummibärchen könnten rot sein, oder alle drei gelb. Vielleicht ist auch eines rot und die anderen beiden gelb – oder umgekehrt. Mehr Möglichkeiten gibt es nicht. Die Lösung lautet also „Vier“, denn es gibt vier unterschiedliche Möglichkeiten, welche Gummibärchen-Farb-Konfiguration nun ungeordnet auf dem Handteller liegen könnte. Das Herausgreifen

einer Gruppe aus einer Menge wird in der Fachliteratur oft „Auswählen“ genannt. Zu vielen Kombinatorikaufgaben passt „Auswählen“ als Alltagsbegriff allerdings nicht gut. Wenn ein Kind die Hand in die Hosentasche steckt, um Gummibärchen hervorzuholen, wählt es „in echt“ nichts aus – es sieht ja gar nichts, sondern muss sich überraschen lassen, welche Bärchen es herausfischt.

Handlungsmodell 2 ist das Anordnen von Elementen in einer Reihenfolge, also die Vergabe von Rangplätzen: Ein Element landet auf dem ersten Platz, ein Element landet auf dem zweiten Platz usw. Ein Beispiel dafür wäre: *Du willst nächsten Samstag fernsehen, lesen, einkaufen und schwimmen gehen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, diese vier Dinge hintereinander zu erledigen?* Als Erstes könnte ich einkaufen, danach schwimmen gehen, dann lesen und zum Schluss fernsehen – dies ist eine von 24 Möglichkeiten. Dieses Handlungsmodell beinhaltet häufig eine Zeitkomponente: Als Erstes könnte ich X platzieren, als Zweites Y usw.

Mit Wiederholung oder ohne?

Die Menge, die aus den Elementen im Samstagsbeispiel gebildet wird, lautet {fernsehen; einkaufen; lesen; schwimmen gehen}. Jedes Element wird genau einmal verwendet, während eine Reihenfolge hergestellt wird. Dieser Verwendungstyp wird in der Fachsprache „ohne Wiederholung“ genannt: Wurde als erste Samstagsaktivität „lesen“ gewählt, kann auf dem zweiten Platz nicht ebenfalls „lesen“ landen, sondern nun muss eines der drei verbliebenen Elemente ausgewählt werden. Die Elemente im Gummibärchen-Beispiel heißen „Rot“ und „Gelb“; die Menge {Rot; Gelb} enthält also nur zwei Elemente. Trotzdem werden drei Bärchen aus der Tasche gezogen! Dieser Verwendungstyp wird in der Fachsprache „mit Wiederholung“ genannt. Wiederholt hier nicht die Ziehung eines bestimmten Bärchens – dies ist ein häufiges Missverständnis – und nicht mal jede Farbe muss „wiederholt“ auftreten, schließlich kommt „Rot“ in der Konfiguration *ein Gummibärchen ist rot, die anderen beiden sind gelb* nur einmal vor. „Mit Wiederholung“ bedeutet hier, dass Farben mehrfach vorkommen können(!).

Alle oder einige?

Die beiden Handlungsmodelle *in eine Reihenfolge bringen und Herausgreifen einer ungeordneten Gruppe* lassen sich mit den beiden Verwendungstypen *mit bzw. ohne Wiederholung* beliebig kombinieren. Um die mathematische Struktur von Kombinatorikaufgaben umfassend zu beschreiben, ist zusätzlich dazu noch die Betrachtung einer dritten Eigenschaft nötig: Müssen alle Elemente verwendet werden oder nur einige davon?

Diese letzte Frage lässt sich sinnvoll nur beim Handlungsmodell *in eine Reihenfolge bringen* stellen, denn die Antwort auf die Frage, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus einer Menge von Elementen alle Elemente ungeordnet herauszugreifen, steht bereits von Anfang an fest: Dafür gibt es natürlich nur genau eine Möglichkeit.

Permutation, Variation und Kombination

Wenn die zu konfigurierenden Elemente aus derselben Menge stammen, lassen sich aus den drei Eigenschaften *Reihenfolge vs. ungeordnete Gruppe, mit vs. ohne Wiederholung und alle vs. einige Elemente* sechs sogenannte kombinatorische Grundsituationen identifizieren. Diese sechs Grundsituationen sind in der Abbildung 1 übersichtlich dargestellt.

Die drei Grundsituationen im Vordergrund, die mit *alle Elemente verschieden* überschrieben sind, sind die *ohne Wiederholung*. Zwischen diesen dreien besteht eine enge Verwandtschaft, die auch an den Formeln erkennbar ist, mit denen sich die Anzahlen der Möglichkeiten sehr schnell ausrechnen lassen. Die drei Grundsituationen ohne Wiederholung und ihre Beziehungen zueinander werden in diesem Beitrag genauer betrachtet. Dazu folgende Beispiele:

Permutation ohne Wiederholung

Fünf Kinder, nämlich Anna, Benni, Conny, Danny und Emmi, sollen Zutaten fürs Adventsbacken mitbringen: Mehl, Butter, Zucker, Marzipan und Schokocreme. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, welches Kind welche Zutat mitbringt?

Anna ist das erste Kind in der Reihe (Kind A, siehe Abb. 2), Benni das zweite Kind usw., das bedeutet, die fünf Zutaten können nun in eine Reihenfolge A-B-C-D-E gebracht werden, beispielsweise A=Marzipan, B=Butter, C=Mehl, D=Schokocreme und E=Zucker. Alle Zutaten werden verwendet, keine Zutat kommt doppelt vor (= *ohne Wiederholung*), und das Zuordnen von Zutaten zu Kindern entspricht dem Anordnen in eine Reihenfolge. Damit stehen alle Struktureigenschaften dieser Aufgabe fest: Es handelt sich um eine *Permutation ohne Wiederholung* mit $n = 5$, also mit der Lösung $n! = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$, denn Anna bringt eine von fünf Zutaten mit, Benni dann eine der restlichen vier Zutaten, Conny hat noch drei Zutaten zur Auswahl usw., und Emmi muss dann diejenige Zutat mitbringen, die zuletzt übrigbleibt.

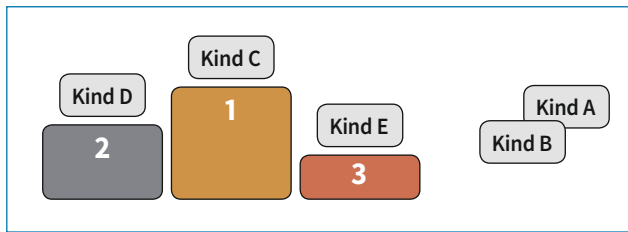
Kind A	Marzipan
Kind B	Butter
Kind C	Mehl
Kind D	Schokocreme
Kind E	Zucker

•• Abb. 2:
Permutation ohne Wiederholung, $n=5$

Variation ohne Wiederholung

Fünf Kinder, nämlich Anna, Benni, Conny, Danny und Emmi, machen einen Wettlauf. Vergeben werden sollen dann eine Goldmedaille, eine Silbermedaille und eine Bronzemedaille. Die Plätze vier und fünf werden nicht festgehalten. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wie die Kinder am Ende auf dem Siebertreppchen stehen könnten?

Was wäre, wenn die Plätze vier und fünf doch vergeben würden? Dann wäre die Medaillengeschichte strukturgleich zur Adventsbacken-Geschichte oben, weil hier jedem Platz ein Kind zugewiesen würde, so wie oben jedem Kind eine Backzutat. Angenommen, Conny, Danny und Emmi erhalten die Gold-, Silber- und Bronzemedaille (siehe Abb. 3). Dann fallen zwei Fälle zu einem zusammen: Anna könnte auf Platz vier landen und Benni auf Platz fünf – oder umgekehrt Benni auf Platz vier und Anna wird Fünfte; das ist egal, weil



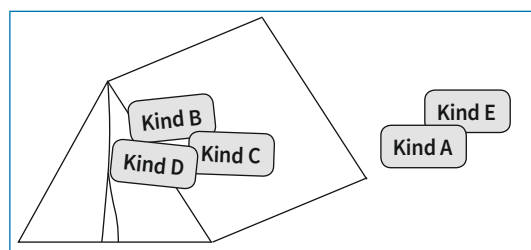
•• Abb. 3: Variation ohne Wiederholung, $n=5$, $k=3$

die Plätze vier und fünf ausdrücklich nicht mitbetrachtet werden sollen. Genau diese „Nichtbetrachtung“ der hinteren beiden Plätze ist die Bedeutung des Nenners in dem Term $\frac{n!}{(n-k)!}$, wobei $n=5$ die Anzahl der wettkampfenden Kinder ist und $k=3$ die Anzahl der Rangplätze, die betrachtet werden sollen. Die Zahl $n-k=5-3=2$ entspricht der Anzahl der Plätze, die nicht betrachtet werden. Dementsprechend halbiert hier der Nenner $(n-k)! = 2! = 2$ die Anzahl der Möglichkeiten, die es gäbe, wenn fünf Kinder auf fünf Plätze verteilt werden sollten. So ergeben sich 60 Möglichkeiten, wie hier das Siegertreppchenfoto aussehen könnte.

Kombination ohne Wiederholung

Fünf Kinder, nämlich Anna, Benni, Conny, Danny und Emmi, gehen zelten. Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass sich drei von ihnen in einem Dreierzelt zusammenfinden?

So ähnlich wie bei der Wettlaufgeschichte spielen hier ebenfalls drei Kinder eine Rolle und zwei von ihnen nicht (siehe Abb. 4). Aber diesmal kommt es nicht auf die Reihenfolge an, sondern die drei Kinder werden einfach als ungeordnete Gruppe betrachtet. Der Zähler $n!$ gibt wieder an, dass es insgesamt fünf Kinder sind, von denen man sich zunächst vorstellt, sie würden in eine Reihenfolge gebracht. Der Faktor im Nenner $(n-k)! = 2! = 2$ gibt wieder an, dass die beiden Kinder, die nicht Teil der Dreierzeltbesetzung sind, nicht weiter betrachtet werden, also dass deren Reihenfolgevarianten zu einer Möglichkeit zusammenfallen. Der neue zweite Faktor im Nenner, $k!$, bedeutet, dass nun auch die Reihenfolge der drei betrachteten Kinder keine Rolle spielt. Der Term $\frac{n!}{(n-k)!k!}$ heißt also übersetzt *Anzahl der möglichen Reihenfolgen aus allen fünf Kindern geteilt durch die Anzahl der möglichen Reihenfolgen der zwei nicht betrachteten Kinder geteilt durch die Anzahl der möglichen Reihenfolgen der drei betrachteten Kinder*. Der Term gibt somit die Anzahl der Möglichkeiten an, aus einer Menge von fünf eine Dreiergruppe auszuwählen. 120 geteilt durch 6 geteilt durch 2; das sind 10 überschaubare Möglichkeiten, das Dreierzelt zu besetzen.



•• Abb. 4: Kombination ohne Wiederholung, $n=5$, $k=3$

Mathematische Strukturen erkennen

Das Erkennen mathematischer Strukturgleichheit ist eine zentrale Herausforderung, die Mathematiktreibende – egal ob Lehrende oder Lernende – ständig bewältigen müssen. In klassischen arithmetischen Kontexten fällt uns das vergleichsweise leicht. Beispielsweise sprechen diese beiden Aufgaben *Lukas und Mesut haben Bonbons*. Lukas hat drei Bonbons mehr als Mesut, nämlich zehn. Wie viele Bonbons hat Mesut? und *Auf einer Weide stehen zehn Schafe. Dann laufen drei in den Stall. Wie viele Schafe bleiben auf der Weide stehen?* zwar sehr unterschiedliche subtraktive Grundvorstellungen an („Vergleichen“ versus „Wegnehmen“). Die Feststellung, dass es bei beiden Aufgaben um Subtraktion geht und dass sich beide Aufgaben über den Term $10-3$ lösen lassen (kurz: die Einsicht in Strukturgleichheit), gelingt Lehrkräften aber in der Regel problemlos. Der Grund dafür liegt in den vorhandenen Übersetzungskompetenzen, die Lehrkräfte durch ausreichend viel Erfahrung entwickelt haben: Die Vergleichssituation kann z. B. spontan reversibel modelliert werden (*Lukas müsste drei Bonbons abgeben, damit er genauso viele hat wie Mesut*) und alltagsnahe Verben (*Schafe laufen weg, Bonbons werden abgegeben*) werden sinnvoll aufeinander bezogen bzw. ineinander übersetzt und, vielleicht unter dem Sammelbegriff „weniger werden“, korrekt mit Subtraktion assoziiert.

Dies sieht in kombinatorischen Kontexten oft anders aus: Die beiden Aufgaben *Katja hat fünf Freundinnen zum Geburtstag eingeladen. Alle Kinder stoßen einmal miteinander an. Wie oft klingen die Gläser?* und *Im Osternest liegen sechs verschieden bemalte Ostereier. Jason darf sich zwei Ostereier aussuchen. Wie viele Möglichkeiten hat Jason dafür?* sind ebenfalls vollständig strukturgleich (Kombination ohne Wiederholung, $n=6$ und $k=2$, Lösung 15), Lehrkräfte erkennen dies aber in der Regel spontan nicht.

Hierzu nötig wären spezifische Modellierungskompetenzen, die in ausreichendem Maße kombinatorikbezogen erworben wurden. Diese erlauben es, Sachsituationen erfolgreich ineinander zu übersetzen, beispielsweise so: *Auf einer Geburtstagsfeier sind sechs Leute. Zwei Leute dürfen miteinander anstoßen. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür?* Diese Formulierung ist nun auch sprachlich strukturgleich zur Ostereier-Geschichte; mathematisch strukturgleich war die Anstoß-Geschichte natürlich auch schon in der ursprünglichen (sicherlich auch alltagsnäher formulierten) Variante.

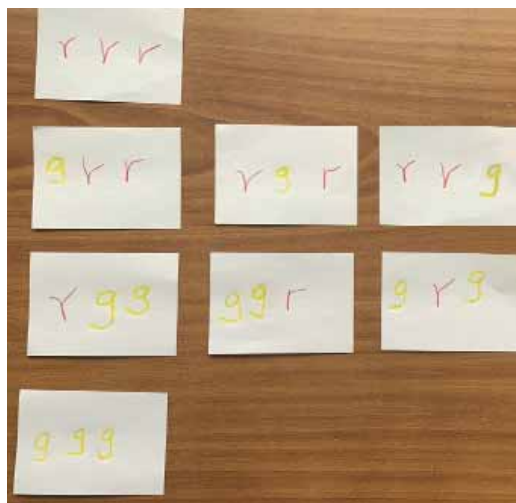
Geeignete Zahlensätze:

Kombinatorische Explosionen vermeiden

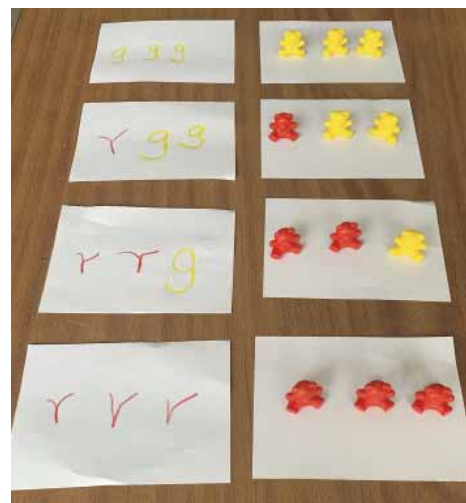
In der didaktischen Fachliteratur finden sich Empfehlungen, welche Zahlenräume noch zu bewältigen sind, wenn im Mathematikunterricht alle Konfigurationen handelnd oder bildlich dargestellt werden sollen. Beispielsweise sollte die Ergebniszahl dann laut Sill/Kurtzmann (2019, S. 187) kleiner gleich 16 sein, sonst verliert man den Überblick.



•• Abb. 5: Erkunden von Kombinationsmöglichkeiten mit bunten Bärenfiguren (Handlungsebene)



•• Abb. 6: Erkunden von Kombinationsmöglichkeiten mit Buchstaben (symbolische Ebene)



•• Abb. 7: Systematische Anordnung der vier Kombinationsmöglichkeiten, außerdem Übersetzung zwischen symbolischer und Handlungsebene

Daraus ergibt sich für

- ... **Permutationen ohne Wiederholung** ein n höchstens gleich 3, denn $4!$ ist bereits gleich 24.
- ... **Variationen ohne Wiederholung**: Alle $k = 1$ spielen in realistischen Sachkontexten keine Rolle, weil dies immer triviale Fälle sind, denn „eine Person in Reihenfolge bringen“ ist dasselbe wie „eine Person einfach so herausgreifen“. Daher sollte k größer gleich 2 sein. Für $k = 2$ ergeben sich mit $n = 5$ bereits 20 Möglichkeiten, was als zu viel für eine vollständige Darstellung gilt. Mit $n = 3$ bzw. $n = 4$ ergeben sich 3 bzw. 12 Möglichkeiten, was gut darstellbar ist. Die kleinste Lösungszahl für $k = 3$ ist mit $n = 4$ bereits 24, also wieder zu viel. Eine systematische Betrachtung der mathematischen Struktur gibt also klare Hinweise für die Unterrichtsgestaltung: Variationen ohne Wiederholung sind in der Grundschule nur für $k = 2$ und $n = 3$ oder 4 behandelbar.
- ... **Kombinationen ohne Wiederholung**: Für alle n zwischen 3 und 5 und dementsprechend für alle k zwischen 2 und 4 ergeben sich Lösungszahlen zwischen 3 und 10. Für $n = 6$ und $k = 3$ ergeben sich 20 Möglichkeiten; alle anderen möglichen k liefern für $n = 6$ kleinere Lösungen und sind damit ebenfalls prima geeignet.

Insbesondere die handlungsbasierte Her- und Darstellung von Konfigurationen ermöglicht im inklusiven Mathematikunterricht Zugänge auf unterschiedlichen Abstraktionsniveaus (siehe Abb. 5). Stärkere Kinder wechseln darauf aufbauend meist schnell zu bildlichen oder bildlich-symbolischen Darstellungen, etwa zur Notation „G R R“ für die Kombination eines gelben und zweier roter Gummibärchen (siehe Abb. 6 und 7). Kinder, die länger bei enaktiven Darstellungen bleiben, können durch Verschieben der Gummibärchen beispielsweise selbst erkunden, dass „rotes Bärchen, gelbes Bärchen, rotes Bärchen“ und „rotes Bärchen, rotes

Bärchen, gelbes Bärchen“ dieselbe Konfiguration darstellen, wenn die Reihenfolge keine Rolle spielt (Kombination mit Wiederholung, $n = 2$, $k = 3$). Das Hinzunehmen einer dritten Farbe ($n = 3$, $k = 3$) ist möglich, einer vierten Farbe ($n = 4$, $k = 3$) wegen 20 Möglichkeiten nicht anzuraten.

Fazit

Die Auseinandersetzung mit Permutationen, Variationen und Kombinationen ohne Wiederholung bietet bereits mit grundschultauglichen Zugängen lohnenswerte Einblicke in mathematische Strukturen. Ihre Pendanten mit Wiederholung liefern ebenfalls viele Zahlensätze, die für die Darstellung im Mathematikunterricht der Grundschule bestens geeignet sind; beispielsweise werden die Grundsituationen in Schulbüchern gelegentlich in der „mit vs. ohne Wiederholung“-Paarung zusammengestellt. Auch ohne systematische Betrachtung sei hier das vorherige Berechnen der Anzahl konkreter Möglichkeiten dringend empfohlen, um allen Kindern handelnde Zugänge zu ermöglichen und dabei kombinatorische Explosionen zu vermeiden. ■

Literatur

Sill, Hans-Dieter/Kurtzmann, Grit: *Didaktik der Stochastik in der Primarstufe*. Berlin 2019

Die Autorinnen



Foto: Privat

Dr. Julia Streit-Lehmann ist Studienrätin im Hochschuldienst am Institut für Didaktik der Mathematik an der Uni Bielefeld.



Foto: Privat

Julia Hacker ist Sonderpädagogin im Gemeinsamen Lernen an einer Bielefelder Grundschule und Schulbuchautorin.