

Kombinatorisches Zählen – Kombinieren, Variieren, Permutieren

Silke Ruwisch

Das Wissen über einige grundlegende Prinzipien kombinatorischen Zählens sowie Übungen zum Übertragen einer Situation in verschiedene Modellierungen erhöhen enorm die Sicherheit der Lehrkraft im Umgang mit kombinatorischen Fragestellungen.

Kombinatorische Aufgabenstellungen erfordern im ersten Schritt zu erkennen, wie Elemente aus einer endlichen Menge ausgewählt oder angeordnet werden sollen. Im zweiten Schritt ist dann nach der Anzahl der Möglichkeiten gefragt. Insofern sind bei kombinatorischen Aufgabenstellungen eigenständig Strukturierungen vorzunehmen und die – in der Regel komplexen – Situationen zu modellieren, d. h. so zu mathematisieren, dass

sie in zahlenmäßig erfassbarer Form vorliegen. Dass sich sehr unterschiedliche Situationen letztlich mit wenigen wesentlichen Formeln beschreiben und berechnen lassen, ist selbst für Erwachsene häufig nicht ohne Weiteres zu erkennen und bedarf vielfältiger Übungen.

Das Additionsprinzip

Schon Erstklässlerinnen und Erstklässler lernen, dass durch Addieren das Zählen der Elemente einer Gesamtmenge abgekürzt werden kann. Auch bei kombinatorischen Aufgabenstellungen kann dieses Prinzip sehr häufig angewendet werden. Werden die Möglichkeiten, vier Plättchen in eine Stellentafel mit drei Spalten zu legen, systematisch erfasst **1**, so kann man beispielsweise feststellen, dass es eine Möglichkeit mit vier Hundertern, zwei Möglichkeiten mit drei Hunderten, drei mit zwei, vier mit einem und fünf mit keinem Hunderter gibt, die Gesamtanzahl durch Addition somit folgendermaßen beschrieben werden kann: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Wie gut, dass schon der kleine Gauß erkannt hat, dass sich die Summe der ersten n natürlichen Zahlen berechnen lässt durch folgende Formel: $\frac{n(n+1)}{2}$. Auf unser Beispiel angewendet: $5 \cdot 6 : 2 = 15$. Mit der Formel lässt sich auch leicht ausrechnen, dass für neun Plättchen gelten muss $10 \cdot 11 : 2 = 55$, ohne dass Plättchen gelegt oder die Zahlen aufgeschrieben werden müssten.

Das erweiterte Additionsprinzip

Das Additionsprinzip funktioniert in dieser Form jedoch nur, wenn die Teilmengen überschneidungsfrei, d. h. disjunkt sind. So ist es auch schon für Kinder in der ersten Klasse einsichtig, dass sie aus „vier Kinder tragen eine Brille“ und „drei Kinder spielen Handball“ nicht auf „sieben Kinder sind es insgesamt“ schließen dürfen, denn schließlich könnte es auch Handball spielende Kinder

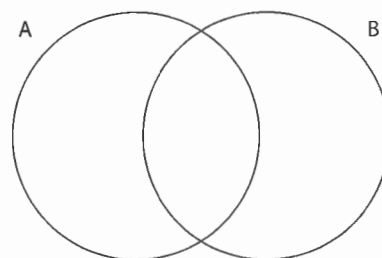
	H	Z	E	Zahl
1	••••			400
2	•••	•		310
3	•••		•	301
4	••	••		220
5	••	•	•	211
6	••		••	202
7	•	•••		130
8	•	••	•	121
9	•	•	••	112
10	•		•••	103
11		••••		040
12		•••	•	031
13		••	••	022
14		•	•••	013
15			••••	004

1 Wie viele verschiedene Zahlen lassen sich mit vier Plättchen in einer Stellentafel mit drei Spalten darstellen?

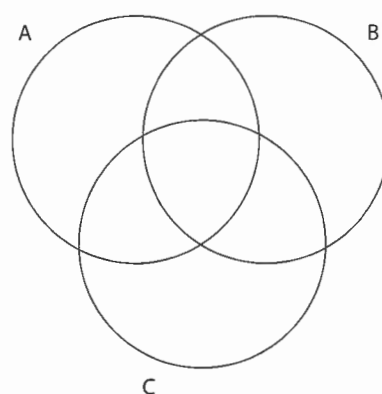
mit Brille geben. Bei dem übersichtlichen Beispiel ist es noch einfach, die entsprechenden Gruppen einzeln aufzuführen und deren Anzahlen dann zu addieren, also z. B. „eine Brillenträgerin spielt Handball“, „drei Brillenträger spielen nicht Handball“ und „zwei Handballerinnen tragen keine Brille“, also $1 + 3 + 2 = 6$. Bei komplexeren Situationen sind disjunkte Teilmengen jedoch nicht immer so ohne Weiteres herzustellen.

Strukturell lassen sich viele dieser Situationen besser erfassen und zahlenmäßig gut beschreiben, wenn das Additionsprinzip erweitert wird. Dazu wird zunächst so getan, als seien die gegebenen Mengen disjunkt und somit werden deren Anzahlen addiert. Anschließend werden doppelt gezählte Elemente abgezogen, also im obigen Fall $3 + 4 - 1 = 6$. Allgemein gilt für zwei bzw. drei beteiligte Mengen, dass die Anzahlen der Ausgangsmengen zunächst addiert, die Anzahlen der einfachen Schnittmengen dann subtrahiert und die Anzahl der Schnittmenge aus drei Mengen wieder addiert werden

2. Bei mehr als drei beteiligten Mengen setzt sich das Prinzip entsprechend durch abwechselndes Subtrahieren und Addieren fort.



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

2 Das erweiterte Additionsprinzip – doppelt gezählte Elemente werden wieder abgezogen

Das Multiplikationsprinzip

Noch mächtiger als das Additionsprinzip erweist sich das Multiplikationsprinzip für kombinatorische Aufgabenstellungen. Wenn ein Entscheidungsprozess in mehrere unabhängige Stufen zerlegt werden kann und auf jeder Stufe eine bekannte Anzahl an Entscheidungsmöglichkeiten besteht, dann lässt sich die Gesamtzahl der Entscheidungen ganz einfach multiplikativ berechnen: Die Anzahl an Drei-Gänge-Menüs bei 2 Vorspeisen, 4 Hauptgerichten und 3 Nachspeisen beträgt $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$. Allgemein kann man bei k Stufen und $n_1, n_2, \dots, n_k$ Entscheidungsmöglichkeiten auf den jeweiligen Stufen die Anzahl möglicher Entscheidungen ausdrücken als $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

Dabei sind einige Spezialfälle besonders wichtig: So kann es auf jeder Stufe die gleiche Anzahl an Entscheidungsmöglichkeiten geben, z. B. bei der Frage: „Wie viele Ziffernkombinationen lassen sich bei einem Fahrradschloss mit drei Stellen bilden?“ Selbstverständlich werden auch hier die Zahlen multipliziert, also wird im Beispiel $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ gerechnet, mathematisch lässt

sich dieses Produkt einfacher ausdrücken als 10^3 bzw. allgemein als n^k .

Ein anderer Spezialfall tritt ein, wenn mit jeder Stufe die Anzahl an Entscheidungsmöglichkeiten um eins abnimmt, z. B. bei der Frage nach der Anzahl an Möglichkeiten, die drei Medaillen beim 100-Meter-Lauf unter den acht Finalisten zu vergeben, nämlich $8 \cdot 7 \cdot 6$. Allgemein gilt bei k Entscheidungsstufen: $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - (k - 1))$.

Ist darüber hinaus die Anzahl an Entscheidungsmöglichkeiten gleich der Anzahl an Entscheidungsstufen, gilt also $n = k$, dann lässt sich die Anzahl der Möglichkeiten angeben als: $n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$. Der Unterschied wird vielleicht am besten an demselben Beispiel deutlich: Will man beim 100-Meter-Lauf wissen, wie viele mögliche Belegungen es für die ersten drei Plätze auf dem Siebertreppchen gibt, wird die Aufzählung der Faktoren an der entsprechenden Stelle abgebrochen, im Beispiel nach dem dritten Faktor. Soll hingegen die Anzahl aller möglichen Zieleinläufe bestimmt werden, so bricht die Kette der Faktoren nicht ab. Für die acht Fina-

k-Auswahl aus einer n-elementigen Menge		mit Zurücklegen/Wiederholung	ohne Zurücklegen/Wiederholung
mit	Beachten der Reihenfolge	Variation mit Wiederholung: n^k	Variation ohne Wiederholung, wenn $k < n$: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$ Spezialfall: Permutation, wenn $k = n$: $n!$
ohne	Beachten der Reihenfolge	Kombination mit Wiederholung: $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! k!}$	Kombination ohne Wiederholung: $\frac{n!}{(n-k)! k!} = \binom{n}{k}$

3 Kombinatorische Grundsituationen

listen gibt es also $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ verschiedene Zieleinläufe.

Das erweiterte Multiplikationsprinzip

Ähnlich wie beim Addieren lassen sich auch beim Multiplizieren Korrekturen vornehmen, um zu viel gezählte Elemente wieder auszumustern. So gilt zwar für die Frage nach der Anzahl an Möglichkeiten, 6 aus 49 Kugeln im Lotto zu ziehen, zunächst auch die abbrechende Multiplikationsregel, also $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$. Im Unterschied zum Zieleinlauf interessiert bei der Ziehung der Lottozahlen jedoch die Reihenfolge der Ziehung nicht, so dass z. B. die folgenden Fälle alle als ein Fall gezählt werden müssen: 7-13-19-23-31-47; 7-13-19-23-47-31; 7-13-19-31-23-47; 7-13-19-31-47-23; 7-13-19-47-23-31; 7-13-19-47-31-23, um nur diejenigen aufzuzählen, bei denen 7, 13 und 19 in ihren Positionen fest bleiben. Doch auf die Frage, auf wie viele Arten sich sechs Elemente anordnen lassen, haben wir ja schon mit dem Multiplikationsprinzip eine Antwort gefunden, nämlich $6!$. Damit lässt sich nun die entsprechende Korrektur vornehmen, indem wir das obige Produkt durch $6!$ teilen. Ebenso wie für das Produkt aus aufeinanderfolgenden Zahlen von 1 bis n ein eigenes Symbol, nämlich $n!$, eingeführt wurde, gibt es nun für dieses korrigierte Produkt ebenfalls ein eigenes Symbol, nämlich $\binom{n}{k}$, sprich: n über k .

Interessieren beim Zieleinlauf nicht die Einzelpersonen, sondern z. B. Ländergruppen, so lässt sich eine andere Art der Korrektur vornehmen. Angenommen, unter den letzten acht Teilnehmern des 100-Meter-Laufs sind 2 Jamaikaner, 3 US-Amerikaner, 2 Briten und 1 Läufer

aus Trinidad, dann lässt sich die Frage möglicher Platzierungen der einzelnen Länder ermitteln, indem die Anzahl aller Zieleinläufe dividiert wird durch die Anzahl der Anordnungen der einzelnen Landsleute untereinander, also $\frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!}$.

Die kombinatorischen Grundsituationen

Mit den vorhergehenden inhaltlichen Überlegungen zum Zählen hat man drei der vier kombinatorischen Formeln selbst entwickelt **3**. Lediglich die Kombination mit Wiederholung lässt sich nicht derart einfach entfalten, da Umdeutungen bzw. mehrere Korrekturschritte vorgenommen werden müssen.

Situationen vernetzen durch verschiedene Standardmodelle

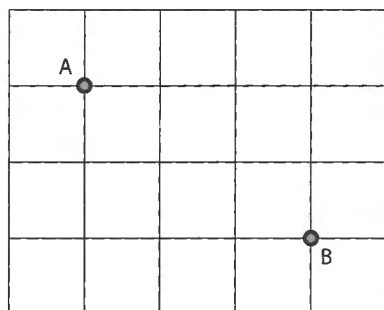
Für Lehrerinnen und Lehrer ist es hilfreich, wenn sie über verschiedene Standardmodell-Vorstellungen verfügen. Dann lässt sich deutlich schneller entscheiden, welche der Grundsituationen denn nun vorliegt und welche Formel anzuwenden ist. Ein Standardmodell wurde schon indirekt angesprochen **3**, nämlich das Urnenmodell. Im Urnenmodell sind n Kugeln in einer Urne. Aus dieser Urne werden unter verschiedenen Bedingungen nacheinander k -mal Kugeln gezogen, bei n über k werden die Kugeln nicht zurückgelegt und die Reihenfolge interessiert auch nicht, wie beim Lotto. Beim Urnenmodell handelt es sich um die am häufigsten im Schulunterricht ver-

wendete Modell-Vorstellung. Dennoch kann nicht jede Person gleich gut mit dieser einen Vorstellung operieren. Im Folgenden sollen deswegen zwei weitere Modelle vorgestellt werden, von denen das eine eher anschaulich, das andere symbolisch ist.

Wege im Gitternetz

Liegt in einer Stadt ein strikt rechteckiges Straßennetz vor, dann können in dieser „Rechteckstadt“ kürzeste Wege von einem Punkt A zu einem anderen Punkt B ermittelt werden **4**. Alle diese Wege sind dadurch gekennzeichnet, dass sie dieselbe Anzahl an Wegstücken lang sind, im Beispiel also fünf Wegstücke. Von diesen fünf Wegstücken führen immer drei nach rechts und zwei nach unten. Unterschiedlich ist jedoch, wann jeweils ein Schritt nach rechts durchgeführt wird. Man muss an fünf Kreuzungen dreimal die Entscheidung treffen, nach rechts zu gehen. Damit entsteht also eine Situation, in der keine Wiederholung vorliegt, weil kein Wegstück mehrfach gelaufen werden kann. Die Reihenfolge, in der die Wegstücke ausgewählt werden, ist ebenfalls nicht relevant, so dass die Frage nach der Anzahl an kürzesten Wegen zwischen zwei Punkten beantwortet wird durch $\binom{n}{k}$. Dabei bezeichnet n die Gesamtanzahl an Wegstücken, k die Anzahl an Wegstücken, die nach rechts führen. Im Beispiel ergibt sich somit für die Anzahl an kürzesten Wegen von A nach B $\binom{5}{3} = 10$.

An dieser Stelle lohnt sich ein Rückblick zum KASTEN auf Seite 5: Wird die Beleuchtung über dem Mathematikum in der Gitternetz-Vorstellung begriffen, so sind die Beleuchtungsmöglichkeiten als mögliche Wege von M nach K aufzufassen und die Lösung wird sofort ersichtlich. Insgesamt sind in beiden Fällen neun Wegstücke zurückzulegen, beim linken Feld führen zwei nach rechts, beim rechten Feld sechs. Bleibt die Frage, ob $\binom{9}{2}$



4 Wie viele kürzeste Wege gibt es von A nach B?

oder $\binom{9}{6}$ mehr ist. Und vielleicht die Anschlussfrage, ob es ein Schild mit noch mehr Möglichkeiten gibt.

0-1-Tupel

Auf symbolischer Ebene kann die Situation mit Folgen von Nullen und Einsen dargestellt werden. n gibt in diesem Fall die Anzahl an Ziffern an, k die Anzahl an Einsen in der Ziffernfolge. Diese 0-1-Folgen werden mathematisch als n -Tupel bezeichnet. Das Tupel 10011 bezeichnet den Weg r-u-u-r-r, das Tupel 01101 den Weg u-r-r-u-r. So lässt sich eindeutig jedem Weg ein Tupel zuordnen. Zur Beantwortung der Frage, wie viele 5-Tupel mit 3 Einsen es gibt, kann also wieder dieselbe Formel genutzt werden.

Es gibt also genauso viele 3-elementige Teilmengen einer 5-elementigen Menge (3 aus 5 Kugeln ziehen) wie es 5-Tupel mit 3 Einsen oder 5-schrittige Wege mit 3 Schritten nach rechts im Gitternetz gibt. Probieren Sie selbst, wie Situationen in der Gitternetz-, Tupel-, Teilmengen- und Urnenmodell-Vorstellung gedeutet werden können und mit welcher Vorstellung Sie in welchen Situationen am besten zurechtkommen.

Nachtrag

Der Vollständigkeit halber soll zu guter Letzt noch ein weiterer Rückblick erfolgen: Die eingangs des Artikels gefragte Anzahl an Zahlen, die sich mit vier Plättchen in einer dreispaltigen Stellentafel darstellen lassen, kann nicht nur additiv, sondern – unter Zuhilfenahme einer gewissen Deutung – auch multiplikativ bestimmt werden. Dazu müssen die Plättchen nach „Sorten“ unterschieden werden, so dass es drei Sorten Plättchen, nämlich Hunderter, Zehner und Einer gibt. Mit der Frage „Wie viele Möglichkeiten gibt es, vier – allgemein: k – Plättchen aus drei – allgemein: n – Sorten zusammenzusetzen, wenn jede Sorte mehrfach vorkommen darf?“ ist die Situation als Kombination mit Wiederholung erkennbar. Werden im nächsten Schritt die vier Plättchen als Nullen und die Trennungen zwischen Hundertern und Zehnern sowie Zehnern und Einern als zwei – allgemein: $(n-1)$ – Einsen umgedeutet, ergibt sich die Frage: Wie viele 0-1-Folgen aus sechs Ziffern gibt es, von denen zwei Einsen sind?

Mit der Antwort $\binom{6}{2} = 15$ – allgemein $\binom{k+n-1}{n-1}$ – ist auch die Formel für die Kombination mit Wiederholung entwickelt.