

Kombinieren – Anordnen – Auswählen

Kombinatorische Grundsituationen verstehen und lösen

Auch wenn im Bereich der Grundschule keine systematische Behandlung der verschiedenen kombinatorischen Grundfiguren angestrebt wird, ist das sichere Wissen über kombinatorische Grundsituationen, zentrale Lösungswege und Darstellungsmittel für die Unterrichtsplanung unerlässlich.

In der Kombinatorik – der Kunst des geschickten Zählens – werden Kombinationen, Anordnungen oder Auswahlen von Elementen einer oder mehrerer Grundmengen betrachtet und die Gesamtheit aller verschiedener Möglichkeiten bestimmt. Dabei entscheidet über die jeweilige Anzahl, ob die Elemente einfach oder mehrfach verwendet werden und die Reihenfolge der Elemente Beachtung findet oder nicht.

Grundlegende kombinatorische Zählprinzipien

Die Zählprinzipien der Kombinatorik erlauben gerade bei wachsender Anzahl der Elemente das rein rechnerische Ermitteln der Möglichkeiten mit Verzicht auf aufwändig zu erstellende sortierte Listen oder Baumdiagramme.

Additionsregel

Einige kombinatorische Problemstellungen lassen sich oft geschickt lösen, indem sie in Teilprobleme zerlegt werden. Man unterscheidet dabei Spezialfälle des Ausgangsproblems, wobei zu beachten ist, dass

diese Überlegungen zu disjunkten Teilmengen führen.

Hierzu ein Beispiel:

Sitzordnung

(A)lina, (B)astian und (C)eline möchten sich nebeneinander auf drei Stühle setzen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es?

Das Ausgangsproblem, drei Stühle mit drei Personen zu besetzen, lässt sich in Teilprobleme zerlegen, die zu drei disjunkten Mengen führen.

- Kind A sitzt auf Stuhl 1
- Kind B sitzt auf Stuhl 1
- Kind C sitzt auf Stuhl 1

Gemäß der Additionsregel ergeben sich dann für die Gesamtheit aller Möglichkeiten: $2 + 2 + 2 = 6$.

Produktregel

Wenn eine Folge von Entscheidungen zu treffen ist, bei der es für die erste Entscheidung p , für die zweite Entscheidung q und für die dritte Entscheidung r Möglichkeiten gibt, dann gibt es für die Folge der Entscheidungen $p \times q \times r$ Möglichkeiten.

Hierzu wieder ein Beispiel:

Menüwahl

Es gibt 3 Möglichkeiten eine Vorspeise zu wählen, 2 für die Hauptspeise und 4 für die Nachspeise.

Die drei Grundmengen, aus denen dabei die Elemente entnommen werden, sind voneinander unabhängig. Es ergeben sich der Produktregel folgend $3 \times 2 \times 4 = 24$ verschiedene Menüs, die zusammengestellt werden können.

Aber auch bei kombinatorischen Grundsituationen, bei denen die Elemente aus einer Menge entnommen werden, kann die Produktregel angewendet werden. Zu beachten ist dann jedoch, ob die Elemente mit oder ohne Wiederholung genutzt werden.

Die Aufgabe „Sitzordnung“ umfasst auch drei Entscheidungsprozesse für das Besetzen der drei Stühle, da die Elemente (Personen) jedoch nur einmalig zur Verfügung stehen, gibt es zunächst drei Möglichkeiten, den ersten Stuhl zu besetzen, dann noch zwei Möglichkeiten für das Besetzen des zweiten Stuhls und letztlich nur eine Möglichkeit für den dritten Stuhl. Es ergeben sich gemäß Produktregel $3 \times 2 \times 1 = 6$ Möglichkeiten.

Kombinatorische Grundsituationen

In der Kombinatorik wird zwischen den zwei Grundtypen *Variation* und *Kombination* unterschieden. Bei *Variationen* ist die Reihenfolge der Elemente von Bedeutung, bei *Kombinationen* hingegen nicht.

Die *Permutation*, als Spezialfall der *Variation*, stellt einen dritten Typ in der Kombinatorik dar, bei dem jede Anordnung aus allen *n* Elementen einer Menge besteht. Bei allen drei Typen wird zwischen Anordnungen mit oder ohne Wiederholung der Elemente unterschieden.

Bei diesen Grundsituationen (*Variation*, *Permutation*, *Kombination*) wird, im Urnenmodell gesprochen, immer aus einer Urne, also aus einer Grundmenge, gezogen. Darüber hinaus spricht man von der Bildung eines Kreuzprodukts, wenn die Elemente, die kombiniert werden, aus mehreren Mengen gezogen werden (z. B. Speisekarte, Menüzusammenstellung).

Um die verschiedenen kombinatorischen Grundsituationen sicher voneinander unterscheiden zu können, ist es hilfreich, sich die Unterschiede exemplarisch an einer grundschulrelevanten Problemstellung zu verdeutlichen (siehe Tabelle Seite 35).

Die Gegenüberstellung zeigt vor allem, wie sich in Abhängigkeit von der kombinatorischen Grundsituation die Anzahl der Möglichkeiten jeweils verändert.

Von ersten Erfahrungen mit Blick auf die Sekundarstufe

Erste Erfahrungen mit einfachen kombinatorischen Aufgabenstellungen in der Grundschule bilden ein gutes Fundament für die systematische Behandlung stochastischer Fragen in der Sekundarstufe.

Unabhängig von der gegebenen kombinatorischen Grundsituation im Kontext einer Aufgabenstellung ste-

hen im Grundschulunterricht vor allem auch geeignete Lösungsverfahren im Zentrum des Unterrichts.

Für die Anzahlbestimmung bei kombinatorischen Problemstellungen können grundsätzlich verschiedene Lösungsverfahren genutzt werden. Sie unterscheiden sich insbesondere hinsichtlich des Abstraktionsgrades und eignen sich abhängig von der gegebenen kombinatorischen Grundsituation mehr oder weniger gut.

Hierzu gehören:

- systematisches Probieren
- Erstellen geordneter Listen
- Erstellen von Tabellen
- Zeichnen von Baumdiagrammen
- Verwenden kombinatorischer Zählprinzipien
- Gestalten von Situationsmodellen

In der Grundschule ist das probierende, zunehmend systematische Vorgehen als zentrales Lösungsverfahren anzusehen. Im Rahmen ausgewählter Aufgabenstellungen können die Kinder aber auch erste Erfahrungen mit Tabellen oder Baumdiagrammen als spezielle Methoden des systematischen Vorgehens sammeln.

Die Lehrkraft sollte stets gewährleisten, dass nur solche Aufgabenstellungen bearbeitet werden, bei denen die Gesamtheit der Möglichkeiten mit einem vertretbaren Aufwand dargestellt werden kann.

Das rein rechnerische Bilden von Produkten als effizientes Lösungsverfahren beim Herleiten aller Möglichkeiten kann im Kontext kombinatorischer Problemstellungen den

Lösungsprozess vorantreiben und durchaus z. B. in Reflexionsphasen thematisiert werden. Jedoch sollte dies an einfachen Aufgaben exemplarisch entdeckt werden, ohne die Verallgemeinerung zur Produktregel der Kombinatorik von allen Lernenden zu erwarten.

Eine Aufgabe – viele Lösungswege

Wird den Kindern für das individuelle Lösen einer Aufgabe genügend Freiraum gegeben und eine geeignete Materialumgebung bereitgestellt, lassen sich ganz unterschiedliche Vorgehensweisen beobachten. Auch die Dokumentation des Lösungsweges zeigt innerhalb einer Lerngruppe oft sehr große Unterschiede. Daher besitzen das Sammeln und Systematisieren sowie das Diskutieren unterschiedlicher Vorgehensweisen einen hohen Stellenwert im Unterrichtsprozess.

Am Beispiel „Sitzordnung“ (s. o.) soll die Vielfalt möglicher Lösungswege und Darstellungsmittel deutlich werden.

Systematisches Vorgehen durch geordnete Listen

Die Lösung der Aufgabenstellung lässt sich durch eine systematische Auflistung aller sechs Möglichkeiten schnell erhalten. Interessant ist bei solchen geordneten Listen, dass sie unterschiedlichen Ordnungsmerkmalen folgen können (Tabelle 1).

Tabelle 1: Geordnete Listen nach verschiedenen Strategien

A B C B A C C A B	A B C B C A C B A	„Festhalten“ eines Kindes auf Stuhl 1 Ich setze Kind A, Kind B bzw. Kind C nacheinander auf den ersten Stuhl und finde dazu jeweils die zwei Möglichkeiten, wie sich die jeweils beiden anderen Kinder dazu setzen können.
C A B A B C B C A	B A C C B A A C B	„Gegenpaare“ finden Ich wähle eine jeweils neue Möglichkeit und vertausche dann die Kinder auf den beiden äußeren Stühlen miteinander.
A B C B A C B C A	A C B C A B C B A	„Weiterrutschen“ eines Kindes Ich setze Kind A nacheinander auf Stuhl 1, 2 bzw. 3 und finde dafür jeweils alle Möglichkeiten

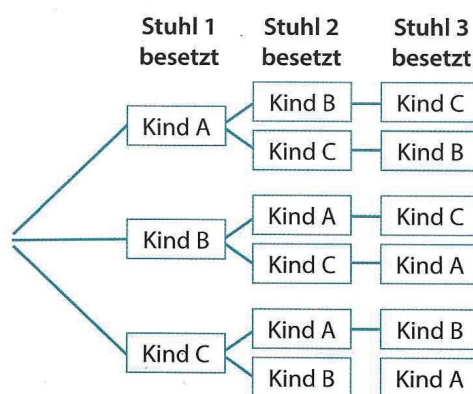
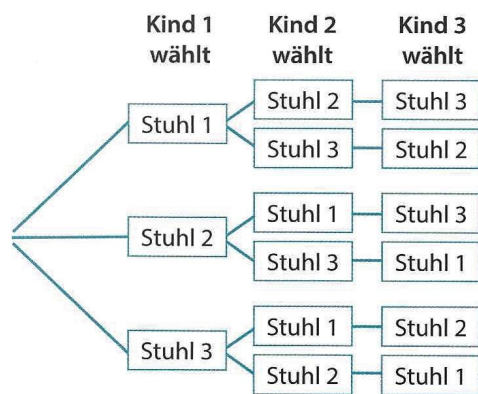


Abb. 1:
verschiedene
Baumdiagramme
zur Lösung des
Problems

Die in Tabelle 1 (S. 33) dargestellten Strategien lassen sich auch bei Grundschulkindern beobachten. Gerade bei steigender Anzahl der gesuchten Möglichkeiten gelingt es ihnen nicht immer, ihre beabsichtigten Strategien durchgängig zu verfolgen. So ist anzuraten, das Lernarrangement methodisch so zu gestalten, dass das Umordnen, Hinzufügen oder Entfernen von Möglichkeiten praktikabel ist.

Baumdiagramme als heuristisches Hilfsmittel

Neben der systematischen Aufstellung eignet sich ebenso das Baumdiagramm als heuristisches Hilfsmittel. Erste Erfahrungen mit Baumdiagrammen bereiten die Lernenden besonders gut auf typische kombinatorische Zählregeln (z. B. Produktregel) vor, die im Verlauf der Schuljahre im Rahmen von stochastischen Fragen zunehmend an Bedeutung gewinnen.

Baumdiagramme sind als Darstellungsmittel nur dann geeignet, wenn die Gesamtzahl der Möglichkeiten überschaubar und die Darstellung aller Pfade des Diagramms nicht zu aufwändig ist. Gerade in der Grundschule kann es hilfreich sein, das gefoderte Baumdiagramm zu

nächst handelnd zu erzeugen (z. B. mit Holzstäben oder Strohhalm als Pfade), bevor von den Lernenden die zeichnerische Darstellung der Möglichkeiten erwartet wird.

Möchte man die Aufgabe „Sitzordnung“ mit Hilfe eines Baumdiagramms lösen, so ergeben sich auch hier zwei grundlegend verschiedene Denkweisen (Abb. 1).

Handeln, Zeichnen, Symbole verwenden

Die Vielfalt der Lösungswege bzw. Darstellungsweisen wird dadurch, dass die Lernenden die Gesamtheit aller Möglichkeiten auf unterschiedlichem Abstraktionsniveau darstellen, noch weiter erhöht.

Die gefundenen Möglichkeiten können handelnd und entsprechend materiell abgebildet (Abb. 2a), zeichnerisch dokumentiert (Abb. 2b) oder, gemäß einer zunehmenden Abstraktion, symbolisch (z. B. nur mit Buchstaben oder Ziffern als Repräsentation für die einzelnen Elemente) generiert werden (Abb. 2c).

Durch die Variation der Darstellungsebene ergeben sich in heterogenen Lerngruppen hervorragende Differenzierungsmöglichkeiten.

Gerade die parallel durchgeführten Bearbeitungen einer kombinatorischen Aufgabenstellung auf verschiedenen Darstellungsebenen (enaktiv-ikonisch-symbolisch) können in der Sicherungsphase gut aufeinander bezogen werden und bieten so spannende Gespräche über individuelle Darstellungsmöglichkeiten und ihre Vor- und Nachteile.

Ich mache das so! Und wie machst du es?

Das Aufbauen erster Grundvorstellungen im Bereich der Kombinatorik wird in der Grundschule in der Regel an ausgewählte Alltagssituationen geknüpft. Sie sind leicht zu veranschaulichen und ggf. auch in spielerische Handlungen umzusetzen.

Entscheidend ist dabei, dass im Verlauf des Lernprozesses die anfangs nur materiell und handlungsgestützten Vorgehensweisen zunehmend auch mental im Sinne von Referenzmodellen genutzt werden können.

Dies geschieht jedoch nur, wenn die Lehrkraft ausreichend Raum gewährt, über Handlungserfahrungen zu kommunizieren und zu reflektieren. Eine für alle Lernenden spannende Reflexionsphase gelingt vor allem dann, wenn sie methodisch geschickt initiiert wird und sinnvolle Gesprächsschwerpunkte fokussiert werden.

Literatur

Spiegel, H. & Selzer, Ch.: „Elemente der Kombinatorik“ in Müller/Steinbring/Wittmann: Arithmetik als Prozess, Verlag Klett-Kallmeyer Seelze 2004.

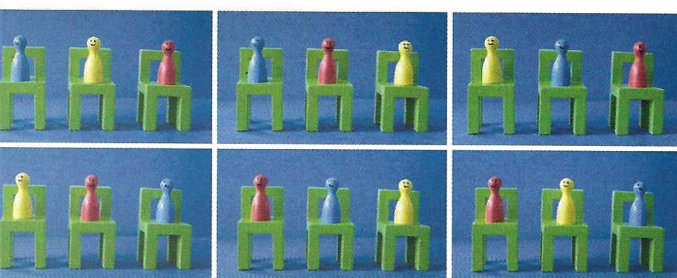


Abb. 2a: Handlungsgestützter Zugang

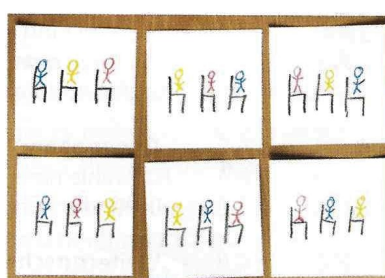


Abb. 2b: Zeichnerischer Lösungsweg



Abb. 2c: Nutzung von Symbolen als Repräsentanten

Permutation ohne Wiederholung (alle Elemente einer Grundmenge werden angeordnet, die Reihenfolge wird beachtet)*Beispielaufgabe:*

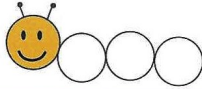
Die Personen 1, 2 und 3 setzen sich auf drei Stühle.
Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es?

Geordnete Aufstellung aller Möglichkeiten:

123 – 132 – 213 – 231 – 312 – 321

Permutation mit Wiederholung (alle Elemente einer Grundmenge werden angeordnet, die Reihenfolge wird beachtet)*Beispielaufgabe:*

Emily malt die drei Felder der Raupe an.
Sie hat drei Farben, die sie auch mehrfach verwenden darf:
rot (Farbe 1), blau (Farbe 2), grün (Farbe 3).

*Geordnete Aufstellung aller Möglichkeiten:*

111 – 112 – 113 121 – 122 – 123 131 – 132 – 133
211 – 212 – 213 221 – 222 – 223 231 – 232 – 233
311 – 312 – 313 321 – 322 – 323 331 – 332 – 333

Variation ohne Wiederholung (nur eine Teilmenge wird ausgewählt, die Reihenfolge wird beachtet)*Beispielaufgabe:*

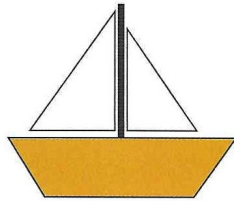
Eine Flagge soll mit zwei verschiedenen Farben angemalt werden. Es stehen 6 Farben (Farbe 1 – 6) zur Verfügung.

Geordnete Aufstellung aller Möglichkeiten:

12 13 14 15 16
21 22 23 24 25 26
31 32 33 34 35 36
41 42 43 44 45 46
51 52 53 54 55 56
61 62 63 64 65 66

Variation mit Wiederholung (nur eine Teilmenge wird ausgewählt, die Reihenfolge wird beachtet)*Beispielaufgabe:*

Die beiden Segel eines Schiffes sollen gefärbt werden.
Es stehen 6 Farben zur Verfügung, die auch mehrfach verwendet werden dürfen.

*Geordnete Aufstellung aller Möglichkeiten:*

11 12 13 14 15 16
21 22 23 24 25 26
31 32 33 34 35 36
41 42 43 44 45 46
51 52 53 54 55 56
61 62 63 64 65 66

Kombination ohne Wiederholung (nur eine Teilmenge wird ausgewählt, die Reihenfolge wird nicht beachtet)*Beispielaufgabe:*

Welche und wie viele Steine hat ein Dominospiel, bei dem die Punktebilder von 1 bis 6 auftreten, aber keine Punktebilder auf einem Stein doppelt auftreten?

Geordnete Aufstellung aller Möglichkeiten:

12 13 14 15 16
21 22 23 24 25 26
31 32 33 34 35 36
41 42 43 44 45 46
51 52 53 54 55 56
61 62 63 64 65 66

Kombination mit Wiederholung (nur eine Teilmenge wird ausgewählt, die Reihenfolge wird nicht beachtet)*Beispielaufgabe:*

Welche und wie viele Steine hat ein Dominospiel, bei dem die Punktebilder von 1 bis 6 auftreten?

Geordnete Aufstellung aller Möglichkeiten:

11 12 13 14 15 16
21 22 23 24 25 26
31 32 33 34 35 36
41 42 43 44 45 46
51 52 53 54 55 56
61 62 63 64 65 66

Bilden von Kreuzprodukten (Sonderfall) (Auswahl aus mehreren Grundmengen)*Beispielaufgabe:*

Tabea möchte aus Geoplättchen ein Haus legen.
Sie hat Dreiecke (rot, blau) und Rechtecke (grün, gelb, rot).
Finde alle Möglichkeiten, ein Haus zu gestalten.

Geordnete Aufstellung aller Möglichkeiten:

1. Menge (Rechtecke)
2. Menge (Dreiecke)

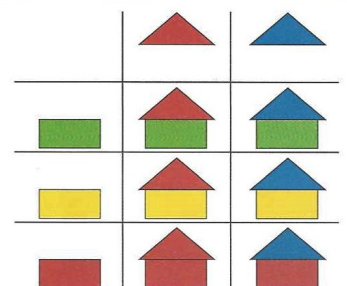


Tabelle 2: Kombinatorische Grundsituationen