

Modellieren als Kreislauf?

Modellieren durch gezieltes Adressieren verschiedener Übersetzungs- und Strukturierungsprozesse lernen

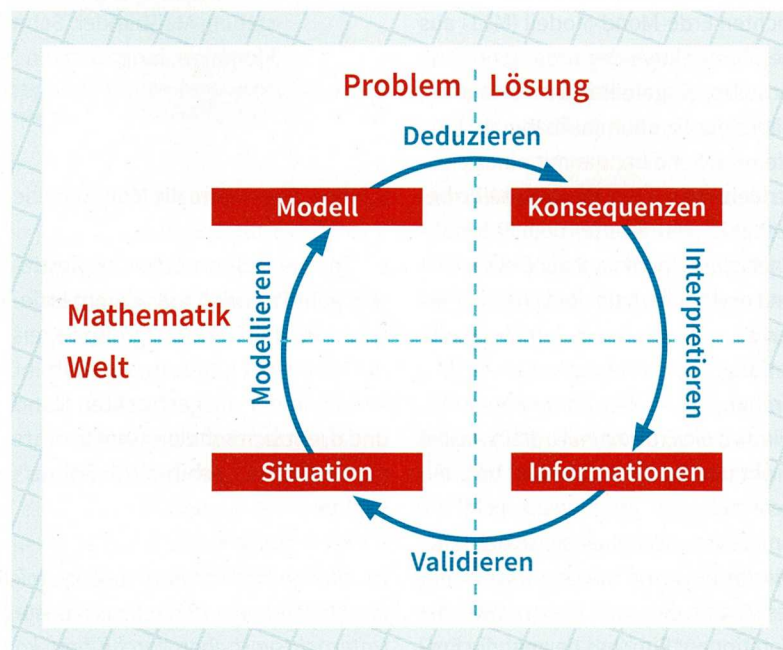
Modellieren wird oft als kreisartige Bearbeitung von Alltagsproblemen mit mathematischen Mitteln beschrieben. Für das Lernen ist das Bild wechselseitiger Übersetzungsprozesse zwischen Realität und Mathematik passender.

Modell, Modellieren, mathematisch Modellieren

Modellieren bedeutet wörtlich genommen „sich ein Bild machen“. Gerade in diesem Sinne werden *Modellieren* und *Modell* auch in der Wissenschaft verwendet. Es stehen jedoch weniger plastisch formbare Gestalten im Mittelpunkt, sondern i. d. R. wird mit einem wissenschaft-

lichen Modell versucht, sich ein Bild von den inneren Beziehungen oder Funktionen von etwas zu machen und diese zu veranschaulichen. Ein mathematisches Modell ist nun nicht eine genauere Veranschaulichung mathematischer Beziehungen oder die Repräsentation eines mathematischen Objekts, sondern eine Beschreibung von Zusammenhängen in der realen Welt mittels der mathe-

matischen Sprache. Mathematische Modelle betrachten also immer Beziehungen, versuchen zu beschreiben, zu erklären oder vorherzusagen. Es wird somit eine Analogie zwischen den betrachteten Beziehungen in der realen Welt und den mathematischen Beziehungen und deren logischer Verknüpfung unterstellt. Das Aufstellen, Verbessern und Anwenden derartiger mathematischer Modelle wird dann mit *mathematisch Modellieren* bezeichnet.



Modellieren als Kreislauf

In der fachdidaktischen Literatur wird der Prozess der wechselseitigen Bezugnahme von Mathematik und dem Rest der Welt, das Modellieren, als ein kreisartiger Bearbeitungsprozess dargestellt. Ausgehend von einem realen Problem in der Welt wird ein mathematisches Modell entwickelt, in diesem werden deduktiv mathematische Schlussfolgerungen gezogen, welche rückbezogen auf die reale Welt Lösungsmöglichkeiten des Problems eröffnen.

Insbesondere in der fachdidaktischen Literatur der Sekundarstufe

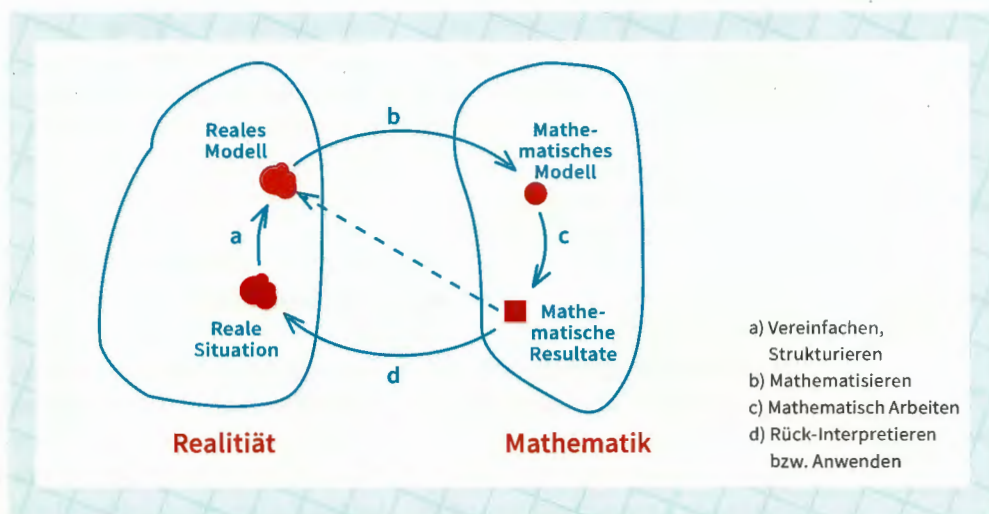
1 | Einfacher Modellierungskreislauf mit Modellieren als Teilschritt (Schupp 1988)

findet man eine Vielzahl verschiedener Modellierungskreisläufe. Immer handelt es sich um idealisierte Schemata, die nicht unbedingt die Denkschritte oder Lösungsprozesse der Schülerinnen und Schüler darstellen. Diese idealisierten Schemata bilden somit selbst Modellierungen: Es handelt sich um didaktische Modelle des „mathematischen Modellierens im Unterricht“. Insofern verwundert es nicht, dass sich die verschiedenen Kreisläufe unterscheiden, fokussieren sie doch jeweils auf andere Aspekte. Immer werden allerdings Prozesse erfasst und beschrieben, sodass die einzelnen Produkte in den Hintergrund rücken.

Modellierungskreisläufe im Vergleich

Neben der Unterscheidung zwischen der realen Welt und der Mathematik, die sich in allen Modellierungskreisläufen findet, wird i. d. R. in einer zweiten Dimension zwischen der „Problem-“ und der „Lösungsseite“ unterschieden, wie dies z. B. in dem Modell von Schupp (1988) gut zu erkennen ist (Abb. 1). Dadurch ergeben sich vier verschiedene Felder, in denen der jeweilige Zustand der Problemlösung dargestellt wird. Ausgehend von einem realen Problem – der Situation in der Welt – wird ein mathematisches Modell entwickelt, aus dem auf deduktivem Weg mathematische Resultate erzielt werden – Konsequenzen in der Mathematik –, welche in der realen Welt interpretiert neue Sachinformationen liefern, mit deren Hilfe validiert werden muss, inwieweit eine befriedigende Problemlösung für die Ausgangssituation geschaffen wurde.

Obwohl der Kreislauf von Blum (1985) ebenfalls vier Schritte umfasst (Abb. 2), sind bereits deutliche Unterschiede auch zwischen diesen beiden einfachen Kreisläufen erkennbar. Zum einen verwendet



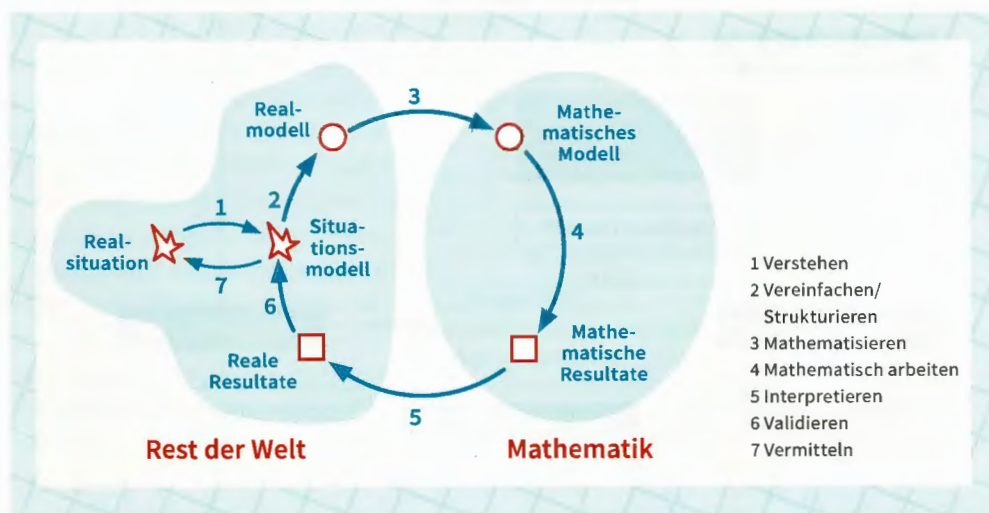
- a) Vereinfachen, Strukturieren
- b) Mathematisieren
- c) Mathematisch Arbeiten
- d) Rück-Interpretieren bzw. Anwenden

Schupp die Bezeichnung *Modellieren* für einen bestimmten Schritt im gesamten Kreislauf, den Übergang von der Welt in die Mathematik, während Blum damit alle Schritte, also den gesamten Prozess, bezeichnet. Zum anderen unterscheiden beide Autoren in der Welt/Realität an unterschiedlichen Stellen in zwei Schritte: Blum betont vor der Mathematisierung die Reduktion, Strukturierung und Vereinfachung der Realität zu einem Realmodell, während Schupp nach der Mathematisierung die Rückübersetzung in zwei Schritte zerlegt: Neben dem Interpretieren betont er zusätzlich das Validieren der gewonnenen Erkenntnisse. Im Verlauf der intensiveren Be-

schäftigung mit dem Modellieren im Mathematikunterricht wurden verschiedene Varianten dieser grundsätzlichen Modellierungskreisläufe vorgeschlagen, die im Wesentlichen durch Zerlegen eines Schritts eine besondere Betonung der jeweiligen Teilaspekte erzielen. Besondere Verbreitung in der mathematikdidaktischen Diskussion hat der Modellierungskreislauf von Blum und Leiss (2005) erfahren, in dem die Autoren den ursprünglichen Kreislauf um einen weiteren vorgelegten Schritt der Bearbeitung erweiterten (Abb. 3): Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht erfordern zunächst, dass die Schülerinnen und Schüler den präsenten

2 | Einfacher Modellierungskreislauf mit vier Teilschritten (Blum 1985)

3 | Erweiterter Modellierungskreislauf (Blum & Leiß 2005)



- 1 Verstehen
- 2 Vereinfachen/Strukturieren
- 3 Mathematisieren
- 4 Mathematisch arbeiten
- 5 Interpretieren
- 6 Validieren
- 7 Vermitteln

tierten Ausschnitt aus dem realen Problemfeld verstehen. Mit dem vorgelagerten Situationsmodell versuchen die Autoren also, dem mentalen Bearbeitungsprozess durch die Kinder Rechnung zu tragen und deren kognitive Schritte genauer mit zu fassen.

Modellierungskreisläufe in der Grundschuldidaktik

In der Regel werden beim Modellieren in der Grundschule dieselben Modellierungskreisläufe zugrunde gelegt wie in der Sekundarstufendidaktik. So nutzt bspw. Maaß (2011) den Kreislauf von Blum (1985). Die Erweiterung des Modellierungskreislaufs um einen vorgelagerten Schritt des Durchdringens des Sachproblems findet sich in der Grundschuldidaktik z. B. bei Lorenz und Kaufmann (2008) und wird dort auf das Lösen von Sachaufgaben ausgeweitet (Abb. 4). Für das Lösen von Sachrechenaufgaben werden allerdings auch deutlich reduzierte Kreisläufe vorgeschlagen. Eine didaktische Reduktion der Anforderungen in nur drei Schritte zum Lösen von Sachre-

chenaufgaben, womöglich in Kombination mit dem Frage-Rechnung-Antwort-Schema, entspricht jedoch keineswegs dem Grundgedanken des mathematischen Modellierens.

Kritik an herkömmlichen Kreislaufmodellen

Baireuther (2013) kritisiert zu Recht, dass bei fast allen Modellierungskreisläufen, die in der Mathematikdidaktik verwendet werden, die beiden Welten, die ja zueinander in Beziehung gesetzt werden sollen, nicht mit demselben Gewicht versehen sind: Die Mathematik wird eher als eine Hilfswissenschaft angesehen, die eingesetzt wird, um ein Sachproblem zu bearbeiten. Die entsprechende Mathematik muss somit den Schülerinnen und Schülern nicht nur bereits bekannt sein, sondern als Werkzeugkoffer auch zum Problemlösen zur Verfügung stehen. Auch wenn das Prozesshafte an den Kreisläufen gut ersichtlich wird, so wird durch die starke Betonung des Anwendens bekannter Mathematik eher ein traditionelles Vorgehen im Mathematikunterricht zemen-

tiert: Nach dem innermathematischen Üben, z. B. des halbschriftlichen Subtrahierens im 2. Schuljahr, runden entsprechende Sachrechenaufgaben als Anwendungen die Unterrichtseinheit ab. Gerade dieses Vorgehen widerspricht aber dem Kern des Modellierungsgedankens.

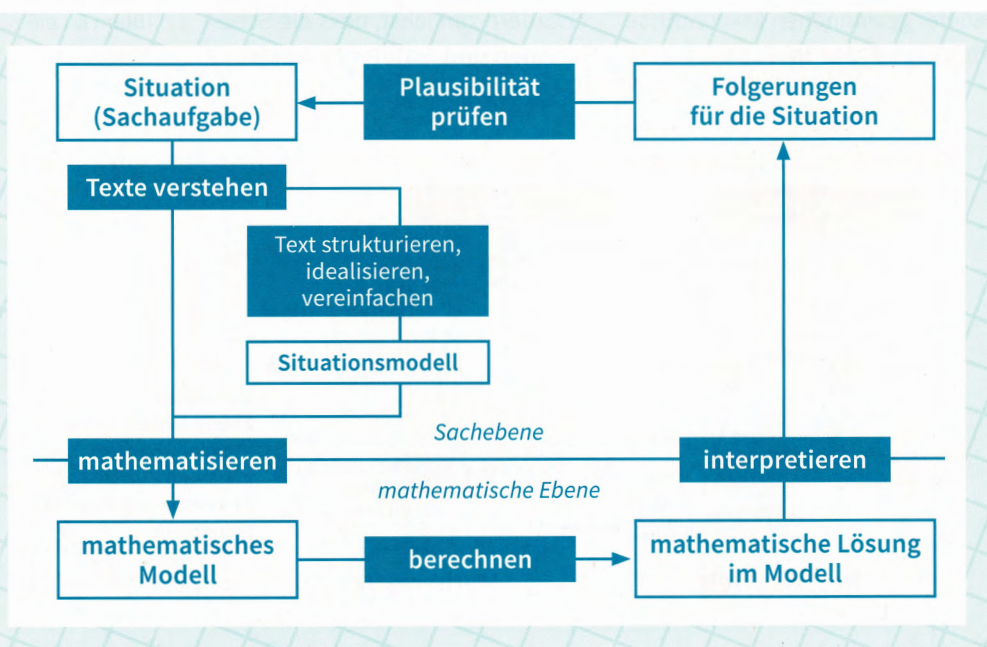
Baireuther (2013) sieht daher in seinem Zweiweltenschema (Abb. 5) den Vorteil, dass beide Welten gleichermaßen erhellt werden, das Wissen in ihnen erweitert wird. So werden nicht nur die Sachprobleme tiefer durchdrungen, indem in ihnen mathematische Strukturen gesehen und untersucht werden, sondern auch das mathematische Wissen wird ggf. erweitert, zumindest aber vertieft und gefestigt.

Teilkompetenzen des Modellierens

Grundlegend ist für Baireuther, dass jeder der vier kleinen Kästen (vgl. Abb. 5) als Ausgangspunkt für Lernprozesse im mathematischen Modellieren dienen kann, handelt es sich doch um unterschiedliche Arten der Beschreibung einer Situation:

- **Konkrete Sachbeschreibungen** können verbal sprachlich, in Textform, in Bildern oder anderen Darstellungsarten gegeben sein. So könnte ein Kind von den Plänen der Familie, am Wochenende einen Ausflug in ein Spaßbad vornehmen zu wollen, erzählen, woran sich ein längeres Klassengespräch zu Spaßbädern anschließen könnte.
- **Reduzierte Sachbeschreibungen:** Ausschmückende narrative Elemente werden bei reduzierten Sachbeschreibungen außen vor gelassen. Es werden diejenigen Aspekte der Gesamtsituation fokussiert, die ggf. mit mathematischen Mitteln weiter erhellt werden können. Die entsprechenden Daten werden geordnet, weitere

4 | Lösungsschritte bei Sachaufgaben als Modellierungsschritte (Lorenz & Kaufmann 2008)



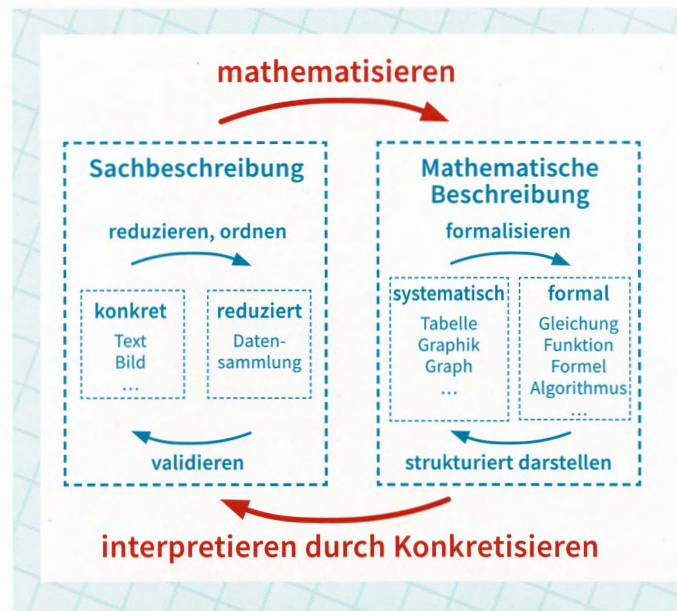
Daten eingeholt oder erhoben, Bilder zu Skizzen reduziert etc. Bezogen auf das Spaßbadbeispiel könnten verschiedene Flyer der umliegenden Spaßbäder vorliegen, aber auch weitere Daten erhoben werden, verschiedene Familien bzgl. ihrer Wünsche bei einem derartigen Ausflug befragt werden etc.

- **Systematische mathematische Beschreibung:** Tabellarische oder graphische Systematisierungen entsprechender Einzeldaten finden sich ebenfalls vielfach im Alltag. Diese können selbst erstellt werden – dann mathematisieren die Kinder die bislang als Sachbeschreibung vorliegende Situation. Sie können aber auch als bereits mathematisierte Situation den Kindern entgegentreten, welche ggf. mathematisch formalisiert oder aber situativ konkretisiert werden müsste. Beim Spaßbadbeispiel könnten die entsprechenden Daten aus den verschiedenen Flyern einander gegenübergestellt werden, sodass letztlich Zuordnungstabellen entstanden. Diese können die Kinder zwar noch nicht mittels Funktionsgleichungen beschreiben, doch sind sicher viele Fragen bereits aufgrund einer derartigen tabellarischen Aufbereitung zu klären, z. B. für welche Gruppen die Kleingruppenkarte gewählt werden sollte, welche Familienkarten oder Einzeltickets am günstigsten sind.
- **Formale mathematische Beschreibung:** Da das mathematische Repertoire der Grundschulkinder noch gering ausgeprägt ist, finden sich Formalisierungen lediglich in Ansätzen. Doch lassen sich erste Erfahrungen zu Gleichungen, aber auch zu verschiedenen Algorithmen, mit den anderen Beschreibungen der Situation verbinden. Bezogen auf das Spaßbad werden wohl eher

systematische mathematische Beschreibungen vorliegen als entsprechende Funktionsgleichungen. In jedem Fall sind die mathematischen Beschreibungen zu interpretieren und anhand der Sachsituation zu konkretisieren.

Indem Baireuther zwischen der sachlichen und der mathematischen Beschreibung der zugrundeliegenden Situation stärker unterscheidet als dies in anderen Modellierungskreisläufen der Fall ist, lassen sich die Hauptprozesse der gegenseitigen Bezugnahme – das Mathematisieren einerseits und das Interpretieren durch Konkretisieren andererseits – von den weiteren notwendigen Prozessen in der jeweiligen Sprachwelt – Reduzieren, Ordnen, Validieren, Formalisieren, strukturiert Darstellen – trennen. Immer schließen sich auch bewertende Fragen an, die in jedem Modellierungsprozess eine Rolle spielen und so für die Kinder sinnvoll erfahrbar werden. Bezogen auf das Spaßbadbeispiel könnte man sich fragen, warum die Grenzen bei den Gruppierungen gerade so gezogen, warum ausgerechnet diese fünf Gruppen unterschieden wurden, warum es keine Rabatte für Kindergruppen, sondern nur für Eltern-Kinder-Gruppen gibt usw. Die Teilprozesse des Ordners, Strukturierens, Formalisierens und Validierens erfahren so ebenso wie die übergeordneten Prozesse des Mathematisierens und Interpretierens gezielt Aufmerksamkeit. Selbstverständlich stehen sie dennoch nicht für sich und lassen sich nicht ausschließlich isoliert betrachten, sondern sind eingebunden in die jeweiligen Übersetzungen.

Wesentlich erscheint bei einem derart verstandenen Lernen des mathematischen Modellierens im Unterricht, dass es gerade nicht um die isolierte Lösung von Einzelfragen geht, also z. B. der Frage, in welches Spaßbad denn Lisas Familie am Wochenende gehen sollte, sondern



5 | Modellieren lernen durch verschiedene Übersetzungs- und Strukturierungsprozesse (Baireuther 2013, S. 1)

dass eine Gesamtsituation möglichst weitreichend erhellt werden soll. Damit wird zugleich deutlich, dass nicht eine Sachrechenaufgabe zu berechnen ist, sondern es müssen vielfältige Daten erhoben, recherchiert und gesammelt, sowie zusammen- und gegenübergestellt werden.

Literatur

- Baireuther, P. (2013). *Eine Vision von einem zukunftsfähigen Mathematikunterricht*. PH Weingarten.
- Blum, W. (1985). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. *Mathematische Semesterberichte* 32(2), S. 195 – 232.
- Blum, W., Leiß, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der „Tanken“-Aufgabe. *mathematik lehren* 128, S. 18 – 21.
- Lorenz, J. H. & Kaufmann, S. (2008). *Sachrechenbox 3/4*. Braunschweig: Westermann.
- Maaß, K. (2011). *Mathematisches Modellieren in der Grundschule. Handreichung im Programm SINUS an Grundschulen*. Kiel: IPN.
- Schupp, H. (1988). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I zwischen Tradition und neuen Impulsen. *Mathematikunterricht* 34(6), S. 5 – 16.