

Zur Sache bitte ...

Die Rolle des „Sachrechnens“ in der Grundschule

Axel Schulz Die Beschäftigung mit „einer Sache“, mit alltags- bzw. kontextnahen Situationen, ist im Mathematikunterricht der Grundschule längst etabliert und stellt einen Kern des Mathematiklernens dar. Im folgenden Beitrag werden Möglichkeiten und Grenzen der Beschäftigung mit der Sache im Mathematikunterricht aufgezeigt.

Zum Einstieg zwei Beispiele

Musa wird in der zweiten Schulwoche des ersten Schuljahres folgende Aufgabe gestellt: „Stell dir mal vor, da sind zwei Kinder, Klaus und Erika. Klaus hat drei Murmeln und Erika hat sieben Murmeln. Wie viele Murmeln muss Klaus noch bekommen, damit er genauso viele hat wie Erika?“ Musa kann diese Aufgabe schnell lösen, indem er drei Finger ausstreckt und so lange ergänzt, bis er sieben Finger ausgestreckt hat; seine Antwort: „Da müssen noch vier dazu. Er braucht noch vier.“

Am Ende des ersten Schuljahres hat Musa noch immer Probleme mit Platzhalteraufgaben vom Typ $3 + _ = 7$. Offenbar konnte Musa im Laufe eines Schuljahres noch keine Verbindung herstellen zwischen der kontextnahen, konkreten Aufgabenbearbeitung und der abstrakt-symbolischen Aufgabenstellung. Damit ist Musa nicht allein (wie Sie aus Ihrer eigenen Unterrichtspraxis vielleicht wissen).

Moritz, einem Drittklässler, wird eine sog. Kapitänsaufgabe gestellt: „Stell dir vor, da ist ein Schiff, und auf dem Schiff gibt es drei Schafe und vier Ziegen. Kannst du mir sagen, wie alt wohl der Kapitän des Schiffes ist?“ Moritz antwortet sofort: „Sieben. Drei plus vier ist doch sieben.“ Auf die Frage, ob er mit einem Schiff mitfahren würde, dessen Kapitän sieben Jahre alt ist, antwortet Moritz: „Nee, der ist ja viel zu klein, der baut ja 'nen Unfall.“

Moritz kann die Aufgabe $3+4$ schnell und sicher lösen, zudem weiß er, dass siebenjährige Kapitäne eher die Ausnahme sind. Doch diese Kompetenzen reichen offensichtlich nicht aus, um zu verhindern, dass er versucht, diese „Quatschaufgabe“ zu lösen.

Ausgehend von diesen beiden Beispielen soll im folgenden Beitrag geklärt werden, warum wir Sachkontexte im Mathematikunterricht brauchen, welche Hürden hierbei ggf. entstehen können, und wie wir am besten mit diesen Sachkontexten umgehen, damit Mathematiklernen und der Umgang mit der Sache sich gegenseitig unterstützen können.

Was ist „Sachrechnen“ heute?

Bliebe man beim Wortsinn des Wortes Sachrechnen, würde es sich dabei um das Rechnen mit und wegen einer Sache handeln. Es würde sich also auf den Teil des Mathematikunterrichts beziehen, der sich mit Zahlen und Operationen beschäftigt. Dieser Ansatz ist (und war schon immer) zu kurz gedacht: Sachrechnen ist mehr als an eine Sache gekoppeltes Rechnen. Das ist auch ein Grund dafür, dass der Begriff „Sachrechnen“ in den Bildungsstandards und in den aktuellen Lehrplänen als Kategorie nicht mehr genutzt wird (vgl. KMK 2004, 6).

Doch die Tatsache, dass der Begriff nicht mehr genutzt wird, heißt nicht, dass die guten Ideen, die den Prinzipien, Methoden, Formen und Inhalten des „Sachrechnens“ zugrunde liegen, ungültig würden. Im Gegenteil: Die Aufgabe nach Erscheinen der Bildungsstandards ist es, diese guten Ideen auch in den neuen Strukturen zu entdecken und zu etablieren.

Drei Funktionen des „Sachrechnens“ – neu interpretiert

Immer noch relevant in der Diskussion über die Sache im Mathematikunterricht sind die von Winter (1985) formulierten drei Funktionen des Sachrechnens (vgl. auch Franke/Ruwisch 2010, 24 ff.):

- *Sachrechnen als Lernstoff*
- *Sachrechnen als Lernprinzip*
- *Sachrechnen als Lernziel*



© Shutterstock Creative

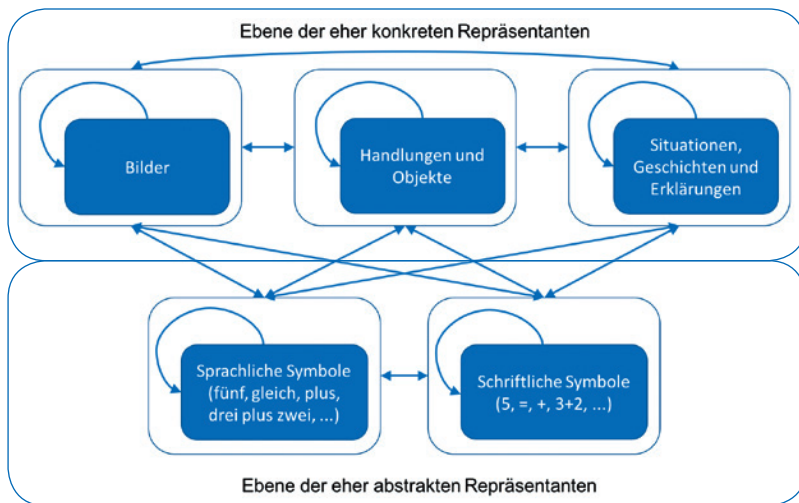


Abb. 1
Mögliche Übersetzungen
zwischen Repräsentanten
(angelehnt an Wartha/
Schulz 2012, 30).

Sachrechnen als Lernstoff – der Inhalt

Die Formulierung „Sachrechnen als Lernstoff“ ist möglicherweise etwas irreführend, da ja nicht das Sachrechnen selbst der Lernstoff ist, sondern der „sachrechnerische Stoff“ (Winter 1985, 15). Damit waren zunächst der Umgang mit den „bürgerlichen Größen“ gemeint (Stückzahlen, Geldbeträge, Längen, Zeitspannen, Gewichte, Temperaturen, Flächen- und Rauminhalte) und die Beschäftigung mit den „elementaren Verfahren und Begriffen der Statistik“ (ebd.). All diese Inhalte finden sich in den Bildungsstandards wieder, wenn auch über verschiedene Inhaltsbereiche verteilt:

- *Geldwerte, Längen, Zeitspannen, Gewichte und Rauminhalte sind der inhaltliche Kern des Bereichs „Größen und Messen“;*
- *die Kompetenz „Flächen- und Rauminhalte vergleichen und messen“ ist dem Bereich „Raum und Form“ zugeordnet;*
- *beim Umgang mit bürgerlichen Größen ist auch der Umgang mit Proportionalität und funktionalen Beziehungen gemeint, die sich im Kompetenzbereich „Muster und Strukturen“ finden;*
- *sobald Inhalte quantifiziert werden, werden automatisch Kompetenzen aus dem Bereich „Zahlen und Operationen“ angesprochen;*
- *die elementaren Verfahren und Begriffe der Statistik werden dem Kompetenzbereich „Daten, Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit“ zugeordnet.*

Kurz: Der „sachrechnerische Stoff“ liegt mittlerweile quer zu den von den Bildungsstandards beschriebenen inhaltsbezogenen Kompetenzen.

Sachrechnen als Lernprinzip – die Art und Weise

Beim Sachrechnen als Lernprinzip wird die Sache quasi in den Dienst der Mathematik gestellt. So wird sie zum Beispiel für lebendige Einstiege in

ein neues Thema genutzt – als Ausgangspunkt für mathematische Lernprozesse. Sie kann genutzt werden zur „Verlebendigung, Verdeutlichung, Veranschaulichung“, aber auch zur Einübung mathematischer Begriffe (Winter 1985, 26). Die Veranschaulichung mathematischer Begriffe durch alltagsnahe Situationen kann man in einem größeren Kontext deuten: Mathematische Begriffe und Operationen sind prinzipiell erst einmal unsichtbar. Sie werden erst durch die Repräsentation in verschiedenen Darstellungsformen denk- und diskutierbar (vgl. z. B. Schulz 2015).

Wir gehen davon aus, dass Grundvorstellungen zu mathematischen Begriffen, Zusammenhängen und Operationen dann entwickelt werden können, wenn es gelingt, zwischen und innerhalb dieser Darstellungsformen zu übersetzen (siehe Abb. 1).

Dabei kann unterschieden werden zwischen eher konkret-anschaulichen und andererseits zwischen symbolisch-abstrakten Darstellungen. Darüber hinaus können die konkret-anschaulichen Darstellungen unterschieden werden in eher alltagsnahe und eher didaktisch geprägte Bilder, Geschichten, Handlungen (vgl. Abb. 2).

Wenn es gelingt, die Übersetzungen zwischen und innerhalb der Darstellungsebenen zu aktivieren, ist die Chance groß, dass sich Grundvorstellungen zu mathematischen Inhalten aufbauen und festigen (Wartha/Schulz 2012). Die Auseinandersetzung mit „Sachen“, mit kontextnahen Geschichten, mit realen Gegenständen, mit Situationen des echten Lebens usw. ist also für verstehendes Mathematiklernen unverzichtbar.

Sachrechnen als Lernziel – die prozessbezogenen Kompetenzen

Ein wichtiges Ziel des Mathematikunterrichts ist es, dass Schülerinnen und Schüler in die Lage versetzt werden, ihre Umwelt zu erschließen, zu verstehen und Herausforderungen, die diese an sie stellt, zu begegnen und am besten auch zu meistern. In diesem Sinne ist Sachrechnen als Lernziel zu verstehen. Durch die Beschäftigung mit der Sache im Mathematikunterricht sollen die Schülerinnen und Schüler Kompetenzen erwerben, die ihnen bei der Umwelterschließung helfen – die prozessbezogenen Kompetenzen. Das Bemerkenswerte an den prozessbezogenen Kompetenzen ist, dass sie nicht nur im oder für den Mathematikunterricht wirksam werden sollen, sondern dass Kinder und Erwachsene sie im besten Fall im echten Leben nutzen können.

Repräsentanten	Eher alltagsnah	Eher didaktisch geprägt
Handlungen	• Einkaufen • Tisch decken • Sammelkarten tauschen • Neue Tischgruppen aufteilen	• Umdrehen von Wendeplättchen • Darstellen einer Zahl mit Zehnersystemblöcken • Verschieben des Malwinkels am 100er Punktefeld
Bilder und Abbildungen	• Fotos • Bilderbücher • Wimmelbilder	• Bild eines Rechenrahmens • Punkt-Strich-Darstellung der Zehnersystemblöcke • Abbildung von fünf Vögeln. Drei davon fliegen weg.
Objekte	• Tische, Stühle, Messer, Gabel, Kastanien, Bohnen, Erbsen, Eierkartons, Eier	• Zehnersystemblöcke • Rechenschiffchen • Wendeplättchen
Geschichten und Erklärungen	• Kindergeburtstag • Familienausflug mit zwei Autos • Beschriebene Handlungen (siehe oben)	• Rechengeschichten • Vorgehen beim Aufteilen von 16 Plättchen in Dreier-Gruppen • Was passiert, wenn ich von einer Hunderterplatte einen Würfel wegnehmen will?

Problemlösen

Aufgaben, für die bisher keine Lösungsroutinen zur Verfügung stehen, sind sog. problemhaltige Aufgaben. Daraus folgt, dass die „Problemhaltigkeit“ von Aufgaben nicht in der Aufgabe selbst liegt, sondern in der Differenz zwischen den Kenntnissen bzw. Fähigkeiten des Aufgabebearbeiters und den Anforderungen der Aufgabe (Winter 1985, 7). Stehen keine Lösungsroutinen zur Verfügung, gibt es verschiedene Möglichkeiten, sich einer Aufgabe zu nähern – zum Beispiel das Skizzieren des Sachproblems, das Rückwärtsarbeiten, das Zerlegen in Teilaufgaben, oder das (strategische) Probieren. Diese verschiedenen Strategien beim Lösen problemhaltiger Aufgaben können im Mathematikunterricht kennengelernt, angewendet und gefestigt werden. Ziel ist es dabei, eine Grundhaltung zu entwickeln, die Kinder wie Erwachsene ermutigt, sich herausfordernden Aufgaben zu stellen und dabei ein reichhaltiges Handlungsrepertoire nutzen zu können.

Argumentieren und Begründen

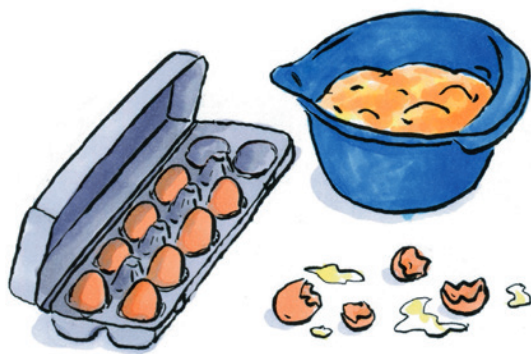
Eine besondere Herausforderung beim Mathematiklernen (und im echten Leben) ist das Finden von „echten“ Begründungen: Es reicht manchmal nicht zu sagen „Weil es eben so ist“, sondern manchmal muss auf der Grundlage tragfähiger Annahmen eine Argumentation entwickelt werden, der andere auch folgen können. Im Mathematikunterricht können die Schülerinnen und Schüler gemeinsam Merkmale einer „echten“ und tragfähigen Begründung erarbeiten und diese dann auch nutzen.

Kommunizieren und Darstellen

Eigene Überlegungen müssen adressantenbezogen formuliert werden können, und man muss sich auf die Darstellung anderer einlassen und versuchen, sie zu verstehen – und gegebenenfalls sachbezogen nachfragen. Daraus kann die gemeinsame Reflexion über eine (mathematische) Sache resultieren.

Abb. 2
Alltagsnahe und didaktisch
geprägte Repräsentanten





Mögliche Rechnung	Mögliche Deutung
$4 + 4 = 8$	Die Eier pro Reihe zusammen
$2 + 2 + 2 + 2 = 8$	Die Eier in Zweierpaaren gesehen
$10 - 2 = 8$	Es waren zehn Einer, zwei davon wurden benutzt
$8 + 2 = 10$	Es sind noch acht Eier, aber eben waren es noch zwei mehr

Abb.3
Darstellungswechsel und verschiedene Deutungsmöglichkeiten als unterrichtspraktische Chance

Modellieren

Das „Herzstück“ der mathematisch geprägten Beschäftigung mit einer Sache ist das Modellieren bzw. Mathematisieren (Winter 1985, 32). Hierbei geht es um die Fähigkeit, den jeweils relevanten mathematischen Kern eines Sachverhalts zu erkennen und auf mathematischer Ebene zu verarbeiten und wieder auf den Sachverhalt zu beziehen. Vereinfacht gesprochen handelt es sich beim Modellieren um das Übersetzen von der eher konkret-anschaulichen Darstellungsebene in die abstrakt-symbolische Ebene – und wieder zurück. Beim Modellieren nutzen wir die Mathematik quasi als Werkzeug, um die Umwelt zu verstehen, um sie vorhersagbarer, planbarer und überschaubarer zu machen.

Was ist zu tun?

Zurück zu den Einstiegsbeispielen. Was können wir tun, damit Mathematiklernen und der Umgang mit der Sache sich gegenseitig unterstützen können? Wie oben bereits angedeutet, spielt die Sache im Mathematikunterricht eine Doppelrolle: Sie dient einerseits als Werkzeug, um mathematische Inhalte „sichtbar“ zu machen und sich mit ihnen zu beschäftigen. Andererseits wird sie genutzt, damit wiederum die Mathematik als Werkzeug genutzt werden kann, um sich die Welt zu erschließen.

Textaufgaben und Sachbilder – sinnvoll und in Maßen

Anhand von Textaufgaben und Rechengeschichten können sich Schülerinnen und Schüler mit

vergleichsweise wenig Leseaufwand (quasi komprimiert) mit den Mitteln der Mathematik mit einer Sache beschäftigen. Auch Sachbilder dienen der komprimierten Darstellung, die mit den Mitteln der Mathematik erschlossen werden kann. Dabei sollte darauf geachtet werden, dass die Kinder über den dargestellten Sachverhalt nachdenken und ihn für sich mit Sinn füllen können, sodass die Deutung von Texten und Bildern im Laufe der Schulzeit nicht didaktisch beschnitten wird (vgl. Bauersfeld 1991, 9). Diese individuellen Deutungsweisen sind selten eindeutig (siehe Abb. 3); es sei denn, die Kinder wurden schon an eine „Pseudo-Eindeutigkeit“ gewöhnt (ebd.). Gemeint ist hier die Einstellung, dass zu jedem Sachverhalt, zu jedem Bild nur eine „richtige“ mathematische Idee „passen“ kann. Diese Einstellung ist aber so lebensfern, dass sie gerade den Zielen des Sachrechnens entgegenwirkt.

Eine kreative und somit beziehungsreiche Sichtweise auf Sachverhalte kann gelingen, wenn der Mehrdeutigkeit von Geschichten und Bildern Rechnung getragen wird (siehe nächster Punkt). Zudem kann man darauf achten, neben Textaufgaben auch andere (vielleicht sogar authentischere) Möglichkeiten zu finden, die Mathematik und die Sache zusammenzubringen (siehe die folgenden Punkte).

Kontexte reflektieren und Fragen finden

Pseudo-Eindeutigkeit und didaktogene Sinnverkürzungen (vgl. ebd.) können dazu führen, dass Schülerinnen und Schüler lernen, dass es immer *nur eine* richtige Lösung gibt und vor allem, dass es *immer eine Lösung gibt* (das ist der Grund, warum Kapitänsaufgaben gelöst werden, wie zum Beispiel von Moritz). Diese Einstellung widerspricht nicht nur der Lebenswirklichkeit, sondern auch den Ideen der Mathematik, die kein fertiges Produkt ist, sondern als Prozess verstanden werden kann (vgl. Müller/Steinbring/Wittmann 2004). Es gilt also, die Schülerinnen und Schüler dazu zu ermutigen, Kontexte zu hinterfragen, mit Sinn zu füllen und Fragen an diese Kontexte zu stellen (vgl. Kasten auf S. 9).

Situationen nachspielen – von der Handlung in den Kopf

Manchmal reicht es *nicht* aus, Texte, Geschichten oder Bilder mit der abstrakt-symbolischen Ebene zu verbinden. Einige Schülerinnen und Schüler profitieren sehr davon, wenn die entsprechenden Situationen *nachgespielt* werden – nicht immer, aber manchmal. Deshalb kann man als Lehrkraft darauf achten, Texte, Ge-

schichten und Bilder zur Veranschaulichung zu wählen, die im Kontext Schule und Klassenraum auch ohne großen Aufwand nachzustellen (also zu handeln wären) oder die ohnehin schon passiert sind (zum Beispiel ein Sportfest, ein Flohmarkt, ein Einkauf, ...): Also *nicht*: „Stell dir vor, du hättest 17 Torten/Äpfel/Schildkröten. Die sollen an vier Kinder verteilt werden. Wie viele bleiben übrig?“ (Es sei denn, Sie haben diese Dinge in ausreichender Zahl im Klassenraum.) Sondern: „Stell dir vor, du hast 17 Muggelsteine/Bauklötze/Buntstifte. Die sollen an vier Kinder verteilt werden. Wie viele bleiben übrig?“ (Vorausgesetzt, Sie haben diese Dinge in ausreichender Zahl im Klassenraum.).



„Die Kinder der Lindgren-Grundschule führen ein Theaterstück in der Aula auf. Sie verkaufen Eintrittskarten. Eine Karte kostet 2 €. Die Aula hat 120 Plätze. Die Kinder haben bereits 87 Karten verkauft.“

Mögliche Fragen:

- Wie viele Karten können noch verkauft werden?
- Wie viel Geld haben die Kinder bereits eingenommen?
- Wie viel Geld kann noch eingenommen werden?
- Ist die Aula jetzt schon mehr als halb voll?
- Es ist ungerecht, dass alle den gleichen Eintritt zahlen müssen: Kinder sollten weniger zahlen als Erwachsene. Daher: Wie viele Kinder sind wohl dabei? Wie viel sollten sie dann bezahlen müssen?
- Wie viel Geld können die Kinder maximal einnehmen?
- Was könnten sie sich davon kaufen?

(Und das sind nur die Fragen, die einem Lehrer eingefallen sind; der Kreativität von Kindern sind hier keine Grenzen gesetzt.)

Authentische Alltags- und Sachsituationen

Ein Problem mit Sachsituationen „aus der Lebenswirklichkeit der Kinder“ ist, dass diese Situationen manchmal eben doch etwas weit hergeholt sind – zumindest im Mathematikunterricht. Die Aufforderung, sich vorzustellen, dass von sieben Äpfeln, Marmeladen, Bonbons, ... vier weggenommen werden (von wem und warum

auch immer), ist nämlich im Mathematikunterricht gerade nicht „alltagsnah“. Stattdessen können Beispiele gewählt werden, die im Klassenraum tatsächlich stattfinden könnten und ggf. auch nachgespielt werden können (siehe links). Ein weiteres Problem mit Situationen aus der Lebenswirklichkeit der Kinder ist, dass diese zwar tatsächlich sehr nah an der Lebenswirklichkeit angesiedelt sind, häufig jedoch nur *fiktiv* behandelt werden: So finden sich in Schulbüchern häufig Beispiele von *fiktiven* Kindern, Familien, Klassen, Schulen (Peter stoppt die Zeit, die er für seine Hausaufgaben braucht; die Klasse 3a plant einen Theaterbesuch; an der Luther-Schule werden alle Schülerinnen und Schüler gezählt, ...). Die meisten dieser fiktiven Situationen sind jedoch tatsächlich im (Schul-) Leben der Kinder zu finden – sie könnten also auch tatsächlich genutzt werden. Es wäre Verschwendung einer authentischen Lerngelegenheit, auf das fiktive Beispiel im Schulbuch zurückzugreifen, anstatt das Leben zu nutzen. Die Aufgabe der Lehrkräfte besteht also darin, fiktive Situationen in Schulbüchern zu prüfen und im Zweifel darauf zu verzichten und die authentische Situation zu nutzen, in der sich die Schülerinnen und Schüler befinden (zum Beispiel ein Sportfest, ein Flohmarkt, ein Einkauf, ...).

(Kleine) Projekte

Sachrechnen kann besonders effektiv werden, wenn es mit dem Sachunterricht verknüpft wird, wenn es also wirklich um die Sache geht. Zahlreiche Anregungen finden sich zum Beispiel bei Winter oder Franke/Ruwisch (vgl. auch Fromme in diesem Heft).

Der didaktische Vorteil von kleinen Projekten, bei denen das Leben mit Hilfe der Mathematik erschlossen wird, ist der, dass die Realität einem unmittelbar rückmeldet, ob man sich im Vorfeld passende (mathematische) Gedanken gemacht hat. Durch die geplante Realisierung des Projekts wird also bereits bei der mathematischen Modellierung eine Erwartungshaltung und Ernsthaftigkeit geschaffen, die es bei fiktiven Situationen nicht unbedingt gäbe.

Schluss

Obwohl das „Sachrechnen“ aus den Bildungsstandards und den Lehrplänen verschwunden ist, ist es im Mathematikunterricht immer noch präsent: Die Auseinandersetzung mit realistischen Kontexten kann das verstehende Mathematiklernen dabei inhaltsübergreifend unterstützen. Und die Mathematik kann dabei helfen, die Kontexte besser zu verstehen.

Literatur

- Bauersfeld, H. (1991): Sachaufgaben - nichts als Ärger!? In: Die Grundschulzeitschrift 5, Heft 42, 8–10
- Franke, M./Ruwisch, S. (2010): Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule. Heidelberg
- Müller, G. N./Steinbring, H./Wittmann E. Ch. (Hg.) (2004): Arithmetik als Prozess. Seelze
- Schulz, A. (2015): Wie kommt das Rechnen in den Kopf? In: Fördermagazin Grundschule (4), 2015, 15–21
- Wartha, S./Schulz, A. (2012): Rechenproblemen vorbeugen. Berlin
- Winter, H. (1985): Sachrechnen in der Grundschule. Bielefeld