

Lernumgebungen und Arbeitsumgebungen zur Papierfaltgeometrie im Mathematikunterricht

Bernd Wollring, Universität Kassel, Germany

ABSTRACT: We report on design components of working environments concerning the geometry of paper folding in mathematics education for the primary grades and on results of qualitative empirical research related to this topic. We introduce products, tools and documents.

Der Mathematikunterricht, insbesondere der mathematische Anfangsunterricht benötigt nach wie vor Impulse zur Geometrie, zum sozialen Lernen, zu echten Erfindungssituationen und zum aktiv-konstruierenden Lernen. Wir unterbreiten den Vorschlag, in der Grundschule Arbeitsumgebungen zur Papierfaltgeometrie vorzusehen und beschreiben dazu Designelemente für Unterrichtseinheiten und erste Ergebnisse zu darauf bezogenen empirischen Untersuchungen.

Elemente der Papierfaltgeometrie sind vielen Kindern aus dem Kindergarten oder aus ihrem Spiel vertraut. Handlungserfahrungen können angenommen werden, effizienter als zu anderen geometrischen Arbeitsumgebungen. Als wesentliches Plus der Papierfaltgeometrie sehen wir, daß Handlungserfahrungen und Handlungswissen angereichert werden können, bevor die Gegenstände und Sachverhalte in Sprache gefaßt werden. Dies stimmt mit allgemeinen Befunden zum Lernen überein, nach denen die Handlungskompetenz der Sprachkompetenz vorausgeht. Wir charakterisieren *Produkte, Werkzeu-*

ge und *Dokumenten* zur Papierfaltgeometrie. Ausgangsmaterial ist quadratisches Papier oder Papier im DIN-A-Format, das fast überall leichter zu beschaffen ist als anderes Material zum Geometrieunterricht.

Die Auswahl der zu faltenden *Produkte* ist dadurch bestimmt, daß sie einerseits *außerhalb der Mathematik einen "Werksinn"* haben und andererseits einen *Sinn im Rahmen der Mathematik*.

Das erste wird im Mathematikunterricht oft zu wenig beachtet. Gemeint ist, dass die gefalteten Stücke einen Sinn als künstlerisches Objekt, als Geschenk oder als Modell oder als Bestandteil eines anderen sinnvollen Objektes haben, der in der Lebenswelt der Kinder anerkannt ist. Dabei ist es besonders günstig, wenn auch einem größeren Ensemble solcher Teile ein Werksinn zukommt. Wir nennen dies *Ensemblesinn*, dies erfüllen etwa > Sterne etwa oder > Blüten. Viele Papierfaltobjekte für Kinder aus der Literatur sind eher unter künstlerischen Gesichtspunkten ausgewählt.

So hat die Lehrerin Papierfaltobjekte gezielt auch unter dem zweiten Gesichtspunkt zu wählen, dem nämlich, daß sie auch hinsichtlich der Mathematik substantielle Arbeitsumgebungen konstituieren. Dies ist etwa dann der Fall, wenn bei den Faltkonstruktionen Symmetrie ein zentrales Herstellungsprinzip ist oder wenn räumliche Objekte erstellt werden oder Raumvorstellung wesentliche Voraussetzung für das Erstellen der Objekte ist. Sinnvoll sind Objekte, die durch symmetrisches Variieren von Grundformen entstehen, etwa > Blüten, oder die nur als symmetrische Objekte sinnhaft sind, etwa > Käfer oder die verschiedene Symmetrietypen zeigen, etwa > modulare Sterne, oder die ihre räumliche Struktur dadurch erhalten, daß sie aus verschiedenen Stücken zusammengesetzt werden, die man als *Module* bezeichnet, etwa > modulare Würfel.

Beide Sinngebungen verbindet etwa das Produktformat > *Faltbild*, bei dem ein gemaltes Bild erst durch ein eingeklebtes gefaltetes Motiv komplettiert

wird. Mehrere Faltbilder kann man mit oder ohne die Struktur einer Erzählung in einem > *Faltbilderbuch* zusammenfassen. Ein Produktformat, das Differenzieren und fächerübergreifendes Arbeiten ermöglicht und zudem eine Rhythmisierung der Faltaktivitäten im Jahresablauf, ist das kumulative Erstellen von > *Kalendern aus Faltbildern* mit Motiven passend zu den Jahreszeiten. Wie die Würfel entsteht auch dieser Kalender aus Modulen. Dieser letztgenannte Aspekt ist von besonderer Bedeutung: Objekte des *modularen Origami*, also zusammengesetzte Faltprodukte, sind ideal geeignet für das Lernen mit Partnern oder in kleinen oder größeren Gruppen, besonders dann, wenn aus Modulen von gleichem oder ähnlichem Typ verschiedene Objekte zu montieren sind. Dies ist beispielsweise für die Module der Fall, aus denen der > Sonobe-Würfel oder der > Kasahara-Würfel bestehen. Insbesondere unterstützen Arbeitsumgebungen zum modularem Origami das Arbeiten mit innerer Differenzierung.

Soviel zur Kennzeichnung sinnvoller Produkte zur Papierfaltgeometrie im Anfangsunterricht, nun betrachten wir *Werkzeuge*. Damit meinen wir nicht Schere oder Kleber, die traditionelles Origami ohnehin nicht kennt. Gemeint sind vielmehr *Meß- oder Vergleichswerkzeuge, die wieder aus Papier gefaltet werden* und beim Falten der Objekte etwa wie Zirkel, Lineal, Schablone oder Muster benützt werden.

Oft entsteht ein Papierfaltobjekt, indem man zunächst Linien zum Messen faltet und dann die gestaltenden Faltungen. Ein Werkzeug dazu entsteht nun, wenn nach einiger Routine die Meßlinien auf ein Hilfsblatt exportiert werden und das Objekt gefaltet wird, ohne diese Meßlinien zu tragen, wie dies bei einer gefalteten > Streckenteilung oder bei > modularen Würfeln mit völlig glatten Außenflächen der Fall ist. Solche Werkzeuge sind zweckbestimmt und haben zudem den didaktischen Nutzen, daß auch Prinzipien und Verfahren reflektiert werden, wie man sie herstellt.

Produkte und Werkzeuge allein sehen wir nicht als hinreichende Anlässe für ausgiebiges Befassen mit Papierfaltgeometrie im Mathematikunterricht. Ein Schwerpunkt sollte auf der *Reflexion des Konstruktionsprozesses* liegen. Dabei zeigt sich, daß ein wesentlicher Vorteil der Papierfaltgeometrie darin liegt, daß die *Kinder ihre Faltkonstruktionen auf elementare und kindgemäße Art artikulieren können*, so entstehen *Faltdokumente*.

Lässt man Kinder ein vorgegebenes Faltprodukt nachbauen, so sehen wir prinzipiell drei Möglichkeiten, dies zu starten. Die erste besteht im *Benutzen eines gedruckten Dokuments*. Es ist nach internationalen Regeln codiert: so erscheinen etwa Talfalten gestrichelt, Bergfalten gepunktet etc. Nicht nur bei komplizierten Objekten ist der Einstieg über ein solches Dokument oft erfolglos. Als weit erfolgreicher erwies sich in unseren Untersuchungen der *analytische Zugang*, bei dem die Kinder ein fertig gefaltetes Objekt als Vorlage erhalten, das sie nachbauen oder variieren sollen. Nach Erstellen des eigenen Objektes geben sie die Vorlage zurück. Beim analytischen Zugang arbeiten die Kinder zunächst *rückwärts faltend*, beim Erstellen ihres eigenen Objektes dann *vorwärts faltend*.

Besonders ergiebig allerdings ist nach unseren empirischen Untersuchungen die Aufgabe, ein *zweckbestimmtes, aber nicht standardisiertes Dokument* für andere anzufertigen, etwa eine Bauanleitung von Kindern für Kinder. Ein geschriebener Text mit Zeichnungen hat meist nicht den Erfolg, daß den Adressaten die Konstruktion damit gelingt. Als effizient erweisen sich vielmehr *Dokumente in Form eines > Faltbuches oder eines > Faltplakates*. Ein Faltbuch ist ein Dokument zum individuellen Benutzen, auf seinen Seiten sind aufeinanderfolgende Faltzustände eingeklebt. Textliche Ergänzungen können sein, sind aber nicht notwendig. Ein Faltplakat ist ein Dokument, das sowohl individuell als auch von einer Gruppe zu nutzen ist, denn alle dokumentierten Faltschritte sind simultan zu sehen. Auch hier sind Textergänzun-

gen oder Nummerierungen möglich aber nicht notwendig. *In der Aufgabe ein solches Dokument aus der Reflexion des eigenen Konstruierens für andere zu gestalten liegt die eigentliche Kreativitätsforderung in der Papierfaltgeometrie.* Das Herstellen eines Faltdokuments ist eine substantielle Arbeitsumgebung für den Mathematikunterricht, die nahezu alle Anforderungen einer handlungsorientierten kooperativen entdeckenden und konstruierenden Arbeitsform erfüllt. Diese Adressaten können gleichaltrige oder jüngeren Kindern sein. Ein Weg, ein solches Dokument herzustellen besteht darin, die Faltzustände zunächst in Papier zu realisieren und dann gemeinsam über die Auswahl und das Arrangement auf einem Plakatbogen begrenzter Größe zu diskutieren, bevor sie darauf fixiert werden.

Derzeit untersuchen wir mit qualitativen empirischen Verfahren das Herstellen solcher Faltplakate von Kindern und was die Rückmeldung der Kinder bewirkt, die das Objekt mit diesem Dokument nachzubauen versuchen. Die Faltplakate erweisen sich als *kindgemäße Konstruktionsbeschreibungen*, eine effiziente Form nonverbaler Texte, an die sich eine Versprachlichung und das Einführen von Fachausdrücken anschließen läßt. Eine besondere Form von Faltplakaten entsteht, wenn man den Kindern den Artikulationsraum gibt, das *Entstehen räumlicher Objekte* wie > Sonobe-Würfel auf einem *Plakat mit einer Folge von dreidimensionalen Teilbauten* darzustellen. Die so entstehenden > *3D-Plakate* gehören zu den effizientesten raumgeometrischen Konstruktionsbeschreibungen, die wir als Eigenproduktionen von Kindern überhaupt kennen.

Faltdokumente in Form von Faltplakaten insbesondere zeigen ähnlich einer concept map aber konsistenter im Arrangement der Schritte, ob geometrische Leitprinzipien wie Symmetrie oder Kongruenz oder Ähnlichkeit die Konstruktion bestimmen. Bereits bei Kindern im zweiten Schuljahr sind Symmetriekonzepte zu beobachten, und Kinder im dritten und vierten

Schuljahr zeigen in ihren Dokumenten, wie sie eine wachsende Raumvorstellung ihrer Adressaten zu unterstützen versuchen.

(Die mit > bezeichneten Objekte werden im Workshop vorgestellt.)

Literatur

Fusé, T. (1992): *Unit Origami, Multidimensional Transformations*.- Tokyo, New York: Japan Publications INC. 1992.2, 1990.1, ISBN 0-87040-852-6

Gibbs, W. (1994): *Polyhedra from A-sized Paper*.- Mathematics in School, September 1994

Macchi, P.; Scaburri, P. (1997): *Nuovi Origami*.- Milano: Giovanni De Vecchi Editore 1997, ISBN 88-412-4635-9

Müller, G.; Wittmann, E. Ch. (1995): *Das Zahlenbuch 3*.- Stuttgart: Klett 1995

Wollring, B. (1997): *"Man darf nicht immer gleich aufgeben, wenn's mal nicht klappt."* Mädchen und Jungen bauen gemeinsam Würfel aus gefaltetem Papier.- Sache-Wort-Zahl 25 (1997), Heft 7: "Junge und Mädchen", 25 – 39

Wollring, B. (2000): *Faltbilderbücher, Faltgeschichten und Faltbildkalender. Arbeitsumgebungen zur ebenen Papierfaltgeometrie für die Grundschule*. in: Grundschulzeitschrift 14(2000), H. 8 "Natürliche Geometrie", 26 – 47

wollring@mathematik.uni-kassel.de