

Stephanie Schmid & Silke Ruwisch

Entwicklungsschritte bei der Achsensymmetrie

Wie Herstellungsverfahren auf Vorkenntnissen aufbauen können

Achsensymmetrie stellt die für die Grundschule wichtigste Symmetrieart dar. Bei der Unterrichtsplanung müssen folgende zentrale Fragen geklärt werden: Welche Einsichten in die Achsensymmetrie sind fundamental für weitere Schritte im Kompetenzerwerb? Welche Lernvoraussetzungen müssen für diese Einsichten bereits gegeben sein? Die Entwicklungsschritte bei der Achsensymmetrie bieten hierzu eine Hilfestellung.

In Unterrichtsideen zur Achsensymmetrie findet man eine Vielzahl kreativer Anregungen. Dabei werden zur Herstellung und Überprüfung symmetrischer Figuren verschiedene Verfahren genutzt. So sollen symmetrische Figuren mit geometrischen Formen gelegt, durch Verfahren wie Kleksbilder und Faltschnitte erstellt oder auf Karopapier gezeichnet werden. Vorliegende Figuren wiederum sollen mit einem Spiegel oder durch Falten auf ihre Symmetrie oder die Anzahl ihrer Symmetrieachsen hin überprüft werden.

Der Aufbau von Grundvorstellungen gelingt jedoch nicht über die Aneignung eines größtmöglichen Repertoires zur Erstellung oder Überprüfung symmetrischer Figuren. Vielmehr ist bei der Unterrichts-

planung eine bewusste Auswahl geeigneter Herstellungs-/Prüfverfahren zu treffen. Dafür gilt es insbesondere zu überlegen, welche Erkenntnisse durch die jeweiligen Verfahren besonders gut erworben werden können und welche Lernvoraussetzungen für das erfolgreiche Nutzen des jeweiligen Verfahrens notwendig sind.

Schritt für Schritt zum Begriff „achsensymmetrisch“

Zur Beantwortung dieser Fragen bieten *Kirsches* (1996) Entwicklungsschritte zum Aufbau des Begriffsverständnisses der Achsensymmetrie eine Orientierung (vgl. Kasten „Hintergrundinformation“ auf S. 5). Jeder dieser Schritte beinhaltet eine we-

sentliche Eigenschaft als anzustrebende Erkenntnis und wird mit darauf aufbauenden Herstellungs- und Prüfverfahren verknüpft.

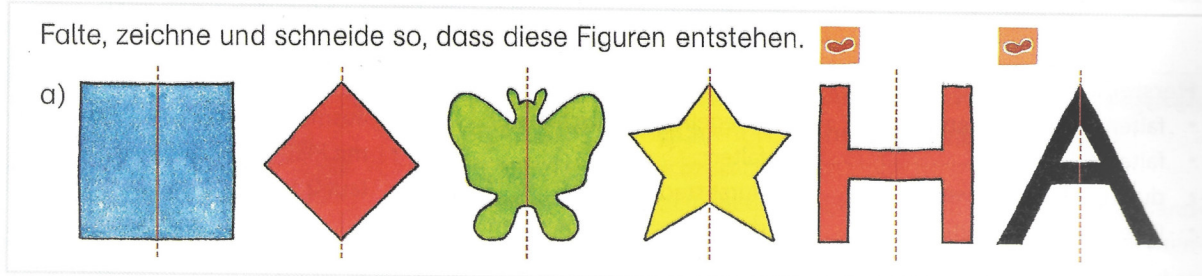
Die Notwendigkeit, die aufgeführten Voraussetzungen bei der Unterrichtsplanung zu berücksichtigen, soll an zwei Beispielen konkretisiert werden. Dabei werden auch die besonderen Chancen des Erkenntnisgewinns für die Schülerinnen und Schüler deutlich.

Falten und schneiden

Faltschnitte sind ein verbreitetes Verfahren zur Herstellung achsensymmetrischer Figuren.

Schon Kindergartenkinder können die erforderlichen Handlungs-

Abb. 1: Gezieltes Herstellen symmetrischer Figuren durch Falten und Schneiden



Die Entwicklung des Begriffsverständnisses der Achsensymmetrie

1. Entwicklungsschritt

- *Ausgangspunkt:* Figuren werden als Ganzes betrachtet und „per Augenschein“ als symmetrisch oder unsymmetrisch wahrgenommen (ohne, dass diese Begriffe bereits bekannt sein müssen).
- *Erkenntnis:* Achsensymmetrische Figuren bestehen aus zwei gleichen Hälften, die sich bzgl. einer Geraden (der Symmetrieachse) genau gegenüber liegen.
- *vertiefende Prüfverfahren* (z. B. Aufeinanderfalten, Spiegeln)
- *Eigenschaftsbegriff:* Achsensymmetrische Figuren sind Figuren, die aus spiegelsymmetrisch angeordneten Teilen bestehen.

2. Entwicklungsschritt

- *Ausgangspunkt:* Herstellungsverfahren, die auf dem 1. Entwicklungsschritt basieren (z. B. Faltschnitte, Falten und Durchpausen, Klecksbilder)
- *Erkenntnis:* Markante Punkte beider Hälften liegen zusammengefoldet genau aufeinander und sind somit gleich weit von der Faltkante (Symmetrieachse) entfernt.
- *vertiefende Prüfverfahren* (z. B. Falten und Durchstechen, Falten mit Transparentpapier, Messen)
- *Eigenschaftsbegriff:* Achsensymmetrische Figuren sind Figuren, bei denen entsprechende Punkte beider Hälften (Punkt und Bildpunkt) den gleichen Abstand zur Symmetrieachse haben.

3. Entwicklungsschritt

- *Ausgangspunkt:* Herstellungsverfahren, die auf dem 2. Entwicklungsschritt basieren (z. B. ergänzendes Zeichnen auf Karopapier, Spannen von Figuren auf dem Geobrett)
- *Erkenntnis:* Damit die Lage der Punkte beider Hälften spiegelbildlich zueinander passt, müssen diese auf einer Senkrechten zur Symmetrieachse liegen.
- *vertiefende Prüfverfahren:* Lageüberprüfung mittels Geodreieck (vereinfacht ggf. auch über dahinterliegendes Karopapier)
- *Eigenschaftsbegriff:* Achsensymmetrische Figuren sind Figuren, bei denen entsprechende Punkte beider Hälften (Punkt und Bildpunkt) im gleichen Abstand auf einer Senkrechten zur Symmetrieachse liegen.

Ausblick auf weitere Entwicklungsschritte

- *Ausgangspunkt* (am Ende der Grundschule): Herstellungsverfahren, die auf dem 3. Entwicklungsschritt basieren (z. B. Zeichnen mit dem Geodreieck)
Zentral ist vor allem die Einsicht in die Auffassung der Achsenspiegelung als Kongruenzabbildung der Ebene auf sich und spätestens damit auch einer beidseitig möglichen Spiegelung aller Punkte der Ebene.

metrieachse entfernt sein müssen. Diese Einsicht wird beim Falten und Schneiden durch das erneute Zusammenfalten und die Fokussierung auf hervorstechende Punkte erkennbar und kann nachmessend überprüft werden. So zeigt sich der enge Zusammenhang zu den Prüfverfahren als „Kontrolle der Gültigkeit einer vermuteten Eigenschaft“ und weiterführend als „Werkzeug der Überprüfung bekannter Eigenschaften“.

Zeichnen auf Karopapier

Das Zeichnen auf Karopapier ist ein Verfahren, das nicht zuletzt aufgrund seiner praktikablen Umsetzung auf dem Papier ein beliebtes Aufgabenformat darstellt. Im Unterschied zu anderen Herstellungsverfahren werden dabei häufig nur Teile der achsensymmetrischen Figur ergänzt und somit selbst hergestellt.

Als Voraussetzung sollten die Kinder die ersten beiden Entwicklungs-

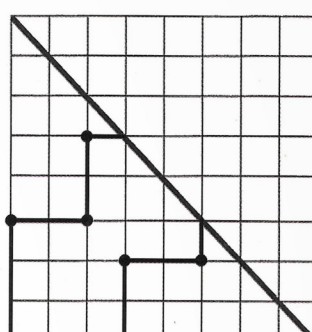
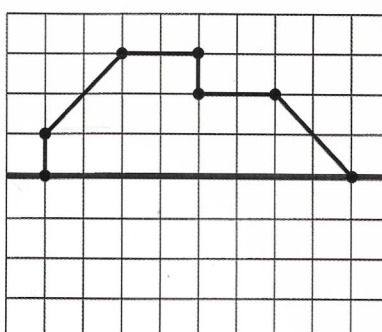
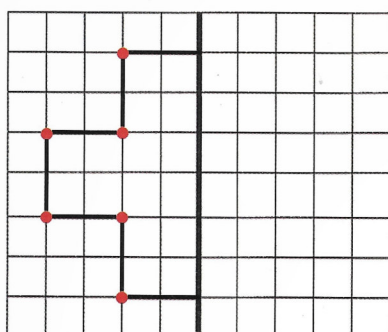
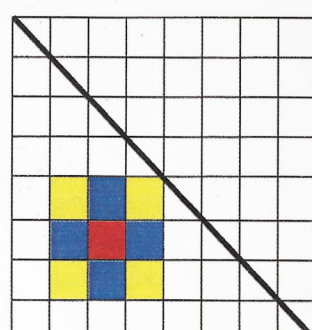
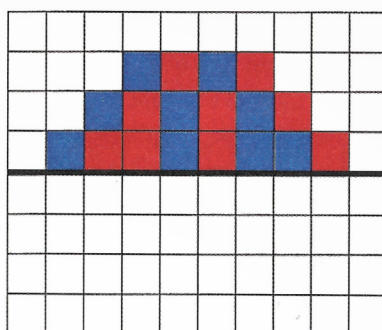
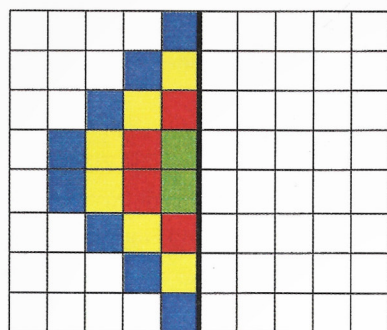
schritte nachmachen. Doch zu einem verständigen Herstellungsverfahren (vgl. Abb. 1) für achsensymmetrische Figuren gelangt ein Kind erst, wenn es weiß, dass achsensymmetrische Figuren zwei gleiche Hälften erfordern, die „sich gegenüber liegen“ (Erkenntnis im 1. Entwicklungsschritt).

Angenommen, diese Voraussetzung liegt noch nicht vor, dann könnten die Schülerinnen und Schüler dennoch entsprechende Figuren nach Anleitung falten und schneiden. Sie könnten diese hinterher auch auf gemeinsame Eigenschaften untersuchen und mit dem Begriff „symmetrisch“ verknüpfen. Das Verfahren hätte dann jedoch die eingeschränkte Funktion Produkte herzustellen, mithilfe derer Achsensymmetrie im Rahmen einer ersten Erkenntnis definiert werden kann. In dem Fall ist fraglich, für welchen Lernfortschritt der Herstellungsprozess selbst umgesetzt wird.

Verfügen die Kinder dagegen bereits über die Erkenntnis der ersten Entwicklungsstufe, erhält das Verfahren eine andere Bedeutung für den Lernprozess. Die Kinder können direkt nachvollziehen, warum das Papier zur Herstellung symmetrischer Figuren gefaltet wird (Herstellung der notwendigen Geraden) und zwei (deckungs-)gleiche Formen ausgeschnitten werden (Herstellung gleicher anliegender Hälften). Mit dieser Grundlage können dann auch vertiefende Fragestellungen, z. B. „Was passiert, wenn ich einen Abstand zur Kante lasse?“ oder „Was passiert, wenn ich mehrfach falte?“, gewinnbringend verfolgt werden. Es kann zu einer gezielten Vertiefung der ersten Erkenntnis als Eigenschaft der Achsensymmetrie kommen.

Ein Blick auf die Erkenntnis des zweiten Entwicklungsschritts zeigt, dass im Folgenden darauf hingearbeitet werden sollte, dass markante Punkte beider Hälften zusammengefoldet genau aufeinander liegen und daher gleich weit von der Sym-

Abb. 2:
Mögliche Auf-
gabenstellungen
zum Zeichnen
achsensymme-
trischer Figuren
auf Karopapier



schritte bewältigt haben. Sie sollten verstanden haben, dass achsensymmetrische Figuren aus zwei gleichen gegenüberliegenden Hälften bestehen und dass entsprechende Punkte beider Hälften gleich weit von der Symmetrieachse entfernt liegen. Ähnlich wie beim Falten und Schneiden kann das Herstellungsverfahren ohne diese beiden Voraussetzungen weder verstanden noch für den Erkenntnisprozess genutzt werden.

Schülerinnen und Schüler, die bereits eine Vorstellung davon haben, wie eine symmetrische Figur im Ganzen aussehen müsste, könnten versuchen, zwei optisch gleich aussehende Hälften zu zeichnen. Dies wird je nach Komplexität der Figur zu eher ungenauen Ergebnissen führen. Liegt diese Erkenntnis soweit vertieft vor, dass unter „gleichen Hälften“ auch bewusst gleich lange Seiten verstanden werden, ist es möglich, die jeweiligen Seitenlängen durch Abzählen der Kästchen zu ermitteln. Spätestens jedoch, wenn einige Seiten diagonal verlaufen oder die Figuren aus unverbundenen Teilelementen bestehen, werden sich bei diesem Vorgehen Schwierigkeiten in der genauen

Positionierung der Diagonalen bzw. der Teilelemente zeigen.

Mit zunehmender Komplexität der Figur wird es daher notwendig, sich an markanten Punkten der Figur zu orientieren und den gleichen Abstand sich entsprechender Punkte zur Symmetrieachse für die Vollständigkeit zu nutzen (s. Abb. 2).

Wie das Falten und Schneiden dient auch das Herstellungsverfahren „Zeichnen auf Karopapier“ bei erfüllten Voraussetzungen der konkreten Anwendung und Vertiefung der Eigenschaften. Beziehungen zwischen den Teilen der Figur und der Symmetrieachse bzw. den Symmetrieachsen können erkannt werden, z. B. „Wie liegen fehlende Teile der Figur, wenn die Symmetrieachse diagonal liegt?“ Auch Auswirkungen von Veränderungen lassen sich thematisieren, z. B. „Was passiert mit der Figur, wenn ich die Symmetrieachse um ein Kästchen verschiebe?“

Der weiterführende Entwicklungsschritt besteht dann darin, zu verstehen, dass die sich entsprechenden Punkte beider Hälften auf einer Senkrechten zur Symmetrieachse liegen (3. Erkenntnis). Diese Einsicht erfolgt

nicht zwangsläufig, da die Symmetrieachsen in den Aufgaben häufig genau auf einer Kästchenlinie liegen. Sie kann aber durch diagonale Symmetrieachsen gezielt angeregt und zum Beispiel mit dem Geodreieck überprüft werden.

Zusammenfassung

In Bezug auf den Unterricht ist es zusammenfassend wesentlich, die ausgewählten Verfahren im stattfindenden Begriffsentwicklungsprozess bewusst zu verorten und so immer wieder Voraussetzungen zu schaffen, auf denen das Begriffsverständnis weiterführend aufbauen kann. Abhängig von diesen Entscheidungen werden Einsichten in die Eigenschaften der Achsensymmetrie verhindert oder ermöglicht und dementsprechend unterschiedliche Lernergebnisse erzielt werden.

Literatur

Kirsche, Peter: Zum Herstellen spiegelsymmetrischer und punktsymmetrischer Figuren im Unterricht der Primarstufe. In: Der Mathematikunterricht, Heft 2/1996, S. 5–13.