



Anforderungen bei der Achsenspiegelung – Ein empirisch gestütztes Kategorienschema

Daniela Götz  · Hedwig Gasteiger

Eingegangen: 12. Juli 2018 / Angenommen: 11. Juli 2019 / Online publiziert: 29. Juli 2019
© GDM 2019

Zusammenfassung Aus bisherigen Studien zur Achsenspiegelung sind bereits einige Merkmale bekannt, die die Schwierigkeit von Aufgaben zur Achsenspiegelung beeinflussen. Diese Erkenntnisse sind jedoch eher punktuell und erlauben keine systematischen Aussagen zu einer Abstufung einzelner Schwierigkeiten bei Aufgaben zur Achsenspiegelung. Dieser Beitrag nimmt die vorliegenden empirischen Erkenntnisse als Ausgangspunkt für eine systematische Aufgabenanalyse, mit dem Ziel, Anforderungen bei der Achsenspiegelung im Unterricht der Grundschule zu identifizieren und zu präzisieren. Dazu wird eine Stichprobe aus Erprobungsstudien der bundesweiten Vergleichsarbeiten (durchgeführt durch das Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen) in Jahrgangsstufe 3 genutzt. Die Basis für eine fundierte inhaltliche Analyse schwierigkeitsgenerierender Merkmale bilden 37 raschskalierte Aufgaben zur Achsenspiegelung mit jeweils ca. 250 Bearbeitungen pro Aufgabe. Der Abgleich von psychometrisch erfassten Aufgabenschwierigkeiten mit inhaltlich fachdidaktischen Analysen und theoretischen Erkenntnissen zur Achsenspiegelung führt zu einem Kategorienschema mit unterschiedlichen schwierigkeitsgenerierenden Merkmalen bei Aufgaben zur Achsenspiegelung und deren Ausprägungen. Dieses Kategorienschema kann hilfreich sein, gezielt Aufgaben zur Achsenspiegelung zu entwickeln und es kann auch förderdiagnostisch genutzt werden.

Schlüsselwörter Geometrie · Achsenspiegelung · Klassifikation von Aufgaben · Schwierigkeitsgenerierende Merkmale · Grundschule

D. Götz (✉) · H. Gasteiger
Universität Osnabrück, Albrechtstraße 28A, 49076 Osnabrück, Deutschland
E-Mail: daniela.goetz@uni-osnabrueck.de

H. Gasteiger
E-Mail: hedwig.gasteiger@uni-osnabrueck.de

MESC-Codes B10 · D32 · G52 · G12

Difficulty-generating Characteristics of Reflection Items—an Empirical and Task-based Category Scheme

Abstract Studies on different single reflection tasks identified characteristics of reflection items influencing the solution rates. Even if the analysis of those studies provides information on typical errors of children on reflection items, detailed conclusions on difficulty-generating characteristics of reflection items in primary school mathematics cannot be drawn. By systematically developing further items on the basis of these studies, this article aims to refine facets of complexity on reflection tasks. A sample of 37 items—each solved by approximately 250 pupils in 3rd grade—taken out from nationwide tests in Germany was therefore analyzed. A profound content analysis of reflection tasks (Rasch scaled) was used to enlarge findings on typical characteristics influencing demands for solving reflection tasks. Thereby the psychometric scaled difficulty of tasks will be combined with content-related didactical analyses to generate a categorical scheme on specific characteristics of reflection items. This scheme offers a detailed description of complexity characteristics for reflections at primary school age.

Keywords Geometry · Reflection · Difficulty-generating characteristics · Primary education · Classification of tasks

1 Einleitung

Im Mathematikunterricht wird die Geometrie gern als „freudvolle Abwechslung“ (Franke und Reinhold 2016, S. 5) gesehen, wobei geometrische Lernziele und eine systematische Vernetzung geometrischer und arithmetischer Inhalte häufig in den Hintergrund treten. In der Konsequenz wird die Entwicklung geometrischer Fähigkeiten im Unterricht weniger systematisch verfolgt als die Entwicklung arithmetischer Fähigkeiten (Franke und Reinhold 2016; Wittmann 1999). Ein möglicher Grund für diese mangelnde Systematik im Unterricht der Geometrie könnte auch sein, dass einzelne geometrische Inhalte im Vergleich zu arithmetischen Inhalten noch wenig beforscht sind (Deutscher 2012, S. 2). In manchen Inhaltsbereichen gibt es durchaus Erkenntnisse und Theorien zum Aufbau geometrischen Wissens bzw. zur Entwicklung geometrischer Fähigkeiten. So gibt es z. B. umfangreiche Beschreibungen zu Stufen der Entwicklung des Begriffsverständnisses (van Hiele und van Hiele-Geldorf 1978; Vollrath 1984) oder zur Entwicklung der Raumvorstellung (u. a. Piaget und Inhelder 1971; Sodian 2012; Zur Oeveste 1987). Des Weiteren liegen in der Forschung Detailkenntnisse zu einzelnen Inhaltsbereichen wie z. B. der Symmetrie (bspw. Bornstein und Stiles-Davis 1984; Genkins 1978; Kirsche 1992; Schmidt 1986), Würfelkonfigurationen (bspw. Ben-Haim et al. 1985; Merschmeyer-Brüwer 1999, 2002; Reinhold 2007) oder der Achsenspiegelung (bspw. Denys und Grenier 1986; Grenier 1985a; Küchemann 1981; Schmidt 1986) vor. Dennoch fehlen in vielen geometrischen Inhaltsbereichen systematische Erkenntnisse, die die

Anforderungen der Inhalte möglichst kontinuierlich beschreiben und Hinweise darauf geben können, wie mathematische Fähigkeiten in den jeweiligen Bereichen weiterentwickelt werden können.

Ein Inhaltsbereich, in dem schon einige empirische Erkenntnisse vorliegen, ist die Achsensymmetrie bzw. Achsenspiegelung. Hierunter fallen sowohl qualitative Untersuchungen, die sich mit der Analyse des Vorgehens von Schülerinnen und Schülern bei der Achsenspiegelung beschäftigen (Grenier 1985b; Höglinger und Senftleben 1997; Kurina et al. 1998), als auch größer angelegte und quantitativ ausgewertete Studien (Grenier 1985a; Küchemann 1981; Schmidt 1986). Eine kontinuierliche Beschreibung, welche Merkmale Aufgaben schwierig bzw. leicht machen und somit eine hohe bzw. niedrige Anforderung darstellen, liegt durch die vorliegenden Erkenntnisse nicht vor. Dennoch können diese Kenntnisse eine gute Ausgangsbasis für eine detailliertere inhaltliche Analyse von Anforderungen in Aufgabenstellungen sein und als Basis für eine Systematisierung dieser Anforderungen dienen.

Eine Systematisierung der Anforderungen könnte wiederum dazu beitragen, einen anschlussfähigen Wissensaufbau im Sinne der Berücksichtigung der jeweils nächsten Entwicklungsstufe in den Blick zu nehmen. Ebenso könnte dadurch eine zielorientiertere individuelle Förderung mathematischer beziehungsweise geometrischer Fähigkeiten im Unterricht gelingen.

Um für eine derartige Systematisierung ebendiese Merkmale herauszuarbeiten, die in ihren unterschiedlichen Ausprägungen die Schwierigkeit von Aufgaben beeinflussen, kann man sich am Vorgehen der Kompetenzmodellierung orientieren, wie sie z. B. bei der Überprüfung der Bildungsstandards oder bei zentralen Vergleichsarbeiten zum Tragen kommt. Dabei werden Aufgaben entwickelt und theoretisch bezüglich ihrer Schwierigkeit eingeschätzt. In der anschließenden Skalierung werden alle Aufgaben auf einer Schwierigkeitsskala angeordnet. Ebenso lassen sich die Testpersonen auf dieser Skala anordnen und somit kann auch von einer Stufung bezüglich der Personenfähigkeiten ausgegangen werden. Ob eine zuvor theoretisch eingeschätzte Schwierigkeit einer Aufgabe tatsächlich vorliegt, kann somit überprüft werden; Aufgaben können so bezüglich ihrer Schwierigkeiten und Merkmale miteinander in Beziehung gesetzt werden. Die Möglichkeit, Aufgabenschwierigkeiten auf dieser Basis zu analysieren, wird in diesem Beitrag genutzt.

In der hier vorgestellten Studie wurden auf Basis theoretischer und empirischer Erkenntnisse zur Achsenspiegelung Aufgaben durch systematische Merkmalsvariation so entwickelt, dass sie das Schwierigkeitsspektrum von geringen bis hin zu hohen Anforderungen bei der Achsenspiegelung abdecken. Eine fundierte Analyse und das Inbeziehungsetzen der ausgewerteten und auf einer Rasch-Skala nach Schwierigkeiten angeordneten Aufgaben führt zu einer systematischen Beschreibung von Merkmalen, die die Schwierigkeit von Aufgaben zur Achsenspiegelung auf den jeweiligen Niveaus beeinflussen. Dazu wird am Ende des Beitrags eine verallgemeinerte Darstellung dieser Merkmale und ihrer Ausprägungen präsentiert und zur Diskussion gestellt.

2 Einordnung des Themenbereichs

Um einen verständnisvollen Umgang mit Figuren in der Ebene zu erreichen, ist es wichtig das Verhalten dieser Figuren bei umkehrbaren Abbildungen auf sich selbst zu betrachten (Scheid und Schwarz 2017). Ist dieses Verständnis erreicht, kann es bei der Untersuchung von Figuren bezüglich deren Eigenschaften, bei der Definition von Begriffen, beim Beweisen von Sätzen und bei der Konstruktion von Figuren unterstützen (Scheid und Schwarz 2017, S. 125). Kongruenzabbildungen beschreiben Abbildungen der Ebene, die längen- und winkeltreu sind. In der Ebene werden vier Typen von Kongruenzabbildungen unterschieden: Achsenspiegelung, Drehung, Verschiebung und Schubspiegelung. Der Dreispiegelungssatz beschreibt den Zusammenhang dieser Abbildungen und die Sonderrolle der Achsensymmetrie dabei: Jede Kongruenzabbildung der Ebene kann durch eine Verkettung von Achsenspiegelungen dargestellt werden. Beim Aufbau eines grundlegenden Verständnisses von Abbildungen in der Ebene steht somit die Achsenspiegelung im Zentrum und ist auch in der Schule von besonderer Bedeutung. Über spezielle Aufgabenstellungen mit Spiegelungen an mehreren Achsen können bereits propädeutisch in der Grundschule Erfahrungen zu anderen Symmetrien gesammelt werden – auch, wenn im Unterricht der Grundschule nur die Achsenspiegelung thematisiert wird und nationale Bildungsstandards und Curricula lediglich verpflichtende Angaben zur Achsensymmetrie machen: Das Erkennen von Symmetrie als Eigenschaft einer Figur und das Beschreiben und Nutzen von Eigenschaften der Achsensymmetrie werden als wichtige Kompetenzen beschrieben, die am Ende der Grundschulzeit erreicht werden sollen (Kultusministerkonferenz 2005, S. 10). Im Unterricht beschreiben Schülerinnen und Schüler am Ende der vierten Klasse Eigenschaften der Achsensymmetrie und stellen achsensymmetrische Figuren her, ebenso bestimmen sie die Anzahl der Symmetrieachsen einer regelmäßigen Figur (z. B. Niedersächsisches Kultusministerium 2017).

Die Erarbeitung des Symmetriebegriffes erfolgt in der Grundschule über das Analysieren und das Herstellen symmetrischer Figuren (Franke und Reinhold 2016, S. 269 ff.). Durch das Analysieren werden Eigenschaften symmetrischer Figuren entdeckt. Beim Herstellen von Figuren und deren Analyse verlagert sich der Schwerpunkt nach und nach von der Achsensymmetrie zur Achsenspiegelung (Kirsche 1996). Dabei wird zunächst über konkret-kinematische Herstellungsverfahren (z. B. Falten) und zeichnerisch-kinematische Verfahren (z. B. Falten – Durchstechen und Wenden) ein grundlegendes Begriffsverständnis zur Achsensymmetrie aufgebaut (Kirsche 1992, 1996). Die Eigenschaft „Symmetrie“ der Figur steht dabei im Mittelpunkt. Davon ausgehend werden über Kongruenzabbildungen Konstruktionsmöglichkeiten symmetrischer Figuren erarbeitet. Anhand der Herstellungsverfahren wird vor allem das Zerfallen in deckungsgleiche Figuren bzw. Teilfiguren und die Lage der Symmetrieachse erarbeitet. Daran anschließend werden auch zeichnerisch-konstruktiv Achsenspiegelungen durchgeführt. Eigenschaften der Achsenspiegelung als Kongruenzabbildung werden anhand von Herstellungsverfahren wie bspw. Spiegeln im Gitternetz oder mit Hilfe des Geodreiecks erarbeitet.

Schülerinnen und Schüler erfahren während dieses Begriffsbildungsprozesses, dass eine Figur dann symmetrisch ist, wenn sie durch eine nichtidentische Kon-

gruenzabbildung auf sich selbst abgebildet werden kann. In diesem Beitrag wird der Fokus auf die Kongruenzabbildung des Spiegeln an einer Achse in der Ebene als eine propädeutisch zentrale Teilfähigkeit des Symmetrieverständnisses für den Unterricht der Grundschule gelegt.

Im folgenden Abschnitt werden zunächst Studien vorgestellt, die die Symmetrie als Eigenschaft einer Figur betrachten. Anschließend werden Forschungsergebnisse zu Achsenspiegelungen konkret in der Grundschule berichtet. Bei allen der angesprochenen Untersuchungen und auch im später dargelegten Forschungsteil handelt es sich ausschließlich um Symmetrien in der Ebene, da sich diese aufgrund der geringeren Anforderung an das räumliche Vorstellungsvermögen für einen Zugang in den ersten Schuljahren anbieten.

3 Forschungsergebnisse zu Achsensymmetrie und Achsenspiegelungen

Untersuchungen zum Symmetrieverständnis fokussieren verschiedene Aspekte. Zunächst wird auf Studien eingegangen, die das Erkennen der Eigenschaft „Symmetrie von Figuren“ untersuchen. Im Anschluss wird genauer auf Studien eingegangen, die sich mit dem zeichnerisch-konstruktiven Durchführen von Achsenspiegelungen und dem Einzeichnen von Spiegelaachsen beschäftigen.

Studien, die sich mit dem Erkennen symmetrischer Figuren befassen, nehmen häufig Fragestellungen in den Fokus, die sich auf Unterschiede im Erkennen verschiedener achsensymmetrischer Figuren (z.B. bezogen auf die Lage der Achse) oder das Unterscheiden symmetrischer Figuren von nicht-symmetrischen Figuren beziehen. Kinder im Vorschulalter unterscheiden bereits symmetrische von nicht-symmetrischen Figuren. Dabei unterscheiden sie vertikal-symmetrische leichter als horizontal-symmetrische Figuren von nicht-symmetrischen Figuren. Die Unterscheidung diagonal-symmetrischer Figuren¹ von nicht-symmetrischen Figuren fällt Kindern im Vorschulalter am schwersten (Bornstein und Stiles-Davis 1984). Aus drei Experimenten mit 4- bis 6-jährigen Kindern folgern Bornstein und Stiles-Davis (1984), dass der erste Schritt bei der Entwicklung eines Symmetrieverständnisses das Erkennen vertikaler Symmetrien ist, gefolgt vom Erkennen horizontaler Symmetrien. Zuletzt werden Figuren, die eine schräge Symmetrieachse (vgl. Fußnote 1) haben, von nicht-symmetrischen Figuren unterschieden. Zusätzlich zu diesen Erkenntnissen stellen Bornstein und Stiles-Davis (1984) fest, dass die Komplexität der Figur bzw. eines Musters eine Rolle dabei spielt, ob die Figur als „symmetrisch“ erkannt wird: „pattern type interacts with symmetry perception developmentally. Older children who discriminated all orientations of symmetry with one type of pattern encounter orientation-selective difficulty with another, more complex type of pattern.“ (Bornstein und Stiles-Davis 1984, S. 642)

Die Veränderung der Komplexität der Figur (*pattern type*) kann also neben der Lage der Symmetrieachse der Figur (vertikal, horizontal, schräg) einen Einfluss auf die Korrektheit der Bearbeitungen der Kinder beim Erkennen von Symmetrien

¹ Diese Figuren sind durch das Rotieren der vertikalen Achse (0°) um 45 Grad entstanden.

haben und somit die Schwierigkeit dieser Aufgaben zum Erkennen von Symmetrien beeinflussen.

Bei der Schilderung der Ergebnisse von Studien zum zeichnerisch-konstruktiven Durchführen von Spiegelungen an *einer* Symmetrieachse werden im Folgenden zwei Konzepte unterschieden: Achsenspiegelungen, die zu einer symmetrischen Figur führen, und Achsenspiegelungen, die zu zwei kongruenten Figuren führen. Die dazu betrachteten Studien beziehen sich immer auf das Durchführen von Spiegelungen von einer Seite der Achse auf die andere. Schulanfänger und Schulanfängerinnen sind bereits in der Lage, Figuren durch Freihandzeichnungen an einer Achse zu symmetrischen Figuren zu vervollständigen (Höglinger und Senftleben 1997). Die Autoren ließen 50 Kinder die unvollständigen Bilder eines Herzens, Dreiecks, Sternes und einer Leiter ergänzen. Dabei waren die Kinder bei Herz und Dreieck zu 70 % und bei Leiter und Stern zu 25 % erfolgreich. Auffällige Schwierigkeiten der Kinder bei der Vervollständigung der Figuren identifizieren Höglinger und Senftleben (1997), wenn die entstehende Gesamtfigur nicht erkannt oder nicht im Kopf vollendet werden kann (ähnliche Ergebnisse auch bei Kurina et al. (1998) (ebenso Freihandzeichnungen)). Zudem zeigte sich, dass die Wiedergabe von Details der Figur (z. B. die Zacken eines Sternes) als spezielle Schwierigkeit zu sehen ist. Schülerinnen und Schüler am Ende von Jahrgangsstufe 4 bearbeiteten in einer Studie von Schmidt (1986) Aufgaben zur symmetrischen Ergänzung von Teilfiguren an vertikalen und horizontalen Achsen im Gitternetz. Auch bei dieser Erhebung mit $N=2917$ Viertklässlerinnen und Viertklässlern waren bei Aufgaben mit vertikaler Spiegelachse 79,8 % der Schülerinnen und Schüler erfolgreich, Aufgaben mit horizontaler Spiegelachse lösten jedoch nur 60,8 % aller Kinder richtig (Schmidt 1986).

Studien, die sich mit Achsenspiegelungen beschäftigen, die eine Figur so abbilden, dass zwei kongruente Figuren entstehen, liegen vor allem für Schülerinnen und Schüler im Alter von 11–15 Jahren vor. Sowohl Küchemann (1981) als auch Grenier (1985a, 1985b) variierten Aufgaben zur Achsenspiegelung systematisch. In der Untersuchung von Küchemann (1981) bearbeiteten circa 1000 Schülerinnen und Schüler in einem Paper-Pencil-Test Aufgaben zur Achsenspiegelung von Punkten, Strecken und Fahnen – teils frei Hand (Abb. 1a, b), teils mit Hilfe eines Lineals (Abb. 1c, d).

Küchemann (1981) variierte vor allem drei Aufgabenmerkmale (vgl. Abb. 1): die Ausrichtung der Achse (vertikal, horizontal oder schräge Achse), die Lage der Figur (vgl. z. B. Abb. 1: c und d mit unterschiedlicher Lage) und die Komplexi-

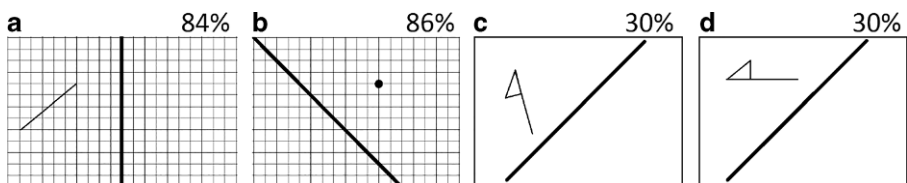


Abb. 1 Lösungshäufigkeiten der 14-jährigen Schülerinnen und Schüler bei der systematischen Variation von Aufgaben bei Küchemann (1981). (Eigene Abbildung)

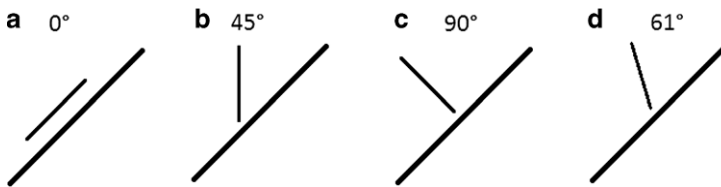


Abb. 2 Systematische Aufgabenvariation bezüglich des Winkels Figur-Achse bei Grenier (1985a). (Eigene Abbildung)

tät des Objektes (Punkte, Strecken oder Fahnen).² Aufgaben zur Spiegelung von Strecken in verschiedenen Variationen verwendete auch Grenier (1985a, 1985b). In einer qualitativen Untersuchung (Grenier 1985b) wurden sechs Schülerpaare im Alter von 13–14 Jahren bei der Bearbeitung von Aufgaben zur Achsenspiegelung beobachtet. Der Fokus lag auf dem Lösungsprozess der Kinder beim Bearbeiten der Aufgabenstellung, welche die zeichnerisch-konstruktive Spiegelung von Punkten und Strecken forderte. In einer weiteren, größer angelegten Studie ($N=650$) (Grenier 1985a) wurden verschiedene Aufgaben zur Achsenspiegelung entworfen. Grenier (1985a) variierte ebenfalls die Lage der Achse (vgl. Küchemann 1981), die Lage der Figur und auch die Art des verwendeten Papiers (Kästchenpapier oder Blankopapier). Zusätzlich variierte sie den Winkel Figur-Achse. Neben den Winkeln 11° , 29° , 61° und 79° verwendete sie auch die „speziellen Winkel“ 0° , 45° und 90° (Grenier 1985a) (vgl. Abb. 2). Schülerinnen und Schüler im Alter von 11–14 Jahren bearbeiteten je 24 unterschiedliche Aufgaben.

Bei allen drei Studien ließen sich Merkmale der Aufgabenstellung feststellen, die offensichtlich Einfluss auf die Schwierigkeit der Aufgabe haben. Auch bei den Aufgaben zu Spiegelungen, die zu zwei kongruenten Figuren führen, wird die Lösungshäufigkeit einer Aufgabe in erster Linie von der Lage der Achse beeinflusst (vgl. Studien von Grenier 1985a; Küchemann 1981; Schmidt 1986). Aufgaben zu Spiegelungen an vertikalen Achsen haben die besten Lösungsquoten, gefolgt von Aufgaben zu Spiegelungen an horizontalen Achsen. Die Spiegelung an schrägen Achsen (hier 45°) fällt Schülerinnen und Schülern im Alter von 11–15 Jahren am schwersten (Grenier 1985a, 1985b; Küchemann 1981). Des Weiteren spielt die Komplexität des Objektes eine Rolle: Aufgaben zur Spiegelung von Punkten werden von weit mehr Schülerinnen und Schülern richtig gelöst als Aufgaben, die die Spiegelung von Strecken verlangen. Aufgaben zur Spiegelung von Fahnen werden von den wenigsten Schülerinnen und Schülern richtig gelöst (Küchemann 1981). Mögliche Erklärungen für diese Ergebnisse wären, dass bei der Spiegelung eines Punktes nur die Orthogonalität und der Abstand der Figur zur Achse berücksichtigt werden müssen; eine Spiegelung und eine Verschiebung des Punktes über die Achse führen zum gleichen (richtigen) Ergebnis. Dagegen führen die Spiegelung und Verschiebung einer Strecke (die nicht parallel oder orthogonal verläuft) nicht zum gleichen Ergebnis. Dies gilt auch für die Spiegelung einer Fahne. Selbst, wenn diese parallel

² Küchemann (1981) unterscheidet bei der Komplexität des Objektes Punkte, Strecken und Fahnen, ohne diese Wahl weiter auszuführen.

oder orthogonal zur Achse verläuft, führen Spiegelung und Verschiebung nicht zum gleichen Ergebnis.

Küchemann (1981) beschreibt als eine Schwierigkeit für Schülerinnen und Schüler bei Aufgaben zur Achsenspiegelung das Beibehalten von Winkeln. Zwar müssen bei der Spiegelung einer Figur an einer Achse immer Winkel beachtet und beibehalten werden, jedoch stellen sich einige Aufgaben als kognitiv anspruchsvoller als andere heraus. Nach Küchemann (1981) erfordern diese Aufgaben besonders die Berücksichtigung einer Neigung im Sinne einer Abweichung von der Vertikalen. Dabei kann es sich um eine Neigung des zu spiegelnden Objektes abweichend von der Vertikalen (vgl. Abb. 1a) oder um eine Neigung der Achse (vgl. Abb. 1b) handeln (Küchemann 1981). Als besonders schwierig stellten sich Aufgaben heraus, bei deren Lösung zwei Neigungen (abweichend von der Vertikalen) beachtet, also koordiniert, werden müssen. Während die Aufgaben A1 zu 84 % und A2 zu 86 % (vgl. Abb. 1) richtig gelöst wurden, wurden die Aufgaben A3 und A4 (vgl. Abb. 1) von den 14-Jährigen zu jeweils nur 30 % richtig gelöst. Nach Küchemann (1981) können die Aufgabenbeispiele A1 und A2 mit der Vorstellung, dass eine Spiegelung das Objekt unmittelbar auf die andere Seite der Spiegelachse bringt, gelöst werden (Küchemann 1981, S. 145). Die Aufgaben A und C (Abb. 2) erfordern ebenso keine Winkelkoordination. Die Aufgaben B und D (Abb. 2) und die Aufgaben A3 und A4 (Abb. 1) erfordern nach Küchemann die Koordination zweier Neigungen, da sowohl das Objekt als auch die Achse geneigt sind. Müssen in einer Aufgabe Winkel auf diese Weise konserviert und übertragen werden, so hat die Aufgabe eine niedrigere Lösungsquote (vgl. Abb. 1). Die Lösung solcher Aufgaben erfordert ein schrittweises Vorgehen. In der Regel werden dabei die einzelnen Elemente des Objektes (beispielsweise die Endpunkte der Fahne) bei der Spiegelung nacheinander auf die andere Seite übertragen (Küchemann 1981, S. 145). Nach Grenier ist die Fehlerquote bei der Aufgabenbearbeitung umso höher, je größer der Winkel zwischen einer schrägen Spiegelachse und der zu spiegelnden Strecke ist (ausgenommen parallel und im 90°-Winkel zur Achse liegende Strecken) (Grenier 1985a, S. 186f). Gute Ergebnisse zeigten die Schülerinnen und Schüler im Alter von 11–14 Jahren bei allen Aufgaben, welche die Abbildung einer zur Achse parallel liegenden Strecke verlangten (vgl. Abb. 2, Aufgabe A) – unabhängig von der Lage der Achse und der Art des verwendeten Papiers (Grenier 1985a). Diese Ergebnisse zeigen, dass nicht allein die Lage der Achse die Lösungshäufigkeit der Aufgabenstellung beeinflusst.

Qualitative Analysen konnten zur Erklärung einiger der obengenannten Aufgabenschwierigkeiten beitragen (Grenier 1985b; Küchemann 1981). So ergab die detaillierte Analyse von Schülerdokumenten, dass, um das Spiegelbild zu erzeugen, die Figur häufig so verschoben wurde, dass alle Strecken des Spiegelbildes der Figur parallel zu den entsprechenden Strecken der ursprünglichen Figur lagen. Vergleichende Analysen der Aufgaben auf Kästchenpapier und auf Blankopapier ergaben keinen systematischen Unterschied in der Lösungshäufigkeit (Grenier 1985a; Küchemann 1981). Das Kästchengitter kann im Gegensatz zu Blankopapier helfen, den Abstand und die Richtung der Spiegelung genauer zu bestimmen (Küchemann 1981). Gewisse Fehlertypen scheinen dennoch häufiger auf Kästchenpapier als auf Blankopapier vorzukommen: Grenier (1985a) beschreibt das „*horizontal or vertical point sliding*“ (Grenier 1985a, S. 187) als vermehrt bei Aufgaben auf Kästchenpapier auftretend.

Dabei werden einzelne Punkte oder Strecken einfach entlang einer gedachten vertikalen oder horizontalen Linie verschoben. Die Autorin vermutet, dass die bereits vorgegebenen horizontalen und vertikalen Linien des Kästchenpapiers dieses Lösungsvorgehen begünstigen. Ebenso beschreiben Grenier (1985b) und Küchemann (1981), dass schräge Achsen häufig ignoriert werden und stattdessen an gedachten vertikalen oder horizontalen Achsen gespiegelt wird. Grenier bezeichnet dieses Phänomen, das überwiegend an schrägen Achsen auftritt als „*rappel horizontal*“ bzw. „*rappel vertikal*“ (Grenier 1985b, S. 62). Vor allem bei der Achsenspiegelung komplexer Objekte (Strecke bzw. Fahne) und wenn das Objekt horizontal oder vertikal zum Blattrand liegt, tritt dieses Phänomen auf (Küchemann 1981). Sind komplexere Objekte zu spiegeln, so gehen die Schülerinnen und Schüler in ihrem Lösungsprozess häufig nicht konsequent analytisch vor: einzelne Punkte werden zunächst korrekt gespiegelt, davon ausgehend wird dann jedoch „intuitiv“ der Rest der Figur ergänzt – ohne weitere Punkte analytisch korrekt zu spiegeln (vgl. Grenier 1985b).

Diese Ergebnisse decken sich auch mit der Beschreibung der Entwicklung des geometrischen Abbildungsbegriffs nach Kirsche (1992). Angelehnt an die Entwicklung des Begriffsverständnisses nach Vollrath (1984) beschreibt Kirsche vier Stufen des Begriffsverständnisses von Abbildungen – somit auch von Achsenspiegelungen. Für die Grundschule stehen dabei vor allem drei Entwicklungsschritte im Fokus (Kirsche 1992). Dabei spielt bei jedem Schritt die Verzahnung von Analyse- und Herstellungsverfahren eine wichtige Rolle bei der Begriffsbildung. Auf der ersten Stufe, der vorbegrifflichen Stufe, wird Symmetrie vorrangig als Phänomen von Figuren gesehen. Dabei werden symmetrische Figuren als Ganzes betrachtet und durch „Augenschein als symmetrisch beurteilt“ (Kirsche 1992, S. 76). Beispiele symmetrischer Figuren werden von nicht symmetrischen unterschieden, sowie identifiziert und hergestellt. Zum Herstellen und Überprüfen symmetrischer Figuren eignen sich auf dieser Stufe vor allem konkret-kinematische Verfahren (wie bspw. das Spiegeln mit dem Spiegel). Die Begriffe Bild, Spiegelbild, Spiegellinie, „liegt spiegelbildlich zu“ können dabei erarbeitet werden. Stufe 2 beschreibt die „handlungsgebundene inhaltliche Kenntnis der Begriffe“ (Kirsche 1992, S. 77). Kinder sind in der Lage durch erste Analysen Symmetrieeigenschaften zu entdecken. So werden Figuren als regelmäßig angeordnete Muster erkannt und durch zeichnerisch-kinematische Verfahren (z. B. durch Falten oder die Wendemethode) auf ihre Symmetrieeigenschaften geprüft. Dabei werden Figuren nicht mehr als Ganzes betrachtet, sondern symmetrische Teile der Figuren können identifiziert werden. Durch zeichnerisch-konstruktive Verfahren (wie bspw. das Spiegeln im Gitternetz) geschieht ein Lösen von kinematischen Vorstellungen und symmetrische Figuren werden über die handlungsgebundene Ebene hinaus anhand von zugrundeliegenden Gesetzmäßigkeiten analysiert (Stufe 3). Auf dieser inhaltlichen, nichtformalen Stufe werden symmetrische Figuren mehr und mehr als Punktmengen aufgefasst (Kirsche 1992). Dies führt auch dazu, dass Konstruktionen von symmetrischen Figuren mit dem Wissen um Beziehungen zwischen Bild und Spiegelbild durchgeführt werden können. Die Beschreibungen dieser Stufen des Begriffsverständnisses bezüglich Abbildungen decken sich mit Ergebnissen aus den zuvor genannten Studien. Insbesondere die Beschreibung der zweiten Stufe entspricht dem von Grenier (1985b) als noch zu wenig analytisch beschriebenen Vorgehen bei der Spiegelung komplexer Figuren

an einer Achse. Zwar haben Kinder auf dieser Stufe bereits eine Vorstellung von Symmetrie entwickelt. Zur Überprüfung und Herstellung von Symmetrie kennen sie jedoch meist nur handlungsgebundene Verfahren. Die Vorstellung, dass symmetrische Figuren „regelmäßig angeordnete Elementarmuster“ (Kirsche 1992, S. 77) sind, reicht bei einer Spiegelung an einer schrägen Achse nicht aus, um den Fehler des „*rappel horizontal*“ bzw. „*rappel vertikal*“ (Grenier 1985b) zu vermeiden – auch bspw. beim *rappel horizontal* entsteht ein regelmäßig angeordnetes Muster, nur liegt dieses nicht korrekt in Bezug zur schrägen Achse.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Studien, die sich mit Achsenspiegelungen beschäftigen, verschiedene Einzelergebnisse liefern. Bislang ist allerdings wenig systematisches Wissen über Anforderungen bei der Achsenspiegelung bedingt durch Aufgabenmerkmale im Grundschulalter daraus abzuleiten. So gibt es einige Studien im Vorschul- und Grundschulbereich zum Ergänzen zu achsensymmetrischen Figuren (Bornstein und Stiles-Davis 1984; Höglinger und Senftleben 1997; Kurina et al. 1998; Schmidt 1986). Studien die sich mit Achsenspiegelungen beschäftigen, die eine Figur so abbilden, so dass zwei kongruente Figuren entstehen, sind überwiegend mit älteren Kindern, jedoch nicht mit Grundschulkindern durchgeführt worden (Grenier 1985a, 1985b; vgl. Küchemann 1981). Studien zur Achsenspiegelung, die zu zwei kongruenten Figuren führt, fokussieren darüber hinaus die Spiegelung von Punkten, Strecken und Fahnen, kaum jedoch Spiegelungen von geschlossenen Figuren, wie sie im Unterricht der Grundschule üblicherweise durchgeführt werden.

Dennoch stellen diese Studien einige Merkmale von Aufgaben zu Achsenspiegelungen heraus, die Schwierigkeiten sichtbar werden lassen. In fast allen Studien wird die Lage der Achse als ein Merkmal von Aufgaben herausgestellt, das die Lösungshäufigkeit von Aufgaben beeinflusst. Ebenso wird die Komplexität der Figur als ein Merkmal beschrieben, welches die Schwierigkeit einer Aufgabe mitbestimmt: Die vorliegenden Studien, die die Komplexität in den Blick nehmen, betrachten unterschiedliche Merkmale. Zum einen wird die Komplexität variiert, in Bezug darauf, ob ein Punkt, eine Strecke oder eine Fahne zu spiegeln ist (Küchemann 1981). Zum anderen kann die Komplexität der Figur auch durch die Gestalt der Figur variieren (Bornstein und Stiles-Davis 1984). Inwieweit die Lösung einer Aufgabe zur Achsenspiegelung eine Koordination von Winkeln erforderlich macht, kann ebenfalls die Schwierigkeit von Aufgaben beeinflussen. Bezüglich des Unterschieds zwischen Kästchenpapier und Blankopapier wird vermutet, dass durch das Kästchenpapier eine (teils falsche) Orientierung an den Linien vorkommen kann. Es zeigt sich jedoch auch, dass eine Achsenspiegelung ohne Hilfslinien nicht unbedingt leichter sein muss.

Die hier aufgezeigten empirischen Studien, die die Bearbeitung von Aufgaben zur Achsenspiegelung untersuchten (Grenier 1985a, 1985b; Höglinger und Senftleben 1997; Küchemann 1981; Schmidt 1986), lassen über die Lösungshäufigkeiten einzelner Aufgaben Rückschlüsse auf Aufgabenmerkmale zu, die die Lösungshäufigkeit beeinflussen. Ebenso zeigen qualitative Analysen, die spezifische Schülerfehler zusammen mit bestimmten Aufgabenmerkmalen betrachten, weitere typische Fehlerquellen bzw. die Schwierigkeit beeinflussende Merkmale auf.

Auch wenn einige Erkenntnisse zur Beschreibung von inhaltsbezogenen Merkmalen vorliegen, die Aufgaben zur Achsenspiegelung schwieriger werden lassen,

so sind diese noch nicht umfassend systematisiert. Zudem kann nur auf Untersuchungsergebnisse aus Studien zurückgegriffen werden, die zum Teil schon mehrere Jahrzehnte zurückliegen. Aus diesem Grund verfolgt dieser Beitrag die Idee inhaltsbezogene schwierigkeitsgenerierende Merkmale bei Aufgaben zur Achsenspiegelung herauszuarbeiten und zu systematisieren.

Für diese Studie ergeben sich folgende Forschungsfragen:

1. Welche Aufgabenmerkmale bei der Achsenspiegelung von Figuren sind (über die bereits bekannten Merkmale hinaus) schwierigkeitsgenerierend?
2. Welche Ausprägungen der einzelnen schwierigkeitsgenerierenden Merkmale stellen eine hohe bzw. niedrige Anforderung bei der Achsenspiegelung dar?
3. Inwiefern lassen sich die schwierigkeitsgenerierenden Merkmale bei der Achsenspiegelung im Sinne eines Kategorienschemas systematisch beschreiben und verallgemeinern?

Zur Beantwortung der Forschungsfragen werden auf der Basis bisher vorliegenden Erkenntnisse Aufgaben bezüglich einzelner inhaltlicher Aufgabendetails systematisch entwickelt, so dass für verschiedene inhaltliche Merkmale der Aufgaben Anforderungen auf einem Schwierigkeitskontinuum von leicht bis schwierig beschrieben werden und erste Vermutungen über ein Zusammenspiel der Merkmale angestellt werden können.

4 Methode

Datenbasis dieser Studie sind Aufgaben zur Achsenspiegelung aus Erprobungsstudien der bundesweiten Vergleichsarbeiten „VerA“ in Deutschland der Jahre 2012, 2013, 2017 und 2018 in Jahrgangsstufe 3, die durch das Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) durchgeführt wurden. Die Datenbasis der Erprobungsstudien eignet sich zum genannten Ziel der Studie gut, da sie zum einen eine große Stichprobe bietet und die Daten zum anderen im Kontext der Bildungsstandards (Kultusministerkonferenz 2005) erhoben wurden. Es handelt sich um eine Testentwicklung, bei der ein eindimensional IRT-skalierbarer Itempool generiert werden soll. Dadurch sind alle Aufgaben bezüglich einer Skala nach ihrer empirischen Schwierigkeit angeordnet und es kann durch die zugeordnete Kompetenzstufe (I, II, III, IV oder V) entsprechend des Kompetenzmodells zur Überprüfung der Bildungsstandards (Reiss und Winkelmann 2008, 2009) bereits zu Beginn eine grobe Einordnung der Aufgaben nach Schwierigkeiten vorgenommen werden. Die Stufen sollen hier als Hilfsmittel zu einer ersten Einschätzung der Aufgaben und als grobes Raster für die detaillierte inhaltliche Analyse genutzt werden.

Die Aufgaben zur Achsenspiegelung wurden einem Pool an Aufgaben aus dem Inhaltsbereich *Raum und Form* entnommen. Im Folgenden wird zunächst genauer

auf die Datenbasis der Erprobungsstudien im Gesamten eingegangen, bevor die Aufgabengrundlage dieser Studie beschrieben wird.³

4.1 Beschreibung des Datensatzes aus den Erprobungsstudien

In den Erprobungsstudien werden jedes Jahr zwei unterschiedliche mathematische Inhalte (z. B. *Raum und Form* und *Muster und Strukturen*) erprobt. Die folgende Darstellung des Datensatzes bezieht sich in der Stichprobe und im Design auf den gesamten Test des jeweiligen Jahres, da auf Grund des Designs die Bezugnahme auf einzelne Aufgaben bzw. Inhaltsbereiche nicht sinnvoll ist.

Im Jahr 2012 umfasste die Stichprobe 2591 Schülerinnen und Schüler aus 138 Klassen der Länder Baden-Württemberg, Berlin, Brandenburg, Hessen, Rheinland-Pfalz, Sachsen, Schleswig-Holstein sowie aus der Provinz Bozen (Südtirol). Das mittlere Alter betrug 8,85 Jahre ($SD=0,56$) und 47,9 % der Stichprobe waren weiblich. 2013 nahmen 2418 Schülerinnen und Schüler aus 126 Klassen der Länder Baden-Württemberg, Bremen, Hamburg, Niedersachsen, Nordrhein-Westfalen, Saarland, Sachsen-Anhalt, Thüringen sowie aus der Provinz Bozen (Südtirol) teil. Der Altersdurchschnitt lag bei 8,86 Jahren ($SD=0,58$) und 47,9 % der Stichprobe waren weiblich. An der Erprobungsstudie 2017 nahmen insgesamt 2379 Schülerinnen und Schüler der Bundesländer Baden-Württemberg, Bremen, Hamburg, Niedersachsen, Nordrhein-Westfalen, Saarland, Sachsen-Anhalt und Thüringen teil. Der Altersdurchschnitt lag bei 9,45 ($SD=0,60$) Jahren und 48,47 % der Kinder waren weiblich. Im Jahr 2018 nahmen 1901 Schülerinnen und Schüler aus 101 Klassen der Länder Bayern, Berlin, Brandenburg, Hessen, Mecklenburg-Vorpommern, Rheinland-Pfalz, Sachsen und Schleswig-Holstein an den Erprobungsstudien teil. Der Altersdurchschnitt lag bei 9,52 Jahren ($SD=0,74$) und 49,76 % der Stichprobe waren weiblich.

Die Erprobungsstudien sind Querschnittsstudien mit je einem Messzeitpunkt im Frühsommer. Im Design werden die Aufgaben aus den beiden mathematischen Inhaltsbereichen in Blöcken zusammengefasst. Durch ein Multi-Matrix-Design werden diese Blöcke auf verschiedene Testhefte verteilt, sodass einzelne Schülerinnen und Schüler nur Teilmengen des Gesamtaufgabenpools bearbeiten. Jedes Testheft setzt sich aus 6 Blöcken zu je 10 min zusammen. Je drei Blöcke sind dem Inhaltsbereich *Raum und Form* und je drei Blöcke dem jeweils anderen Inhaltsbereich zugeordnet. Im Testdesign der Erprobungsstudien ist durch die Verwendung normierter Ankeraufgaben des jeweiligen Inhaltsbereiches eine Anbindung der getesteten Aufgaben an die Metrik der Bildungsstandards und damit eine Verlinkung über die Testzeitpunkte bzw. Jahre hinweg möglich. Die Ankeraufgaben werden ebenfalls in Blöcken zusammengefasst und in die Testhefte integriert.

In den Erprobungsstudien wurden in einem Paper-Pencil-Test unterschiedliche Aufgabenformate (Multiple Choice, Kurzantworten und offene Antworten) eingesetzt. Jede Aufgabe wurde von ca. 250 Schülerinnen und Schülern Ende Jahrgangsstufe 3 bearbeitet. Die Aufgaben wurden im Rahmen der Erprobungsstudien mit

³ Das Erhebungsdesign, die Datenerhebung, die Codierung der Daten sowie die Datenanalysen wurden am Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen – Wissenschaftliche Einrichtung der Länder an der Humboldt-Universität zu Berlin e. V. durchgeführt und werden hier nur berichtet.

Item-Response-Modellen ausgewertet. Dabei wurden sie psychometrisch auf ihre Qualität bezüglich ihrer Passung zum Rasch-Modell und ihrer Schwierigkeit geprüft. Als Gütekriterium für die Passung zum Rasch-Modell wurde das Infit-Maß der Aufgaben berechnet. Der optimale Infit-Wert liegt bei 1,00, gute Infit-Werte liegen zwischen 0,80 und 1,20 (Bond und Fox 2015, S. 273). Die Fit-Statistik für alle Items zur Achsenspiegelung ist gut, alle Infit-Werte liegen zwischen 0,89 und 1,09. Die psychometrische Qualitätsprüfung zeigt eine gute Qualität aller verwendeten Aufgaben bezüglich ihrer Passung zum Gesamtmodell. Die psychometrische Qualität der Aufgaben ist nicht zuletzt grundlegend, um auf dieser Basis eine inhaltliche Analyse unterschiedlicher schwierigkeitsgenerierender Merkmale durchzuführen.

4.2 Beschreibung der Aufgabenbasis für diese Studie

Aus den beschriebenen Aufgabenpools der Erprobungsstudien wurden Aufgaben zur Achsenspiegelung betrachtet. Aus den Jahren 2012 und 2013 wurden alle Aufgaben zur Achsenspiegelung herausgesucht. Für die Erprobungsstudien der Jahre 2017 und 2018 wurden von der Erstautorin dieses Beitrags gezielt Aufgaben zur Achsenspiegelung entwickelt. Dadurch wurde der Aufgabenpool zwar systematisch erweitert (bspw. Lage der Achse), jedoch nur soweit es im Rahmen der begrenzten Aufgabenanzahl der Erprobungsstudien möglich war. Dass nicht in allen Jahren systematisch Aufgaben entwickelt werden konnten, hat zur Folge, dass der Aufgabenpool nicht bezüglich aller Merkmale, die als schwierigkeitsgenerierend bekannt sind, ausgeglichen ist (vgl. auch Tab. 2). Insgesamt lagen 48 Aufgaben zur zeichnerisch-konstruktiven Ausführung von Achsenspiegelungen vor. Aufgaben dieser Art setzen ein Verständnis von Achsensymmetrie und Achsenspiegelung voraus. Von den 48 Aufgaben werden im Folgenden nur die 37 Aufgaben betrachtet, bei denen die Schülerinnen und Schüler an *einer* Spiegelachse spiegeln mussten, da diese durch die gleiche Aufgabenstellung gut miteinander verglichen werden können. Ausgeschlossen wurden beispielsweise Multiple-Choice-Aufgaben und Aufgaben mit Spiegelungen an mehreren Achsen, da zu diesen Aufgaben im bereits vorhandenen Pool der Erprobungsstudien nicht ausreichend Aufgaben vorlagen. Bei fast allen Aufgaben sollten geschlossene Figuren gespiegelt werden – mit Ausnahme von vier Aufgaben, bei welchen Kreuze (Aufgaben 3, 17, 31) bzw. eine offene Figur (Aufgabe 18, vgl. Tab. 4) gespiegelt werden sollten. Eine Charakterisierung der Aufgaben nach Merkmalen befindet sich im Anhang.⁴

Die Schwierigkeitswerte der Aufgaben dieser Studie werden gemäß der Schwierigkeitsskala, wie im Kompetenzmodell der Bildungsstandards, verwendet. Dazu werden die Aufgaben auf einer Skala mit Mittelwert $M=500$ angeordnet, die nach oben und unten offen ist (Kultusministerkonferenz 2013). Zusätzlich werden die Abschnitte auf dieser Kompetenzskala in Stufen eingeteilt, welche hier nur genutzt werden sollen, um eine erste grobe Charakterisierung der Aufgaben hinsichtlich ihrer Anforderungen vornehmen zu können. Tab. 1 zeigt die Einteilung der Skala in fünf hierarchische Stufen und die Verteilung der ausgewählten Aufgaben zur

⁴ Die Aufgaben können größtenteils nicht veröffentlicht werden, an geeigneten Stellen wird im Folgenden immer wieder auf Beispielaufgaben zurückgegriffen.

Tab. 1 Zuordnung der Punktwerte auf der Skala der Bildungsstandards zu den Kompetenzstufen und Verteilung der Aufgaben über die Kompetenzstufen

Kompetenzstufe	Punktwerte auf der Skala der Bildungsstandards	Anzahl der Aufgaben zur Achsenspiegelung
I	Unter 390	7
II	390–459	3
III	460–529	7
IV	530–599	9
V	Ab 600	11

Tab. 2 Übersicht der Aufgaben nach Schwierigkeitsgenerierenden Merkmalen

Lage der Achse	Untergrund	Figur anliegend	Figur mit Abstand zur Achse
Vertikale Achse	Punkteraster	1	4
	Kästchengitter	6	6
Horizontale Achse	Punkteraster	0	0
	Kästchengitter	6	1
45°-Achse	Punkteraster	0	2
	Kästchengitter	5	6

Achsenspiegelung über diese Stufen. Die Schwierigkeitswerte der Aufgaben liegen zwischen 239 und 775 Punkten, die Aufgaben sind somit über alle Stufen verteilt.

Jede Aufgabe vereint eine andere Kombination an Merkmalen, die Einfluss auf die Lösungsquote der Aufgabe haben könnte (z. B. Lage der Achse, Komplexität der Figur, etc.). Um inhaltsbezogene schwierigkeitsbestimmende Merkmale von Aufgaben zu identifizieren, wurden zum einen die Merkmale, die aus den empirischen Ergebnissen bekannt sind, zu einer systematischen Aufgabenvariation herangezogen und geprüft. Zum anderen wurden auf Grund der vorliegenden Aufgaben im Aufgabenpool der Erprobungsstudien Muster gesucht, die zur Beschreibung zusätzlicher schwierigkeitsgenerierender Merkmale führen könnten.

Bereits durch Studien belegte inhaltsbezogene schwierigkeitsgenerierende Merkmale von Aufgaben zur Achsenspiegelung werden im Nachfolgenden kurz zusammengefasst und die 37 vorliegenden Aufgaben werden diesbezüglich zugeordnet. Tab. 2 stellt eine Übersicht der Aufgaben bezüglich dieser schwierigkeitsgenerierenden Merkmale dar.⁵ Da sich die Lage der Achse in mehreren Studien als wesentliches schwierigkeitsgenerierendes Merkmal beim Erkennen von Symmetrie (Bornstein und Stiles-Davis 1984) und bei der Achsenspiegelung (Grenier 1985a, 1985b; Küchemann 1981; Schmidt 1986) herausgestellt hat (vgl. Abschn. 3), befinden sich im Aufgabenpool Aufgaben, bei denen an vertikalen, horizontalen und schrägen Achsen gespiegelt werden soll. In dieser Studie werden nur schräge Achsen verwendet, die im 45°-Winkel zur Blattkante liegen und werden aus diesem Grund als 45°-Achsen bezeichnet.

Bezüglich der Begriffsentwicklung von Abbildungen (Kirsche 1992) wird auf den ersten Stufen die noch handlungsorientierte Vorstellung „eine symmetrische

⁵ Die Verteilung der Aufgaben in Tab. 2 ist unausgeglich, da eine systematische Variation der Aufgaben nur im Jahr 2017 und 2018 stattfand. Aufgaben aus den Jahren 2012 und 2013 konnten nicht systematisch entwickelt werden und somit war keine vollständige systematische Variation möglich.

Figur besteht aus „zwei gleichen Hälften“ von Achsenspiegelungen beschrieben. Achsenspiegelungen, die zu zwei kongruenten Figuren führen, liegen in den Stufen der Begriffsentwicklung auf einer höheren Stufe (vgl. Abschn. 3). Die vorliegenden Aufgaben umfassen sowohl Achsenspiegelungen, die zu einer symmetrischen Figur führen (vorgegebene Figur liegt an der Achse an), als auch Aufgaben, die zu zwei kongruenten Figuren führen (Figur mit Abstand zur Achse). Neben der systematischen Variation der Lage der Achse und der Figur (anliegend/nicht anliegend) wurde auch der Untergrund variiert. Bezüglich des Einflusses des Untergrundes auf die Fähigkeit, an einer Achse zu spiegeln, zeigen Studien keine einheitlichen Ergebnisse (Grenier 1985a; Küchemann 1981) (vgl. Abschn. 3). Da es in der Grundschule üblich ist, Spiegelungen mit Geobrettern durchzuführen bzw. zu überprüfen, wurde diese Aufgabenvariante in dieser Studie aufgegriffen: Die Analysen bereits vorliegender Aufgaben aus den früheren Erprobungsstudien gaben Anlass zu vermuten, dass es mögliche Unterschiede im Schwierigkeitsgrad gibt, je nachdem ob das Geobrett (eingesetzt wurde dementsprechend ein Punkteraster) oder Kästchengitter zugrunde liegen.

Aus den genannten Forschungsergebnissen zur Achsensymmetrie mit älteren Kindern (Grenier 1985b; Küchemann 1981) geht hervor, dass es weitere Merkmale (z. B. die Komplexität der Figur) gibt, die vermutlich die Schwierigkeit von Aufgaben zur Achsenspiegelung beeinflussen (vgl. Abschn. 3). Diese Ergebnisse aus bisherigen Studien lassen sich nicht direkt auf die Spiegelung geschlossener Figuren, wie sie im Unterricht der Grundschule üblich sind, übertragen. Bei der Erstellung der Aufgaben wurde dennoch versucht, diese Forschungsergebnisse zu berücksichtigen. Dazu wurde beispielsweise die Komplexität von Figuren erhöht, indem die figurbegrenzenden Linien nicht nur auf den Kästchenlinien lagen, sondern auch die Kästchen diagonal schnitten (d. h. Kästchendiagonalen) oder auch das zugrunde gelegte Kästchengitter beliebig schnitten (im Folgenden als „schräge Linien“ bezeichnet). Auch wurde bezogen auf die Erhöhung der Komplexität der Figur exploratorisch eine Aufgabe ergänzt, bei welcher sich Figur und Spiegelfigur überlappen. Um das Konzept der Winkelkoordination zu prüfen, wurden des Weiteren Aufgaben in das Testdesign aufgenommen, die eine zur Achse parallel liegende bzw. nicht parallel liegende Seite haben.

Auf Basis der psychometrischen Analysen aus den Erprobungsstudien (durchgeführt durch das IQB) werden an den Aufgaben weitere qualitative Analysen durchgeführt. Systematisch gebildete Aufgabenpaare werden dazu bezüglich ihrer Schwierigkeiten verglichen. Die Paare sind so zusammengestellt, dass nur *ein* theoretisch belegtes Aufgabenmerkmal variiert wird. Alle anderen Merkmale entsprechen sich. Die Aufgaben eines Paares werden anhand ihrer Schwierigkeit (Punktwerte auf der Skala der Bildungsstandards (Bista-Werte)) (vgl. Tab. 1) verglichen. Ein Vergleich der Aufgaben hinsichtlich ihrer Schwierigkeit auch über die verschiedenen Erhebungszeitpunkte hinweg ist durch die in den Erprobungsstudien eingesetzten Verlinkungsaufgaben möglich. Zusätzlich zum paarweisen Vergleich der Aufgaben werden jeweils alle Aufgaben einer Stufe analysiert, um Theorien zu weiteren Merkmalen zu entwickeln, die die Schwierigkeit von Aufgaben zur Achsenspiegelung beeinflussen. Die Ergebnisse der Analyse der Aufgaben anhand der bereits bekannten schwierig-

keitsgenerierenden Merkmale und weiterer Merkmale, die sich aus den qualitativen Analysen ergaben, werden im Folgenden dargestellt.

5 Ergebnisse

Bei der Darstellung der bisherigen empirischen Erkenntnisse wurde bereits der Einfluss der Lage der Achse auf die Schwierigkeit bei der Durchführung einer Achsenspiegelung beschrieben (vgl. Abschn. 3). Tab. 3 zeigt die Verteilung aller Aufgaben auf die unterschiedlichen Kompetenzstufen zunächst nach dem Kriterium der Lage der Achse.

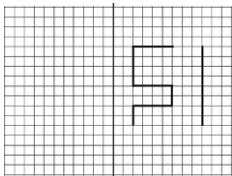
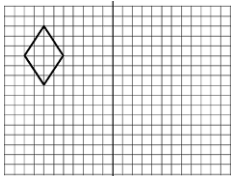
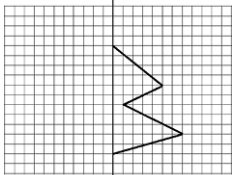
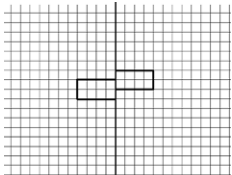
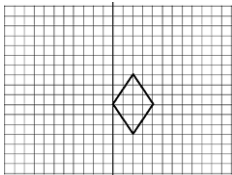
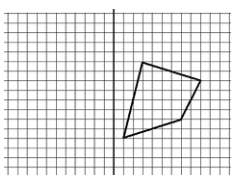
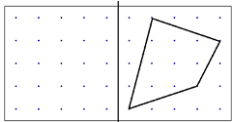
Auf den Kompetenzstufen (KS) I und II finden sich überwiegend Aufgaben mit Spiegelungen an einer vertikalen Achse (KS I=6 Aufgaben; KS II=2 Aufgaben). Auf Kompetenzstufe III befinden sich überwiegend Aufgaben mit Spiegelungen an einer horizontalen Achse. Auf Kompetenzstufe IV liegen fünf Aufgaben mit Spiegelungen an einer vertikalen Achse, eine Aufgabe mit Spiegelung an einer horizontalen Achse und drei Aufgaben mit einer Spiegelung an einer 45°-Achse. Auf Kompetenzstufe V befinden sich acht Aufgaben, bei denen eine Spiegelung an einer 45°-Achse gefordert war, kaum jedoch Aufgaben mit einer Spiegelung an einer vertikalen (zwei Aufgaben) oder einer horizontalen Achse (eine Aufgabe). Diese Verteilung spiegelt im Großen und Ganzen (Ausnahme KS IV) die Erkenntnisse, dass die Aufgabenschwierigkeit mit der Lage der Achse zusammenhängt, wider. Aus dieser Tabelle wird jedoch auch deutlich, dass es noch andere Merkmale geben muss, die einen Einfluss auf die Aufgabenschwierigkeit haben: auch auf Kompetenzstufe V gibt es Aufgaben mit Achsenspiegelungen an vertikalen und horizontalen Achsen und auffällig ist insbesondere, dass auf Kompetenzstufe IV sehr viele Aufgaben liegen, die die Spiegelung an einer vertikalen Achse erfordern. Es ist zu vermuten, dass in diesen fünf Aufgaben (Aufgaben 18, 21, 23, 24 und 26) auf Kompetenzstufe IV und in den zwei Aufgaben auf Kompetenzstufe V (Aufgaben 32 und 34) mit vertikalen Achsen andere Merkmale die Schwierigkeit der Aufgaben stärker beeinflussen als die Lage der Achse. Um die folgenden Analysen nachvollziehen zu können, sind

Tab. 3 Übersicht aller Aufgaben nach Kompetenzstufen und Lage der Achse

Kompetenzstufe	Anzahl der Aufgaben mit vertikalen Achsen	Anzahl der Aufgaben mit horizontalen Achsen	Anzahl der Aufgaben mit 45°-Achsen
I	6	1	0
II	2	0	1
III	2	4	1
IV	5	1	3
V	2	1	8

Fett gekennzeichnet ist die auf der jeweiligen Kompetenzstufe am häufigsten auftretende Lage der Achse

Tab. 4 Aufgaben mit Spiegelung an einer vertikalen Achse auf Kompetenzstufe IV und V

Aufg	KS	Bista-Wert		Aufg	KS	Bista-Wert	
18	IV	539		26	IV	590	
21	IV	546		32	V	669	
23	IV	557		34	V	679	
24	IV	564		–	–	–	–

in Tab. 4 diese sieben Aufgaben, die eine Spiegelung an einer vertikalen Achse erfordern, jedoch auf Kompetenzstufe IV und V liegen, detailliert dargestellt.⁶

Im Folgenden wird geprüft und dargelegt, inwieweit sich die Aspekte *Komplexität der Figur*, *Abstand der Figur zur Achse*, *Lage der Seiten der Figur zur Achse* sowie *Untergrund* schwierigkeitsgenerierend auswirken. Bei den Aufgaben 21, 23, 24, 26 und 34 könnte die Komplexität der Figur einen entscheidenden Einfluss auf die Aufgabenschwierigkeit haben, da diese schräge Linien haben. Ebenso könnte bei den Aufgaben 18, 24, 26 und 34 der Abstand der Figur zur Achse die Lösungsquote beeinflussen. Die Schwierigkeit von Aufgabe 32 könnte darin liegen, dass sich Bild und Spiegelbild überlagern. Eine detailliertere Analyse der Aufgaben hinsichtlich der Schwierigkeiten erfolgt anhand eines Vergleichs systematisch gebildeter Aufgabenpaare.

⁶ Diese Aufgaben wurden den Merkmalen der Originalaufgaben entsprechend so nachentwickelt, dass die zentralen Charakteristika deutlich werden. Alle in dieser Studie verwendeten Originalaufgaben dürfen nicht veröffentlicht werden. Für weitere Details aller Aufgaben siehe Anhang.

5.1 Abstand der Figur zur Achse

Zu den in Tab. 4 abgebildeten auffälligen Aufgaben 23 und 21 wurden in der Studie zwei Aufgabenpaare gebildet (Tab. 5). Diese Aufgabenpaare unterscheiden sich in der Variation des Abstandes der Figur zur Achse (z. B. Aufgabe 23 anliegend, Aufgabe 26 nicht anliegend), alle weiteren Merkmale der beiden verglichenen Aufgaben entsprechen sich (z. B. schräge Linien bei Aufgaben 21 und 34). Aufgaben mit dem Merkmal „anliegend“ beinhalten die Spiegelung einer Figur an einer Achse, wobei Achse und Figur mindestens einen Punkt gemeinsam haben. Bei Aufgaben mit dem Merkmal „nicht anliegend“ führt die Spiegelung an einer Achse zu zwei kongruenten Figuren – Figur und Achse haben keine gemeinsamen Punkte. Vergleicht man nun die beiden abgebildeten Aufgabenpaare, so ist zu erkennen, dass bei gleichbleibenden Figur-Merkmalen und gleicher Lage der Achse, allein durch die Variation des Merkmals „Abstand zur Achse“ Unterschiede in der Schwierigkeit der Aufgabe zu sehen sind. Durch die Qualität und Güte der Aufgaben (vgl. Abschn. 4) ist ein Vergleich der Aufgabenschwierigkeit über die durch Rasch-Skalierung entstandenen Bista-Werte möglich. Bei Aufgabe 23 und 26 wirkt sich der Abstand zur Achse nicht auf die Zuordnung der Aufgaben zu unterschiedlichen Kompetenzstufen aus, jedoch auf den Bista-Wert, der sich um 33 Punkte unterscheidet (entspricht etwa einer halben Kompetenzstufe). Der Unterschied ist im Aufgabenpaar 21 und 34 (Tab. 5) sehr viel deutlicher und wirkt sich auch auf die Zuordnung der Aufgaben zu den Kompetenzstufen aus.

In den beiden Aufgabenpaaren zeigt sich, dass Aufgaben zur Achsenspiegelung, die zu zwei kongruenten Figuren führt (Merkmal „nicht anliegend“), schwieriger sind als vergleichbare Aufgaben zur Achsenspiegelung, die zu einer symmetrischen Figur führt (Merkmal „anliegend“, wenn auch nur in einem Punkt). Dieses Ergebnis lässt sich auch auf andere Achsenlagen übertragen. Weitere Aufgabenpaare wurden zu Aufgaben an horizontalen und 45°-Achsen gebildet. Diese unterscheiden sich wiederum nur im Merkmal des Abstands zur Achse (vgl. Beispiel in Abb. 3 zur Spiegelung an horizontalen Achsen).

Betrachtet man das Aufgabenpaar in Abb. 3 und die Werte dieses und weiterer Aufgabenpaare in Tab. 6, so lassen sich auch hier deutliche Unterschiede in der Aufgabenschwierigkeit erkennen. Die Aufgaben 11, 20 und 9 (anliegende Figuren) sind leichter, als die entsprechenden Aufgaben 25, 33 und 13 (nicht anliegende Figuren).

Tab. 5 Vergleich von Aufgabenpaaren bezüglich des Abstandes der Figur zur Achse an vertikaler Achse

Aufgabe	Abstand der Figur zur Achse	KS	Bista	Achse
23	Anliegend	IV	557	Vertikal
26	<i>Nicht anliegend</i>	IV	590	Vertikal
21	Anliegend	IV	546	Vertikal
34	<i>Nicht anliegend</i>	V	679	Vertikal

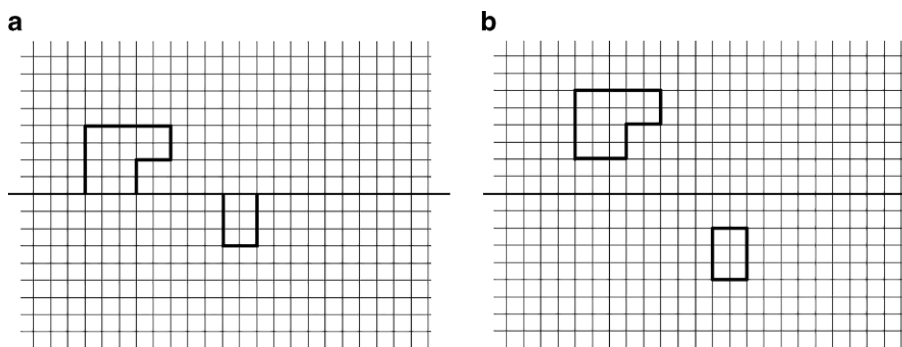


Abb. 3 Vergleich der Aufgaben 11 (links) und 25 (rechts) bezüglich des Abstands zur Achse

Tab. 6 Vergleich von Aufgabenpaaren bezüglich des Abstandes der Figur zur Achse an horizontalen und 45°-Achsen

Aufgabe	Abstand der Figur zur Achse	KS	Bista	Achse
11	Anliegend	III	461	Horizontal
25	<i>Nicht anliegend</i>	IV	573	Horizontal
20	Anliegend	IV	540	45°-Achse
33	<i>Nicht anliegend</i>	V	672	45°-Achse
9	Anliegend	II	411	45°-Achse
13	<i>Nicht anliegend</i>	III	482	45°-Achse

5.2 Komplexität der Figur

Eine weitere Möglichkeit, die Auffälligkeiten in Tab. 4 zu analysieren, ergibt sich durch die Komplexität der Figur, welche ebenso einen Einfluss auf die Lösungsquote von Aufgaben hat (vgl. Küchemann 1981; Bornstein und Stiles-Davis 1984). Forschungsergebnisse zur Komplexität der Spiegelung einfacher Objekte (wie Punkte, Strecken, Fahnen) können nicht direkt auf die Komplexität der Spiegelung einer geschlossenen Figur, wie sie in der Grundschule üblich ist, übertragen werden. Eine vergleichende Analyse der Aufgaben dieser Studie deutet darauf hin, dass mehrere Merkmale der Figur einen Einfluss auf die Komplexität der Figur haben könnten. Folgende Merkmale werden unter diesem Aspekt im Folgenden genauer betrachtet: „Lage der Seiten der Figur zum Untergrund“ und „Spiegelung führt zur Überlagerung von Figur und Spiegelfigur“.

5.2.1 Lage der Seiten der Figur zum Untergrund

Die „Lage der Seiten der Figur zum Untergrund“ stellt ein Komplexitätsmerkmal der Figur dar und könnte die Schwierigkeit von Aufgaben zur Achsenspiegelung beeinflussen. Auffällig in Tab. 4 ist, dass nur in Aufgabe 18 und 32 die Begrenzungen der Figur auf den Linien des Untergrundes verlaufen. In allen anderen fünf Aufgabenstellungen verlaufen die Begrenzungslinien (Seiten) der Figuren entweder diagonal durch die Kästchen oder schneiden das zugrunde gelegte Kästchengitter beliebig

Tab. 7 Vergleich von Aufgabenpaaren bezüglich der „Lage der Seiten der Figur zum Untergrund“

Aufgabe	Lage der Seiten der Figur zum Untergrund	KS	Bista	Achse
6	4 Kästchendiagonalen	I	367	Vertikal
23	4 <i>schräge Linien</i>	IV	557	Vertikal

Tab. 8 Verteilung des Merkmals „Lage der Seiten der Figur zum Untergrund“ über alle Kompetenzstufen, beispielhaft an vertikalen Achsen

KS	Keine Kästchendiagonalen oder Ein-Kästchen-Diagonalen	Eine oder zwei Kästchen-Diagonalen	Mehr als zwei Kästchendiagonalen und/oder schräge Linien
I	5	0	1
II	0	2	0
III	1	0	1
IV	1	0	4
V	1	0	1

Fett gekennzeichnet ist die auf der jeweiligen Kompetenzstufe am häufigsten auftretende Lage der Achse

(schräge Linie). Fünf Figuren in Tab. 4 haben mindestens vier Seiten, die Kästchendiagonalen und/oder schräge Linien sind. Im Folgenden werden bei der „Lage der Seiten der Figur zum Untergrund“ alle Seiten der Figur betrachtet und damit die Kategorien [Figur hat] „mehr als zwei [Seiten, die] Kästchendiagonalen (und/oder schräge Linien) [sind]“, „eine oder zwei [Seiten, die] Kästchendiagonalen [sind]“ und „[Figur hat] keine Kästchendiagonalen“ unterschieden. „Keine Kästchendiagonalen“ bedeutet, dass alle Begrenzungslinien der Figur auf den Gitternetzlinien des jeweiligen Untergrundes verlaufen. Die Kategorie „Keine Kästchendiagonale“ umfasst auch Figuren, deren Seiten jeweils lediglich die Länge *einer* Kästchendiagonale haben (*Ein-Kästchen-Diagonale*). Ein Vergleich von systematisch gebildeten Aufgabenpaaren, wie er für andere Aufgabenmerkmale möglich war, lässt sich für die auffälligen Aufgaben in Kompetenzstufe IV nur an einem Beispiel durchführen, da Aufgaben zum Merkmal „Lage der Seiten zum Untergrund“ nicht gezielt entwickelt werden konnten. Tab. 7 zeigt, dass Aufgabe 6 (mit vier Kästchendiagonalen) deutlich leichter ist als Aufgabe 23 (mit vier schrägen Linien, vgl. Abbildung in Tab. 4).⁷

Um den Einfluss dieses Merkmals auf die Aufgabenschwierigkeit weiter zu analysieren, wird im Folgenden zusätzlich die Verteilung dieses Aufgabenmerkmals beispielhaft bei vertikalen Achsen über die fünf Kompetenzstufen hinweg betrachtet (Tab. 8). In dieser Tabelle wurden bewusst Aufgaben an horizontalen und 45°-Achsen nicht mit aufgenommen, um die Lage der Achse als weiteres schwierigkeitsgenerierendes Merkmal auszuschließen.

Auf den Kompetenzstufen I bis II liegen überwiegend Aufgaben ohne Kästchendiagonalen oder mit einer oder zwei Kästchendiagonalen und kaum Aufgaben mit mehr als zwei Kästchendiagonalen und/oder schrägen Linien. Hingegen zeigt die Rasch-Skalierung, dass auf den Kompetenzstufen IV und V vermehrt Aufgaben ver-

⁷ Bei der Figur in Aufgabe 6 handelt es sich um ein auf der Spitze stehendes Quadrat. Beide Figuren berühren die Achse je in einem Punkt.

Tab. 9 Vergleich eines Aufgabenpaares bezüglich des Merkmals „Spiegelung führt zur Überlagerung von Figur und Spiegelfigur“ bei Aufgaben mit Spiegelung auf beide Seiten der Achse

Aufg.	Überlagerung von Figur und Spiegelfigur	KS	Bista	Achse	Abstand der Figur zur Achse
4	Keine Überlagerung von Figur und Spiegelfigur	I	350	Vertikal	Anliegend
32	<i>Überlagerung von Figur und Spiegelfigur</i>	V	669	Vertikal	Anliegend

ortet sind, die eine Spiegelung von Figuren mit mehr als zwei Kästchendiagonalen und/oder schrägen Linien verlangen. Für Aufgaben mit einer anderen Lage der Achse lassen sich diese Ergebnisse nur bedingt bestätigen. Da das Merkmal „Lage der Seiten der Figur zum Untergrund“ bei Aufgaben mit Spiegelungen an horizontalen und 45°-Achsen nicht über alle Kompetenzstufen hinweg variiert und somit verglichen werden konnte, kann bei diesen Achslagen über das Merkmal „Lage der Seiten der Figur zum Untergrund“ lediglich ausgesagt werden, dass Figuren, die mehr als zwei Kästchendiagonalen und/oder schräge Linien aufweisen, deutlich am schwierigsten sind.

5.2.2 Spiegelung führt zur Überlagerung von Figur und Spiegelfigur

Auffällig ist an Tab. 8 die Aufgabe auf Kompetenzstufe V (Aufgabe 32, Abbildung in Tab. 4), die eine vertikale Achse hat und keine Kästchendiagonalen – es handelt sich also um keine komplexe Figur im oben beschriebenen Sinne. Bei dieser Aufgabe lagen die vorgegebenen Teile der Figur auf beiden Seiten der Achse und es musste so auch auf beide Seiten der Achse gespiegelt werden. Durch die Spiegelung kommt es zu einer Überlagerung der beiden Ausgangsfiguren. Diese Aufgabenstellung war die einzige dieser Art und wurde explorativ in den Test aufgenommen. Man könnte vermuten, dass das Ergänzen einer Figur auf beiden Seiten der Achse die besondere Schwierigkeit darstellt. Dies scheint jedoch nicht der Fall zu sein, wie ein Vergleich der Aufgaben 4 und 32 (vgl. Tab. 9) zeigt: Aufgabe 4 (Kompetenzstufe I) wird deutlich besser gelöst als Aufgabe 32 (Kompetenzstufe V), obwohl bei beiden Aufgaben auf beide Seiten der Achse Spiegelbilder gezeichnet werden mussten. Offensichtlich scheint die Tatsache, dass bei Aufgabe 32 eine sich *überlappende* symmetrische Figur entsteht, die Schwierigkeit deutlich zu erhöhen.

5.3 Lage der Seiten der Figur zur Achse

Ein weiteres Schwierigkeitsmerkmal von Aufgaben zur Achsenspiegelung, das in qualitativen Analysen im Rahmen dieser Studie herausgearbeitet wurde, ist die „Lage der Seiten der Figur zur Achse“. Dabei wird unterschieden in „Seite parallel zur Achse“ und „Seite nicht parallel zur Achse“. Zur ersten Kategorie werden Figuren zugeordnet, die mindestens eine zur Achse parallel liegende Seite haben. Tab. 10 stellt die Verteilung der Aufgaben mit den Merkmalen „Seite der Figur parallel zur

Tab. 10 Verteilung des Merkmals „Lage der Seiten der Figur zur Achse“ über die Kompetenzstufen

Kompetenzstufe	Seite der Figur parallel zur Achse	Seite der Figur nicht parallel zur Achse
I	5	1
II	2	1
III	3	3
IV	4	5
V	3	7

Fett gekennzeichnet ist die auf der jeweiligen Kompetenzstufe am häufigsten auftretende Lage der Achse

Achse“ und „Seite der Figur nicht parallel zur Achse“ über die Kompetenzstufen hinweg dar.⁸

Betrachtet man die Verteilung des Aufgabenmerkmals „Lage der Seiten der Figur zur Achse“, so sind auf den Kompetenzstufen I bis II eher Aufgaben zu finden, die das Merkmal „Seite der Figur parallel zur Achse“ haben. Auf den Kompetenzstufen IV und V finden sich hingegen tendenziell Aufgabenstellungen, die „keine zur Achse parallele Seite“ haben. Dass es sowohl auf den Kompetenzstufen I bis III Aufgabenstellungen gibt, bei welchen „keine zur Achse parallele Seite“ enthalten ist und vice versa kann wieder durch weitere schwierigkeitsbestimmende Merkmale erklärt werden. So kann beispielsweise die Schwierigkeit von Aufgabe 18 (auf Kompetenzstufe IV, mit zur Achse parallelen Seiten) (vgl. Abbildung in Tab. 4) durch den teils großen Abstand der Figur zur Achse erklärt werden. Die Ergebnisse, dass Aufgaben mit dem Merkmal „Seite der Figur parallel zur Achse“ leichter sind als Aufgaben mit dem Merkmal „Seite der Figur nicht parallel zur Achse“ bestätigen sich insbesondere wieder im Vergleich systematisch gebildeter Paare (Abb. 4).

Abb. 4 zeigt beispielhaft zwei Aufgaben zum Vergleich des Merkmals „Lage der Seiten der Figur zur Achse“: Die Aufgabenstellung rechts zeigt eine Figur mit

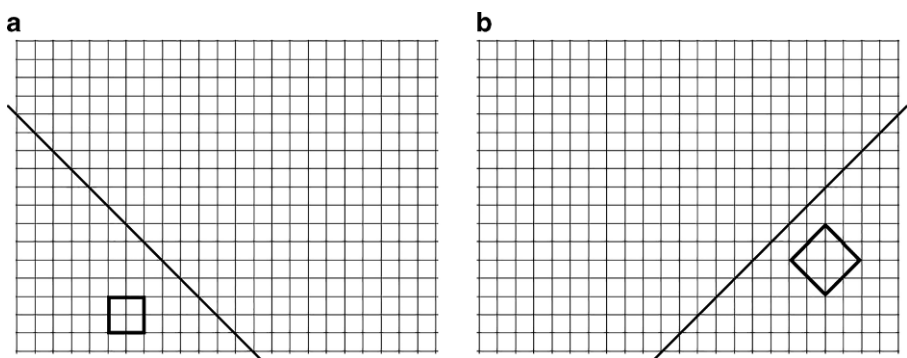


Abb. 4 Beispielaufgaben zum Vergleich des Merkmals „Lage der Seite der Figur zur Achse“ (Aufgabe 22 (rechts) und Aufgabe 28 (links))

⁸ Hier sind nur 34 von insgesamt 37 Aufgaben erfasst, da im Aufgabenpool drei Aufgaben enthalten sind, bei welchen lediglich angekreuzte Kästchen gespiegelt wurden und dementsprechend eine Zuordnung der Aufgaben zum Merkmal „Lage der Seiten der Figur zur Achse“ nicht möglich ist.

Tab. 11 Vergleich von Aufgabenpaaren bezüglich des Merkmals „Lage der Seiten der Figur zur Achse“

Aufg.	Lage Seite der Figur zur Achse	KS	Bista	Achse	Abstand der Figur zur Achse
13	Parallel zur Achse	III	482	45°-Achse	Nicht anliegend
35	<i>Nicht parallel zur Achse</i>	V	710	45°-Achse	Nicht anliegend
22	Parallel zur Achse	IV	548	45°-Achse	Nicht anliegend
28	<i>Nicht parallel zur Achse</i>	V	603	45°-Achse	Nicht anliegend

„Lage der Seite der Figur parallel zur Achse“, während die Aufgabenstellung links eine Figur mit „Lage der Seite der Figur nicht parallel zur Achse“ zeigt. Dieses und weitere Aufgabenpaare können nach bekanntem System gebildet werden – sie variieren nur im Merkmal der „Lage der Seiten der Figur zur Achse“ (Tab. 11).

Tab. 11 zeigt, dass vergleichbare Aufgaben an 45°-Achsen schwieriger sind, wenn die Figur keine zur Achse parallelen Seiten hat. Vergleicht man die Aufgaben aus Tab. 11 so sieht man, dass Aufgabe 13 einen um 228 Bista-Punkte geringeren Wert hat als Aufgabe 35. Ebenso ist Aufgabe 22 (zur Achse parallele Seite) besser gelöst worden als auf Aufgabe 28 (keine zur Achse parallele Seite).⁹

5.4 Art des Untergrundes

Ein weiterer Aspekt von Aufgaben, zu dem es keine einheitlichen Erkenntnisse bezüglich des Einflusses auf die Aufgabenschwierigkeit gibt (Grenier 1985a; vgl. Analysen von Küchemann 1981), ist der Untergrund. Bei der Betrachtung des Merkmals „Untergrund“ wurden Aufgaben auf dem Untergrund „Punkteraster“ und Aufgaben auf dem Untergrund „Kästchengitter“ paarweise verglichen (vgl. Tab. 12). Dieser

Tab. 12 Vergleich von Aufgabenpaaren bezüglich Merkmals „Untergrund“

Aufg.	Untergrund	KS	Bista	Lage der Achse	Lage der Seiten der Figur zum Untergrund	Abstand der Figur zur Achse	Lage der Seiten der Figur zur Achse
2	Punkteraster	I	293	Vertikal	2 Kästchen-diagonalen	Nicht anliegend	Parallel zur Achse
8	<i>Kästchen-gitter</i>	II	451	Vertikal	2 Kästchen-diagonalen	Nicht anliegend	Parallel zur Achse
19	Punkteraster	IV	564	Vertikal	2 Kästchen-diagonalen, 2 schräge Linien	Nicht anliegend	Nicht parallel
26	<i>Kästchen-gitter</i>	V	679	Vertikal	4 schräge Linien	Nicht anliegend	Nicht parallel

⁹ Für die Aufgaben 22 und 28 siehe Abb. 4.

systematische Vergleich ist bei dem vorliegenden Aufgabenpool nur bei zwei Paaren möglich.

Aufgaben, bei denen die Spiegelung auf dem Untergrund Punkteraster erfolgt, liegen jeweils eine Kompetenzstufe (mindestens 100 Punkte auf der Skala des Bistawertes) unter vergleichbaren Aufgabenstellungen auf Kästchengitter.

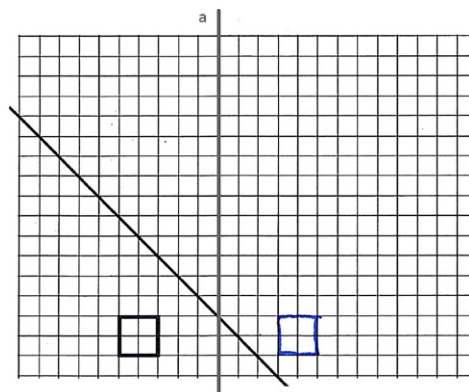
6 Diskussion

Ziel dieser Studie war es zum einen, schwierigkeitsgenerierende Merkmale zu bestimmen, über die sich Anforderungen bei der Achsenspiegelung von Figuren beschreiben lassen (Forschungsfrage 1), sowie Ausprägungen einzelner schwierigkeitsgenerierender Merkmale für unterschiedliche Aufgabenschwierigkeiten zu differenzieren (Forschungsfrage 2).

6.1 Schwierigkeitsgenerierende Merkmale

Die *Lage der Achse* konnte als schwierigkeitsgenerierendes Merkmal bestätigt werden. Wie auch u. a. bei Bornstein und Stiles-Davis (1984), Schmidt (1986), Küchemann (1981) und Grenier (1985a, 1985b) zeigt sich in den hier vorliegenden Ergebnissen, dass Spiegelungen an vertikalen Achsen tendenziell leichter sind als Spiegelungen an horizontalen Achsen. Spiegelungen an 45°-Achsen stellten sich auch in dieser Studie im Wesentlichen als am schwierigsten heraus. Eine mögliche Ursache häufiger Fehler an schrägen Achsen (beispielhaft vgl. Abb. 5) lässt sich möglicherweise dadurch erklären, dass handlungsgebundene Herstellungs- und Prüfverfahren meist so durchgeführt werden, dass die Achse vertikal (aus Sicht des Betrachters) liegt: Der Schülerfehler bei einer Aufgabe mit 45°-Achse zeigt hier einen zu vermutenden gedanklichen Klappvorgang an einer gedachten vertikalen Faltkante des Blattes (Abb. 5, Gerade a). Dabei wurde die vorliegende 45°-Achse ignoriert. Da die Spiegelung an einer 45°-Achse einen hohen Anspruch an die mentale Vorstellungsfähigkeit mit sich bringt, wäre ein analytisches Vorgehen für die Lösung dieser Aufgaben von Vorteil bzw. notwendig. Es ist zu vermuten, dass vor allem schwäche-

Abb. 5 Typischer Schülerfehler an schrägen Achsen, beispielhaft an Aufgabe 28



re Schülerinnen und Schüler noch nicht auf Stufe 3 des Begriffsverständnisses nach Kirsche (1992) angekommen sind und aus diesem Grund auch noch kein Loslösen von kinematischen Vorstellungen hin zu einer inhaltlichen, nicht formalen Stufe (Kirsche 1992) stattgefunden hat.

Ebenso ist der *Abstand der Figur zur Achse* ein schwierigkeitsgenerierendes Merkmal, wie in Tab. 5 und 6 ersichtlich wurde. Empirische Forschungsergebnisse, ob und wie sich der Abstand der Figur zur Achse auf die Schwierigkeit einer Aufgabe auswirkt, gab es bislang kaum. Betrachtet man hier unterschiedliche Ausprägungen dieses Merkmals, so ist das Spiegeln anliegender Figuren (also Achsenspiegelungen, die zu einer symmetrischen Figur führen) leichter als das Spiegeln nicht anliegender Figuren (also Achsenspiegelungen, die zu zwei kongruenten Figuren führen). Dieses Ergebnis steht in engem Zusammenhang mit den Ergebnissen von Kirsche (1992): Das Spiegeln anliegender Figuren kommt dem durch Kirsche (1992) auf der ersten Stufe beschriebenen, stark intuitiven und handlungsgebundenen Interpretieren („Man klappt etwas zusammenklappen“) von Symmetrie nahe und ist auch nicht zuletzt deshalb leichter, da einfache Herstellungs- und Prüfverfahren, wie das Falten oder Klappen, typisch für diese Stufe sind. Erst auf der dritten Entwicklungsstufe prägt sich ein analytisches Verständnis bezüglich des Abstandes eines Punktes und seines Bildpunktes zur Achse aus. Dieses Verständnis ist vermutlich hilfreich, je weiter die zu spiegelnde Figur von der Achse entfernt ist.

Als weiteres schwierigkeitsgenerierendes Merkmal bei der Achsenspiegelung konnte die *Komplexität der Figur* herausgestellt werden. Hier wurde vor allem die „Lage der Seiten der Figur auf dem Untergrund“ aus den Merkmalen der vorliegenden Aufgaben abgeleitet und analysiert. Tab. 7 mit Tab. 8 zeigt, dass das Merkmal in seinen Ausprägungen auf unterschiedliche Schwierigkeitsgrade verteilt ist. Aufgaben, die bezüglich des Merkmals „Lage der Seiten der Figur zum Untergrund“ die Anforderung *schräge Linien* enthalten, stellen sich als besonders schwierig heraus. Dies lässt zum einen vermuten, dass hier der Anspruch an das zeichnerische Können der Kinder höher ist. Das Zeichnen entlang einer Linie oder das Zeichnen durch die Eckpunkte des Kästchengitters bieten mehr Anhaltspunkte für eine korrekte Zeichnung, als die Zeichnung einer Geraden, die die Kästchen beliebig schneidet. Zum anderen könnte man auch vermuten, dass ein höherer Anspruch an die Raumvorstellung insbesondere an die Teilfähigkeit der räumlichen Beziehungen gegeben ist, wenn schräge Linien gezeichnet werden müssen: Denn dann muss das Kästchengitter in Beziehung zu der zu ziehenden Linie gesetzt werden. Des Weiteren zeigen erste Analysen, dass, wenn durch das Spiegeln auf beide Seiten der Achsen eine sich *überlappende* symmetrische Figur entsteht (Aufgabe 32), die Aufgabenschwierigkeit deutlich erhöht wird.

Eine mögliche Erklärung für die *Lage der Seiten der Figur zur Achse* als schwierigkeitsgenerierendes Merkmal mit den beiden Ausprägungen „Seite parallel zur Achse“ und „Seite nicht parallel zur Achse“ könnte die Notwendigkeit einer Winkelkoordination bei der Aufgabenbearbeitung sein. Küchemann (1981) beschreibt die Winkelkoordination als Schwierigkeit bei der Achsenspiegelung. Wenn man versucht, das Konzept der Winkelkoordination von den einfachen, von Küchemann (1981) beschriebenen Figuren, auf die Spiegelung geschlossener Figuren zu übertragen, so liegt nahe, dass auch bei komplexeren geschlossenen Figuren die Koordina-

tion der Neigungen der Achse und Figur (bzw. Seite(n) der Figur) eine Rolle spielt. Diesen Bezug beschreibt das Merkmal der „Lage der einzelnen Seiten der Figur zur Achse“: Liegt eine Seite einer Figur parallel zur Achse, so ist keine Koordination der Neigungen erforderlich – selbst mit einer fehlerhaften Vorstellung kann eine Aufgabe z. T. richtig gelöst werden, indem statt zu spiegeln, nur eine Verschiebung der parallelen Seite erfolgt, und in der Folge weitere Seiten davon ausgehend ergänzt werden. Liegt eine Seite einer Figur jedoch nicht parallel zur Achse und gehen die Schülerinnen und Schüler in ihrem Lösungsprozess noch ganzheitlich vor, so muss der Winkel zwischen den Neigungen der Achse und der entsprechenden Seite der Figur konserviert und übertragen werden. Dies erklärt auch die Unterschiede der Aufgaben, die in Tab. 10 und 11 dargestellt sind. Das Konzept der Winkelkoordination scheint jedoch vor allem dann Schülerinnen und Schülern Probleme zu bereiten, wenn die Spiegelung an einer 45°-Achse durchgeführt werden muss und keine Seite der Figur parallel zur Achse liegt. Ein Grund könnte sein, dass dann zwei Abweichungen von der Vertikalen berücksichtigt werden müssen (Abweichung der Achse und Abweichung des Objektes/der Seiten des Objektes) (vgl. Aufgaben 35 und 28). Auch in diesem Fall ist zu vermuten, dass die Schülerinnen und Schüler noch nicht in der Lage sind, die Figuren durch ein punktweises Vorgehen abzubilden, denn dadurch würden sie diesen Fehler vermeiden können. Aufgaben an vertikalen Achsen auch ohne parallele Seite der Figur zur Achse, werden vergleichsweise gut gelöst (vgl. bspw. Aufgabe 12). Eine mögliche Erklärung hierfür wäre, dass die Kinder in ihrer Umwelt häufig sehr früh schon mit vertikalen Achsen konfrontiert werden und es sein könnte, dass dadurch der Umgang mit vertikalen Achsen weniger Probleme bereitet.

Es wären auch weitere Merkmale denkbar, die die Komplexität der Aufgabe, verursacht durch die Figur, beeinflussen könnten, wie beispielsweise die Betrachtung offener und geschlossener Figuren oder die Lage der Gesamtfigur zum Blattrand. Eine explorative, detaillierte Fehleranalyse von Spiegelungsaufgaben, bei denen symmetrische Figuren an 45°-Achsen gespiegelt wurden, ergab beispielsweise, dass die „Ausrichtung der Gesamtfigur“ zum Blattrand auch einen Einfluss auf die Fehlerquote der Aufgabe hat (Götz und Gasteiger 2018). Unter „Ausrichtung der Gesamtfigur“ wurde dabei die Lage der längeren Symmetrieachse der Figur zum Blattrand verstanden.¹⁰ Die „Ausrichtung der Gesamtfigur“ zum Blattrand beeinflusst die Fehleranfälligkeit insoweit, dass überwiegend vertikal verschoben wird, wenn die längere Symmetrieachse einer Figur vertikal zum Blattrand ausgerichtet ist. Überwiegend horizontal wird eine Figur verschoben, wenn die Lage der längeren Symmetrieachse der Figur ebenfalls horizontal zum Blattrand ausgerichtet ist (Götz und Gasteiger 2018). Eine vergleichende Analyse des Merkmals „Ausrichtung der Gesamtfigur“ über alle dieser Studie zugrundeliegenden Aufgaben war leider nicht möglich, da die zu spiegelnden Figuren bezüglich ihrer Form und Lage zu unterschiedlich waren, um eine Analyse auf dieses Merkmal reduzieren zu können.

Bezüglich des *Untergrundes*, auf dem gespiegelt werden soll, scheint eine Spiegelung auf Punkterastern leichter zu fallen als auf Kästchengitter. Klare Punkte, wie

¹⁰ In dieser Studie wurden symmetrische Figuren betrachtet, die dann gespiegelt werden sollten, wie z. B. Rechtecke oder Quadrate.

beim Punkteraster vorgegeben, können als Orientierung bei der Achsenspiegelung dienen und bei einem noch nicht umfassenden analytischen Vorgehen bei Abbildungen (Kirsche 1992) eine Hilfe darstellen. Die Eckpunkte der Figuren liegen im Punkteraster immer auf einem Punkt (oftmals ist das Punkteraster eine ikonische Darstellung eines Geobretts und ein Punkt entspricht einem Nagel, um den die Figur gespannt ist). Die Eckpunkte sind also im Punkteraster klar zu finden. Das „Suchen“ der Eckpunkte im Kästchengitter stellt hingegen eine erhöhte Anforderung bezüglich der Figur-Grund-Wahrnehmung dar. Zum einen stellt das Kästchengitter in der Regel ein feineres Raster dar als das Punkteraster und deshalb sind mehr potentielle Eckpunkte (in der Regel Kreuzungspunkte der Linien im Kästchengitter) vorhanden und zum anderen müssen die Kreuzungspunkte des Kästchengitters erst als Eckpunkte der Figur ausgemacht werden. Diese Wahrnehmungsleistung, Punkte auf einem Kästchengitter (analytisch) zu suchen, entfällt bei Punkterastern weitgehend. Der Anspruch an das analytische Vorgehen wird also durch die Punkte auf dem Punkteraster heruntergesetzt (vgl. Analysen von Grenier 1985a, 1985b). Ob die Verwendung von Blankopapier als Untergrund die Lösungsrate positiv oder negativ beeinflusst, konnte in dieser Studie nicht betrachtet werden. Die Erstellung solcher Aufgaben war im Rahmen der Erprobungsstudien nicht möglich, da bei der Verwendung von Blankopapier die Formulierung eindeutiger Kodieranweisungen und Auswertungen nicht möglich gewesen wäre.

6.2 Kategorienschema zu Ausprägungen der schwierigkeitsgenerierenden Merkmale

Ein weiteres Ziel dieser Studie war es, schwierigkeitsgenerierende Merkmale der Achsenspiegelung als Kategorien mit unterschiedlichen Ausprägungen (leicht/schwierig) im Sinne eines Kategorienschemas darzustellen, welches z.B. bei einer Individualdiagnose hilfreich sein kann (Forschungsfrage 3). In Abb. 6 werden die Ergebnisse der Analysen aus Abschn. 5 zusammengetragen. Dieses Schema stellt die herausgearbeiteten Aufgabenanforderungen in ihren unterschiedlichen Ausprägungen dar. Grundlage für die Erstellung dieses Kategorienschemas sind die Besonderheiten der Aufgaben auf den entsprechenden Niveaus. Jede Aufgabe kann durch eine Zusammensetzung schwierigkeitsgenerierender Merkmale beschrieben werden (z.B. vertikale Achse, Figur mit drei Kästchendiagonalen, nicht anliegend, Seiten zur Achse parallel verlaufend, auf Kästchengitter).

Eine erste qualitative Analyse der Itemschwierigkeiten der 37 verwendeten Aufgaben unter Berücksichtigung der fünf dargestellten Schwierigkeitsmerkmale (vgl. Abb. 6) zeigt, dass Aufgaben mit höheren Itemkennwerten auch mehr Schwierigkeitsmerkmale auf der höchsten Ausprägungsstufe haben. Beispielsweise haben Aufgaben auf Kompetenzstufe 5 von insgesamt fünf untersuchten Merkmalen überwiegend vier Merkmale auf höchster Ausprägung (vgl. bspw. Aufgaben 34–37).

Ebenso zeigt sich, dass Aufgaben mit einem geringeren Itemkennwert weniger Merkmale auf der höchsten Ausprägungsstufe haben, dafür jedoch deutlich mehr Schwierigkeitsmerkmale mit Ausprägungen auf der niedrigsten Stufe. So haben beispielsweise die Aufgaben auf Kompetenzstufe 1 und 2 maximal zwei Merkmale auf der höchsten Ausprägungsstufe in Kombination (vgl. Aufgaben 1–10).

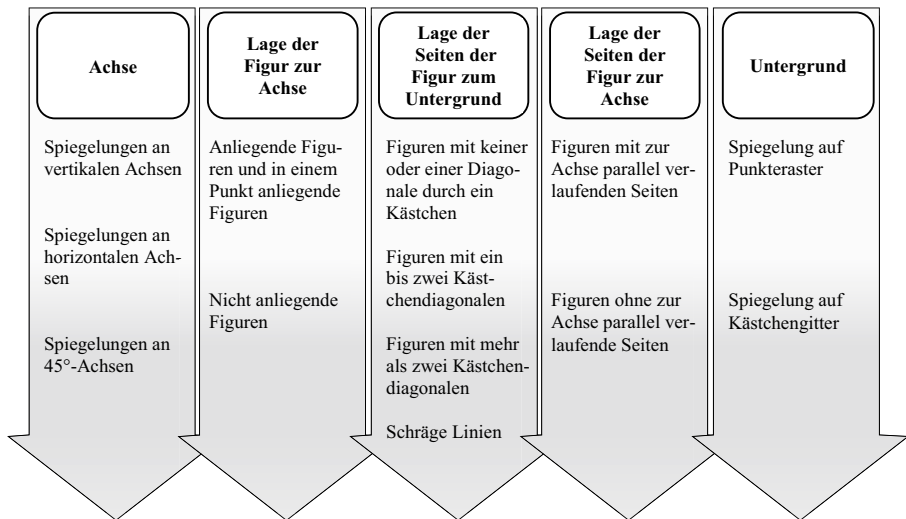


Abb. 6 Kategorienschema bezüglich schwierigkeitsgenerierender Merkmale bei der Achsenspiegelung und ihrer Ausprägungen (*ordinalskaliert angeordnet*)

Die ersten qualitativen Analysen lassen darüber hinaus vermuten, dass es Merkmale gibt, die die Schwierigkeit mehr als andere beeinflussen. So scheint v. a. die Lage der Achse im 45°-Winkel Aufgaben schwierig zu machen, ebenso wie die Lage der Seiten der Figur zur Achse in der Merkmalsausprägung „nicht parallel zur Achse“, diesbezüglich sind jedoch noch weitere qualitative und quantitative Analysen erforderlich.

Jede Spalte in Abb. 6 beschreibt von oben nach unten eine steigende Schwierigkeit des jeweiligen Merkmals. Ausgehend von einer Aufgabe kann anhand dieses Schemas die Schwierigkeit erhöht/gesenkt werden, indem eines oder mehrere dieser Merkmale variiert werden. Somit kann dieses Kategorienschema förderdiagnostisch bei der Analyse von speziellen Schwierigkeiten sehr wertvoll werden, indem die Anforderungen der Aufgaben daraufhin analysiert werden, welches Merkmal (Lage der Achse, Abstand der Figur zur Achse etc.) dem Kind Probleme bereitet. Schülerinnen und Schüler, die Schwierigkeiten mit einem spezifischen Schwierigkeitsmerkmal haben, können mit einer gezielt entwickelten Aufgabenreihe, in der der Schwierigkeitsgrad sukzessive erhöht wird, gefördert werden.

7 Limitationen und Perspektiven

Die vorliegende Studie setzte sich zum Ziel, Aufgabenmerkmale systematisch über Schwierigkeitsstufen hinweg zu beschreiben und ein Kategorienschema zum Inhalt Achsenspiegelung zu entwerfen, das u. a. zur Individualdiagnose, aber auch zur gezielten Variation von Aufgabenstellungen im Übungskontext oder für die gezielte Überprüfung der Fähigkeiten zur Achsenspiegelung eingesetzt werden kann. Dabei wurden theoretische Befunde, qualitative Analysen und statistische Aufgabenwerte

kombiniert, um die vorliegenden Forschungsergebnisse zu Vorgehensweisen und Schwierigkeiten im Bereich der Achsenspiegelung zu verfeinern. Einschränkend muss erwähnt werden, dass die Ergänzung des Aufgabenpools dieser Studie nur in einem gewissen Rahmen stattfinden konnte, da durch die Gebundenheit an die Erprobungsstudien Kapazitätsgrenzen gesetzt waren. Einfluss auf die Entwicklung der Aufgaben konnte nur in den Jahren 2017 und 2018 genommen werden. Aus diesem Grund ist die Aufgabenbasis nicht hinsichtlich jedes einzelnen Merkmals optimal systematisch verteilt.

Auf inhaltlicher Ebene gibt es noch Forschungsbedarf bezüglich weiterer Merkmale, die die Komplexität der Figur anhand verschiedener Kriterien beschreiben. Beispielsweise könnten Winkelbeziehungen innerhalb der Figuren, Symmetrieeigenschaften der zu spiegelnden nicht anliegenden Figuren (symmetrisch/nicht symmetrisch) oder die Ausrichtung der Gesamtfigur zum Blattrand untersucht werden. Auch Aufgaben zu Mehrfachspiegelungen sollten in zukünftige Analysen mit aufgenommen werden, vor allem, wenn diese mit älteren Schülerinnen und Schülern durchgeführt werden.

Die Komplexität und Schwierigkeit jeder Aufgabe ist durch Kombinationen von Schwierigkeitsmerkmalen bedingt – es gibt somit viele Kombinationsmöglichkeiten, um die Aufgabenschwierigkeit zu erhöhen bzw. zu senken. Welches Merkmal einen größeren und welches Merkmal einen geringeren Einfluss auf die Aufgabenschwierigkeit hat, lässt sich durch die Anlage dieser Studie noch nicht abschließend beantworten. Dafür wäre es hilfreich, Aufgaben noch konsequenter systematisch zu variieren. Dass all die Merkmale *Lage der Achse*, *Spiegelung auf eine oder zwei Seiten der Achse*, *Abstand der Figur zur Achse*, *Lage der Seiten der Figur zum Untergrund*, *Lage der Seiten der Figur zur Achse* und *Untergrund* schwierigkeitsgenerierend sind, dafür liegen jedoch mit den hier präsentierten Ergebnissen deutliche Hinweise vor. Diese Erkenntnisse bieten eine fundierte Grundlage für weitere Studien zu Anforderungen im Bereich der Achsensymmetrie. Für weitere quantitative Untersuchungen wäre es hier sicherlich von höchstem Interesse, zum einen den Einfluss der einzelnen Merkmale auf die Aufgabenschwierigkeit zu klären sowie den Zusammenhang zwischen den einzelnen Schwierigkeitsmerkmalen der Aufgaben zu erfassen.

Das hier entwickelte Schema kann über die Forschungsinteressen hinaus einen wichtigen Beitrag für einen systematischeren Umgang mit Aufgaben zur Achsenspiegelung im Unterricht leisten. Die Beschreibung von Aufgabenmerkmalen auf unterschiedlichen Schwierigkeitsstufen macht es möglich, Unterrichtsinhalte im Inhaltsbereich der Achsenspiegelung gezielt zu steuern, Lernstände der Schülerinnen und Schüler analytisch zu ermitteln und Kompetenzen gezielt zu fördern. So könnte zum Beispiel je nach Lernstand die Komplexität der Figuren adaptiv gesteigert werden – von Figuren ohne Kästchendiagonalen hin zu Figuren mit schrägen Linien oder von Aufgaben auf Geobrettern hin zu Aufgaben auf Kästchengitter. Nach Wittmann (1999, S. 205) und Franke und Reinhold (2016, S. 4) steht die Geometrie beispielsweise der Arithmetik in der systematischen Entwicklung von Fähigkeiten im Unterricht nach. Das hier entwickelte Kategorienschema kann einen ersten Beitrag leisten, diesen Rückstand auszugleichen. Theoretische Erkenntnisse einzelner Inhaltsbereiche mit einer fundierten Inhaltsanalyse raschskaliert

ben zusammenzubringen, um ein Kategorienschema zu schwierigkeitsgenerierenden Merkmalen und den entsprechenden Ausprägungen zu entwickeln, könnte auch zur Erfassung weiterer kognitiver Prozesse mit Hilfe psychometrischer Modelle genutzt werden.

Anhang

Tab. 13 Übersicht über alle in dieser Studie verwendeten Aufgaben mit ihren Merkmalsausprägungen

Aufg.	Bista	KS	Achse	Untergrund	Lage der Seiten der Figur zum Untergrund	Lage der Figur zur Achse	Lage der Seiten der Figur zur Achse	Spiegelung auf eine oder beide Seiten der Achse
1	238,8	I	Vertikal	Punkteraster	1 Ein-Kästchen-Diagonale	Anliegend (ein Punkt)	Parallel zur Achse	1
2	293,4	I	Vertikal	Punkteraster	2 Ein-Kästchen-Diagonalen	Nicht anliegend	Parallel zur Achse	1
3	324,3	I	Vertikal	Kästchengitter	Kreuze setzen/annalen	Anliegend	Keine Zuordnung möglich	1
4	349,9	I	Vertikal	Kästchengitter	Keine Kästchendiagonalen	Anliegend	Parallel zur Achse	2
5	351,5	I	Horizontal	Kästchengitter	Keine Kästchendiagonalen	Anliegend	Parallel zur Achse	1
6	367,5	I	Vertikal	Kästchengitter	4 Kästchendiagonalen	Anliegend (ein Punkt)	Nicht parallel	1
7	370,7	I	Vertikal	Punkteraster	4 Ein-Kästchen-Diagonalen	Nicht anliegend	Parallel zur Achse	1
8	399,5	II	Vertikal	Punkteraster	2 Kästchendiagonalen	Nicht anliegend	Nicht parallel	1
9	410,8	II	45°-Achse	Kästchengitter	2 Kästchendiagonalen	Anliegend	Parallel zur Achse	1
10	451,2	II	Vertikal	Kästchengitter	2 Kästchendiagonalen	Nicht anliegend	Parallel zur Achse	1
11	460,8	III	Horizontal	Kästchengitter	Keine Kästchendiagonalen	Anliegend	Parallel zur Achse	2
12	473,5	III	Vertikal	Kästchengitter	4 Kästchendiagonalen	Nicht anliegend	Nicht parallel	1
13	482,3	III	45°-Achse	Kästchengitter	4 Kästchendiagonalen	Nicht anliegend	Parallel zur Achse	1
14	491,6	III	Vertikal	Kästchengitter	Keine Kästchendiagonalen	Nicht anliegend	Parallel zur Achse	2
15	518,3	III	Horizontal	Kästchengitter	4 schräge Linien	Anliegend (ein Punkt)	Nicht parallel	1
16	528,0	III	Horizontal	Kästchengitter	2 Kästchendiagonalen, zwei schräge Linien	Anliegend	Nicht parallel	1
17	529,0	III	Horizontal	Kästchengitter	Kreuze setzen/annalen	Anliegend	Keine Zuordnung möglich	1
18	538,9	IV	Vertikal	Kästchengitter	Keine Kästchendiagonalen	Nicht anliegend, weiter Abstand	Parallel zur Achse	1
19	539,0	IV	45°-Achse	Punkteraster	1 Ein-Kästchen-Diagonale	Nicht anliegend	Nicht parallel	1
20	540,3	IV	45°-Achse	Kästchengitter	8 Kästchendiagonalen	Anliegend	Parallel zur Achse	2

Tab. 13 (Fortsetzung)

Aufg.	Bista	KS	Achse	Untergrund	Lage der Seiten der Figur zum Untergrund	Lage der Figur zur Achse	Lage der Seiten der Figur zur Achse	Spiegelung auf eine oder beide Seiten der Achse
21	546,2	IV	Vertikal	Kästchengitter	4 schräge Linien	Anliegend	Nicht parallel	1
22	548,3	IV	45°-Achse	Kästchengitter	4 Kästchendiagonalen	Nicht anliegend	Parallel zur Achse	1
23	556,9	IV	Vertikal	Kästchengitter	4 schräge Linien	Anliegend (ein Punkt)	Nicht parallel	1
24	564,3	IV	Vertikal	Punkteraster	2 Kästchendiagonalen, zwei schräge Linien	Nicht anliegend	Nicht parallel	1
25	572,7	IV	Horizontal	Kästchengitter	Keine Kästchendiagonalen	Nicht anliegend	Parallel zur Achse	2
26	589,6	IV	Vertikal	Kästchengitter	4 schräge Linien	Nicht anliegend	Nicht parallel	1
27	602,3	V	45°-Achse	Kästchengitter	Keine Kästchendiagonalen	Anliegend (ein Punkt)	Nicht parallel	1
28	603,0	V	45°-Achse	Kästchengitter	Keine Kästchendiagonalen	Nicht anliegend	Nicht parallel	1
29	610,8	V	45°-Achse	Punkteraster	2 Kästchendiagonalen	Nicht anliegend	Parallel zur Achse	1
30	642,0	V	45°-Achse	Kästchengitter	Keine Kästchendiagonalen	Anliegend	Nicht parallel	1
31	643,1	V	Horizontal	Kästchengitter	Kreuze setzen/annalen	Anliegend	Keine Zuordnung möglich	2
32	668,6	V	Vertikal	Kästchengitter	Keine Kästchendiagonalen	Anliegend	Parallel zur Achse	2
33	672,3	V	45°-Achse	Kästchengitter	8 Kästchendiagonalen	Nicht anliegend	Parallel zur Achse	2
34	679,0	V	Vertikal	Kästchengitter	4 schräge Linien	Nicht anliegend	Nicht parallel	1
35	710,4	V	45°-Achse	Kästchengitter	Keine Kästchendiagonalen	Nicht anliegend	Nicht parallel	1
36	746,1	V	45°-Achse	Kästchengitter	Keine Kästchendiagonalen	Nicht anliegend	Nicht parallel	1
37	775,1	V	45°-Achse	Kästchengitter	2 schräge Linien	Anliegend	Nicht parallel	1

Literatur

- Ben-Haim, D., Lappan, G., & Houang, R. T. (1985). Visualizing rectangular solids made of small cubes: Analyzing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics*, 16(4), 389–409.
- Bond, T. G., & Fox, C. M. (2015). *Applying the Rasch Model. Fundamental measurement in the human sciences* (3. Aufl.). New York: Taylor & Francis Group.
- Bornstein, M. H., & Stiles-Davis, J. (1984). Discrimination and memory for symmetry in young children. *Developmental Psychology*, 20(4), 637–649.
- Denys, B., & Grenier, D. (1986). Symétrie orthogonale: des élèves français et japonais face à une même tâche de construction. *Petit x*, 12), 33–56.
- Deutscher, T. (2012). *Arithmetische und geometrische Fähigkeiten von Schulanfängern. Eine empirische Untersuchung unter besonderer Berücksichtigung des Bereichs Muster und Strukturen*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag.
- Franke, M., & Reinhold, S. (2016). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule* (3. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- Genkins, E. F. (1978). Der Begriff der Achsensymmetrie bei Kindern. *Der Mathematikunterricht*, 24(2), 20–43.
- Götz, D., & Gasteiger, H. (2018). Typische Schülerfehler bei der Achsenspiegelung – Eine Analyse von Schülerantworten. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 631–634). Münster: WTM.
- Grenier, D. (1985a). Middle school pupils' conceptions about reflections according to a task of construction. In L. Streefland (Hrsg.), *Proceedings of the ninth international conference for the psychology of mathematics education* (Bd. 1, S. 183–188). Utrecht: State University of Utrecht.
- Grenier, D. (1985b). Quelques aspects de la symétrie orthogonale pour des élèves de classes de 4^{ème} et 3^{ème}. *Petit x*, 7, 57–69.
- van Hiele, P. M., & van Hiele-Geldorf, D. (1978). Die Bedeutung der Denkebenen im Unterrichtssystem nach der deduktiven Methode. In H.-G. Steiner (Hrsg.), *Didaktik der Mathematik* (S. 127–139). Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
- Höglinger, S., & Senftleben, H.-G. (1997). Schulanfänger lösen geometrische Aufgaben. *Grundschulunterricht*, 44(5), 36–39.
- Kirsche, P. (1992). *Kongruenzabbildungen im Geometrieunterricht der Primarstufe*. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.
- Kirsche, P. (1996). Zum Herstellen spiegelsymmetrischer und punktsymmetrischer Figuren im Unterricht der Primarstufe. *Der Mathematikunterricht*, 42(1), 5–13.
- Küchemann, D. (1981). Reflections and rotations. In K. M. Hart (Hrsg.), *Children's understanding of mathematics* (S. 137–157). London: Murray.
- Kultusministerkonferenz (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004*. München, Newied: Luchterhand.
- Kultusministerkonferenz (2013). Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4). https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm/KSM_GS_Mathematik_2.pdf. Zugriffen: 4. Juli 2018. Auf Grundlage des Ländervergleichs 2011 überarbeitete Version in der Fassung vom 11. Februar 2013, Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen.
- Kurina, F., Ticha, M., & Hospesova, A. (1998). What geometric ideas do the preschoolers have? *Journal of the Korea Society of Mathematical Education*, 2(2), 57–69.
- Merschmeyer-Brüwer, C. (1999). Raumstrukturierungsprozesse von Grundschulern bei der Analyse von Bildern zu Würfelkonfigurationen. Fallstudien mit Augenbewegungsanalysen. In I. Wachsmuth & B. Jung (Hrsg.), *Proceedings der 4. Fachtagung der Gesellschaft für Kognitionswissenschaft*. Kog-Wis99, (S. 61–66). Sankt Augustin: Infix.
- Merschmeyer-Brüwer, C. (2002). Räumliche Strukturierungsweisen bei Grundschulkindern zu Bildern von Würfelkonfigurationen. Augenbewegungen als Indikatoren für mentale Prozesse. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 23(1), 28–50.
- Niedersächsisches Kultusministerium (2017). Kerncurriculum für die Grundschule Schuljahrgänge 1–4. Mathematik. <http://www.cuvo.nibis.de>. Zugriffen: 30. Nov. 2018.
- Zur Oeveste, H. (1987). *Kognitive Entwicklung im Vor- und Grundschulalter*. Göttingen: Hogrefe.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1971). *Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde*. Stuttgart: Klett.
- Reinhold, S. (2007). *Mentale Rotation von Würfelkonfigurationen. theoretischer Abriss, mathematikdidaktische Perspektiven und Analysen zu Strategien von Grundschulkindern in einer konstruktiven Arbeitsumgebung*. Hannover: Gottfried Wilhelm-Leibniz-Universität.

- Reiss, K., & Winkelmann, H. (2008). Step by step. Ein Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik. *Grundschule*, 10, 34–37.
- Reiss, K., & Winkelmann, H. (2009). Kompetenzstufenmodelle für das Fach Mathematik im Primarbereich. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik* (S. 125–147). Weinheim und Basel: Beltz.
- Scheid, H., & Schwarz, W. (2017). *Elemente der Geometrie* (5. Aufl.). Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.
- Schmidt, R. (1986). *Geometrische Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten am Ende der Grundschulzeit: Ergebnisse einer Untersuchung*. Gießen: Justus-Liebig-Universität.
- Sodian, B. (2012). Denken. In W. Schneider & U. Lindenberger (Hrsg.), *Entwicklungspsychologie* (7. Aufl. S. 385–411). Weinheim: Beltz.
- Vollrath, H.-J. (1984). *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht*. Stuttgart: Klett.
- Wittmann, E. C. (1999). Konstruktion eines Geometrieunterrichts ausgehend von Grundideen der Elementargeometrie. In H. Henning (Hrsg.), *Mathematik lernen durch Handeln und Erfahrung. Festschrift zum 75. Geburtstag von Heinrich Besuden* (S. 205–223). Oldenburg: Bültmann & Gerriets.